Département de Statistique
du
Centre Mathématique,
Amsterdam.

Directeur du Département: Prof. Dr D.van Dantzig
Chef de la Consultation Statistique: Prof. Dr J.Hemelrijk.

Rapport S 96

Quelques considérations sur la théorie statistique des faisceaux de fibres,

par

H.Breny, Dr. Sc.
Chargé de recherches de l'International Wool Secretariat.
Hôte du Centre Mathématique, Juin-Septembre 1952.

1952.

I Synthèse inductive.

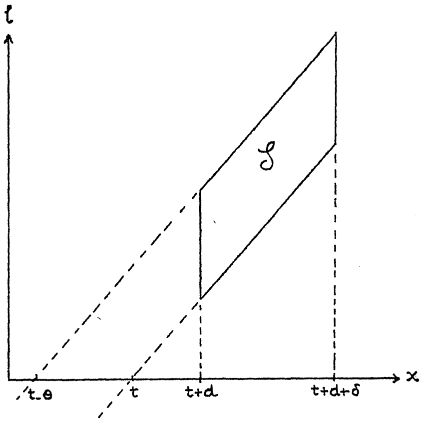
a) Afin d'obtenir un modèle statistique d'un fil parfaitement régulier, (1,2) on représente ce fil comme un faisceau de fibres cylindriques, de section constante, parallèles entre elles et à l'axe du fil, ce dernier étant choisi comme axe des abscisses; nous considèrerons tout d'abord une longueur 2L, très grande mais finie, du fil, et ferons ensuite tendre L vers l'infini. Nous appellerons tête d'une fibre celle de ses extrémités dont l'abscisse est la plus grande, et nous ferons les hypothèses suivantes:

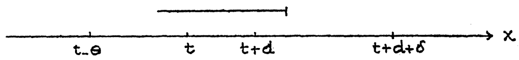
1) la probabilité qu'une tête de fibre se trouve entre les abscisses x et $x+dx$ est $\frac{dx}{2L}$
2) la probabilité qu'une fibre ait une longueur $< l$ est $F(l)$ et ce, indépendamment de la position de la tête de cette fibre; nous admettrons l'existence de $\bar{l} = \int_0^\infty l\,dF(l)$.
3) le nombre moyen de têtes de fibres par unité de longueur est N .

$F(l)$ et N sont les données caractéristiques du fil considéré.

b) Dans ces conditions, lorsque L tend vers l'infini, la fonction $u(x)-u(o)$, exprimant (algébriquement) le nombre de têtes de fibres entre les abscisses o et x , devient la fonction aléatoire bien connue liée à la loi de Poisson (3), et l'on peut représenter de la manière suivante la construction de la fonction $n(x)$ représentant le nombre de fibres présentes à l'abscisse x: l'axe des abscisses étant divisé en segments contigus de longueur unité: $\ldots(x-i, x-i+1)\ldots(x, x+1)\ \ldots$, pour chacun de ces segments, un tirage au sort détermine le nombre de têtes de fibres présentes dans ce segment: $\underline{u}_i = \underline{u}(x+i+1) - \underline{u}(x_i)$ lequel est une variable de Poisson de moyenne N; ces $\underline{u}_i$ têtes de fibres sont alors distribuées sur ce segment avec une densité de probabilité uniforme; enfin, $\underline{u}_i$ tirages indépendants dans la population caractérisée par $F(l)$ déterminent la longueur de chacune de ces fibres.

c) La probabilité qu'une fibre traverse 2 sections déterminées, d'abscisses t et $t+d$, mais ne traverse pas la section d'abscisse $t+d+\delta$ ni la section d'abscisse $t-\theta$ est donnée par:



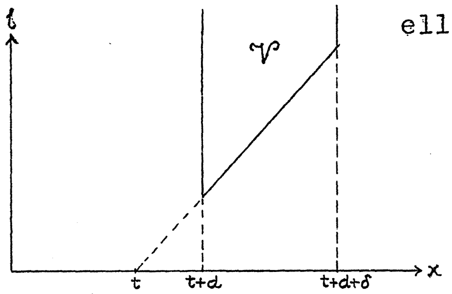


$$\int_{t+d}^{t+d+\delta} \frac{dx}{2L} \int_{x-t}^{x-t+\theta} dF(\ell) = \frac{1}{2L} \iint_{\mathcal{S}} dx\,dF(\ell),$$

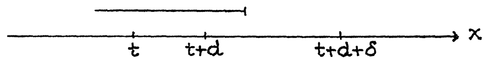
et ne dépend donc pas de t. Nous écrirons:

$$S(d;\theta,\delta) = \frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{S}} dx\,dF(\ell).$$

Si, dans cette expression, on fait $\theta=\infty$, on obtient la probabilité qu'une fibre traverse la section $t+d$, mais pas la section $t+d+\delta$; elle vaut $\frac{\bar{\ell}}{2L} V(d;\delta)$, où:

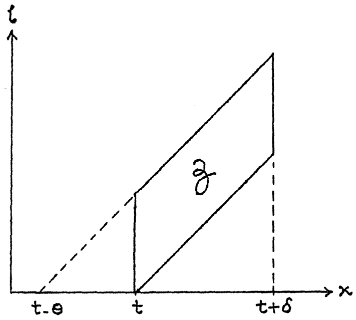


$$V(d;\delta) = \frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{V}} dx\,dF(\ell).$$

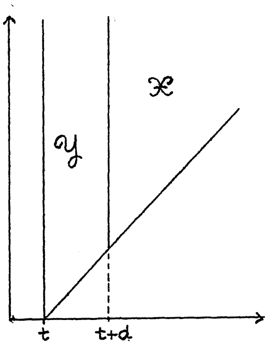


De même, si, dans $S(d;\theta,\delta)$ on fait $d=0$, on obtient la probabilité $\frac{\bar{\ell}}{2L} Z(\theta,\delta)$ qu'une fibre traverse la section d'abscisse t, mais pas les sections d'abscisses $t-\theta$ ou $t+\delta$, on a:

$$Z(\theta,\delta) = \frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{Z}} dx\,dF(\ell).$$



De la même manière, on obtient les probabilités suivantes: passage d'une fibre à travers la section t, mais pas à travers la section $t+\delta$; c'est $\frac{\bar{\ell}}{2L} Y(\delta)$, où



$$Y(\delta) = V(0;\delta) = \frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{Y}} dx\,dF(\ell)$$

passage d'une fibre à travers les sections t et $t+d$; c'est $\frac{\bar{\ell}}{2L} X(d)$, où $X(d) = V(d;\infty) = \frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{X}} dx\,dF(\ell)$;

passage d'une fibre à travers la section d'abscisse t, sans autre condition; c'est

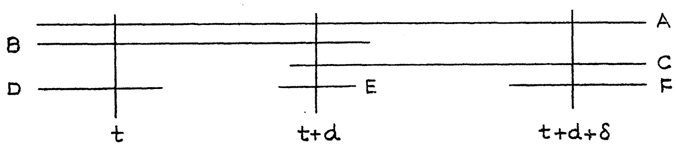
$$\frac{\bar{\ell}}{2L} Z(\infty,\infty) = \frac{\bar{\ell}}{2L} \left[\frac{1}{\bar{\ell}} \iint_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}} dx\,dF(\ell) \right] = \frac{1}{2L} .$$

En comparant les domaines d'intégration définis ci-dessus, on a immédiatement les relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} X(d)+Y(d)=1 & \quad (a) \\ Z(\theta,\delta)=Y(\theta)+Y(\delta)-Y(\theta,\delta) & \quad (b) \\ V(d;\delta)=Y(d+\delta)-Y(\delta) & \quad (c) \\ V(d;\delta)+X(d+\delta)=X(\delta) & \quad (d) \\ Z(\theta,\delta)+V(\theta;\delta)=Y(\theta) & \quad (e) \end{array}\right\} \quad (1)$$

dont la signification est d'ailleurs évidente.

d) L'ensemble des fibres qui traversent l'une au moins des sections d'abscisses t, $t+d$, $t+d+\delta$ se répartit en 6 groupes, suivant le schéma ci-contre:



La distribution du nombre des fibres du groupe A est une distribution binomiale, portant sur $2NL$ fibres, et de valeur moyenne:

$$2NL\frac{\bar{\ell}}{2L}X(d+\delta)=N\bar{\ell}X(d+\delta).$$

La distribution conditionelle du nombre de fibres du groupe B, lorsque le groupe A renferme n_A fibres, est une distribution binomiale, portant sur $2NL-n_A$ fibres, et de moyenne $(2NL-n_A)\frac{\bar{\ell}}{2L}V(\delta;d)$.

(La manière même dont le faisceau de fibres est construit (cfr § b, ci-dessus) montre que la condition que le groupe A contient n_A fibres n'influence pas la probabilité qu'a une quelconque des <u>autres</u> fibres d'appartenir au groupe B ; la même remarque vaut pour les distributions obtenues ci-dessous.)

La distribution conditionnelle du nombre de fibres du groupe C, lorsque les groupes A et B renferment ensemble n_A+n_B fibres est, de même, une distribution binomiale portant sur $2NL-n_A-n_B$ fibres, et de moyenne

$$(2NL-n_A-n_B)\frac{\bar{\ell}}{2L}V(d;\delta).$$

De même, les distributions conditionnelles de n_D, n_E, n_F sont des distributions binomiales de moyennes respectives:

$$(2NL-n_A-n_B-n_C)\frac{\bar{\ell}}{2L}Y(d),$$

$$(2NL-n_A-n_B-n_C-n_D)\frac{\bar{\ell}}{2L}Z(d,\delta),$$

$$(2NL-n_A-n_B-n_C-n_D-n_E)\frac{\bar{\ell}}{2L}Y(\delta).$$

e) Les variables aléatoires $\underline{n}_A, \ldots, \underline{n}_F$, ne sont donc pas indépendantes; mais si on fait tendre L vers l'infini, chacune des distributions ci-dessus tend vers une distribution de Poisson dont la moyenne est:

pour $\underline{n}_A$: $N\bar{\ell}X(d+\delta)$

pour $\underline{n}_B$: $N\bar{\ell}V(\delta;d)$

pour $\underline{n}_C$: $N\bar{\ell}V(d;\delta)$

pour $\underline{n}_D$: $N\bar{\ell}Y(d)$

pour $\underline{n}_E$: $N\bar{\ell}Z(d,\delta)$

pour $\underline{n}_F$: $N\bar{\ell}Y(\delta)$.

A la limite donc, ces diverses variables sont indépendantes, et leur fonction génératrice conjointe $\Omega[u_A,\ldots,u_F] \equiv \mathscr{E} u_A^{\underline{n}_A}\ldots u_F^{\underline{n}_F}$ s'écrit:

$$\exp N\bar{\ell}\left\{(u_A-1)X(d+\delta)+(u_B-1)V(\delta;d)+(u_C-1)V(d;\delta)+(u_D-1)Y(d)+(u_E-1)Z(d,\delta)+(u_F-1)Y(\delta)\right\}$$

f) Posons: $\underline{n}(t)=\underline{n}$ $\quad \underline{n}(t+d)=\underline{p}$ $\quad \underline{n}(t+d+\delta)=\underline{q}$

$$\Phi_3[u;v,d;w,\delta] = \mathscr{E}u^{\underline{n}}v^{\underline{p}}w^{\underline{q}} = \sum_0^\infty P[n;p,d;q,\delta]\,u^n v^p w^q.$$

On a:

$$\Phi_3 = \mathscr{E}u^{\underline{n}_A+\underline{n}_B+\underline{n}_D}\,v^{\underline{n}_A+\underline{n}_B+\underline{n}_C+\underline{n}_E}\,w^{\underline{n}_A+\underline{n}_C+\underline{n}_F}$$

$$= \mathscr{E}(uvw)^{\underline{n}_A}(uv)^{\underline{n}_B}(vw)^{\underline{n}_C}u^{\underline{n}_D}v^{\underline{n}_E}w^{\underline{n}_F} = \Omega[uvw,uv,vw,u,v,w]$$

$$= \exp N\bar{\ell}\left\{(uvw-1)X(d+\delta)+(uv-1)V(\delta;d)+(vw-1)V(d;\delta)\right.$$

$$\left.+(u-1)Y(d)+(v-1)Z(d,\delta)+(w-1)Y(\delta)\right\}$$

$$= \exp N\bar{\ell}\left\{(u-1)\left[Y(d)+V(\delta;d)+X(d+\delta)\right]\right.$$

$$+(v-1)\left[Z(d,\delta)+V(d;\delta)+uV(\delta;d)+uX(d+\delta)\right]$$

$$+(w-1)\left[Y(\delta)+vV(d;\delta)+uvX(d+\delta)\right]$$

ou, par (1):

$$\Phi_3 = \exp N\bar{\ell}\left\{(u-1)+(v-1)\left[Y(d)+uX(d)\right]+(w-1)\left[Y(\delta)+vV(d;\delta)+uvX(d+\delta)\right]\right. . \tag{2}$$

g) On en conclut immédiatement que la fonction génératrice de $\underline{n}$ et $\underline{p}$ est:

$$\Phi_2[u;v,d] \equiv \sum P[n;p,d]u^n v^p = \Phi_3[u;v,d;1,\delta] = \exp N\bar{\ell}\left\{(u-1)+(v-1)\left[Y(d)+uX(d)\right]\right\} \tag{3}$$

et celle de $\underline{n}$:

$$\Phi_1[u] \equiv \sum P[n]u^n = \Phi_2[u;1,d] = \exp N\bar{\ell}(u-1) \tag{4}$$

de telle sorte que:

$$\Phi_2[u;v,d] = \Phi_1[u].\exp N\bar{\ell}(v-1)[Y(d)+uX(d)]$$

$$\Phi_3[u;v,d;w,\delta] = \Phi_2[u;v,d]\exp N\bar{\ell}(w-1)[Y(\delta)+vV(d;\delta)+uvX(d+\delta)].$$

On démontre aisément, par la même méthode, que cette récurrence est générale et que l'on a, avec des notations évidentes:

$$\ln\Phi_{n+1}[u_0;u_1,d_1;\ldots;u_n,d_n] = \ln\Phi_n[u_0;u_1,d_1;\ldots;u_{n-1},d_{n-1}] + \Omega_n \tag{5}$$

avec:

$$\Omega_n = N\bar{\ell}(u_n-1)\Big[Y(d_n)+u_{n-1}V(d_{n-1};d_n)+\ldots$$
$$+ u_{n-1}\ldots u_1 V(d_1;d_2+\ldots+d_n)$$
$$+ u_{n-1}\ldots u_0 X(d_1+\ldots+d_n)\Big].$$

On remarquera qu'en vertu de (4), $\underline{n}(t)$ est une variable de Poisson, de moyenne $T=N\bar{\ell}$.

h) On peut, à partir de (3), déterminer les "probabilités de transition":

$$P[p|n,d] = Pr\{\underline{n}(t+d)=p\,|\,\underline{n}(t)=n\}.$$

On a en effet:

$$P[p|n,d] = P[n].P[p|n,d]$$

d'où:

$$\Phi_2[u;v,d] = \sum_{n=0}^{\infty} P[n]\Big\{\sum_{p=0}^{\infty} P[p|n,d]v^p\Big\}u^n.$$

Mais:

$$\Phi_2[u;v,d] = \exp N\bar{\ell}\{-1+Y(d)(v-1)+u[1+(v-1)X(d)]\}$$

$$= \exp N\bar{\ell}\{-1+(v-1)Y(d)\}.\sum_0^{\infty}\frac{(N\bar{\ell})^n}{n!}[1+(v-1)X(d)]^n u^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[n]\Big\{[\exp N\bar{\ell}(v-1)Y(d)].[1+(v-1)X(d)]^n\Big\}u^n$$

d'où:

$$\sum_{p=0}^{\infty} P[p|n,d]v^p = [\exp N\bar{\ell}(v-1)Y(d)].[1+(v-1)X(d)]^n. \tag{3 bis}$$

i) Pour de petites valeurs de d, on a:

$$X(d) = 1-\frac{d}{\bar{\ell}}+o(d) \qquad Y(d) = \frac{d}{\bar{\ell}}+o(d)$$

et on tire de (3 bis):

$$\sum_{p=0}^{n} P[p|n,d]v^p = \exp[-N\bar{\ell}Y(d)]\exp[vN\bar{\ell}Y(d)][1-X(d)+vX(d)]^n$$

$$= [1-Nd+o(d)][1+Nvd+o(d)][v^n(1-n\frac{d}{\bar{\ell}}) + n\frac{d}{\bar{\ell}}v^{n-1}+o(d)]$$

$$= n\frac{d}{\bar{\ell}}v^{n-1} + [1-(T+n)\frac{d}{\bar{\ell}}]v^n + T\frac{d}{\bar{\ell}}v^{n+1} + o(d)$$

ou, en d'autres termes:

$$\left.\begin{aligned} P[p|n,d] &= o(d) \quad \text{si } |n-p|>1. \\ &= n\frac{d}{\bar{\ell}} + o(d) \quad \text{si } p=n-1. \\ &= 1-(T+n)\frac{d}{\bar{\ell}} + o(d) \quad \text{si } p=n. \\ &= T\frac{d}{\bar{\ell}} + o(d) \quad \text{si } p=n+1. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

II Cas markoffien.

a) L'étude approfondie de la fonction aléatoire $n(t)$ définie par (5) est rendue très difficile par le fait que la distribution de $\underline{n}(t)$ sous les conditions $\underline{n}(t-x_1)=n_1, \ldots, \underline{n}(t-x_s)=n_s$ $(0<x_1<x_2\ldots<x_s)$ ne dépend pas seulement de n_1 mais aussi de $n_2,\ldots,n_s$. Il n'en est autrement que si l'on a:

$$P[n;p_1,d_1;p_2,d_2;\ldots;p_s,d_s] = P[n]P[p_1|n,d_1]\ldots P[p_s|p_{s-1},d_s]. \qquad (7)$$

Lorsque $s=2$, (7) entraine comme conséquence l'équation dite "de Chapman-Kolmogorov":

$$\sum_p P[p|n,d]P[q|p,\delta] = P[q|n,d+\delta]. \qquad (8)$$

Il n'est toutefois pas connu, à l'heure actuelle, si (8) caractérize les fonctions satisfaisant à (7), que l'on appelle "fonctions markoffiennes". Il est probable qu'il n'en est pas ainsi.

b) Nous pouvons déduire de (8) une condition nécessaire pour que $\underline{n}(t)$ soit une fonction markoffienne. On a en effet:

$$\sum_p\Big\{\sum_\tau P[\tau|n,d]\,P[p|\tau,\delta]\Big\}u^p = \sum_\tau P[\tau|n,d]\sum_p P[p|\tau,\delta]\,u^p$$

$$= e^{(u-1)N\bar{\ell}Y(\delta)}\sum_\tau P[\tau|n,d][1+(u-1)X(\delta)]^\tau$$

$$= e^{(u-1)N\bar{\ell}[Y(\delta)+Y(d)X(\delta)]}[1+(u-1)X(d)X(\delta)]^n.$$

D'autre part:

$$\sum_{z} P[p|n,d+\delta]\,u^{p} = e^{(u-1)N\bar{\ell}\,y(d+\delta)}\,[1+(u-1)\,X(d+\delta)]^{n}$$

on doit donc avoir, pour toute valeur de u:

$$e^{(u-1)N\bar{\ell}[y(\delta)+y(d)X(\delta)]}\,[1+(u-1)\,X(d)X(\delta)]^{n} = e^{(u-1)N\bar{\ell}\,y(d+\delta)}\,[1+(u-1)\,X(d+\delta)]^{n}$$

ce qui entraine:

$$y(\delta)+y(d)X(\delta) = y(d+\delta)$$

$$X(d)\,X(\delta) = X(d+\delta).$$

Ces 2 conditions sont identiques en vertu de (1a); $X(u)$ étant une fonction continue de u, on doit avoir:

$$X(u) = e^{au+b}$$

a et b étant des constantes; mais il est aisé de voir que:

$$X(u) = \frac{1}{\bar{\ell}}\int_{u}^{\infty}[1-F(\ell)]\,d\ell$$

donc:

$$F(u)-1 = \bar{\ell}\,\frac{dX(u)}{du} = a\bar{\ell}\,e^{au+b}$$

ou:

$$F(u) = 1+a\bar{\ell}\,e^{au+b}$$

On doit avoir:

$F(\infty)=1$ donc $a<0$.

$\int_{0}^{\infty}[1-F(u)]\,du = \bar{\ell}$ donc $e^{b}=1$ ou $b=0$.

$F(0)=0$ donc $a=-\frac{1}{\bar{\ell}}$.

Finalement:

$$F(u) = 1-\frac{1}{\bar{\ell}}\,e^{-\bar{\ell}u} \tag{9}$$

Ceci entraine:

$$\left.\begin{aligned} X(d+\delta) &= X(d)\,X(\delta) \\ y(d)X(\delta) &= y(d+\delta)-y(\delta) = V(d;\delta) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

La condition (9) est donc nécessaire pour que $\underline{n}(t)$ soit une fonction markoffienne; elle est aussi suffisante, car on a:

$$\sum_{n,p,q} P[n]\,P[p|n,d]\,P[q|p,\delta]\,u^n v^p w^q$$

$$= \sum_n P[n]\,u^n \sum_p P[p|n,d].e^{N\bar{e}(w-1)Y(\delta)}\left[1-X(\delta)+X(\delta)w\right]^p v^p$$

$$= e^{N\bar{e}(w-1)Y(\delta)} \sum_n P[n]\,u^n.e^{\{v[1-X(\delta)+X(\delta)w]-1\}Y(d)}.\left\{1-X(d)+X(d)v[1-X(\delta)+X(\delta)w]\right\}^n$$

$$= e^{N\bar{e}(w-1)Y(\delta)+N\bar{e}(v-1)Y(d)+N\bar{e}(w-1)vX(\delta)Y(d)}$$

$$.\,e^{N\bar{e}[u+u(v-1)X(d)+uv(w-1)X(d)X(\delta)-1]}$$

$$= \exp N\bar{e}\left\{(u-1)+(v-1)[Y(d)+uX(d)]+(w-1)\left[Y(\delta)+vY(d)X(\delta)+uvX(d)X(\delta)\right]\right\}$$

ce qui est identique à $\Phi_3[u;v,d;w,\delta]$ si on tient compte de (10). La formule (7) se démontre exactement de même, en utilisant la relation:

$$X(d)\,V(d;\theta) = X(\delta)Y(d+\theta) - X(\delta)Y(\theta) = Y(d;\delta+\theta).$$

La condition (9) est donc bien suffisante; si elle est satisfaite, la fonction aléatoire $n(t)$ est entièrement définie par (4),(3 bis) et (7).

III <u>Distribution du minimum de $n(t)$ sur un intervalle.</u>

(<u>cas markoffien</u>).

a) Posons: $\underline{\mu}(L) = \min\limits_{x\leq t\leq x+L} \underline{n}(t)$. Soient en outre:

$$P_\tau(L) = Pr.\left\{\underline{\mu}(L) \geqq \tau\right\}$$

$$P_\tau^K(L) = Pr.\left\{\underline{\mu}(L)\geqq\tau \;\&\; \underline{n}(L)=K\right\} \qquad (K\geqq p).$$

On suppose que $\underline{n}(t)$ est une fonction markoffienne et on cherche $P_\tau(L+\Delta)$. On a:

$$P_\tau^K(L+\Delta) = Pr.\left\{\underline{\mu}(L+\Delta)\geqq\tau\right\}.\,Pr.\left\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{\mu}(L+\Delta)\geqq\tau\right\}$$

$$= Pr.\left\{\underline{\mu}(L)\geqq\tau\right\}.\,Pr.\left\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{\mu}(L)\geqq\tau\right\} + o(\Delta)$$

$$= \sum_i P_\tau^{K+i}.\,Pr.\left\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{n}(L)=K+i\right\} + o(\Delta)$$

$i = 1, 0, -1$ si $K>p$

$i = 1, 0$ si $K=p$.

Mais, en vertu de (6):

$$Pr.\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{n}(L)=K+1\} = (K+1)\frac{\Delta}{\ell}+o(\Delta)$$

$$Pr.\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{n}(L)=K\} = 1-(T+K)\frac{\Delta}{\ell}+o(\Delta)$$

$$Pr.\{\underline{n}(L+\Delta)=K \mid \underline{n}(L)=K-1\} = T\frac{\Delta}{\ell}+o(\Delta).$$

Par conséquent:

$$P_z^z(L+\Delta) = P_z^z(L)\left[1-(T+z)\frac{\Delta}{\ell}\right]+P_z^{z+1}(L).(z+1)\frac{\Delta}{\ell}+o(\Delta)$$

$$P_z^{z+i}(L+\Delta)=P_z^{z+i-1}(L).T\frac{\Delta}{\ell}+P_z^{z+i}(L)\left[1-(T+z+i)\frac{\Delta}{\ell}\right]+P_z^{z+i+1}(L).(z+i+1)\frac{\Delta}{\ell}+o(\Delta)$$

On a évidemment:

$$P_z(L)=\sum_{K=z}^{\infty}P_z^K(L)$$

Par conséquent on a:

$$P_z(L+\Delta)-P_z(L)=\frac{\Delta}{\ell}\left\{T\sum_z^{\infty}P_z^K(L)-T\sum_z^{\infty}P_z^K(L)-\sum_z^{\infty}K P_z^K(L)+\sum_{z+1}^{\infty}K P_z^K(L)\right\}+o(\Delta)$$

ou, en faisant tendre Δ vers o:

$$\frac{dP_z(L)}{dL}=-\frac{z}{\ell}P_z^z(L).$$

b) On a évidemment:

$$P_z^z(L)=P_z(L).Pr.\{\underline{n}(L)=z \mid \underline{\mu}(L)\geqq z\}.$$

Mais, en vertu du caractère markoffien de $n(t)$, on a aussi:

$$Pr.\{\underline{n}(L)=z \mid \underline{\mu}(L)\geqq z\}=\lim_{\Delta\to 0}Pr.\{\underline{n}(L)=z \mid \underline{n}(L-\Delta)\geqq z\}.$$

D'autre part:

$$Pr.\{n(L)=z \mid n(L-\Delta)\geqq z\}=\frac{Pr.\{n(L-\Delta)\geqq z \,\&\, n(L)=z\}}{Pr.\{n(L-\Delta)\geqq z\}}$$

mais:

$$Pr.\{n(L-\Delta)\geqq z \,\&\, n(L)=z\}=e^{-T}\frac{T^z}{z!}+O(\Delta)$$

$$Pr.\{n(L-\Delta)\geqq z\}=e^{-T}\sum_z^{\infty}\frac{T^i}{i!}.$$

Donc:

$$Pr.\{n(L)=z \mid n(L-\Delta)\geqq z\}=\frac{T^z}{z!\sum_z^{\infty}\frac{T^i}{i!}}+O(\Delta),$$

d'où:

$$P_\tau^\tau(L) = P_\tau(L) \cdot \frac{T^\tau}{\tau!\sum_\tau^\infty \frac{T^i}{i!}}$$

On en déduit:

$$\frac{dP_\tau(L)}{dL} = -\frac{\tau T^\tau}{\tau!\,\ell \sum_\tau^\infty \frac{T^i}{i!}} P_\tau(L)$$

ou:

$$P_\tau(L) = C.\exp\left\{-\frac{\tau T}{\tau!\sum_\tau^\infty \frac{T^i}{i!}} \frac{L}{\ell}\right\}.$$

La constante C se détermine par la condition évidente: $P_\tau(o) = = e^{-T}\sum_\tau^\infty \frac{T^i}{i!}$. On a donc finalement, en désignant par ϖ_i et Ω_i les quantités:

$$\varpi_i = e^{-T}\frac{T^i}{i!}, \quad \Omega_i = \sum_{K=i}^\infty \varpi_K$$

(dont il existe des tables):

$$\underline{\underline{P_\tau(L) = \Omega_\tau \exp\left\{-\frac{\tau L}{\ell}\frac{\varpi_\tau}{\Omega_\tau}\right\}}}. \qquad (12)$$

c) Si $\tau = o$, $P_o(L) \equiv 1$; si $\tau > o$, $P_\tau(L)$ est une fonction décroissante de L, avec $\lim_{L\to\infty} P_\tau(L) = o$. On peut voir directement que $P_\tau(L)$ est une fonction décroissante de τ de la manière suivante:

on a, en posant: $\alpha_\tau = \sum_\tau^\infty \frac{T^i}{i!}$

$$\frac{P_{\tau+1}(L)}{P_\tau(L)} = \frac{\alpha_\tau - \frac{T^\tau}{\tau!}}{\alpha_\tau} \exp\left\{-\frac{\tau T^\tau}{\tau!}\frac{L}{\ell}\left[\frac{T}{\tau\alpha_{\tau+1}} - \frac{1}{\alpha_\tau}\right]\right\}.$$

Posant:

$$K_\tau = \frac{\alpha_\tau - \frac{T^\tau}{\tau!}}{\alpha_\tau} < 1$$

$$X_\tau = \frac{\tau T^\tau}{\tau!}\frac{L}{\ell}\frac{1}{\alpha_\tau\alpha_{\tau+1}} > 0$$

on a:

$$\frac{P_{\tau+1}(L)}{P_\tau(L)} = K_\tau \exp\left\{-X_\tau\left[\frac{T}{\tau}\alpha_\tau - \alpha_\tau + \frac{T^\tau}{\tau!}\right]\right\}$$

$$= K_\tau \exp\left\{-X_\tau\left[\frac{T^\tau}{\tau!} - \alpha_\tau\left(1 - \frac{T}{\tau}\right)\right]\right\} \qquad (13)$$

Le facteur entre crochets dans (13) est toujours positif; cela est évident si $T \geqq \tau$; si $T < \tau$, on a l'inégalité bien connue:

$$\alpha_z < \frac{T^z}{(z-1)!}\,\frac{1}{z-T}$$

d'où on tire:

$$\alpha_z\left(1-\frac{T}{z}\right)=\alpha_z\,\frac{z-T}{z} < \frac{T^z}{(z-1)!}\,\frac{1}{z-T}\,\frac{z-T}{z} = \frac{T^z}{z!} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

K_z étant <1, et l'argument de l'exponentielle toujours <0, on a constamment:

$$\frac{P_{z+1}(L)}{P_z(L)} < 1 \tag{14}$$

ou:

$$P_{z+1}(L) < P_z(L).$$

N.B.: (14) entraine d'ailleurs: $\lim_{z\to\infty} P_z(L) = 0$.

Références.

1) Spencer-Smith and Todd ; Journal of the Royal Statistical Society, Suppl.Vol.7 (1941) p. 131.

2) Martindale ; Journal of the Textile Institute, Vol.36 (1943) T 35.

3) Lévy ; Addition des variables aléatoires, Paris (1937) p. 173.