

Statistische Afdeling.
Rapport S 51, door
Prof. Dr D. van Dantzig
en Dr J. Hemelrijk Jr.

Aantekeningen bij het rapport 1323/001
van het Vezelinstituut T.N.O.

1. Inleiding.

Door bemiddeling van T.N.O.-A.B.W. werd ons het rapport 1323/001 van het vezelinstituut T.N.O. toegezonden, getiteld:

Methode voor de bepaling van de BL-kromme van garens, voorgarens en louten,
door C.J. van Zwet,

met het verzoek dit rapport kritisch te bestuderen. De onderstaande opmerkingen, die uitsluitend op het wiskundige gedeelte van het rapport betrekking hebben, zijn het gevolg van dit verzoek.

2. Definities.

In het genoemde rapport worden een aantal grootheden gebruikt, die bepaalde aspecten van de ongelijkmatigheid van garens beschrijven. De definities, die van deze grootheden gegeven worden zijn niet steeds duidelijk. Uit de betrekkingen, die volgens het rapport tussen deze grootheden bestaan konden echter de definities gereconstrueerd worden. Wij geven deze hieronder.

Het object, waarvan de ongelijkmatigheid bepaald moet worden, zij een draad van lengte z . Op een punt op afstand u van het beginpunt ($0 \leq u \leq z$) zij $x(u)$ het oppervlak van de doorsnede (of de massadichtheid, of de massa per lengte-eenheid; de beschouwingen gelden evenzeer voor andere dan deze grootheden; wij onderstellen echter, dat $x(u) > 0$ is voor iedere u).

Wij voeren de volgende notaties in:

Zij $\varphi(v)$ een voor $0 \leq v \leq z-d$ (met $0 \leq d < z$) gedefinieerde functie van v dan als:

$$(1) \quad \xi_v \varphi(v) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{z-d} \int_0^{z-d} \varphi(v) dv \quad ')$$

) betekent: "is per definitie gelijk aan".

en

$$(2) \quad \sigma_v^2 \{y(v)\} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_v \{y(v) - \xi_v(y(v))\}^2 = \frac{1}{\pi-d} \int_0^{\pi-d} \{y(v) - \xi_v y(v)\}^2 dv.$$

Wij definiëren nu

$$(3) \quad \bar{x} = \xi_u x(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(u) du$$

$$(4) \quad \bar{x}_L(a) = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} x(u) du \quad (0 \leq a \leq \pi - L)$$

$$(5) \quad \sigma_{a,L}^2(x) = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}_L(a)\}^2 du \quad (0 \leq a \leq \pi - L)$$

$$(6) \quad CV(\pi)^2 = \sigma_u^2 \{x(u)\} / \bar{x}^2$$

$$(7) \quad CV(L)^2 = \xi_a \sigma_{a,L}^2(x) / \bar{x}^2$$

en

$$(8) \quad CB(L)^2 = \sigma_a^2 \{ \bar{x}_L(a) \} / \bar{x}^2$$

waarbij dus in (7) en (8) de integralen de grenzen 0 en $\pi - L$ bezitten (de grootheid d uit (1) en (2) is in dit geval gelijk aan L).

Verder wordt voortdurend ondersteld, dat

$$(9) \quad L \ll \pi$$

is. Deze laatste betrekking stelt ons in staat om, met kleine verwaarlozingen een aantal in het onderzochte rapport vermelde betrekkingen te bewijzen (zie § 5,6 en 7).

De grootheden $CV(\pi)$, $CV(L)$ en $CB(L)$ worden in het rapport en in andere publicaties over het zelfde onderwerp "variaticoefficienten" genoemd. Wij wijzen erop, dat deze benaming voor dez grootheid $CV(L)$ onjuist is, daar de noemer van het rechterlid van (7) dan $\bar{x}_L(a)^2$ in plaats van \bar{x}^2 zou moeten zijn. Bovendien zou $CV(L)$ dan nog slechts een kwadratisch gemiddelde van een variaticoefficient zijn.

3. Verwaarlozingen.

Bij de in de volgende paragrafen geleverde bewijzen worden in een som van termen die termen verwaarloosd, die in een verhouding van ongeveer L/π tot de overige staan.

Dergelijke verwaarlozingen geven wij aan door het gelijkheidsteken te vervangen door het teken \approx . Enkele voorbeelden zijn:

$$x - L \approx x.$$

en

$$\int_0^{x-L} x(u) du \approx \int_0^x x(u) du.$$

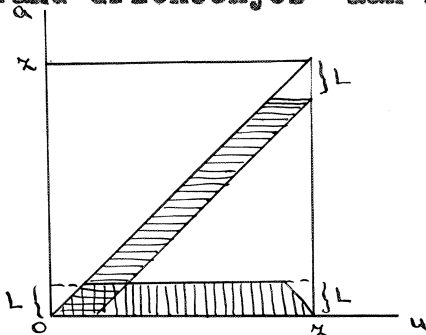
en dergelijke meer.

Een formule, die verschillende malen gebruikt zal worden en die op een dergelijke verwaarlozing berust, is de volgende:

Zij $\psi(u)$ een positieve continue functie van u , dan geldt (zie fig. 1):

$$(10) \quad \int_0^{x-L} da \int_a^{a+L} \psi(u) du \approx L \int_0^x \psi(u) du$$

daar de integraal over het in figuur 1 ^{horizontaal} verticaal gearceerde gebied gelijk is aan die over het verticaal gearceerde gebied; immers $\psi(u)$ hangt slechts van u en niet van a af. De verwaarlozing bestaat hier uit het toevoegen van twee "rand-driehoekjes" aan het integratiegebied,



4. De te bewijzen betrekkingen.

Dit zijns:

$$(11) \quad \xi_a \bar{x}_L(a) \approx \bar{x}$$

$$(12) \quad \text{cv}(T)^2 \approx \text{cv}(L)^2 + \text{cv}(B(L))^2$$

en

$$(13) \quad \text{cv}(L)^2 \approx \frac{2 \text{cv}(T)^2}{L^2} \int_0^L (L-u) f(u) du.$$

waarin

$$(14) \rho(\nu) = \frac{\int_0^{\tau-\nu} \{x(u) - \bar{x}\} \{x(u+\nu) - \bar{x}\} du}{\left[\int_0^{\tau} \{x(u) - \bar{x}\}^2 du \int_0^{\tau-\nu} \{x(u+\nu) - \bar{x}\}^2 du \right]^{\frac{1}{2}}}$$

is ¹⁾.

5. Bewijs van betrekking (11).

Wij hebben:

$$\int_a \bar{x}_L(a) = \frac{1}{\tau-L} \int_0^{\tau-L} \bar{x}_L(a) da = \frac{1}{L(\tau-L)} \int_0^{\tau-L} da \int_a^{a+L} x(u) du$$

Toepassing van formule (10) geeft:

$$\int_a \bar{x}_L(a) \approx \frac{1}{\tau-L} \int_0^{\tau} x(u) du \approx \bar{x}.$$

6. Bewijs van betrekking (12).

Bij dit bewijs gaan wij uit van de gemakkelijk te bewijzen identiteit:

$$\{x(u) - \bar{x}\}^2 = \{x(u) - \bar{x}_L(a)\}^2 + \{\bar{x}_L(a) - \bar{x}\}^2 + 2\{x(u) - \bar{x}_L(a)\} \{\bar{x}_L(a) - \bar{x}\}.$$

Integreren wij beide leden over u van a tot $a+L$, dan komt er:

$$\int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}\}^2 du = \int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}_L(a)\}^2 du + L \{\bar{x}_L(a) - \bar{x}\}^2,$$

daar de integraal van de laatste term ten gevolge van definitie (4) gelijk aan 0 is. Vervolgens integreren wij beide leden over a van 0 tot $\tau-L$:

$$(15) \int_0^{\tau-L} da \int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}\}^2 du = \int_0^{\tau-L} da \int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}_L(a)\}^2 du + L \int_0^{\tau-L} \{\bar{x}_L(a) - \bar{x}\}^2 da$$

Op het eerste lid hiervan kunnen wij (10) toepassen. Dit wordt dan ongeveer gelijk aan

$$L \int_0^{\tau} \{x(u) - \bar{x}\}^2 du$$

Volgens definitie (6) is dus het linkerlid bij benadering gelijk aan

$$L \cdot \tau \cdot \bar{x}^2 \cdot \text{cv}(\tau)^2.$$

¹⁾ In (14) staat " \approx " omdat daarin \bar{x} gezet is voor

$\frac{1}{\tau-\nu} \int_0^{\tau-\nu} x(u+\nu) du$; $\rho(\nu)$ heet (zonder deze verwaarlozing) de "serial correlation coefficient" van x .

De eerste term van het tweede lid van (15) is echter volgens definities (5) en (7) gelijk aan

$$L(z - L) \bar{x}^2 \cdot C V(L)^2$$

en de laatste term is volgens (8) gelijk aan

$$L(z - L) \cdot \bar{x}^2 \cdot C B(L)^2$$

zodat, wegens (9) betrekking (12) geldt.

7. Bewijs van betrekking (13).

Stel $y(u) = x(u) - \bar{x}$

en $y_L(a) = \bar{x}_L(a) - \bar{x}$

dan is (vgl. (4)):

$$\bar{y}_L(a) = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \{x(u) - \bar{x}\} du = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} y(u) du$$

Nu kunnen wij voor (14) schrijven:

$$(14') \quad \rho(u) = \frac{\int_0^{z-u} y(u) y(u+v) du}{\left[\int_0^z y(u)^2 du \int_0^{z-u} y(u+v)^2 du \right]^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{z \cdot C V(L)^2} \int_0^{z-u} y(u) y(u+v) du$$

De te bewijzen betrekking (13) wordt nu, met verwaarlozing van het verschil tussen z en $z-L$:

$$(13') \quad \int_0^{z-L} \bar{y}_L(a)^2 da = \frac{2}{L^2} \int_0^L (L-v) dv \int_0^{z-v} y(u) y(u+v) du.$$

Nu is (zie (16)):

$$(17) \quad \frac{d}{da} \bar{y}_L(a) = \frac{1}{L} \{y(a+L) - y(a)\}$$

en

$$(18) \quad \frac{d}{da} \{\bar{y}_L(a)\}^2 = \frac{2}{L} \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\}$$

Partieel integreren van het linkerlid van (13') geeft:

$$(19) \quad \int_0^{z-L} \bar{y}_L(a)^2 da = \left[a \bar{y}_L(a)^2 \right]_0^{z-L} - \frac{2}{L} \int_0^{z-L} a \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\} da.$$

In het rechterlid van (13') substitueren wij

$$u = a$$

$$v = v - a$$

en verwisselen de integratievolgorde (zie fig. 2, waarin het integratiegebied gearceerd is):

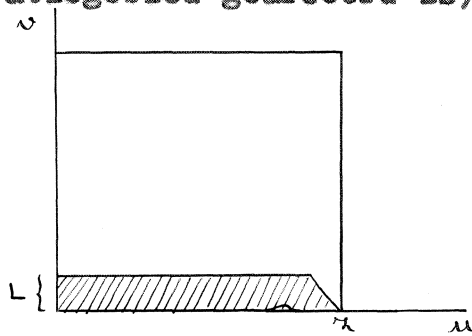


fig. 2

Dit geeft ongeveer

$$\begin{aligned} & \frac{2}{L^2} \int_0^{x-L} y(a) da \int_a^{a+L} (L+a-w) y(w) dw = \\ & = \frac{2}{L^2} \int_0^{x-L} (a+L) y(a) da \int_a^{a+L} y(w) dw - \frac{2}{L^2} \int_0^{x-L} y(a) da \int_a^{a+L} w y(w) dw \end{aligned}$$

De eerste term hiervan is gelijk aan

$$(20) \quad \frac{2}{L} \int_0^{x-L} (a+L) y(a) \bar{y}_L(a) da$$

en de tweede wordt, na opnieuw verwisselen van de volgorde van integratie (zie fig. 3) ongeveer gelijk aan:

$$- \frac{2}{L^2} \int_L^x w y(w) dw \int_{w-L}^w y(a) da + (x-L) y(x-L)^2$$

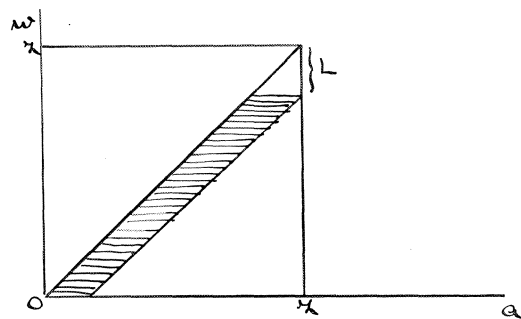


fig. 3

Substitutie van $w = a+L$ in (21) geeft

$$(22) \quad - \frac{2}{L} \int_0^{x-L} (a+L) y(a+L) \bar{y}_L(a) da + (x-L) y(x-L)^2$$

Het gehele rechterlid van (13') is gelijk aan (20)+(22), dus is

$$\begin{aligned}
 & (\kappa-L) y(\kappa-L)^2 - \frac{2}{L} \int_0^{\kappa-L} (a+L) \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\} da = \\
 & = (\kappa-L) y(\kappa-L)^2 - 2L \int_0^{\kappa-L} \bar{y}_L(a) da \{ \bar{y}_L(a) \} - \frac{2}{L} \int_0^{\kappa-L} a \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\} da \\
 & = (\kappa-L) y(\kappa-L)^2 - L \{y_L(\kappa-L)^2 - y_L(0)^2\} - \frac{2}{L} \int_0^{\kappa-L} a \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\} da
 \end{aligned}$$

hetgeen ongeveer gelijk moet zijn aan (19). Daar de termen

$$L \{ \bar{y}_L(\kappa-L)^2 - y_L(0)^2 \}$$

en

$$(\kappa-L) \{ \bar{y}_L(\kappa-L)^2 - y(\kappa-L)^2 \}$$

beide klein zijn ten opzichte van de term

$$\frac{2}{L} \int_0^{\kappa-L} a \bar{y}_L(a) \{y(a+L) - y(a)\} da.$$

is dit inderdaad het geval. ')

8. Bespreking van de voorgestelde methode ter bepaling van de CB(L)-kromme.

In § VI van het bestudeerde rapport wordt een nieuwe methode voorgesteld ter bepaling van de CB(L)-kromme van een garen, die naar ons toeschijnt, het best op de volgende wijze beschreven kan worden:

Met behulp van de "zellweger" kan op willekeurige plaatsen van de draad de waarde van $\bar{x}_L(a)$ voor $L = 8 \text{ mm}$ bepaald worden. Bepaalt men deze voor een groot aantal (N) aequidistante punten a_i met geringe onderlinge afstand over de gehele draad en berekent men vervolgens

$$(23) \quad \bar{x}' = \frac{1}{N} \sum x_i$$

waarin x_i de gevonden waarden zijn, dan is \bar{x}' volgens (3) en (11) een benadering van \bar{x} , in die zin, dat het rechterlid van (23) een benaderingssom (in de zin der integraalrekening) van het linkerlid van (11) is.

Berekent men vervolgens

$$(24) \quad S^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x}')^2$$

dan is dit, in dezelfde zin, een benaderingssom van

') Men houde rekening met het feit, dat niet alleen $\kappa \gg L$ is, maar dat ook $y(u) \ll \kappa$ is.

de grootheid $\sigma_a^2 \{ \bar{x}_L(a) \}$ (voor $L = 8$ mm) in het rechterlid van (8), zodat

$$(25) \quad s^2 / \bar{x}$$

een benadering van de grootheid $\{ CB(8 \text{ mm}) \}^2$ is.

Hierbij behoeft men dus (indien van meetfouten wordt afgezien) nog geen waarschijnlijkheidstheoretische beschouwingen te gebruiken, al kan men deze ook op dit punt reeds invoeren, daar de uitkomsten uiteraard afhangen van de keuze der punten a_i . Hoe men deze echter ook kiest, steeds is de uitkomst volgens het bovenstaande een benadering van de gezochte grootheid.

Bepaalt men nu van een stuk draad van lengte L (> 8 mm) een linkereindpunt a , het gemiddelde $\bar{x}'_L(a)$ van de in dat stuk gemeten waarden x_i , dan kan men dit gemiddelde op dezelfde wijze als boven beschouwen als een benadering van de grootheid $\bar{x}_L(a)$ voor dat stuk van de draad. Ook hier behoeft men nog geen waarschijnlijkheidstheoretische overwegingen in de beschouwingen te betrekken, hoewel dit, indien het aantal punten a_i op een draadstuk van lengte L gering is, reeds meer voor de hand ligt dan boven, omdat dan de mathematische benadering zeer onzeker wordt. In ieder geval echter is het gevonden gemiddelde $\bar{x}'_L(a)$ een schatting van $\bar{x}_L(a)$.

"Verschuift" men nu het linkereindpunt a van dit draadstuk van 0 tot $x-L$ en bepaalt men

$$(26) \quad \frac{1}{N} \sum_i \{ \bar{x}'_L(a_i) - \bar{x}' \}^2 / \bar{x}'^2$$

dan verkrijgt men (zie (8)) een benadering (of zo men wil schatting in waarschijnlijkheidstheoretische zin) van $CB(L)$.

Het feit, dat hierbij de opeenvolgende stukken van lengte L over elkaar heen vallen is geheel in overeenstemming met de definitie van $CB(L)$ en kan dus niet als een bezwaar van de methode gezien worden.

Op deze wijze kan men, met behulp van dezelfde waarden x_i ($i = 1, \dots, N$), gemeten in de punten a_i , voor een aantal verschillende waarden van L de grootheid $CB(L)$ schatten, zodat men metingen van een aantal punten van de $CB(L)$ -kromme verkrijgt.

In plaats van het doormeten van de gehele draad, hetgeen ondoenlijk zou zijn, wordt nu bovendien voorgesteld uit de draad door loting (of naar willekeur) een aantal stukken te knippen en de waarden x_i slechts in deze stukken te

bepalen. Voor deze steekproef uit de draad gelden bovenstaande overwegingen evenzeer als voor de gehele draad. Beschouwt men dus de steekproef als "representatief" voor de gehele draad, dan zijn de verkregen uitkomsten metingen van punten van de $CB(L)$ -kromme van de draad.

Het is echter duidelijk, dat het nemen van een steekproef het invoeren van waarschijnlijkheidstheoretische beschouwingen onvermijdelijk maakt. Een op dit punt dient men zich ervan bewust te zijn, dat de afwijkingen, die de gemeten punten der $CB(L)$ -kromme vertonen van de "ware" $CB(L)$ -kromme (dit is de kromme, die bij volledig doormeten van de gehele draad verkregen zou worden, onderling afhankelijk zijn, daar zij alle uit dezelfde waarden α_i berekend zijn. Hierdoor zal het zeer moeilijk zijn een mathematisch-statistisch gefundeerde aanpassingsmethode voor de $CB(L)$ -kromme aan de gemeten punten te vinden, terwijl ook een toets voor het verschil tussen twee $CB(L)$ -krommen niet op eenvoudige wijze aan te wijzen is

Bij toepassing van de gevolgde methode zal men dus vooralsnog de keuze der punten α_i en de vraag, welke $CB(L)$ -krommen een behoorlijke kwaliteit vertegenwoordigen aan de hand van de praktijk moeten trachten te beantwoorden.

9. Een suggestie.

De vraag doet zich voor, of de grootheid $CB(L)$, waarvan de bepaling omslachtig en de mathematisch-statistische theorie zeer gecompliceerd is, niet vervangen zou kunnen worden door een eenvoudigere maat voor de kwaliteit van een garen. Gedeeltelijk zouden daarvoor wellicht een aantal quantilen van de verdeling van de grootheid $\alpha(\omega)$ over de draad geschikt kunnen zijn. Het aantal zwakke plekken in een draad zal b.v. vrij goed bepaald kunnen worden door een schatting van het eerste decile van α , d.i. die waarde van α , waaronder $1/10$ der waargenomen waarden α_i ligt. In plaats van $\bar{\alpha}$ zou men de mediaan van α kunnen nemen, hetgeen een aanzienlijke besparing bij de berekeningen betekent. Deze quantilen karakteriseren, zoals opgemerkt, de verdeling van α over de draad, zonder echter de plaats aan te geven, waar een bepaalde waarde van α gevonden is; m.a.w. periodiciteiten van α en aanverwante verschijnselen worden op deze wijze niet geregistreerd. Een groot voordeel van het gebruik van een dergelijke eenvoudige maat is echter, dat er een mathematisch-statistische theorie voor ontwikkeld

is, die ons in staat stelt diverse relevante hypothesen te toetsen, zodat men gemakkelijker dan met $CB(L)$ als kwaliteitsmaat tot kwaliteitsvoorschriften en tot de bepaling van kwaliteitsverschillen kan komen.

Een suggestie van algemenere aard is de volgende: de keuze van een kwaliteitsmaat kan, bij een dergelijk ingewikkeld procédé als spinnen en weven, nauwelijks op theoretische gronden worden gedaan. Succes is veeleer te verwachten van een nauwe aansluiting bij de praktijk. Door het onderzoeken en onderling vergelijken van monsters van garens, waarvan de kwaliteit en de aard van eventuele defecten uit het gebruik bekend is, kan men vermoedelijk voor de verschillende defecten karakteristieke kwaliteitsmaten vinden. Men zoek daarbij naar maten, die zo eenvoudig mogelijk van aard zijn, daar deze meestal gemakkelijk te meten zijn en snelle statistische bewerking toelaten.

10. Conclusies.

A. De in het bestudeerde rapport genoemde formules gelden alle bij benadering voor $L \ll \lambda$ § de bewijzen zijn in § 5,6 en 7 van het onderhavige rapport opgenomen.

B. De voorgestelde methode ter bepaling van de $CB(L)$ -kromme van een garen is een correcte schattingsmethode. De afhankelijkheid der gemeten punten, die ontstaat doordat zij alle uit dezelfde waarnemingen worden bepaald, maakt echter het gebruik van theoretische statistische methoden zeer moeilijk.

C. Het is wellicht aan te bevelen het nut van een eenvoudigere kwaliteitsmaten, zoals b.v. een aantal quantilen van de verdeling van u , te onderzoeken, daar deze meer mogelijkheden voor mathematisch-statistische verwerking bieden, terwijl ook de meting minder bezwaarlijk is.

D. Het nut van de genoemde kwaliteitsmaten dient in de eerste plaats aan de praktijk worden getoetst.