

8794 MLW

ARCHIEF

A

CENTRALE VENEUZE DRUK BIJ MANNEN EN
VROUWEN MET EEN NORMALE TRACTUS
CIRCULATORIUS

Rapport S 61^{af} van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum,
Amsterdam, door T. J. TERPSTRA en Prof. Dr J. HEMELRIJK, waarin opge-
nomen rapport S 36 door H. THEIL. De afdeling staat onder leiding van
Prof. Dr D. VAN DANTZIG.

MATHEMATISCH CENTRUM
Statistische Afdeling

Aanhangsel behorend bij het Academisch proefschrift van J. A. MOLHUYSEN,
De centrale veneuze druk, Amsterdam, 1953.

INHOUD

1. Inleiding	3
2. De afhankelijkheid tussen veneuze druk * en leeftijd, resp. thorax-diameter	3
3. Een methode voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen twee grootheden	6
3.1 Inleiding	6
3.2 Experimentele verdelingsfuncties	6
3.3 De correctiemethode	7
3.4 Definitie van de mate van afwijking tussen twee experimentele verdelingsfuncties; de thorax-correctie	8
4. Berekening van de correctietabellen	9
4.1 Invloed van de thorax-correctie op de afhankelijkheid	9
4.2 De leeftijdscorrectie	10
4.3 Het toetsen van onafhankelijkheid na correctie	10
5. Histogrammen van de gecorrigeerde en de ongecorrigeerde veneuze druk	11
6. Eénzijdige (naar beneden begrensde) betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius en een <i>ongecorrigeerde veneuze druk</i> tussen $-4\frac{1}{2}$ en $-8\frac{1}{2}$ cm	13
6.1 Theoretische inleiding	13
6.2 De berekende betrouwbaarheidsintervallen voor de <i>ongecorrigeerde</i> veneuze druk	13
7. De berekende betrouwbaarheidsintervallen voor de <i>gecorrigeerde</i> veneuze druk	14
8. Een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd boven 60 jaar	15
8.1 Nadere beschouwing van de correctietabel	15
8.2 De mediaantoets	15
8.3 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan 60 jaar	15
8.4 Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor alle mannen en vrouwen	15
9. De gecorrigeerde veneuze druk voor mannen en vrouwen met een afwijking van de tractus circulatorius, met emphyseem of met een chronische anaemie	16
9.1 Mannen en vrouwen met een afwijking van de tractus circulatorius	16
9.2 Vrouwen met een chronische anaemie	16
9.3 Mannen en vrouwen met emphyseem	16
10. Samenvatting	17
11. Memoranda betreffende de algemene toetsingstheorie en de in dit rapport toegepaste statistische toetsen	17

* Korthedshalve wordt met veneuze druk, centrale veneuze druk bedoeld.

1. Inleiding

Het verstrekte waarnemingsmateriaal, dat als basis dient voor dit statistisch onderzoek, bestaat uit waarnemingen van de veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter van de volgende 5 groepen personen:

1. 186 mannen met een *normale tractus circulatorius*,
2. 166 vrouwen met een *normale tractus circulatorius*,
3. 21 mannen en 17 vrouwen met een *afwijking van de tractus circulatorius*,
4. 8 vrouwen met een *chronische anaemie*,
5. 15 mannen en 4 vrouwen met *emphyseem*.

De bedoeling van het onderzoek is in de eerste plaats, aan de hand van bovenstaande waarnemingen, éénzijdige, naar beneden begrensde betrouwbaarheidsintervallen te bepalen voor de percentages mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius, die een veneuze druk tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm * bezitten. In de eerste 8 paragrafen is dan ook uitsluitend gebruik gemaakt van de onder 1 en 2 genoemde groepen waarnemingen.

De veneuze druk zal afhankelijk blijken te zijn van leeftijd en thorax-diameter, zodat het wenselijk is deze afhankelijkheid door een correctie te verwijderen. Een dergelijke correctie is uit het waarnemingsmateriaal afgeleid op een verderop te bespreken wijze (zie § 3). Deze correctie is vervolgens op het waarnemingsmateriaal toegepast en daarna zijn uit de gecorrigeerde waarden van de veneuze druk de bovengenoemde betrouwbaarheidsintervallen berekend. Bovendien zijn ter vergelijking de overeenkomstige betrouwbaarheidsintervallen berekend uit het oorspronkelijke, ongecorrigeerde materiaal.

Tevens is de afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd nader bestudeerd.

Voor mannen en vrouwen met de genoemde ziekten is (zie § 9) nagegaan of de gecorrigeerde veneuze druk verschillend is van die voor mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius.

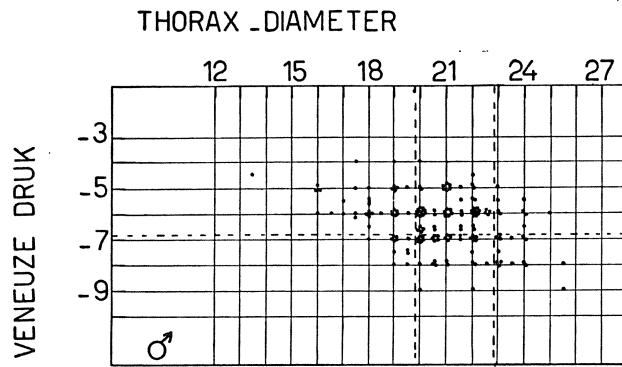
Aan het eind van het verslag zijn enige memoranda toegevoegd om de principes van de algemene toetsingstheorie en enkele speciale toetsingsmethoden, toegepast in deze statistische analyse, nader toe te lichten.

2. De afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd, resp. thorax-diameter

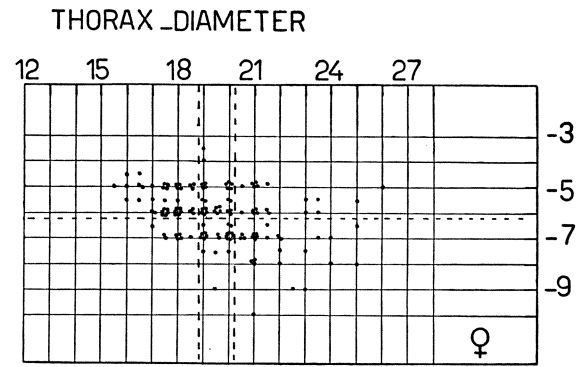
De onderlinge afhankelijkheid tussen veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter is aangetoond met behulp van de χ^2 -toets voor onafhankelijkheid (zie hiertoe het aan het eind van dit rapport toegevoegde Memorandum II).

Deze χ^2 -toets is toegepast op de grafieken 1a, . . . , 2b, waar resp. veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter onderling tegen elkaar zijn uitgezet. De grafieken zijn hierbij volgens de in het Memorandum II aangegeven wijze in vakken verdeeld, welke vakken in de grafieken door stippellijnen aangeduid zijn.

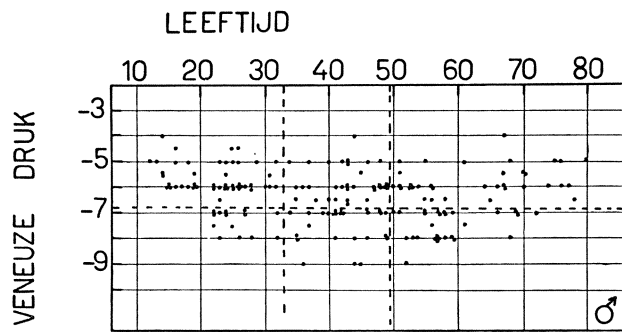
* De waarden van de veneuze druk zijn opgegeven in cm water ten opzichte van R, het „reference-point” op de thorax. De letter R is kortheidshalve weggelaten.



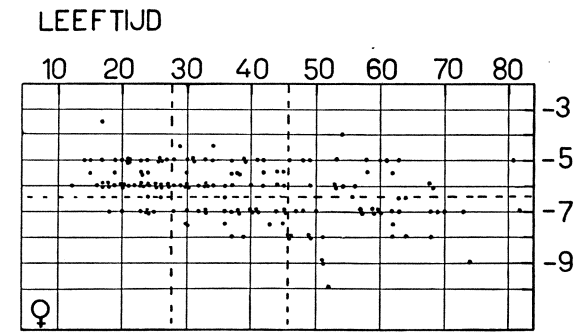
GRAFIEK 1a



GRAFIEK 1b

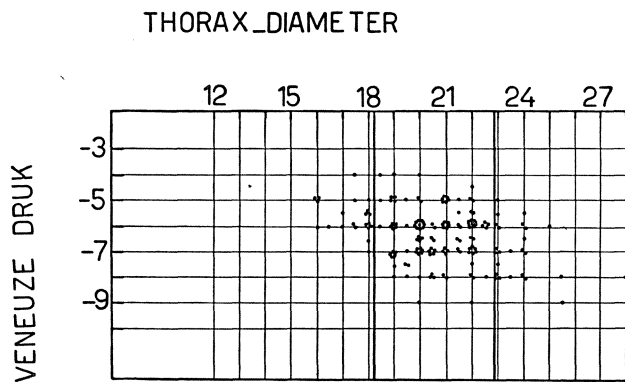


GRAFIEK 2a

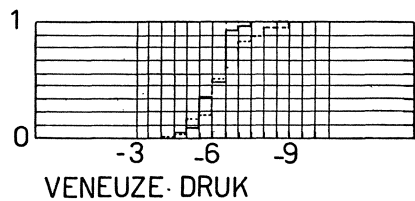


GRAFIEK 2b

Waarnemingen van mannen en vrouwen met normale tractus circulatorius.

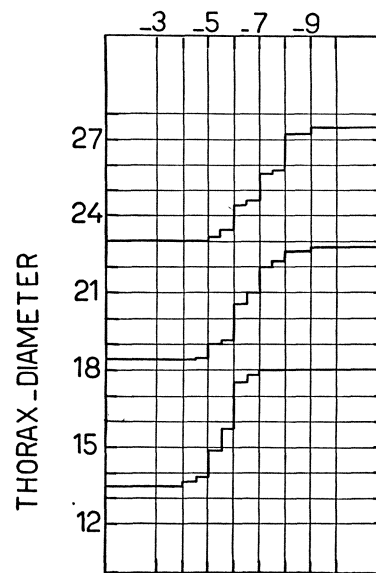


GRAFIEK 3a



GRAFIEK 3c

VENEUZE DRUK



GRAFIEK 3b

Bepaling van de thorax-correctie voor de gegevens van grafiek 1a.

Bij deze toets zijn 2 verticalen en één horizontale lijn genomen, om in ieder vak voor de χ^2 -toets een behoorlijk aantal punten te verkrijgen.

Tenslotte zijn de in onderstaande tabel 1 vermelde χ^2 -waarden met bijbehorende overschrijdingskansen k gevonden.

TABEL 1

	VEEUZE DRUK THORAX-DIAM.	VEEUZE DRUK LEEFTIJD
MANNEN	$\chi^2 = 10,74$ $k = 0,004$	$\chi^2 = 9,04$ $k = 0,01$
VROUWEN	$\chi^2 = 16,23$ $k = 0,0003$	$\chi^2 = 25,12$ $k < 0,0001$

ONAFHANKELIJKHEIDSTOETSING VOOR HET
OORSPRONKELIJKE MATERIAAL.

Zelfs indien men een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0,01$ gebruikt, leiden al deze toetsingen tot verwerping van de hypothese van onafhankelijkheid, zodat wij tot een duidelijke afhankelijkheid tussen de onderzochte grootheden kunnen besluiten.

Opmerking: Met behulp van de χ^2 -toets voor onafhankelijkheid is eveneens een afhankelijkheid geconstateerd tussen thorax-diameter en leeftijd, zowel voor mannen als vrouwen. De overschrijdingskans voor mannen bedraagt 0,006, die voor vrouwen is kleiner dan 0,0001.

Deze afhankelijkheid is echter niet van dien aard, dat een thorax-correctie (zie § 3.4 en § 4.2) of leeftijdscorrectie de afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd, resp. veneuze druk en thorax-diameter elimineert.

3. Een methode voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen twee grootheden

3.1 Inleiding

Voor het berekenen van de correcties voor de veneuze druk, om de afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd, resp. veneuze druk en thorax-diameter op te heffen, is het, wegens de geringe nauwkeurigheid van de meting der veneuze druk (men bereikt geen groter nauwkeurigheid dan ongeveer $\frac{1}{2}$ cm) overbodig een zeer fijne, theoretisch gefundeerde correctie te geven. Bovendien is de toepassing van een dergelijke correctie in de praktijk vrij moeizaam.

Wij kiezen daarom een vrij grove correctie-methode, die echter voor de doeleinden van het onderzoek voldoende is en snel en gemakkelijk kan worden toegepast.

3.2 Experimentele verdelingsfuncties

Bij de nog te bespreken correctie-methode wordt gebruik gemaakt van zgn. experimentele verdelingsfuncties.

De experimentele verdelingsfunctie van een grootheid x , waarvan een aantal waarnemingen zijn verricht, wordt bepaald, door voor iedere $x = x_0$ het percentage van het totale aantal waarnemingen te berekenen, waarvoor $x \leq x_0$ is en vervolgens dit percentage tegen x_0 uit te zetten.

Deze experimentele verdelingsfunctie is dus een trapfunctie, die als maximale waarde de waarde 1 bezit.

Wanneer de voor x bepaalde experimentele verdelingsfunctie de in fig. 1 getekende trapfunctie is, dan is dus b.v. de betekenis van de bij $x = 7$ behorende waarde 0,72, dat 72% van de waargenomen waarden van x kleiner of gelijk aan 7 zijn. In het in figuur 1 getekende geval heeft de grootte alleen gehele waarden aangenomen. Tengevolge van de groepering van de waarnemingen treedt een dergelijk verschijnsel bij het behandelde onderzoek op.

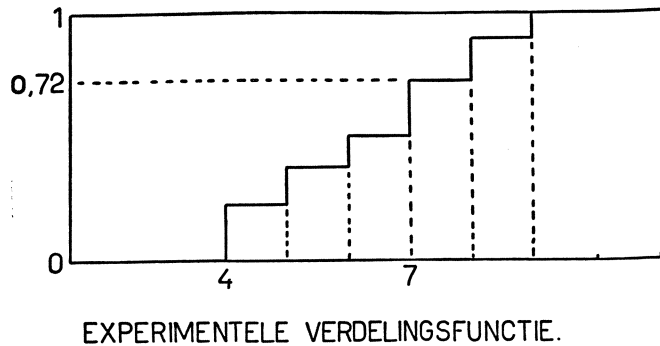


Fig. 1

3.3 De correctie-methode

De gebruikte correctie-methode kan het gemakkelijkst besproken worden aan de hand van grafiek 1a, waar de voor mannen waargenomen waarden van thorax-diameter en veneuze druk tegen elkaar uitgezet zijn.

In § 2 is reeds met behulp van de χ^2 -toets aangetoond, dat veneuze druk en thorax-diameter voor mannen afhankelijk zijn.

Om deze afhankelijkheid zo goed mogelijk te elimineren, gaan we nu als volgt te werk:

De waarnemingen uit grafiek 1a worden ingedeeld in groepen, die, wat veneuze druk betreft, elk zoveel mogelijk homogeen zijn. Hoewel deze indeling tot op zekere hoogte arbitrair is, ligt een verdeling in 3 bepaalde groepen, gezien de aard van grafiek 1a, voor de hand. Deze groepen zijn in grafiek 3a gescheiden door verticale getrokken lijnen. (De grafieken 3b en 3c zijn ten opzichte van grafiek 1a en 3a een kwart slag gedraaid.) Het zijn groepen met resp. $\text{thorax} \leq 18$, $18 < \text{thorax} < 23$ en $\text{thorax} \geq 23$ ¹⁾. Een betere verdeling in homogene groepen konden wij niet verkrijgen, zonder het aantal waarnemingen in sommige groepen te klein te maken.

Vervolgens tekenen we voor elk van de 3 bovengenoemde groepen waarnemingen de experimentele verdelingsfuncties van de veneuze druk. Deze verdelingsfuncties zijn alle getekend op een strook van gelijke hoogte; zie grafiek 3b.

Met behulp van de experimentele verdelingsfuncties worden nu de correcties voor de veneuze druk bepaald, door de strook met de onderste (resp. bovenste) trapfunctie zo ver in *verticale* richting te verschuiven, dat ze samenvalt met de strook van de trapfunctie voor de middengroep. Daarna wordt de strook met de onderste (resp. bovenste) trapfunctie zover in *horizontale* richting over de strook met de trapfunctie der middengroep verschoven, tot de afwijking tussen deze twee trapfuncties, gemeten volgens een in de volgende paragraaf gedefinieerde maatstaf A , zo klein mogelijk wordt.

Deze horizontale verschuiving, uitgedrukt in centimeters veneuze druk, wordt

¹⁾ In de rest van dit verslag schrijven wij kortheidshalve thorax in plaats van thorax-diameter.

nu als correctie voor de veneuze druk genomen, voor personen met een thorax-gelegen in het bij de onderste (resp. bovenste) strook behorende interval.

Deze correctie zullen we in het vervolg kortheidshalve *thorax-correctie* noemen.

Voor de aanschouwelijkheid is in grafiek 3c één van de situaties getekend, die voorkomt, wanneer de strook met de onderste trapfunctie eerst in verticale richting naar de strook voor de middelste trapfunctie verschoven wordt en daarna nog over een afstand van $\frac{1}{2}$ cm veneuze druk naar rechts.

Opmerking: In de praktijk kunnen deze horizontale en verticale verschuivingen het gemakkelijkst uitgevoerd worden, door de strook met de middelste trapfunctie op doorzichtig papier over te tekenen en deze strook in horizontale richting over de stroken met de benedenste en bovenste trapfunctie te verschuiven.

Daar bij het bovenstaande procédé de trapfuncties van drie zeer duidelijk verschillende deelgroepen der waarnemingen gebruikt zijn, mogen we verwachten, dat een efficiënte correctie verkregen zal worden voor het elimineren van de afhankelijkheid tussen veneuze druk en thorax-diameter.

3.4 Definitie van de mate van afwijking A tussen twee experimentele verdelingsfuncties

Definitie: Als maat A van afwijking tussen twee experimentele verdelingsfuncties nemen wij de absolute waarde van de algebraïsche som der verschillen a_i van paren corresponderende waarden van de trapfuncties, dus

$$A = \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n|.$$

Corresponderende waarden van twee trapfuncties zijn daarbij waarden, die de twee trapfuncties aannemen op eenzelfde interval (van lengte $\frac{1}{2}$ cm) van de abscis.

Het teken van a_i wordt positief genomen, wanneer de waarde van de tweede trapfunctie voor het i^e interval van de abscis groter is dan de corresponderende waarde voor de eerste trapfunctie en negatief, wanneer de eerste waarde kleiner is dan de tweede.

Voorbeeld: Wanneer de twee trapfuncties, die met elkaar vergeleken worden, de onderste en middelste trapfunctie uit grafiek 3b zijn, dan is één van de situaties, die bij de verschuiving van de onderste trapfunctie over de middelste kan voorkomen, de in grafiek 3c getekende. De middelste trapfunctie in deze grafiek is gestippeld.

De afstand a_i wordt nu positief gerekend, wanneer de getrokken trapfunctie in het i^e interval onder de gestippelde ligt en anders negatief.

In het voorbeeld van grafiek 3c is dus:

$$A = |1 - 2 + 7 - 10 + 2 - 27 - 12 - 10 - 3 - 3| = 57.$$

In tabel 2 zijn tenslotte de waarden van A gegeven, die bij horizontale verschuiving van de stroken met de onderste en bovenste trapfunctie over de strook met de middelste trapfunctie, zijn gevonden. Uit deze tabel zijn vervolgens de in tabel 3 vermelde thorax-correcties voor de veneuze druk bij mannen gevonden.

De verschuiving is gemeten in cm veneuze druk.

Een positieve verschuiving wil zeggen, dat de onderste (resp. bovenste) trapfunctie naar links over de middelste trapfunctie verschoven wordt (zie grafiek 3b). Een dergelijke verschuiving (naar links resp. naar rechts) komt overeen met een (positieve resp. negatieve) correctie voor de betreffende groep, die gelijk is aan de afstand, waarover verschoven wordt (zie de schaal der veneuze druk in de grafieken).

TABEL 2

DE GROOTHEID A BIJ MANNEN VOOR THORAX TEGEN VENEUZE DRUK.

VERSCHUIVING ONDERSTE TRAPFUNCTIE OVER MID-DELSTE TRAPFUNCTIE (THORAX \leq 18)	A	VERSCHUIVING BOVENSTE TRAPFUNCTIE OVER MID-DELSTE TRAPFUNCTIE (THORAX \geq 23)	A
-1/2	57	0	107
-1	40	1/2	42
-1 1/2	>40	1	>45

TABEL 3

THORAXCORRECTIE VOOR MANNEN

	THORAX \leq 18	18 < THORAX < 23	THORAX \geq 23
THORAX - CORRECTIE	-1	0	1/2

Voor vrouwen is op analoge wijze een thorax-correctie bepaald, die in tabel 4 te vinden is. Deze komt vrijwel precies overeen met tabel 3. Echter zijn de thorax-grenzen, die weer zodanig gekozen zijn, dat de verkregen groepen zoveel mogelijk van elkaar afwijken (zie grafiek 1b), juist 1 cm kleiner dan die voor mannen. Dit is in overeenstemming met het feit, dat de mediaan * van de thorax-diameter voor vrouwen ook 1 cm kleiner is dan die voor mannen (resp. 19,5 en 20,5), zodat tot dusverre gesproken mag worden van een goede overeenstemming in de aard van afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter bij mannen en vrouwen, hetgeen in de volgende paragrafen nader bevestigd wordt.

TABEL 4

THORAXCORRECTIE VOOR VROUWEN

	THORAX \leq 17	17 < THORAX < 22	THORAX \geq 22
THORAX - CORRECTIE	-1	0	1/2

4. Berekening van de correctietabellen

4.1 Invloed van de thorax-correctie

In § 3 is een thorax-correctie bepaald voor de veneuze druk van mannen en voor die van vrouwen.

Het ligt nu voor de hand, allereerst te onderzoeken, of deze thorax-correctie misschien, behalve de afhankelijkheid van veneuze druk van thorax-diameter, ook de afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd elimineert.

* De mediaan is de middelste waarneming, wanneer de waarnemingen naar grootte gerangschikt worden.

Voor de mannen bleek dit inderdaad het geval te zijn, want bij toepassing van de χ^2 -toets op de grafiek van thorax en de voor thorax gecorrigeerde veneuze druk en bij toepassing van dezelfde toets op de grafiek van leeftijd en de voor thorax gecorrigeerde veneuze druk (voor deze correcties gebruiken we dus tabel 3), vinden we resp. de niet-significante overschrijdingskansen 0,64 en 0,51.

Bij de mannen zouden we dus ter eliminatie van de bestaande afhankelijkheden, kunnen volstaan met een thorax-correctie.

Daar echter de thorax-correctie voor de bij vrouwen verrichte waarnemingen niet voldoende bleek te zijn (bij toepassing van de χ^2 -toets op de grafiek van leeftijd en de voor thorax-diameter gecorrigeerde veneuze druk werd namelijk een significante overschrijdingskans $k = 0,002$ gevonden) is voor de vrouwen nog een leeftijds-correctie bepaald voor de reeds voor thorax-diameter gecorrigeerde veneuze druk.

Daar het gewenst is voor mannen en vrouwen een gelijksoortige correctietabel af te leiden, is hetzelfde ook voor mannen gedaan.

4.2 De leeftijds-correctie

Deze tweede correcties zijn uit de voor thorax gecorrigeerde waarnemingen verkregen op analoge wijze als de thorax-correcties uit het oorspronkelijke materiaal. Daar in dit geval een beter effect was te verwachten, indien in meer dan 3 groepen werd verdeeld, gebruikten wij hier 7 stroken van 10 jaar ieder. Uit het resultaat bleek, dat voor de mannen 4 van deze groepen en voor de vrouwen 5 groepen samengenomen konden worden (zie tabel 5).

Door superpositie van de leeftijds- en thorax-correctie vinden we de volgende correctietabellen voor de veneuze druk.

TABEL 5

CORRECTIETABEL VOOR VENEUZE DRUK.

MANNEN		LEEFTIJD	< 19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	> 70
		LEEFTIJDSCORRECTIE	-1/2	0	0	0	0	-1/2	-1/2
THORAX	THORAX - CORRECTIE								
< 18	-1		-1 1/2		-1				-1 1/2
18 < th < 23	0		-1/2		0				-1/2
> 23	1/2		0		1/2				0

VROUWEN		LEEFTIJD	< 19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	> 70
		LEEFTIJDSCORRECTIE	-1/2	0	0	0	0	0	1
THORAX	THORAX - CORRECTIE								
< 17	-1		-1 1/2		-1				0
17 < th < 22	0		-1/2		0				1
> 22	1/2		0		1/2				1 1/2

4.3 Het toetsen van onafhankelijkheid na correctie

Om te toetsen of de correctietabel 5 inderdaad voldoende is om de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheden tussen veneuze druk, leeftijd en thorax-diameter te elimineren, is de χ^2 -toets voor onafhankelijkheid toegepast op de met behulp

van bovengenoemde correctietabel gecorrigeerde grafieken 1a, 1b, 2a, 2b. Bij deze toetsing is het noodzakelijk de grafieken te verdelen in groepen, die niets uit te staan hebben met de groepen, bij het correctieprocédé gebruikt, want we willen op objectieve wijze de onafhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter toetsen. Daarom werd weer de in § 2 reeds beschreven methode van verdeling in vakken gebruikt.

Uit de niet-significante waarden voor k_1 en k_2 (zie tabel 6), die bij toepassing van de χ^2 -toets gevonden worden, blijkt, dat de correctietabel 5 inderdaad voldoende is, om de oorspronkelijk bestaande afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter te elimineren.

TABEL 6

ONAFHANKELIJKHEIDSTOETSING VAN HET MET BEHULP VAN
TABEL 5 GECORRIGEERDE MATERIAAL

	MANNEN		VROUWEN	
	OORSPR. MATERIAAL	NA THORAX-EN LEEFTIJD CORR.	OORSPR. MATERIAAL	NA THORAX-EN LEEFTIJD CORR.
k_1	0,004	0,34	0,0003	0,21
k_2	0,01	0,78	0,0001	0,34

^v k_1 - overschrijdingskans, gevonden bij toepassing van de χ^2 -toets op de thorax-veneuze druk-diagrammen

^v k_2 - overschrijdingskans k gevonden bij toepassing van de χ^2 -toets op de leeftijd-veneuze druk-diagrammen.

Opmerkingen:

1. Wanneer één der overschrijdingskansen k_1 en k_2 of beide, na de aangebrachte correctie nog wel significant geweest zouden zijn, dan hadden we het correctieprocédé op dezelfde wijze kunnen voortzetten.

Het staat echter niet vast, of met deze methode steeds het beoogde doel bereikt wordt. Indien dat wel het geval is, zoals bij het onderhavige materiaal, is zij echter zeer bruikbaar.

2. De volgorde van bepaling der correcties kan ook worden omgedraaid. Dan wordt dus eerst een leeftijdscorrectie bepaald en als tweede stap de thorax-correctie. Langs die weg worden in het onderhavige geval correctietabellen verkregen, die de afhankelijkheid minder goed elimineren dan de correcties van tabel 5, hetgeen voldoende reden was om tabel 5 als uiteindelijke correctietabel te beschouwen.

3. De gekozen correctietabellen voor de veneuze druk zijn bepaald uit een beperkt waarnemingsmateriaal en dienen derhalve als geschatte correcties te worden beschouwd, zodat toetsing aan toekomstige waarnemingen en eventueel een dienovereenkomstige wijziging der correcties gewenst is. Dit laatste zou alleen nodig zijn, indien mocht blijken, dat bij latere waarnemingen de afhankelijkheden, ondanks de correcties, toch zouden blijven bestaan.

Volgens de hierboven beschreven methode kan dan opnieuw een (verbeterde) correctietabel worden bepaald.

5. Histogrammen van de ongecorrigeerde en de gecorrigeerde veneuze druk

De histogrammen van de gecorrigeerde en de ongecorrigeerde veneuze druk worden verkregen door de percentages waarnemingen, met een al dan niet ge-

corrigeerde veneuze druk, tussen $-3\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$, $-4\frac{1}{2}$ en $-5\frac{1}{2}$, ..., $-9\frac{1}{2}$ en $-10\frac{1}{2}$ cm te berekenen en deze tegen de intervallen uit te zetten. Bovengenoemde intervallen zijn gekozen, daar bepaling van de veneuze druk met een grotere nauwkeurigheid dan $\frac{1}{2}$ cm niet mogelijk bleek.

De aantallen waarnemingen in deze intervallen worden bepaald door de afspraak, een waarneming geheel tot een interval te rekenen, wanneer hij er binnen ligt en voor de helft tot het ene interval en voor de helft tot het aangrenzende interval te rekenen, wanneer hij op de grens van twee intervallen ligt.

HISTOGRAM VAN DE ONGECORRIGEERDE CENTRALE VENEUZE DRUK.

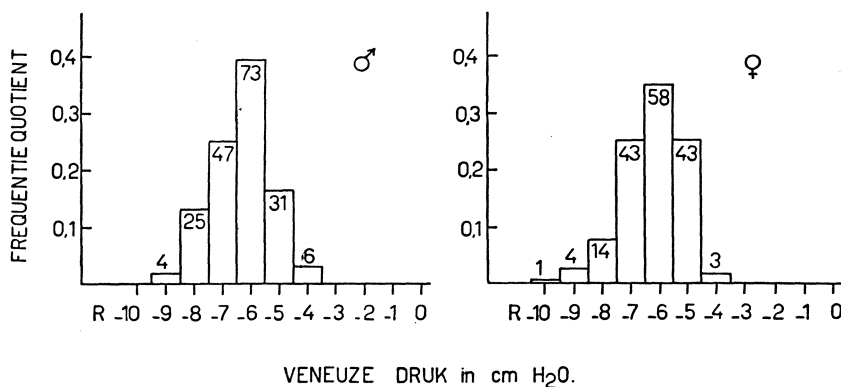


Fig. 2

HISTOGRAM VAN DE GECORRIGEERDE CENTRALE VENEUZE DRUK

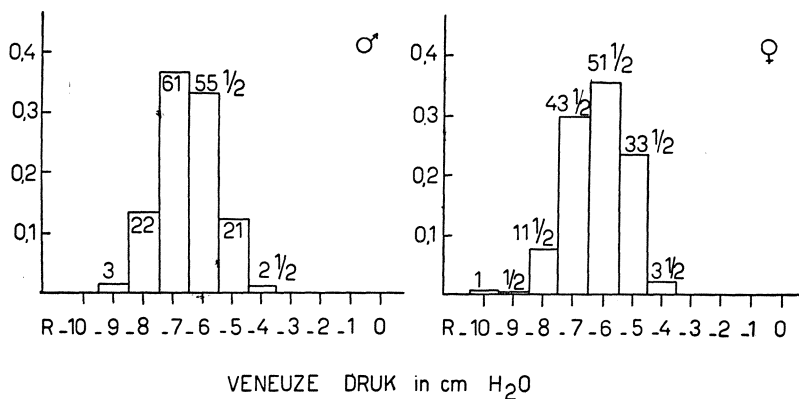


Fig. 3

Vergelijken we nu de histogrammen van de ongecorrigeerde en de gecorrigeerde veneuze druk (zie fig. 2 en 3), dan blijken de waarnemingen van de veneuze druk na correctie iets meer in het midden geconcentreerd te zijn. Bovendien bezitten de histogrammen na correctie meer de gedaante van een normale verdeling; de scheefheid is aanmerkelijk verminderd.

De grotere concentratie naar het midden van de histogrammen was te verwachten, want door het aanbrengen van de gegeven correcties op de veneuze druk wordt de afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd en thorax-diameter zo goed mogelijk geëlimineerd en bezit de gecorrigeerde veneuze druk dus een kleinere spreiding dan de ongecorrigeerde.

6. Eénzijdige (naar beneden begrensde) betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius en een ongecorrigeerde veneuze druk tussen $-4\frac{1}{2}$ en $-8\frac{1}{2}$ cm *

6.1 Theoretische inleiding

Onderstellen we, dat in een steekproef van de uitgebreidheid n , f waarnemingen buiten het interval $[a, b]$ liggen, zodat er $n-f$ binnen dit interval liggen.

Veronderstel, dat in de collectie, waaruit men de steekproef getrokken denkt, een fractie p buiten het interval en dus een fractie $q = 1 - p$ binnen het interval ligt.

Dan is, onder bovengenoemde veronderstelling omtrent de collectie, de kans dat $f' \leq f$ waarnemingen van de steekproef buiten het interval liggen, bij een uitgebreidheid n , gelijk aan

$$\sum_{k=0}^f \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 - I_p(f+1, n-f),$$

waarbij I de onvolledige Beta-functie voorstelt in de notatie van K. PEARSON (Tables of the incomplete Beta-function, Cambridge 1934).

Bij de gegeven steekproef nemen n en f bepaalde waarden aan. Om nu een eenzijdig, naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor $q = 1 - p$ te berekenen (met onbetrouwbaarheidsdrempel α), worden al die waarden van $q = 1 - p$ uitgesloten, waarvoor

$$\sum_{k=0}^f \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 - I_p(f+1, n-f) \leq \alpha. \quad (1)$$

Hieraan voldoen alle waarden van p , die groter zijn dan een zekere vaste waarde p_0 , zodat $q \geq 1 - p_0$ een eenzijdig, naar beneden begrensd betrouwbaarheidsinterval voor q is met onbetrouwbaarheidsdrempel α .

Opmerking: Bovenstaande theorie is onmiddellijk toepasbaar op ons probleem. Hier kunnen namelijk de verrichte waarnemingen van de veneuze druk voor mannen en vrouwen beschouwd worden als steekproeven uit de collectie van „alle” mannen, resp. vrouwen, met een normale tractus circulatorius. Voor deze tweede collecties zullen we nu, aan de hand van de waarnemingen, eenzijdige betrouwbaarheidsintervallen bepalen voor de percentages mannen, resp. vrouwen, met een veneuze druk tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm.

6.2 De berekende betrouwbaarheidsintervallen voor de ongecorrigeerde veneuze druk

Het totale aantal waarnemingen n en het aantal waarnemingen met een veneuze druk buiten het interval $-8\frac{1}{2}$, $-4\frac{1}{2}$ cm (dit aantal is in § 6.1 met f aangeduid) voor de ongecorrigeerde waarnemingen voor mannen en vrouwen kunnen direct uit de histogrammen in fig. 2 bepaald worden.

Met behulp van formule (1) uit § 6.1 zijn, bij de onbetrouwbaarheidsdrempels $\alpha = 0,005$, $\alpha = 0,025$ en $\alpha = 0,10$, de in onderstaande tabel vermelde eenzijdige betrouwbaarheidsintervallen gevonden voor de percentages mannen en vrouwen

* Deze paragraaf behelst het rapport S 36, door H. THEIL. Men vergelijk ook het aan het einde toegevoegde memorandum III.

met een normale tractus circulatorius en een veneuze druk tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm, dus voor het percentage q .

Bovenstaande waarden voor de onbetrouwbaarheidsdrempel α werden gekozen, daar voor deze waarden tabellen en nomogrammen beschikbaar waren ter bepaling van het gewenste betrouwbaarheidsinterval. (Zie L. E. SIMON, „An engineers' Manual of statistical methods”, New York 1945 en R. A. FISHER and F. YATES, „Statistical Tables” London 1949, pag. 48).

TABEL 7

BETROUWBAARHEIDINTERVALLLEN VOOR DE PERCENTAGES MANNEN EN VROUWEN
MET EEN NORMALE TRACTUS CIRCULATORIUS EN EEN ONGECORRIGEERDE
VENEUZE DRUK TUSSEN $-8\frac{1}{2}$ EN $-4\frac{1}{2}$ cm.

	n	f	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,10$
MANNEN	185	10	$q > 88\%$	$q > 90\%$	$q > 91\%$
VROUWEN	166	8	$q > 89\%$	$q > 90\%$	$q > 92\%$

7. De berekende betrouwbaarheidsintervallen voor de gecorrigeerde veneuze druk

De waarden voor n en f kunnen bepaald worden uit de histogrammen van de gecorrigeerde veneuze druk (zie fig. 3). Vervolgens zijn met behulp van formule (1) uit § 6.1 de in onderstaande tabel aangegeven betrouwbaarheidsintervallen gevonden voor de percentages mannen en vrouwen met normale tractus circulatorius en een gecorrigeerde veneuze druk tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm.

TABEL 8

BETROUWBAARHEIDINTERVALLLEN VOOR DE PERCENTAGES MANNEN EN VROUWEN
MET EEN NORMALE TRACTUS CIRCULATORIUS EN EEN GECORRIGEERDE VENEUZE
DRUK TUSSEN $-8\frac{1}{2}$ EN $-4\frac{1}{2}$ cm

	n	f	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,10$
MANNEN	165	$5\frac{1}{2}$	$q > 91\%$	$q > 93\%$	$q > 94\%$
VROUWEN	145	5	$q > 90\%$	$q > 92\%$	$q > 93\%$

Opmerkingen:

1. *Explicatie van de tabellen 7 en 8.*

De resultaten in de tabellen 7 en 8 vermeld, dienen als volgt geïnterpreteerd te worden.

Wanneer bij toekomstige waarnemingen de correctietabel 5 gebruikt wordt voor het corrigeren van de veneuze druk, dan zullen, behoudens een onbetrouwbaarheid 0,005, minstens 91% van de gecorrigeerde nieuwe waarnemingen voor mannen met een normale tractus circulatorius tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm komen te liggen en minstens 90% van de gecorrigeerde nieuwe waarnemingen voor vrouwen in dit interval.

Bij een onbetrouwbaarheid 0,1 zijn deze percentages resp. 94% en 93%, etc.

Men kan er dus vrijwel zeker op rekenen, dat het aantal mannen en vrouwen met normale tractus circulatorius, waarvan de veneuze druk ligt tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm, dicht in de buurt van de 90% of hoger ligt. Dit geldt echter, strikt

genomen, slechts voor die groep van de bevolking, waaraan het waarnemingsmateriaal ontleend is.

2. Uit bovenstaande tabellen blijkt, dat de ondergrens voor de betrouwbaarheidsintervallen na correctie groter is, dan voor de correctie. Dit is volledig in overeenstemming met de grotere concentratie in de histogrammen voor de gecorrigeerde veneuze druk in het interval $-8\frac{1}{2}$, $-4\frac{1}{2}$ cm.

8. Een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd boven 60 jaar

8.1 *Nadere beschouwing van de correctietabel*

Wanneer we de correctietabel 5 aan een nader onderzoek onderwerpen, dan blijkt, dat de thorax-correctie voor mannen en vrouwen, afgezien van het verschil in thoraxindeling, dezelfde is.

De leeftijdscorrectie voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan 60 jaar is ook dezelfde, maar boven deze leeftijd verschillen ze systematisch en wel zodanig, dat de vrouwen een grotere correctie voor de veneuze druk krijgen, dan de mannen.

8.2 *De mediaantoets*

Naar aanleiding hiervan hebben wij de veneuze druk voor mannen boven de 60 jaar vergeleken met die voor vrouwen boven de 60, en evenzo de veneuze druk voor beide groepen beneden de 60 jaar. Daar hieronder zeer veel gelijke waarnemingen optraden, werd gebruik gemaakt van een toets, die voor discrete verdelingen geschikt is, nl. de mediaantoets voor de hypothese, dat de beide reeksen waarnemingen uit dezelfde collectie afkomstig zijn, dus dat er geen verschil is in de verdeling van de veneuze druk tussen de betrokken groepen van mannen en vrouwen. Deze toets is b.v. beschreven in hoofdstuk 2 van J. HEMELRIJK, Symmetrietoetsen, Diss., Den Haag 1950.

Bij toepassing van deze mediaantoets op de waarnemingen van de veneuze druk voor mannen en vrouwen van *60 jaar en ouder*, werd een significante tweezijdige overschrijdingskans 0,026 gevonden, waarbij de vrouwen een systematisch *kleinere* veneuze druk bezitten dan de mannen.

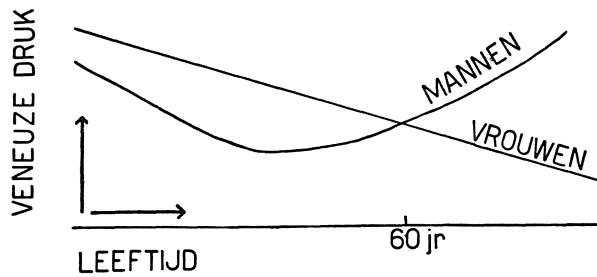
8.3 *Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen met leeftijd kleiner dan 60 jaar*

Voor de waarnemingen uit de leeftijdsgroep beneden 60 jaar, werd een overschrijdingskans 0,049 gevonden, waarbij de vrouwen nu een systematisch grotere veneuze druk vertonen dan de mannen.

8.4 *Onderzoek naar een systematisch verschil in veneuze druk voor alle mannen en vrouwen*

De mediaantoets, toegepast op alle waarnemingen voor veneuze druk van mannen en vrouwen, leverde een overschrijdingskans 0,41, zodat hieruit *niet* tot een systematisch verschil in veneuze druk voor mannen en vrouwen besloten mag worden.

De hierboven vermelde resultaten tezamen kunnen we echter als een aanwijzing beschouwen, dat bij toenemende leeftijd, de veneuze druk voor vrouwen afneemt, terwijl die voor mannen boven de zestig jaar weer gaat toenemen. Schematisch kunnen we deze afhankelijkheid van veneuze druk van leeftijd voor mannen en vrouwen als volgt voorstellen:



AFHANKELIJKHEID VAN
VENEUZE DRUK VAN LEEFTIJD VOOR
MANNEN EN VROUWEN (SCHEMATISCH)

Fig. 4

Opmerking: Aan de hierboven berekende overschrijdingskansen kan geen al te grote waarde worden gehecht, daar de gebruikte toets (en in het bijzonder de keuze van het punt „60” jaar als scheidingspunt) naar aanleiding van de aard van de correctietabellen, dus uit de ons verstrekte waarnemingen gekozen zijn. Dit heeft ten gevolge, dat de werkelijke onbetrouwbaarheid van de toets groter is dan de hierboven berekende overschrijdingskansen. We kunnen dus slechts spreken van een aanwijzing in de richting van het geschetste gedrag van de veneuze druk, die een nader onderzoek naar het verschijnsel zinvol maakt.

9. De gecorrigeerde veneuze druk voor mannen en vrouwen met een afwijking van de tractus circulatorius, met emphyseem of met een chronische anaemie

9.1 Mannen en vrouwen met een afwijking van de tractus circulatorius

Voor 21 mannen en 17 vrouwen zijn de met behulp van tabel 5 gecorrigeerde waarden voor de veneuze druk bepaald. Om te onderzoeken of deze gecorrigeerde waarden voor de veneuze druk verschillend zijn van die voor de mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius hebben we, wegens het grote aantal gelijke waarden voor de veneuze druk, de mediaantoets toegepast (zie § 8.2).

Voor de mannen werd een significante tweezijdige overschrijdingskans 0,03 gevonden, voor vrouwen een tweezijdige overschrijdingskans $> 0,10$.

We kunnen dus besluiten, dat de gecorrigeerde veneuze druk voor mannen met een afwijking van de tractus circulatorius verschillend is van die voor mannen met een normale tractus circulatorius en wel hogere waarden aanneemt.

Voor de vrouwen kunnen we geen verschil in gecorrigeerde veneuze druk constateren.

9.2 Vrouwen met een chronische anaemie

Voor 8 vrouwen met een chronische anaemie is de gecorrigeerde veneuze druk bepaald. Met behulp van de mediaantoets kon geen verschil tussen gecorrigeerde veneuze druk voor deze vrouwen en die voor vrouwen met een normale tractus circulatorius en zonder anaemie, gevonden worden (overschrijdingskans $> 0,10$).

9.3 Mannen en vrouwen met emphyseem

Voor 15 mannen met emphyseem zijn de gecorrigeerde waarden voor de veneuze druk bepaald. De mediaantoets toont aan, dat een significant verschil bestaat met de gecorrigeerde waarden van de veneuze druk voor mannen met een normale tractus respiratorius en circulatorius. Er werd namelijk met deze

toets een tweezijdige overschrijdingskans 0,013 gevonden. Hierbij neemt de veneuze druk voor mannen met emphyseem lagere waarden aan, dan die voor mannen met een normale tractus respiratorius.

Opmerking: Voor vrouwen met emphyseem waren slechts 4 waarnemingen gegeven, welk aantal, mede wegens het optreden van gelijke waarnemingen, te klein is, om nog een statistische toets te kunnen toepassen.

10. Samenvatting

- a. De afhankelijkheid tussen veneuze druk en leeftijd resp. thorax-diameter, kan opgeheven worden door toepassing van de in tabel 5 samengevatte correcties.
- b. In tabel 8 vindt men naar beneden begrensde betrouwbaarheidsintervallen voor de percentages der gecorrigeerde waarden voor de veneuze druk tussen $-8\frac{1}{2}$ en $-4\frac{1}{2}$ cm voor *mannen en vrouwen met een normale tractus circulatorius*. Deze percentages zijn, behoudens een geringe onbetrouwbaarheid, 90% of hoger.
- c. Er is een aanwijzing, dat de invloed van de leeftijd op de veneuze druk bij mannen en vrouwen verschillend is en wel zodanig, dat bij beide beneden 60 jaar de veneuze druk daalt bij stijgende leeftijd, terwijl de daling bij vrouwen boven de 60 jaar voortgezet wordt, maar bij de mannen in een stijging overgaat. Mannen beneden de 60 jaar vertoonden een lagere veneuze druk dan de vrouwen en die boven de 60 jaar een hogere dan de vrouwen van diezelfde groep.

Dit verschijnsel dient echter nader onderzocht te worden. Een pertinente uitspraak kan op grond van het gegeven onderzoek niet gedaan worden.

- d. De gecorrigeerde veneuze druk voor *mannen met een afwijking van de tractus circulatorius* vertoont een verschillend gedrag van de gecorrigeerde veneuze druk voor mannen met een normale tractus circulatorius. Voor de eerste groep neemt de veneuze druk *hogere waarden* aan dan voor de tweede. Dit verschil kon voor de vrouwen niet geconstateerd worden.
- e. Voor *vrouwen met een chronische anaemie* werd geen verschil in veneuze druk geconstateerd in vergelijking met de vrouwen met een normale tractus circulatorius en zonder anaemie.
- f. Voor *mannen met emphyseem* is de gecorrigeerde veneuze druk eveneens verschillend van de gecorrigeerde veneuze druk voor mannen met een normale tractus respiratorius. De veneuze druk neemt nu *lagere waarden* aan dan die voor mannen met een normale tractus respiratorius en circulatorius. Voor de vrouwen met emphyseem waren te weinig waarnemingen gegeven om te kunnen toetsen of een dergelijk verschil in veneuze druk ook voor vrouwen bestaat.

MEMORANDUM I *

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese

De toetsing van een hypothese H_0 berust steeds op een aantal waarnemingen x_1, x_2, \dots, x_n van één of meer stochastische grootheden **, of op enige groepen van waarnemingen (b.v. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een *toetsingsgrootheid* u (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waarge-

* Deze memoranda zijn slechts bedoeld ter oriëntatie en streven niet naar volledigheid of volledige exactheid.

** Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een *collectie* (*universum*, *populatie*) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door *onderstreepte* letters.

nomen waarden x_1, x_2, \dots, x_n een waarde aanneemt, die berekend kan worden (b.v.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootte wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat H_0 juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootte kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van \underline{u} , en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat \underline{u} een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese H_0 , gelijk is aan een gegeven getal α , zodat Z dus van α afhankelijk is*. Z heet de *kritieke zône* van de toets, α de *onbetrouwbaarheidsdrempel* (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verworpt nu H_0 op grond van de waarnemingen x_1, x_2, \dots, x_n , indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van \underline{u} in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment „significant” is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien H_0 juist is, gelijk aan α . Derhalve is α de *kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese*, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met $\alpha = 0,05$ resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot *aanvaarding* van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelfs alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze *nevenvoorwaarden* dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de *overschrijdingskans* k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α , waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α , waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootte nog juist in de (bij α behorende) kritieke zône Z ligt. *Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α , dan wordt H_0 verworpen, indien $k \leq \alpha$ is.*

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijkte men b.v. de tweede hieronder gegeven literatuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

LITERATUUR

- J. NEYMAN, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.
J. HEMELRIJK en H. R. VAN DER VAART, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, *Statistica* 4 (1950) p. 54—66.

* Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

MEMORANDUM II

De χ^2 -toets voor onafhankelijkheid van 2 grootheden

Bij toepassing van de χ^2 -toets, voor het toetsen van de hypothese H_0 , dat 2 stochastische grootheden \underline{x} en \underline{y} onafhankelijk zijn, wordt de puntenwolk van de waarnemingen $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ door een aantal horizontale en verticale lijnen in groepen verdeeld. Deze lijnen worden zodanig getrokken, dat in iedere groep ongeveer evenveel waarnemingen liggen.

Zijn de aantallen horizontale lijnen en verticale lijnen, die getrokken worden, resp. $r - 1$ en $s - 1$, dan kiezen wij r en s zodanig, dat $\frac{N}{rs} \geq 10$ is en zo mogelijk in de buurt van 20 ligt. Hierbij is N het totale aantal waarnemingen. Wanneer nl. $r - 1$ horizontale en $s - 1$ verticale lijnen getrokken worden op boven beschreven wijze, is, onder de hypothese H_0 , de verwachting van de aantallen punten in ieder van de rs door de verticale en horizontale lijnen bepaalde vakken, ongeveer gelijk aan $\frac{N}{rs}$. Voor toepassing van de χ^2 -toets is het noodzakelijk, dat deze aantallen ≥ 10 zijn.

In het algemeen worden r en s ongeveer even groot gekozen, terwijl de keuze soms door de aard van het speciale onderzoek bepaald wordt.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de χ^2 -toets voor onafhankelijkheid alleen gebruikt kan worden voor een groot aantal waarnemingen. Wanneer het aantal klein is, kan men beter de exacte toetsingsmethode der Dubbele Dichotomie toepassen.

Nadat de horizontale en verticale lijnen aangebracht zijn, worden de aantallen punten in de rs vakken geteld. Stel deze aantallen zijn $f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{r,s}$. Het volgende schema wordt nu opgesteld:

$f_{1,1}$ $w_{1,1}$ $t_{1,1}$	$f_{1,2}$ $w_{1,2}$ $t_{1,2}$			$f_{1,s-1}$ $w_{1,s-1}$ $t_{1,s-1}$	$f_{1,s}$ $w_{1,s}$ $t_{1,s}$	V_1
$f_{2,1}$ $w_{2,1}$ $t_{2,1}$	$f_{2,2}$ $w_{2,2}$ $t_{2,2}$			$f_{2,s-1}$ $w_{2,s-1}$ $t_{2,s-1}$	$f_{2,s}$ $w_{2,s}$ $t_{2,s}$	V_2
$f_{R-1,1}$ $w_{R-1,1}$ $t_{R-1,1}$	$f_{R-1,2}$ $w_{R-1,2}$ $t_{R-1,2}$			$f_{R-1,s-1}$ $w_{R-1,s-1}$ $t_{R-1,s-1}$	$f_{R-1,s}$ $w_{R-1,s}$ $t_{R-1,s}$	V_{R-1}
$f_{R,1}$ $w_{R,1}$ $t_{R,1}$	$f_{R,2}$ $w_{R,2}$ $t_{R,2}$			$f_{R,s-1}$ $w_{R,s-1}$ $t_{R,s-1}$	$f_{R,s}$ $w_{R,s}$ $t_{R,s}$	V_R
H_1	H_2			H_{s-1}	H_s	N

In bovenstaand schema zijn $H_1, H_2, \dots, H_s; V_1, V_2, \dots, V_r$ de zgn. „randtotalen”, N is het totale aantal waarnemingen.

Wanneer x en y werkelijk twee onafhankelijke grootheden zijn, dan bezitten, bij gegeven randtotalen, de waarden $f_{i,j}$ als verwachting de waarden:

$$W_{i,j} = \frac{H_i V_j}{N}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Deze waarden $W_{i,j}$ zijn dus uit de gegeven randtotalen te berekenen en worden in het schema ingevuld. Daarna wordt voor ieder der r s vakken de waarde

$$t_{ij} = \frac{(f_{i,j} - W_{i,j})^2}{W_{i,j}}$$

bepaald en weer in het schema ingevuld.

Als toetsingsgrootte bij deze toets wordt de grootte $\underline{\chi}^2$ gebruikt, met

$$\underline{\chi}^2 = (\underline{t}_{1,1} + \dots + \underline{t}_{1,s}) + (\underline{t}_{2,1} + \dots + \underline{t}_{2,s}) + \dots + (\underline{t}_{r,1} + \dots + \underline{t}_{r,s}) = \sum_{i,j} t_{i,j},$$

welke onder de hypothese H_0 een χ^2 -verdeling bezit, met $(r - 1)(s - 1)$ vrijheidsgraden. (D.i. het aantal f 's dat vrij gevarieerd kan worden, zonder de randtotalen te wijzigen).

Voor deze χ^2 -verdeling bestaan tabellen en nomogrammen, die men in vrijwel ieder statistisch leerboek kan vinden.

Grote waarden van χ^2 wijzen op grote verschillen tussen de gevonden aantallen $f_{i,j}$ en hun verwachtingen $W_{i,j}$, berekend in de onderstelling, dat H_0 juist is. We verwerpen daarom de hypothese H_0 indien

$$\underline{\chi}^2 \geq \chi_{\alpha}^2$$

is, waarbij χ_{α}^2 de waarde van χ^2 is, waarvoor

$$P[\underline{\chi}^2 \geq \chi_{\alpha}^2] = \alpha$$

Hierin is α de onbetrouwbaarheidsdrempel. De hypothese H_0 zal dan gemiddeld in een fractie α van die gevallen, waarin H_0 juist is, en dan ten onrechte verworpen worden.

De waarde χ_{α}^2 , waarvoor bovenstaande betrekking geldt, kan gemakkelijk uit de tabellen of nomogrammen van de χ^2 -verdeling bepaald worden.

LITERATUUR:

- M. G. KENDALL, The Advanced Theory of Statistics, Volume I (London 1947).
 A. M. MOOD, Introduction to the Theory of Statistics (London 1950).
 R. A. FISHER and F. YATES, Statistical Tables, (London 1949).

MEMORANDUM III

Betrouwbaarheidsintervallen (algemeen)

Zij x een stochastische grootte, die een verdelingsfunctie bezit die, op een onbekende parameter θ na, geheel bekend is (θ kan b.v. het gemiddelde van x zijn, of de spreiding of iets dergelijks), dan kan men de vraag stellen uit een aantal waarnemingen van x een schatting voor θ af te leiden.

Een *betrouwbaarheidsinterval* I voor θ is een interval, waarvan de grenzen afhankelijk zijn van de waarnemingen x_1, \dots, x_n van x , en dat de eigenschap bezit, behoudens een zekere gegeven onbetrouwbaarheid α , de juiste waarde van θ te bevatten. Dit betekent, dat bij een serie bepalingen van betrouwbaarheidsintervallen slechts in ongeveer een fractie α van deze gevallen het interval I zo zal uitvallen, dat het θ niet bevat. Hierbij is dus θ constant en het interval I

veranderlijk (en wel stochastisch). Hierin ligt het grote verschil met een zgn. voorspellingsinterval, d.i. een gegeven vast interval, waar een stochastisch punt met een zekere waarschijnlijkheid in valt.

Het *algemene principe* ter bepaling van een betrouwbaarheidsinterval is het volgende: zij T een toets voor de hypothese $\theta = \theta_0$, dan is I de verzameling van die waarden θ_0 die bij toepassing van T op grond van de gevonden waarnemingen x_1, \dots, x_n *niet voor verwerping in aanmerking komen*. Is T toegepast met een onbetrouwbaarheidsdrempel α , dan is dit ook de onbetrouwbaarheidsdrempel van het betrouwbaarheidsinterval.

LITERATUUR

- M. G. KENDALL, The Advanced Theory of Statistics, London 1946, deel II, p. 62—84.
A. M. MOOD, Introduction to the Theory of Statistics, London 1950, p. 220.
J. NEYMAN, First course in probability and statistics, N.Y. 1950.

