

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 34

door

H.Theil en J. Hemelrijk.

Een probleem betreffende keuring
van thermometers.

De Heer H.B. Bouwman legde ons het volgende probleem voor. Een partij thermometers ter grootte van 3500 moet gecontroleerd worden op schaalverschuivingen. Gevraagd wordt, hoeveel thermometers onderzocht moeten worden, opdat men - behoudens een waarschijnlijkheid van 10% - kan zeggen dat

- 1) 99% der thermometers geen grotere afwijking heeft dan $\frac{1}{2}^{\circ}$;
- 2) 96% der thermometers geen grotere afwijking heeft dan $\frac{1}{5}^{\circ}$.

Enkele methoden ter oplossing van dergelijke problemen worden hieronder in het kort aangegeven.

1. De methoden der tolerantie-grenzen.

- 1.1. De eerste methode maakt geen gebruik van een speciale vorm van de verdeling der afwijkingen; verondersteld wordt slechts, dat deze verdeling continu is. De methode is de volgende: trek een steekproef ter grootte van (een nader te bepalen aantal) n ; beschouw het interval dat ligt tussen de algebraïsch grootste en de algebraïsch kleinste waarden van deze steekproef ¹⁾; dan is de waarschijnlijkheid $1-\alpha$ dat dit interval minstens een fractie β van de populatie bevat, waarbij n , α en β samenhangen volgens de formule

$$(1) \quad n\beta^{n-1} - (n-1)\beta^n = \alpha$$

In het geval dat de Heer Bouwman ons voorlegde, was $\alpha = 0,1$ en $\beta = 0,99$ resp. $0,96$. Voor beide waarden van β kan n dus worden opgelost. Als voorbeeld moge

1) Deze waarden worden de tolerantie-grenzen genoemd.

dienen, dat Wilks¹⁾ voor $\alpha = 0,05$ en $\beta = 0,99$ geeft: $n = 130$.²⁾

Toepassing van deze methode houdt dus in, dat een steekproef wordt getrokken ter grootte van de bij $\alpha = 0,1$ en $\beta = 0,99$ behorende n . Is de laagste waarde in deze steekproef groter dan $-1/2^\circ$ en de hoogste kleiner dan $+1/2^\circ$, dan wordt de partij geaccepteerd; liggen echter de twee uiterste waarden of één van beide buiten het interval $(-1/2, 1/2)$, dan kan men weliswaar op grond daarvan de partij verwerpen, maar de kans, dat dit ten onrechte geschiedt, d.w.z. de kans dat toch minstens 99% der thermometers een afwijking kleiner dan $1/2^\circ$ bezit, is dan onbekend.

De Heer Bouwman stelt zijn vraag niet alleen met betrekking tot $\beta = 0,99$, maar ook voor het geval $\beta = 0,96$. Het is niet mogelijk voor beide gevallen tezamen dezelfde waarde van n op te geven. Aangezien echter de tweede eis (n.l. dat 96% van de thermometers geen grotere afwijking mag hebben dan $1/5^\circ$) een veel sterkere eis is dan de eerste in het geval dat de verdeling der afwijkingen normaal is of ongeveer normaal, is het verstandiger de eerste eis buiten beschouwing te laten.

- 1.2. De in 1.1. aangegeven methode geeft weer, hoe groot men de steekproef moet nemen, opdat het interval begrensd door de laagste en de hoogste waarde met een zekere waarschijnlijkheid minstens een fractie β van de populatie bevat. Het is ook mogelijk om niet de uiterste waarden te nemen, maar de op één na, op twee na, enz. uiterste waarden. In het algemeen, wanneer men het tolerantie-interval laat begrenzen door de hoogste der r laagste waarden en door de laagste der r hoogste waarden, moet n berekend worden uit

$$(2) \quad I_{\beta}(n-2r+1, 2r) = \alpha$$

1) S.S.Wilks, Mathematical Statistics (Princeton University Press, 1946) p.93 e.v.

2) Een graphische oplossingsmethode van vergelijking (1) vindt men in: Z.W.Birnbaum and H.S.Zuckerman, A graphical determination of sample size for Wilks' tolerance limits, Annals of Mathematical Statistics 20 (1948) = 343-346

waarbij

$$I_p(p, q) = \frac{\int_0^p x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}{\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}$$

$I_p(p, q)$ (de "onvolledige Bêta-functie") vindt men getabelleerd in K. Pearson's "Tables of the incomplete Bêta-function".

Deze methode eist een hogere n dan die welke in 1.1 staat beschreven ¹⁾; zij zal echter in het algemeen een kleiner interval opleveren. ²⁾

- 1.3. In het voorgaande is niet gebruik gemaakt van een speciale vorm van de verdeling der afwijkingen. In het geval dat deze verdeling ongeveer normaal is, kan een kleiner interval voor dezelfde waarden van n , α en β worden gegeven.

Noem de afwijkingen $x_i (i=1, \dots, n)$ en hun gemiddelde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

en hun spreiding

$$s' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Dan is de waarschijnlijkheid $1-\alpha$ dat het interval

$$(x - Ks, x + Ks)$$

minstens een fractie β van de populatie bevat. De samenvatting ^{hangt} tussen de grootheden n , K , α en β vindt men getabelleerd in het werk "Techniques of statistical analysis" van de "Statistical research group, Columbia University", p.102 e.v. ¹⁾ Men vindt dan niet voor iedere combinatie van waarden n en K één waarde van n , zoals bij de methoden beschreven in 1.1 en 1.2, maar men vindt tabellarisch een samenhang tussen n en K . Bij voorbeeld: als $\alpha = 0,1$ en $\beta = 0,99$, dan hoort bij $n = 50$:

[zie voetnoot 1)
pag.4

1) De methode van 1.1 is uiteraard een bijzonder geval van die van 1.2, nl. het geval $r=1$.
2) Deze methode staat beschreven in S.S.Wilk's, Determination of sample sizes for setting tolerance limits (Annals of Math.Statistics, 1941, 12, 91-96)

$K=3$, dwz. het interval $(x-35', x+35')$ bevat met een waarschijnlijkheid van 0,9 een fractie van 0,99 of meer van de populatie.

- 1.4. Wanneer men de methode der tolerantie-grenzen toepast, is de volgende gedragslijn aan te bevelen.

In de eerste plaats verwaarloos men de eis, dat 99% der thermometers geen grotere afwijking heeft dan $\frac{1}{2}^\circ$, omdat de tweede eis naar alle waarschijnlijkheid veel sterker is. Men passe dan de methode sub 1.1 toe door de vergelijking (1) op te lossen voor $\alpha = 0,1$ en $\beta = 0,96$. De oplossing is $n = 96$. Men neemt dus een steekproef van 96 thermometers en bepaalt de uiterste waarden van de afwijking. Dit geeft reeds een eerste indruk. Vervolgens toetst men de hypothese, dat de gevonden steekproef afkomstig is uit een normale verdeling. Zodanige toetsingsmethoden vindt men in het werkje "Tests of Normality" ²⁾ van R.C. Geary and E.S. Pearson. Indien deze toetsing bevestigend uitvalt, passe men de in 1.3 beschreven methode toe op de steekproef.

2. De methoden der kwaliteitscontrôle.

- 2.1. De in punt 1 beschreven methoden kunnen een indruk geven van de kwaliteit van een partij; indien het resultaat gunstig is d.w.z. als de beide tolerantiegrenzen in het toegelaten interval van afwijkingen vallen, kan men de partij goedkeuren met een bekende bovengrens voor de kans, dat deze goedkeuring ten onrechte geschiedt. Indien echter niet beide tolerantiegrenzen in dit interval liggen, is bij verwerping van de partij de kans, dat dit ten onrechte gebeurt, niet bekend. De gebruikelijke methoden der kwaliteitscontrôle stellen ons in staat een criterium voor goedkeuring of verwerping op te stellen, waarbij deze kansen wel beide bekend zijn. Het probleem dient dan echter in andere vorm gesteld te worden.

Wij noemen een thermometer deugdelijk als zijn afwijking $< a^\circ$ is. Nu worden twee getallen β en δ bepaald ($0 < \beta < \delta < 1$) zo, dat de partij acceptabel wordt geacht, als de fractie defecte thermometers $\leq \beta$ is en niet-acceptabel, als deze $\geq \delta$ is.

1) (zie pag.3) Mc Graw-Hill Book Company, Inc. (New York and London), 1947.

2) Biometrika Office (London), 1938.

F en ondeugdelijk
als deze $> a^\circ$ is.

fractie $\geq \delta$ is. Er is, bij keuring door een steekproef, altijd kans dat men een partij, die acceptabel is, afkeurt. Aan deze kans kan men (d.m.v. de keuze van het keuringsschema) een bovengrens α opleggen (hoe groter men α kiest, hoe kleiner de steekproef is, die men nodig heeft). Eveneens kan men een bovengrens γ vaststellen voor de kans op het accepteren van een niet acceptabele partij.

Met behulp van de vier getallen α , β , γ en δ kan men nu een keuringsschema bepalen van de volgende aard: men neme een steekproef van n thermometers (n volgt uit α , β , γ en δ) komen hierin m of minder ondeugdelijke exemplaren voor (m volgt eveneens uit α , β , γ en δ), dan keurt men de partij goed, anders keurt men deze af.

- 2.2. Bepaling van n en m uit α , β , γ en δ kan b.v. plaatsvinden met tabellen uit: "Sampling Inspection" van de "Statistical Research Group, Columbia University", N.Y. and London 1948 (tabellen op blz. 163 en 164, 218 en volgenden). Tevens vindt men tabellen dienaangaande in het artikel: F.E. Grubbs, On designing single sampling inspection plans, Annals of Math. Statistics 20 (1949) p.342-256.
- 2.3. Indien achteraf blijkt (of van tevoren reeds bekend is), dat de afwijkingen van de thermometers in de hele partij ongeveer normaal verdeeld zijn, kan men een scherper resultaat van dezelfde aard (d.w.z. bij zelfde n kleinere α en γ of dichter bij elkaar gelegen β en δ) bereiken door van deze normaliteit gebruik te maken. De desbetreffende theorie vindt men uiteengezet in het eerste hoofdstuk van het eerste deel van "Techniques of Statistical Analysis" van de "Statistical Research Group, Columbia University", waarbij in het bijzonder punt 10.2.3 (pag. 54 e.v.) van belang is voor het onderhavige probleem.
- 2.4. In de literatuur over kwaliteitscontrôle (ook in de geciteerde) gaat men er gewoonlijk van uit, dat een afgekeurde partij in zijn geheel gekeurd moet worden ter verwijdering van de ondeugdelijke elementen. Men streeft er dan, door de keuze van het keuringsschema, naar het totale aantal gekeurde exemplaren bij de keuring van een groot aantal partijen zo klein mogelijk te maken. Aangezien dit aspect van de zaak voor het gestelde probleem irrelevant is, is hieraan in dit overzicht geen aandacht geschonken.

3. Over de formulering van de vraag.

Uit het vorige blijkt reeds, dat de vraag, zoals deze door de Heer Bouwman gesteld was, verschillende interpretati

mogelijkheden biedt. Zonder enige toevoeging kan de vraag n.l. niet beantwoord worden, daar niet gespecificeerd is, wat er zou moeten gebeuren, als meer dan 1% der thermometers een afwijking $> \frac{1}{2}^\circ$ of meer dan 4% een afwijking groter dan $\frac{1}{5}^\circ$ bezit. In punt 1. is antwoord gegeven op de vraag:

Hoe groot moet de steekproef minstens zijn om een interval te kunnen bepalen, waarbinnen, behoudens een waarschijnlijkheid van 10%, minstens 99% (resp. 96%) der afwijkingen ligt.

en in punt 2. de vraag:

Hoe moet het experiment worden ingericht, om, behoudens een waarschijnlijkheid van 10%, de partij, indien minstens 99% geen afwijking $> \frac{1}{2}^\circ$ (of 96% geen afwijking $> \frac{1}{5}^\circ$) bezit, goed te keuren.

Bij deze laatste probleemstelling kan dan tevens nog gepreciseerd worden bij welk percentage afwijkingen men de partij, behoudens een gegeven waarschijnlijkheid, wenst af te keuren.

Indien de toepassing van deze methoden nog moeilijkheden mocht opleveren, is het Mathematisch Centrum steeds bereid bij de oplossing daarvan behulpzaam te zijn.
