AMSTERDAM Vertrouwelijk Mei 1950

Statistische Afdeling
Rapport S 39
door
Prof. Dr D. van Dantzig
en J. Hemelrijk.

Het aequivalentie-beginsel in de herverzekeringswiskunde.

§ 1. Zij $S(t)$ de schade gedurende een jaar t in een portefeuille van de omvang $K(t)$, $s(t) = S(t)/K(t)$ de schadefractie. Ter afkorting schrijven we s voor $s(t)$. Zijn voorts $S(t-i)$, $i = 1,\ldots,n$ de schaden gedurende de n aan t voorafgaande jaren, $K(t-i)$ de verzekerde kapitalen in die jaren, dan wordt het "gemiddelde schadepercentage" gedefinieerd als 100 maal de gemiddelde schadefractie

$$(1) \qquad m_n = \frac{\sum_1^n S(t-i)}{\sum_1^n K(t-i)}$$

Indien nu bij een herverzekeringscontract overeengekomen wordt, aan het einde van een contractjaar t uit te keren het "excedent gemiddeld schadebedrag"

$$(2) \qquad U(t) = \begin{cases} S(t) - m_n K(t) & \text{indien dit verschil positief is} \\ 0 & \text{indien dit verschil negatief is} \end{cases}$$

terwijl een premie bedongen wordt, gelijk aan

$$(3) \qquad P(t) = \frac{\sum^* \{S(t-i) - m_n K(t-i)\}}{\sum_1^n K(t-i)} \cdot K(t),$$

waarbij alleen over positieve waarden der verschillen gesommeerd wordt, dan wordt gevraagd te onderzoeken, in het bijzonder bij constante samenstelling der portefeuille, of voor dit contract de mathematische verwachting van de uitkering gelijk is aan die van de premie, d.w.z. of dit contract aan het "aequivalentie-beginsel" voldoet. Door de Directie der Verenigde Assurantiebedrijven Nederland N.V. werd het vermoeden uitgesproken, dat dit niet het geval is, en wel in verband met het feit, dat het contractjaar bij de uitkering ingesloten, bij de premiebetaling daarentegen uitgesloten is.

In het onderstaande zal bewezen worden dat dit vermoeden juist is, en dat, als aan zekere hieronder te formuleren onderstellingen voldaan is, het aequivalentie-beginsel een premie vereist, die in het in de practijk voorkomende geval dat $n=10$ is, ca. 10½ % hoger ligt dan de volgens (3) bepaalde waarde. Tevens zullen gewijzigde definities voor de premie en de uitkering worden gegeven, die wel aan het aequivalentie-beginsel voldoen.

§ 2. De voorwaarden waaronder de volgende beschouwingen geldig zijn:

Ben

1. De schadefracties

(4) $$x = \frac{S(t)}{K(t)},$$

(5) $$x_i = \frac{S(t-i)}{K(t-i)} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

kunnen beschouwd worden als onderling onafhankelijke trekkingen uit één en dezelfde collectie (anders gezegd: als onderling onafhankelijke stochastische grootheden, die alle dezelfde verdeling bezitten).

2. Het absolute eerste moment van x en x_i ($i = 1,\dots,n$) bestaat.

§ 3. Ten aanzien van deze onderstellingen valt het volgende op te merken.

Ad. 1. De onderstelling dat x en $x_1,\dots,x_n$ als trekkingen uit een zelfde collectie beschouwd kunnen worden, sluit uit 1° dat er een "trend" in de schadefracties zou bestaan (b.v. dat zij voortdurend gemiddeld afnemen, of ook dat b.v. bij gelijkblijvend gemiddelde hun spreiding voortdurend af- of toeneemt), 2° dat er een periodieke veranderlijkheid zou bestaan met een periode die niet zeer veel groter dan de in aanmerking te nemen $n+1$ jaren zou zijn, 3° dat, als de verzekerde kapitalen in de loop der jaren veranderen, de schadefractie afhankelijk zou zijn van het herverzekerde kapitaal (b.v. dat het verzekerd kapitaal toeneemt door het in omloop brengen van een voor de rechtstreeks verzekerde bijzonder voordelige polis, die dus voor de herverzekerde maatschappij een grotere schadefractie met zich kan brengen, of ook dat de herverzekerde maatschappij plotseling grote en riscante objecten gaat verzekeren, en herverzekeren, terwijl dit in de voorafgaande jaren niet is gebeurd). De onderstelling, dat de schadefracties in de opeenvolgende jaren onderling onafhankelijk zijn, sluit b.v. uit dat een toevallige oorzaak van bijzonder hoge of lage schaden gedurende meerdere jaren achtereen blijft bestaan, of dat schaden in één jaar geleden eerst in een volgend jaar in aanmerking genomen worden. Voor al deze en de hierna volgende onderstellingen geldt, dat de als "uitgesloten" beschouwde verschijnselen nog wel in geringe mate mogen optreden, indien de daardoor veroorzaakte afwijkingen van een ook overigens verwaarloosde orde van grootte zijn.

Ad.2. Deze voorwaarde is zwakker dan de algemeen gebruikelijke, dat eerste en tweede moment bestaan. Bij een vroeger verricht onderzoek - dat weliswaar op een ander verzekeringstype betrekking had - bleek uit enkele (zij het schaarse en weinig nauwkeurige) statistische gegevens, dat existentie van momenten van orde $\geqq 2$ nauwelijks als gewaarborgd mag worden beschouwd. Zolang de onderstelling tot de existentie van het eerste moment beperkt kan blijven, is het dus gewenst, dit ook te doen.

§ 4. Indien het herverzekerde kapitaal gedurende de beschouwde jaren constant is, gaat de gemiddelde schadefractie (1) over in

$$(6) \qquad \underline{m}_n = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \underline{x}_i \qquad\qquad \underline{x}_i = \frac{\underline{S}(t-i)}{K} \quad {}^{1)}$$

Ter vereenvoudiging van de schrijfwijze voor excedenten voeren wij de functie

$$(7) \qquad \kappa(x) = \begin{cases} x \text{ als } x \geqq 0 \text{ is} \\ 0 \text{ als } x \leqq 0 \text{ is} \end{cases}$$

---

1) Grootheden met stochastisch karakter zullen wij verder onderstrepen.

in. Hiervoor geldt: $\kappa(Cx) = C.\kappa(x)$, mits $C \geq 0$ is.

Dan wordt het excedent gemiddeld schadebedrag per eenheid van kapitaal

$$(8) \qquad \underline{u} = \frac{U(t)}{K} = \kappa(\underline{x} - \underline{m}_n) \qquad\qquad \underline{x} = \frac{S(t)}{K}$$

en de premie per eenheid van kapitaal:

$$(9) \qquad \underline{p} = \frac{P(t)}{K} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \kappa(\underline{x}_i - \underline{m}_n).$$

Daar $\kappa(\underline{x}_i - \underline{m}_n)$ voor iedere $i = 1,\ldots,n$ dezelfde verdeling, dus ook dezelfde verwachting heeft (dat de verwachting bestaat, volgt uit voorwaarde (2)), kan men zich tot het geval $i = 1$ beperken. De verwachting van $\underline{p}$ is dan daaraan gelijk:

$$(10) \qquad \mathcal{E}\underline{p} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \mathcal{E}\kappa(\underline{x}_i - \underline{m}_n) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \mathcal{E}\kappa(\underline{x}_1 - \underline{m}_n) =$$
$$= \mathcal{E}\kappa(\underline{x}_1 - \underline{m}_n)$$

Anderzijds is

$$(11) \qquad \mathcal{E}\underline{u} = \mathcal{E}\kappa(\underline{x} - \underline{m}_n)$$

Hieruit blijkt reeds de juistheid van het vermoeden van de opdrachtgevers. Immers terwijl $\underline{x}$ onafhankelijk van $\underline{m}_n$ verdeeld is, is dit met $\underline{x}_1$ (en evenzo met $\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$) <u>niet</u> het geval. Integendeel is

$$(12) \qquad \underline{x}_1 - \underline{m}_n = \underline{x}_1 - \frac{1}{n}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n) =$$
$$= \frac{n-1}{n}\,\underline{x}_1 - \frac{1}{n}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n) =$$
$$= \frac{n-1}{n}\,(\underline{x}_1 - \underline{m}_{n-1})$$

waarin $\underline{m}_{n-1} = \frac{1}{n-1}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)$ wèl onafhankelijk van $\underline{x}_1$ verdeeld is. Derhalve is $\mathcal{E}_{\underline{p}}$ gelijk aan $\frac{n-1}{n}$ (d.i. $\frac{9}{10}$ voor $n=10$)maal een uitdrukking overeenkomstig die van (11), maar met verandering van n in $n-1$. Deze overgang van n op $n-1$ (namelijk van $\underline{m}_n$ op $\underline{m}_{n-1}$) zal blijken de factor $\frac{n-1}{n}$, voor het geval dat $\underline{x}$ en $\underline{x}_1$

normaal verdeeld zijn, slechts in zeer geringe mate te wijzigen (zie § 6). Deze wijziging hangt van de verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{x}_i$ af en kan dus niet precies bepaald worden zonder nauwkeurige statistieken, waaruit van deze verdeling een schatting verkregen kan worden.

Voor het geval van een constant herverzekerd kapitaal blijkt dus de premie, zoals deze thans gedefinieerd is, een verwachting te bezitten, die ongeveer 10% lager is dan de verwachting van het excedent gemiddeld schadebedrag.

In de volgende paragraaf wordt een andere definitie gegeven voor de gemiddelde schadefractie die zodanig gekozen is, dat het aequivalentiebeginsel, ook bij niet constant kapitaal, wel geldig is.

§ 5. Om aan het aequivalentie-beginsel te voldoen voeren wij als gemiddelde schadefractie het ongewogen gemiddelde $\underline{m}^*_{n+1}$ van de schadefracties van het contractjaar en van de basisjaren in:

$$\underline{m}^*_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\underline{x} + \sum_1^n \underline{x}_i\right) \tag{13}$$

De n+1 grootheden $\underline{x} - \underline{m}^*_{n+1}$ en $\underline{x}_i - \underline{m}^*_{n+1}$ hebben dan alle dezelfde verdeling, dus de grootheden $\kappa(\underline{x} - \underline{m}^*_{n+1})$ en $\kappa(\underline{x}_i - \underline{m}^*_{n+1})$ ook. Het excedent gemiddeld schadebedrag wordt dan (per eenheid van kapitaal):

$$\underline{u}^* = \overset{\times}{\kappa}(\underline{x} - \underline{m}^*_{n+1}) \tag{14}$$

en de premie per eenheid van kapitaal

$$\underline{p}^* = \frac{1}{n}\sum_1^n \overset{\times}{\kappa}(\underline{x}_i - \underline{m}^*_{n+1}) \tag{15}$$

Dan is, wegens het bovenstaande

$$\mathcal{E}\underline{p}^* = \mathcal{E}\underline{u}^* \tag{16}$$

De premie wordt nu dus afhankelijk van de schade in het contractjaar (daar $\underline{m}^*_{n+1}$ van deze schade afhangt). Bij vooruitbetaling van de premie zal men dus met een schatting moeten volstaan en aan het einde van het contractjaar een correctie moeten aanbrengen. Als <u>schatting van de premie</u> (per eenheid van kapitaal) kan nu gebruikt worden:

$$(17) \qquad \underline{p} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{*}(x_i - m_n')$$

waarin $\underline{m}_n'$ het <u>ongewogen</u> gemiddelde der schadefracties over de n aan het contractjaar voorafgaande jaren is. De verwachting van deze premie is niet precies gelijk aan $\mathcal{E}\underline{p}^*$, maar verschilt hiervan slechts weinig (voor normale verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{x}_i$ is dit verschil van de orde $\frac{1}{n}$; zie § 6). Verder valt op te merken, dat

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{*}(x_i - m_{n+1}^*) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{*}\left(\frac{n}{n+1}(\underline{x}_i - \underline{m}_n') + \frac{1}{n+1}(\underline{x}_i - \underline{x})\right)$$

is, zodat in elk contractjaar, waarin $x = m_n'$ is, geldt

$$(18) \qquad p^* = p$$

Daar verder, bij gegeven $x_1, \ldots, x_n$, p^* een monotoon dalende functie van x is, is $p^* > p$ als $x < m_n'$ is en $p^* < p$ als $x > m_n'$ is.

Met andere woorden: indien de herverzekerde maatschappij in het contractjaar minder schade lijdt dan gemiddeld over de basisjaren het geval is geweest, zodat geen uitkering plaats vindt, moet een correctie op de geschatte premie worden bijbetaald, terwijl, als de schade groter is dan gemiddeld over de basisjaren, een gedeelte van de premie wordt terugbetaald.

Ter illustratie van het verloop van de premie p^* en de uitkering u^* is voor een speciaal geval een grafiek gemaakt (zie bijlage). De voor dit voorbeeld genomen getallen zijn willekeurig gekozen; daar het slechts om een illustratie van het verloop gaat, is geen poging gedaan, van statistische gegevens over de waarde van schadefracties gebruik te maken.

§ 6. We beschouwen nu het geval, dat $\underline{x}$ en $\underline{x}_i$ <u>normaal</u> verdeeld zijn met gemiddelde μ en spreiding σ (variantie σ^2) [1].

---

1) Dit kan natuurlijk niet voorkomen, als negatieve schaden uitgesloten zijn.

Dan is $\underline{m}_n$ ook normaal verdeeld met gemiddelde μ en variantie $\frac{\sigma^2}{n}$, dus, daar $\underline{x}$ en $\underline{m}_n$ stochastisch <u>onafhankelijk</u> zijn, is $\underline{x} - \underline{m}_n$ normaal verdeeld met gemiddelde 0 en variantie

$$\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n+1}{n}\sigma^2.$$

De verwachting van $\underline{x} - \underline{m}_n$ is nul, maar die van $\underline{u} = \lambda(\underline{x} - \underline{m}_n)$, waarbij dus $\underline{x} - \underline{m}_n$, als dit getal negatief is door nul wordt vervangen is:

$$\mathcal{E}\underline{u} = \int_0^\infty u \, du . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \, e^{-\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\frac{u^2}{\sigma^2}} =$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2} v \, dv$$

dus

$$(19) \qquad \mathcal{E}\underline{u} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

daar $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} u \, du = 1$ is.

Voorts merken we op, dat uit het feit dat $\mathrm{var}(\underline{x}_i) = \sigma^2$ en $\mathrm{var}(\underline{m}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ is, <u>niet</u> geconcludeerd mag worden dat $\mathrm{var}(\underline{x}_i - \underline{m}_n) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}$ is, daar $\underline{x}_i$ en $\underline{m}_n$ <u>niet</u> onderling onafhankelijk zijn. Integendeel is b.v. voor $i=1$ (zie (12)):

$$\underline{x}_1 - \underline{m}_n = \frac{n-1}{n}\left\{\underline{x}_1 - \frac{1}{n-1}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)\right\}$$

Hierin zijn $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ onderling onafhankelijk $N(\mu,\sigma)$ verdeeld (d.w.z. normaal met gemiddelde μ en spreiding σ). Dus is $\frac{1}{n-1}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)$ $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}})$ verdeeld, en $\underline{x}_1 - \frac{1}{n-1}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)$ $N(0, \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}})$ (De variantie is namelijk $\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\sigma^2$, daar $\underline{x}$ wèl onafhankelijk is van $\frac{1}{n-1}(\underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n)$). Nu is $\underline{x}_1 - \underline{m}_n$ $\frac{n-1}{n}$ maal zo groot, d.w.z. de spreiding daarvan is $\frac{n-1}{n} . \sigma\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}$, m.a.w. $\underline{x}_1 - \underline{m}_n$ is $N(0, \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}})$ verdeeld (dus met een spreiding <u>kleiner</u> dan σ, terwijl die van $\underline{x} - \underline{m}_n$ <u>groter</u> dan σ was). Evenals boven vinden we dan voor de verwachting van $\lambda(\underline{x}_1 - \underline{m}_n)$ de waarde $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Daar ditzelfde voor $\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ geldt, en $\underline{p}$ het gemiddelde dezer n waarden is, vinden we tenslotte

(20) $$\varepsilon_{\underline{p}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

We vinden dus voor de verhouding van de verwachtingen van uitkering en premie (vgl. het einde van § 4)

(21) $$\frac{\varepsilon_{\underline{u}}}{\varepsilon_{\underline{p}}} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{n}{n-1} + O(n^{-2})$$

Voor n=10 wordt deze verhouding $\sqrt{\frac{11}{9}} = 1{,}1055$.
Verder is (zie (15) en (20)):

$$\varepsilon_{\underline{p}}{}^{*} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

dus

(22) $$\frac{\varepsilon_{\underline{p}}{}^{*}}{\varepsilon_{\underline{p}}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2-1}} = 1 + O(n^{-2})$$

zodat (zie het einde van § 5), $\underline{p}$ als schatting voor $\underline{p}^{*}$ gebruikt kan worden.

§ 7. Commentaar.

De verschillen tussen de voorgestelde oplossing van het probleem en de tegenwoordig gebruikte methode zijn de volgende:

1e. Bij de berekening van excedent gemiddeld schadebedrag en premie wordt, in plaats van de gemiddelde schadefractie over de aan het contractjaar voorafgaande basisjaren, gebruik gemaakt van de gemiddelde schadefractie over de basisjaren en het contractjaar tezamen. Voor dit gemiddelde wordt bovendien een ongewogen in plaats van een met de herverzekerde kapitalen gewogen gemiddelde gebruikt. Overigens blijven de definities ongewijzigd (vgl. § 5 (14) en (15)).

2e. Daar de premie nu afhankelijk is van de schade in het contractjaar, wordt een schatting van de premie uitgevoerd, die overeenkomt met de thans gebruikelijke premie, met dit verschil, dat voor het gewogen gemiddelde van de schadefractie over de basisjaren het ongewogen gemiddelde over deze zelfde basisjaren in de plaats komt.

Naast deze technische wijzigingen vallen verder de volgende verschillen op te merken:

3e. Bij de voorgestelde oplossing is het aequivalentie-beginsel, inhoudende, dat de premie en de uitkering gelijke verwachtingswaarden hebben, exact vervuld; bij de gebruikelijke methode, daarentegen, is de verwachting van de premie slechts ongeveer $\frac{n-1}{n}$ maal die van de uitkering.

4e. Bij de voorgestelde oplossing blijft de premie gemiddeld ongeveer gelijk aan de nu gebruikelijke. De uitkering wordt echter ongeveer $\frac{n}{n+1}$ maal de gebruikelijke. (Acht men dit ongewenst, dan kan men, zonder het aequivalentie-beginsel te schaden, premie en uitkering beide met $\frac{n+1}{n}$ vermenigvuldigen).

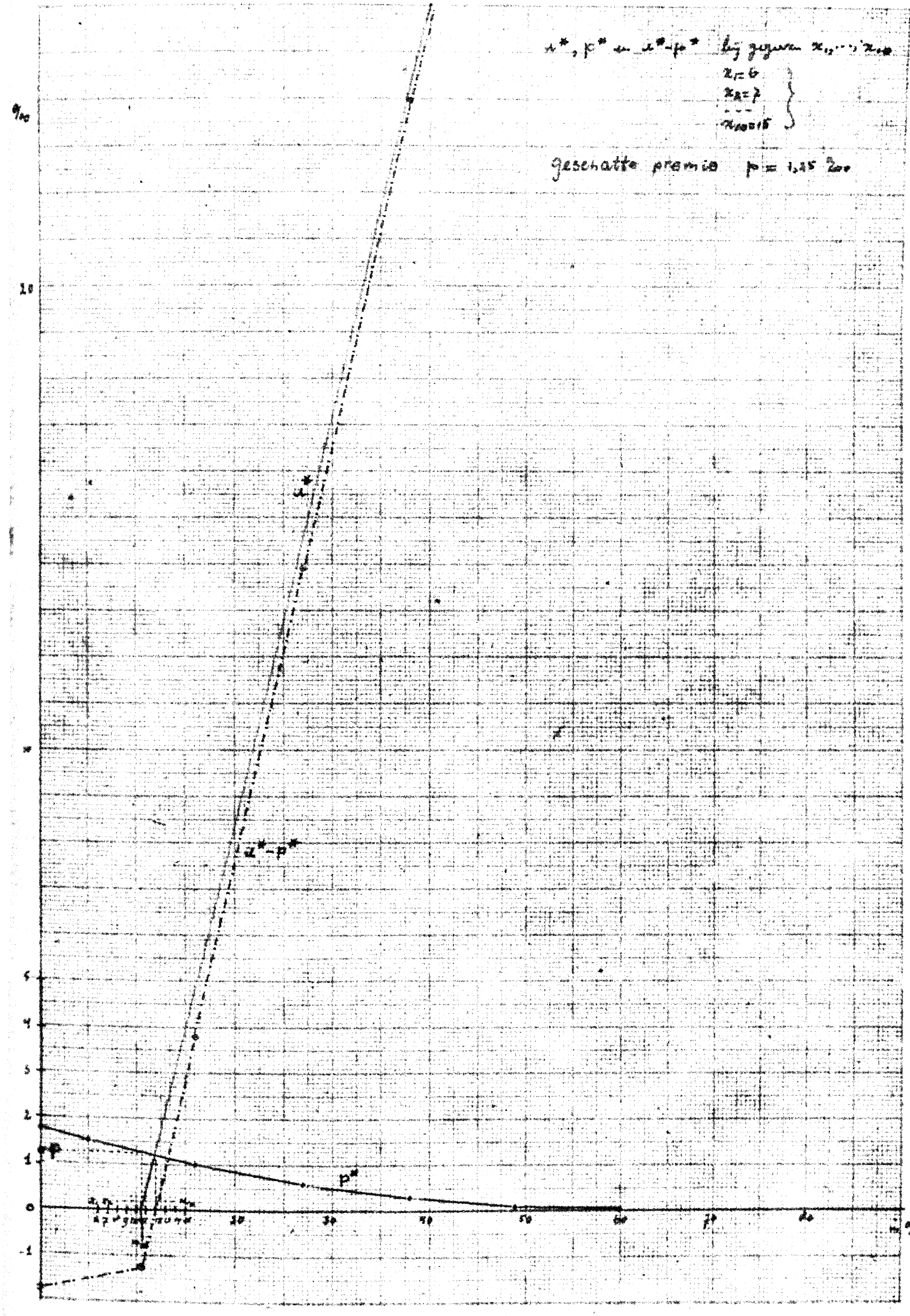
Opmerking:

1. Een illustratie van het verloop van premie (per eenheid van herverzekerd kapitaal) en excedent gemiddelde schadefractie vindt men in de grafiek (bijlage). Men ziet, dat de geschatte premie hoger is, dan de werkelijke, indien de schadefractie in het contractjaar groter is dan gemiddeld over de basisjaren. In dat geval wordt dus een gedeelte van de geschatte premie terugbetaald, tezamen met de uitkering. Is de schadefractie in het contractjaar kleiner dan gemiddeld over de basisjaren, dan wordt een kleine correctie op de geschatte premie bijbetaald. Dit betekent dus, dat de premie in voor de herverzekerde maatschappij gunstige jaren iets hoger en in ongunstige iets lager is dan nu het geval is.

2. Als alternatieve methode, die in aanmerking zou kunnen komen, als de afhankelijkheid van premie en schade in het contractjaar onoverkomelijke bezwaren zou meebrengen, zou men de nu gebruikelijke premie met een factor $\frac{n}{n-1}$ kunnen vermenigvuldigen. Deze methode bezit echter het nadeel, dat ook na deze verhoging van de premie het aequivalentie-beginsel nog slechts bij benadering geldt. Een nauwkeurige berekening van de premieverhoging zou dan wellicht gewenst zijn. Pogingen in deze richting kunnen slechts gedaan worden, als voldoende statistisch materiaal omtrent de schadefracties beschikbaar is en ook dan mag men niet verwachten, dat het aequivalentiebeginsel exact zal kunnen worden verwezenlijkt. Ook in-

dien men deze methode zou prefereren, is het vermoedelijk gewenst bij de definitie van de gemiddelde schadefractie van het gewogen op het ongewogen gemiddelde over te gaan.

Bijlage



a*, p* en a*-p* bij gegeven x1,...,x10
x1=6
x2=7
---
x10=15
geschatte premie p = 1,25 ‰
a*
a*-p*
p*
z