

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 104

Tweede rapport over wachttijden van vliegtuigen bij landing

door
Prof. Dr J.Hemelrijk, H.Kesten en J.Th.Runnenburg

1953

§ 1. Inleiding.

In een vorig rapport over het probleem van wachttijden van vliegtuigen bij landing op één landingsbaan ¹⁾ is nagegaan, welke verkeersdichtheid bij een spitsuur van gegeven lengte toegelaten kan worden, indien men als eis stelt, dat er slechts een bepaalde kleine kans bestaat, dat er in dat spitsuur in totaal meer vliegtuigen zich zullen aanmelden dan er in totaal gedurende die tijd kunnen worden verwerkt. Daar in het bijzonder de toestand over enige decenniën voor het beschouwde probleem van belang is, werd aangenomen dat men dan tot overeenkomsten tussen de verschillende luchtvaartmaatschappijen gekomen zal zijn (analoog aan bestaande internationale overeenkomsten tussen spoorwegmaatschappijen) tengevolge waarvan, althans bij benadering een min of meer "ideale" dienstregeling tot stand zal zijn gekomen, waarbij de aanmeldingstijden bij het bakken volgens dienstregeling op gelijke afstanden van elkaar liggen. Verder werden er twee verschillende onderstellingen gemaakt over de waarschijnlijkheidsverdeling van de vertragingen der vliegtuigen, terwijl de landingstijd van ieder vliegtuig (de tijd vanaf het moment, dat het vliegtuig het sein krijgt, dat het mag gaan landen totdat de landingsbaan vrij is voor het volgende vliegtuig) voor alle vliegtuigen gelijk werd ondersteld.

De numerieke resultaten, die daarbij zijn verkregen, kunnen in het kort als volgt worden samengevat. Beschouwen wij een periode van 2 uur en een landingstijd van 5 minuten, zodat de capaciteit van één landingsbaan gedurende deze 2 uur 24 vliegtuigen bedraagt, dan is er, als men volgens de dienstregeling 18 vliegtuigen in deze twee uur laat aankomen, een kans 0,023 dat er zich ten gevolge van vertragingen toch meer dan 24 vliegtuigen zullen aanmelden. Is de landingstijd 3 minuten, dus de capaciteit in 2 uur 40 vliegtuigen, dan kan men, met hetzelfde voorbehoud volgens de dienstregeling 32 vliegtuigen toelaten in die twee uur. Deze conclusies gelden, indien niet meer dan 25% van de vliegtuigen een tussen 30 minuten en 3 uur gelegen vertraging hebben en de overige vliegtuigen een tussen 0 en 30 minuten gelegen vertraging.

Deze resultaten behoeven om twee redenen aanvulling. In de eerste plaats is de onderstelling van een ideale dienstregeling vooralsnog niet vervuld en daar de dienstregeling niet door de

1) Rapport S 99 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam 1952, door Prof. Dr D.van DANTZIG en J.Th.RUNNENBURG.

luchthaven Schiphol wordt opgesteld maar door de verschillende maatschappijen, die van deze luchthaven gebruik maken, is het geenszins zeker dat men er in zal slagen binnen een overzienbare tijd een dienstregeling als boven bedoeld tot stand te brengen. Om deze reden is het in ieder geval gewenst ook de eventuele situatie te onderzoeken, waarbij dit niet zou gelukken. In de tweede plaats geeft het niet overschrijden van de totale capaciteit in een bepaald tijdsinterval nog geen garantie voor het niet optreden van lange wachttijden. Immers, ook al komen er in dit tijdsinterval in totaal niet meer vliegtuigen binnen dan er kunnen worden verwerkt, dan ontstaan er toch lange wachttijden indien deze vliegtuigen kort na elkaar binnenkomen - en dat is niet uitgesloten -. Het bovengeschetste model verschaftte ons nog geen uitspraak over de waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijden. Een algemener model waarbij deze waarschijnlijkheidsverdeling in principe berekenbaar is werd destijds wel opgesteld maar niet in het rapport opgenomen, daar het tot al te grote mathematische moeilijkheden leidde. Het is om bovenstaande redenen niet uitgesloten, dat de eerstgenoemde resultaten de toestand gunstiger schetsen dan in overeenstemming zal zijn met de werkelijkheid.

In het onderhavige rapport is daarom een ander mathematisch model gebruikt dat vermoedelijk eer pessimistisch dan optimistisch is, maar dat wèl de mogelijkheid biedt tot berekening van de waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijden. Dit model, dat aan de nu op Schiphol bestaande toestand kon worden getoetst (zie § 3), leidt voor de twee boven aangegeven numerieke gevallen tot de volgende conclusies.

Indien er in 2 uur 18 vliegtuigen binnenkomen en de landingstijd 5 minuten is, bedraagt de gemiddelde wachttijd voor een vliegtuig 7,5 minuten. De kans op een wachttijd van meer dan 20, 25 resp. 30 minuten bedraagt voor ieder vliegtuig ongeveer 0,10, 0,05 resp. 0,02. De verwachting van de totale wachttijd in 2 uur voor de 18 binnenkomende vliegtuigen tezamen bedraagt $18 \times 7,5 = 135$ minuten.

Indien er in 2 uur 32 vliegtuigen binnenkomen en de landingstijd 3 minuten bedraagt, is de gemiddelde wachttijd per vliegtuig 6 minuten, dus de verwachting van de totale wachttijd $32 \times 6 = 192$ minuten. De kansen op wachttijden groter dan 15, 18 resp. 21 minuten zijn dan ongeveer 0,10, 0,05 resp. 0,02.

Het gemiddelde aantal vliegtuigen dat wel direct na melding aan het bakken kan landen bedraagt in het eerste geval 75% van het aantal aankomende vliegtuigen en in het tweede geval 80%.

Voor verdere numerieke uitkomsten raapplege men § 5.

Hoewel deze uitkomsten met voorzichtigheid geïnterpreteerd moeten worden daar het model, zoals in de volgende paragraaf zal blijken, o.a. van de nogal pessimistische onderstelling uitgaat dat, althans op de spitsuren en onder ongunstige weersomstandigheden met betrekking tot regularisering van de aanmeldingstijden praktisch niets bereikt zal kunnen worden, terwijl het model bovendien een aantal verwaarlozingen bevat, geven deze uitkomsten toch een nuttige aanvulling van de in het vorige rapport verkregen resultaten, die wellicht een te gunstige indruk van de capaciteit van één landingsbaan zouden kunnen geven. Anderzijds lijkt het vermoeden gerechtvaardigd dat de in dit rapport vermelde uitkomsten een iets te somber beeld van de situatie geven.

§ 2. Het gebruikte model.

Wij beschouwen een spitsuur van T minuten, waarin zich in totaal N vliegtuigen bij het bakken melden. Daarbij onderstellen wij dat de vertragingen van zo ernstige aard zijn dat de waarschijnlijkheidsverdeling van de aanmeldingstijd van ieder van deze vliegtuigen over het beschouwde tijdsinterval homogeen is en dat deze aanmeldingstijden voor de verschillende vliegtuigen onderling onafhankelijk verdeeld zijn. Deze onderstelling, die op het eerste gezicht zeer vergaand lijkt, zal ons niettemin voeren tot een model dat minder ver van de tegenwoordige toestand verwijderd zal blijken te zijn dan men wellicht zou verwachten (vgl. het eind van deze paragraaf en § 3).

Men kan bewijzen (zie § 6, Appendix) dat onder de gemaakte onderstellingen de waarschijnlijkheidsverdeling van het tijdsinterval \underline{z} (2), lopende van de aanmelding van het k^e tot die van het $(k+1)^e$ vliegtuig (in volgorde van aanmelding), voor iedere k gegeven wordt door

$$(1) \quad P [\underline{z} \leq z] = 1 - \left(1 - \frac{z}{T}\right)^N.$$

Stellen wij

$$(2) \quad \lambda = \frac{Na}{T},$$

waarin a de (constant onderstelde) landingstijd van een vliegtuig is, dan gaat het rechterlid van (1) over in

2) Dit tijdsinterval is een stochastische grootheid, d.w.z. een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit. Dergelijke grootheden geven wij aan door onderstreepte letters, terwijl waarden die er door aangenomen kunnen worden door dezelfde letter, niet onderstreept, worden aangegeven.

$$1 - \left(1 - \frac{\lambda z/a}{N}\right)^N,$$

hetgeen voor grote N ongeveer gelijk is aan

$$1 - e^{-\frac{\lambda z}{a}}.$$

Wij kunnen dus de waarschijnlijkheidsverdeling voor het tijdsinterval z tussen twee opeenvolgende aanmeldingen bij benadering voorstellen door

$$(3) \quad P [z \leq z] = 1 - e^{-\frac{\lambda z}{a}}$$

Hierin stelt λ de "verkeersdichtheid" voor, d.i. de totaal voor de N landingen nodige landingstijd gedeeld door de totaal beschikbare tijd.

De in dit rapport gebruikte onderstelling is nu dat de intervallen tussen opeenvolgende landingen niet alleen volgens (3) verdeeld zijn, maar dat zij bovendien onderling onafhankelijk verdeeld zijn. Dit volgt geenszins uit de boven gemaakte onderstellingen; integendeel, deze houden in dat er een zekere afhankelijkheid tussen de verschillende in één spitsuur optredende waarnemingen van z bestaat. Immers als er enkele grote waarden van z optreden, moeten er noodzakelijkerwijze ook kleine optreden. De verschillende waarden van z zullen dus negatief gecorreleerd zijn. Deze correlatie zullen wij verwaarlozen en wij zullen dus het volgende model gebruiken:

De intervallen tussen opeenvolgende aanmeldingen van vliegtuigen in een spitsuur met werkelijke ³⁾ verkeersdichtheid λ en constante landingstijd a , kunnen beschouwd worden als onafhankelijke waarnemingen van een stochastische grootte z , waarvan de waarschijnlijkheidsverdeling door (3) gegeven wordt.

Wegens de grove onderstellingen en verwaarlozingen die tot dit model hebben geleid, kunnen wij het niet zonder meer als voldoende gefundeerd beschouwen. In de volgende paragraaf wordt daarom onderzocht in hoeverre dit model toch in overeenstemming met de (huidige) werkelijke toestand kan worden geacht.

§ 3. Toetsing van het model aan experimentele gegevens.

Het boven voorgestelde model is ook in buitenlandse literatuur gebruikt en aan experimentele gegevens getoetst. Wij doelen daarbij speciaal op het artikel van E.G.BOWEN and T.PEARCEY

3) "werkelijk" in (eventuele) tegenstelling tot "volgens dienstregeling".

(1948)⁴⁾, die ongeveer 1200 intervallen tussen opeenvolgende landingen hebben waargenomen en daarbij een goede overeenstemming met formule (3) hebben gevonden.

De luchthaven Schiphol verschafte ons verder een aantal gegevens over aanmeldingstijden bij het luchtbaan van Schiphol over ongeveer 2 maanden (Januari en Februari 1950) onder ongunstige weersomstandigheden (mist). Uit deze gegevens werden verschillende perioden van zo goed mogelijk constante verkeersdichtheid gezocht en wel:

I. De aankomsten tussen 15.00 en 20.00 uur op alle dagen behalve de Zondagen.

II. De aankomsten tussen 9.00 en 19.00 uur op alle Donderdagen.

III. De aankomsten tussen 9.00 en 19.00 uur op alle Vrijdagen.

Deze laatste twee werden in het bijzonder beschouwd omdat Donderdag en Vrijdag de dagen met de grootste verkeersintensiteit waren. Er waren niet voldoende gegevens beschikbaar om kortere perioden dan de bovengenoemde te beschouwen.

De verwerking van deze gegevens vond als volgt plaats. Voor ieder der drie groepen apart werd het totale aantal binnengekomen vliegtuigen gedeeld door de totale beschouwde tijd. Volgens vergelijking (2) geeft dit een schatting voor $\frac{\lambda}{a}$ bij de betrokken groep waarnemingen. Deze schatting werd in formule (3) ingevuld.

Noemen wij m het totale aantal intervallen tussen opeenvolgende aanmeldingen en geven wij het aantal van deze intervallen dat $\geq z$ is aan met $m(z)$, dan is

$$1 - \frac{m(z)}{m}$$

voor iedere z een schatting van het linkerlid van (3) voor de beschouwde groep waarnemingen, dus

$$\frac{m(z)}{m}$$

is een schatting voor $e^{-\frac{\lambda z}{a}}$, hetgeen wij kunnen schrijven:

$$\frac{m(z)}{m} \approx e^{-\frac{\lambda z}{a}}$$

of

$$(4) \quad m(z) \approx m e^{-\frac{\lambda z}{a}}.$$

Zetten wij dus $m(z)$ uit tegen z , dan moeten wij punten vinden die ongeveer op een exponentiële kromme liggen. Dit is voor de groepen gegevens I, II en III gedaan in grafiek I, II en III,

4) Zie literatuurlijst.

waarin ook de aangepaste ("theoretische") krommen zijn aangegeven, die door (4) gegeven worden.

Nemen wij in (4) de logaritmie dan komt er

$$(4a) \quad \log m(z) \approx \log m - \frac{\lambda}{a} z.$$

Zetten wij dus $\log m(z)$ tegen z uit, dan zouden de zo verkregen punten ongeveer op een rechte lijn moeten liggen. Men zie grafiek Ia, IIa en IIIa, waar $m(z)$ verticaal op een logaritmische schaal is uitgezet. Ook hier zijn de door (4a) gegeven aangepaste rechten in de figuur opgenomen.

Uit deze figuren blijkt, dat er weliswaar duidelijke afwijkingen van het door (4a) gegeven verband te zien zijn, maar dat deze vooral bij de grote waarden van z liggen (deze komen te vaak voor), terwijl de aanpassing voor kleine waarden van z niet al te slecht is. De afwijking bij grote waarden van z kan verschillende oorzaken hebben. In de eerste plaats kan het wijzen op een niet aan de realiteit beantwoorden van het model. Anderzijds echter is de verkeersdichtheid binnen ieder van de gebruikte groepen waarnemingen niet constant. Op de Donderdagen en Vrijdagen b.v. is de periode van 12.00 tot 2.00 uur minder druk bezet dan de rest. Deze wisselende verkeersdichtheid heeft ook ten gevolge dat de grote waarden van z te vaak zullen voorkomen. Wij mogen daarom wel aannemen, dat wij, als er genoeg gegevens waren geweest om kleinere tijdsintervallen te beschouwen, een minder grote afwijking van de rechte lijnen gevonden zouden hebben. Bovendien geldt de overweging dat speciaal de kortere tijdsintervallen tussen twee aanmeldingen van belang zijn voor het probleem der wachttijden. Immers het wachten wordt juist door deze kleine waarden van z veroorzaakt en hoe groot een grote waarde van z is, is niet zo erg belangrijk, daar een grote waarde in de regel ten gevolge zal hebben dat de congestie intussen verdwenen is.

Op grond van deze overwegingen en van de resultaten van deze paragraaf kunnen wij ertoe besluiten het model als een voor de huidige toestand vrij redelijke benadering van de werkelijkheid te beschouwen. In de volgende paragrafen worden daarom de gevolgtrekkingen besproken, die op grond van dit model kunnen worden gemaakt.

§ 4. Stellingen omtrent wachttijdverdeling.

4.1 T. PEARCEY (1948) heeft bewezen, dat de gemiddelde fractie vliegtuigen die na aanmelding niet direct kunnen landen gelijk is aan de verkeersdichtheid λ .

4.2 A.K.ERLANG (1909), zie ook b.v. (1948) heeft bewezen dat uit formule (3) volgt, dat de waarschijnlijkheidsverdeling van de wachttijd \underline{w} van een vliegtuig gegeven wordt door

$$(5) \quad F(w) = P[\underline{w} \leq w] = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{e^{-\lambda(j - \frac{w}{a})} (\frac{w}{a} - j)^j \lambda^j}{j!}$$

met n zo, dat $na \leq w \leq (n+1)a$.

Deze vergelijking geldt als de verkeersdichtheid $\lambda < 1$ is; a stelt de landingstijd voor.

Deze functie is door ERLANG getabelleerd met als argumenten $\frac{\lambda w}{a}$ (met de waarden 0,0 tot en met 2,0 opklimmend met intervallen 0,1) en λ (met de waarden 0,0 tot en met 1,0, opklimmend met intervallen 0,1). Deze tabel, nog enigszins uitgebreid door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, is als tabel I aan dit rapport toegevoegd. In grafiek IV is λ uitgezet tegen $\frac{w}{a}$ voor 3 constante waarden van $F(w)$.

4.3 Uit een artikel van D.V.LINDLEY (1952) volgt, dat de gemiddelde wachttijd $\underline{\xi}_w$ gelijk is aan

$$(6) \quad \underline{\xi}_w = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} a,$$

terwijl de spreiding gelijk is aan.

$$(7) \quad \sigma\{\underline{w}\} = \frac{a}{2(1-\lambda)} \sqrt{\frac{\lambda(4-\lambda)}{3}} = \underline{\xi}_w \sqrt{\frac{4}{3\lambda} - \frac{1}{3}}.$$

In grafiek V vindt men $\frac{\underline{\xi}_w}{a}$ en $\frac{\sigma\{\underline{w}\}}{a}$ uitgezet tegen λ .

Deze tabellen en grafieken stellen ons nu in staat conclusies te trekken zoals de in § 1 opgenoemde. Dit wordt in de volgende paragraaf gedaan.

§ 5. Numerieke voorbeelden.

Bij gegeven a , λ en w kunnen wij $\frac{\lambda w}{a}$ berekenen en in tabel I de kans opzoeken dat een vliegtuig hoogstens w minuten moet wachten. Omgekeerd kunnen wij ook bij een bepaalde kans de bijbehorende waarde voor w vinden. Dit kan, voor de drie waarden 0,90, 0,95 en 0,98 voor $F(w)$ ook gemakkelijk met behulp van grafiek IV geschieden. Met behulp van formule (2) kunnen wij de N en T in de beschouwingen betrekken.

Een aantal numerieke resultaten zijn samengevat in tabel II.

Ook vragen als "Wat is de maximale verkeersdichtheid λ , die bij gegeven landingstijd a toegelaten kan worden zonder dat de wachttijd de waarde w vaker dan gemiddeld in $\alpha\%$ van de aanmeldingen overschrijdt" kunnen wij nu gemakkelijk beantwoorden; voor $\alpha = 2\%$, 5% en 10% wordt deze λ , bij gegeven w/a in grafiek IV gevonden.

§ 6. Appendix.

De stochastische grootheid \underline{x} zij homogeen verdeeld tussen 0 en T (zie fig. 1); \underline{x}_k resp. \underline{x}_{k+1} zijn de k^e resp. $(k+1)^e$ waarneming naar volgorde van grootte onder N onafhankelijke waarnemingen van \underline{x} . Dan is

$$P [x \leq \underline{x}_k \leq x + dx \text{ en } y \leq \underline{x}_{k+1} \leq y + dy] =$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!(N-k-1)!} \left(\frac{x}{T}\right)^{k-1} d\frac{x}{T} \left(1 - \frac{y}{T}\right)^{N-k-1} d\frac{y}{T},$$

daar er links van x (k-1) waarnemingen moeten liggen, tussen x en x+dx één waarneming, tussen y en y+dx één en rechts van y de overige (N-k-1).

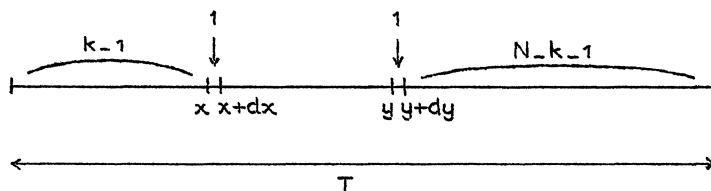


fig. 1

Noemen wij nu

$$\underline{z} = \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k,$$

dan is dus

$$P [\underline{z} \leq z] =$$

$$= \frac{N!}{(k-1)!(N-k-1)!} \int_{x=0}^T \left(\frac{x}{T}\right)^{k-1} d\frac{x}{T} \int_{y=x}^{\min(T, x+z)} \left(1 - \frac{y}{T}\right)^{N-k-1} d\frac{y}{T}.$$

Substitueren wij

$$\frac{x}{T} = u \quad \frac{y}{T} = v \quad \text{en} \quad \frac{z}{T} = d,$$

dan worden de integralen uit het rechterlid

$$\int_0^1 u^{k-1} du \int_u^{\min(1, u+d)} (1-v)^{N-k-1} dv =$$

$$= \int_0^{1-d} u^{k-1} du \int_u^{u+d} (1-v)^{N-k-1} dv + \int_{1-d}^1 u^{k-1} du \int_u^1 (1-v)^{N-k-1} dv =$$

$$= \frac{1}{N-k} \int_0^{1-d} u^{k-1} \left\{ (1-u)^{N-k} - (1-u-d)^{N-k} \right\} du +$$

$$+ \frac{1}{N-k} \int_{1-d}^1 u^{k-1} (1-u)^{N-k} du =$$

$$= \frac{1}{N-k} \left\{ \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^{N-k} du - \int_0^{1-d} u^{k-1} (1-d-u)^{N-k} du \right\}.$$

De eerste integraal tussen de accoladen is gelijk aan

$$\frac{(k-1)!(N-k)!}{N!}$$

en substitueren wij in de tweede: $h = \frac{u}{1-d}$, dan wordt deze gelijk aan

$$- (1-d)^N \int_0^1 h^{k-1} (1-h)^{N-k} dh = - \frac{(k-1)!(N-k)!}{N!} (1-d)^N$$

zodat wij voor $P[\underline{z} \leq z]$ vinden:

$$P[\underline{z} \leq z] = 1 - (1-d)^N = 1 - \left(1 - \frac{z}{T}\right)^N.$$

q.e.d.

Literatuur.

- E.G.BOWEN and T.PEARCEY (1948), Delays in the flow of air traffic, Jrn. Roy. Aeronautical Soc. 52, pp. 251-258.
- A.K.ERLANG (1909), Sandsynlighedsregning og Telefonsamtaler, Nyt Tidsskrift for Matematik B 20 (1909) 33.
- A.K.ERLANG (1948), The life and works of A.K.Erlang, Trans. Danish Acad. Techn. Sciences, No. 2, by E.Brockmeyer, H.L.Halstrøm and Arne Jensen, Copenhagen Telephone Company, Copenhagen.
- D.V.LINDLEY (1952), The theory of queues with a single server, Proc. Cambr. Phil. Soc. 48, p. 277.
- T.PEARCEY (1948), Delays in the landing of air traffic, Jrn. Roy. Aeronautical Soc. 52, pp. 779-812.

Tabel I.

 $10^3 \times$ verdelingsfunctie $F(w)$ van de wachttijd w als functie van λ en $\frac{\lambda w}{a}$.

λ $\frac{\lambda w}{a}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	000
0.1	1000	995	884	774	663	553	442	332	221	111	000
0.2	1000	1000	977	855	733	611	489	366	244	122	000
0.3	1000	1000	991	945	810	675	540	405	270	135	000
0.4	1000	1000	998	967	895	746	597	448	298	149	000
0.5	1000	1000	999	983	923	824	659	495	330	165	000
0.6	1000	1000	1000	992	947	856	729	547	364	182	000
0.7	1000	1000	1000	996	965	885	761	605	403	201	000
0.8	1000	1000	1000	998	977	910	792	635	445	223	000
0.9	1000	1000	1000	999	984	931	822	665	470	246	000
1.0	1000	1000	1000	999	990	947	849	694	495	261	000
1.1	1000	1000	1000	1000	993	958	872	722	520	276	000
1.2	1000	1000	1000	1000	995	967	891	749	545	292	000
1.3	1000	1000	1000	1000	997	975	906	773	569	307	000
1.4	1000	1000	1000	1000	998	980	920	794	592	323	000
1.5	1000	1000	1000	1000	999	985	932	812	614	339	000
1.6	1000	1000	1000	1000	999	988	942	829	635	354	000
1.7	1000	1000	1000	1000	1000	991	950	845	653	369	000
1.8	1000	1000	1000	1000	1000	993	957	859	671	384	000
1.9	1000	1000	1000	1000	1000	994	964	872	688	397	000
2.0	1000	1000	1000	1000	1000	996	969	884	705	411	000
2.1	1000	1000	1000	1000	1000	997	973	895	720	424	000
2.2	1000	1000	1000	1000	1000	997	977	904	735	437	000
2.3	1000	1000	1000	1000	1000	998	981	913	749	450	000
2.4	1000	1000	1000	1000	1000	998	983	921	762	463	000
2.5	1000	1000	1000	1000	1000	999	986	928	775	475	000
2.6	1000	1000	1000	1000	1000	999	988	935	786	487	000
2.7	1000	1000	1000	1000	1000	999	990	941	798	499	000
2.8	1000	1000	1000	1000	1000	999	991	946	808	510	000
2.9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	992	951	818	521	000
3.0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	994	956	828	532	000
3.1	1000	1000	1000	1000	1000	1000	995	960	837	543	000
3.2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	995	964	845	553	000
3.3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	996	967	853	563	000
3.4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	997	970	861	573	000
3.5	1000	1000	1000	1000	1000	1000	997	973	868	583	000
3.6	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	975	875	592	000
3.7	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	978	882	602	000
3.8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	980	888	611	000
3.9	1000	1000	1000	1000	1000	1000	998	981	894	620	000
4.0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	999	983	900	628	000

 Uit A.K.Erlang [1948], blz. 135 en voortgezet vanaf $\frac{\lambda w}{a} = 2,0$ door de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

Tabel II

Numerieke resultaten voor de wachttijden.

a	N	λ	w	F(w)	Ew	$\sigma\{w\}$
3	24	0,6	6,3	0,90	2,25	3,09
			8,5	0,95		
			11,4	0,98		
	28	0,7	9,3	0,90	3,5	4,39
			12,4	0,95		
			16,3	0,98		
32	0,8	15,0	0,90	6,0	6,93	
		18,0	0,95			
		21,5	0,98			
5	17	0,7	15,4	0,90	5,83	7,31
			20,6	0,95		
			27,1	0,98		
	18	0,75	19,5	0,90	7,5	9,01
			25,5	0,95		
			31,5	0,98		

a = landingstijd in minuten.

N = aantal vliegtuigen, dat in 120 minuten landt (deze periode van 120 minuten is aangehouden in verband met rapport S 99; verandering van deze periode kan plaats vinden door N evenredig te veranderen en de overige gegevens onveranderd te laten).

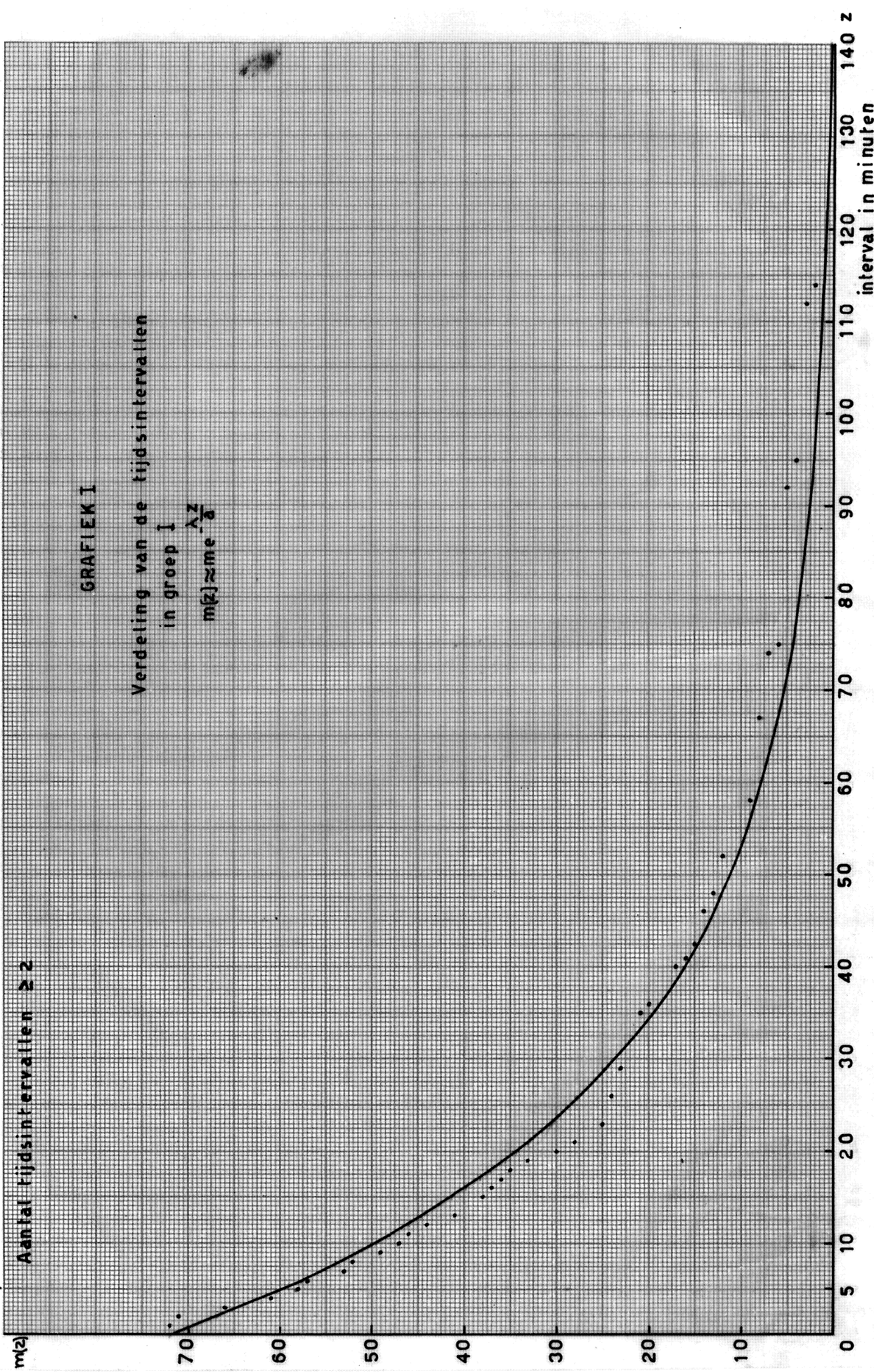
λ = verkeersdichtheid, d.i. het aantal vliegtuigen, dat zich gemiddeld per landingstijd bij het bakken aanmeldt.

$F(w) = P[\underline{w} \leq w]$, d.i. de kans, dat de wachttijd w van een zich aanmeldend vliegtuig de waarde w niet zal overtreffen.

w = de waarde van w bij de gegeven waarde van $f(w)$.

Ew = de gemiddelde wachttijd bij de gegeven waarden van a en λ .

$\sigma\{w\}$ = de spreiding van de wachttijd bij de gegeven waarden van a en λ .



Aantal tijdsintervallen $\geq z$

GRAFIEK I

Verdeling van de tijdsintervallen

in groep I

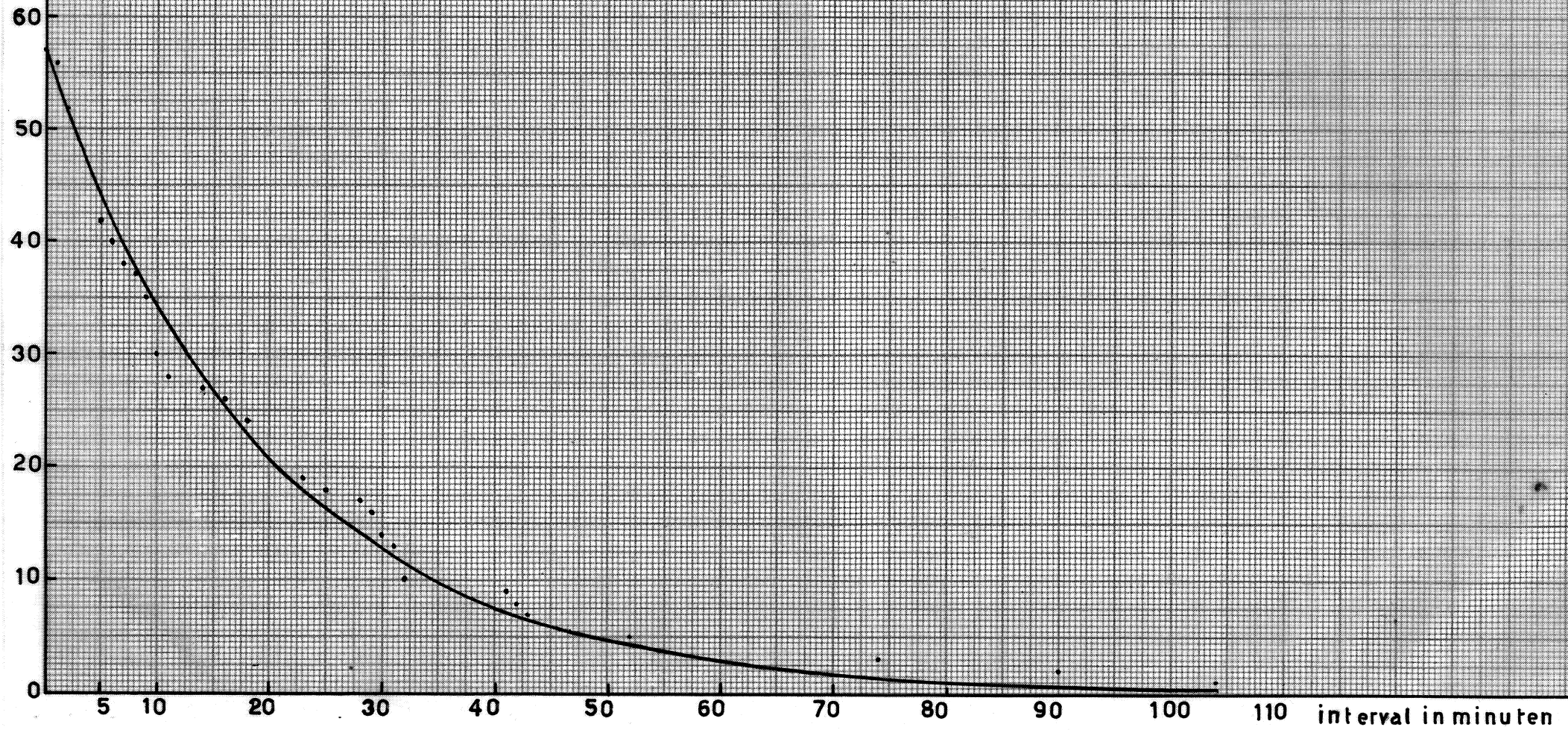
$$m(z) \approx me^{-\frac{\lambda z}{a}}$$

interval in minuten

$m(z)$ Aantal tijdsintervallen $\geq z$

GRAFIEK II

Verdeling van de tijdsintervallen
in groep II
 $m(z) = m e^{-\lambda z}$



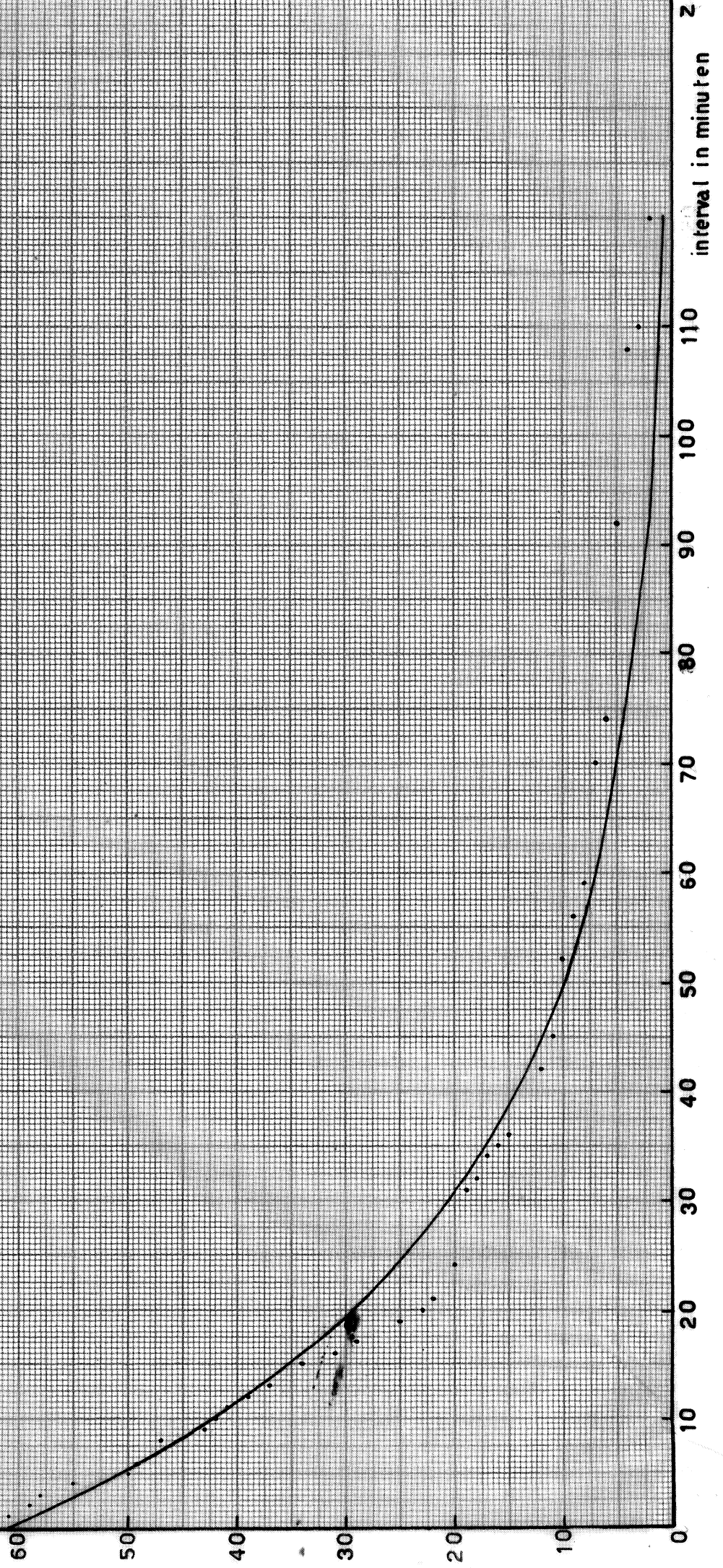
mé) Aantal tijdsintervallen $\geq z$

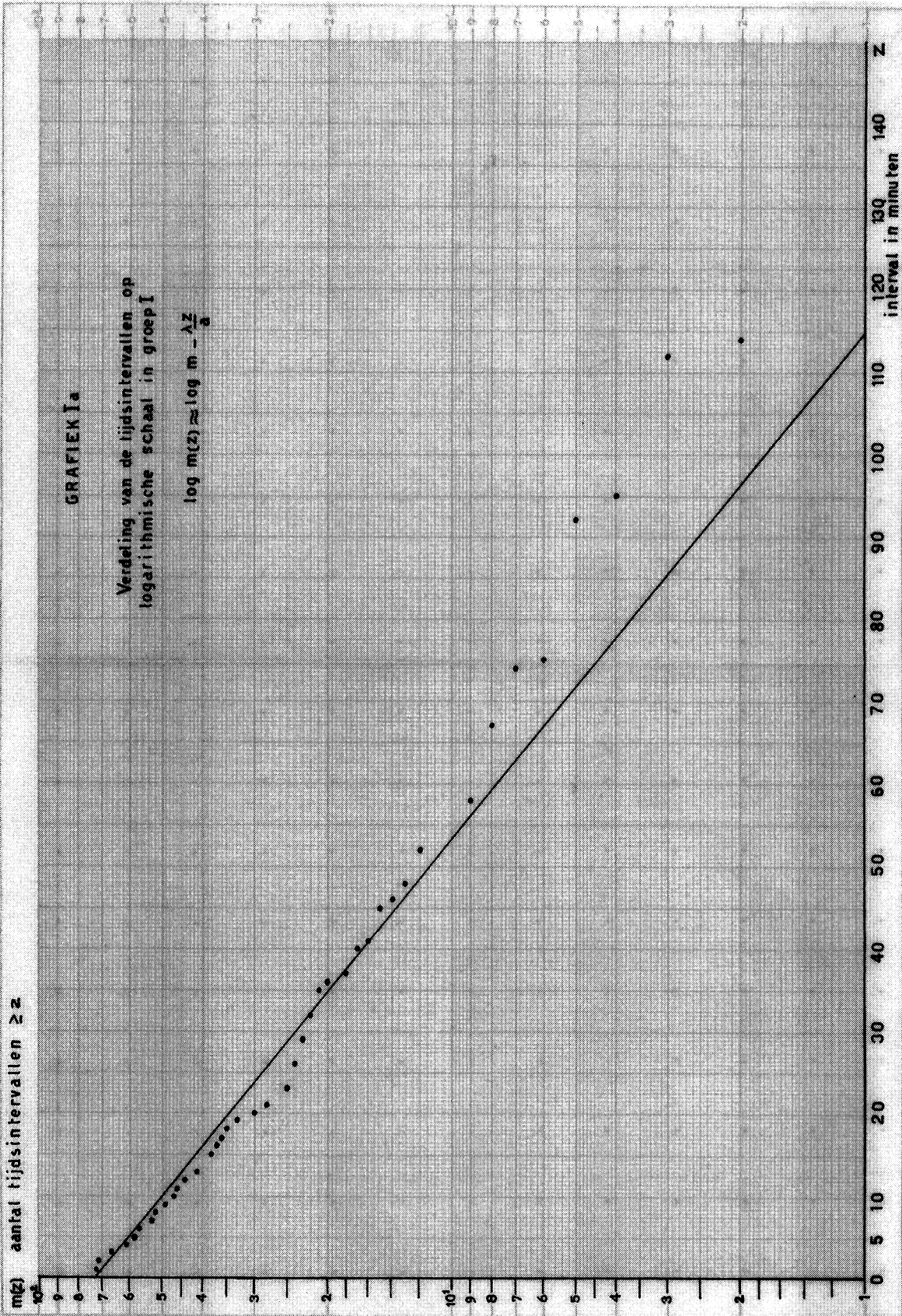
GRAFIEK III

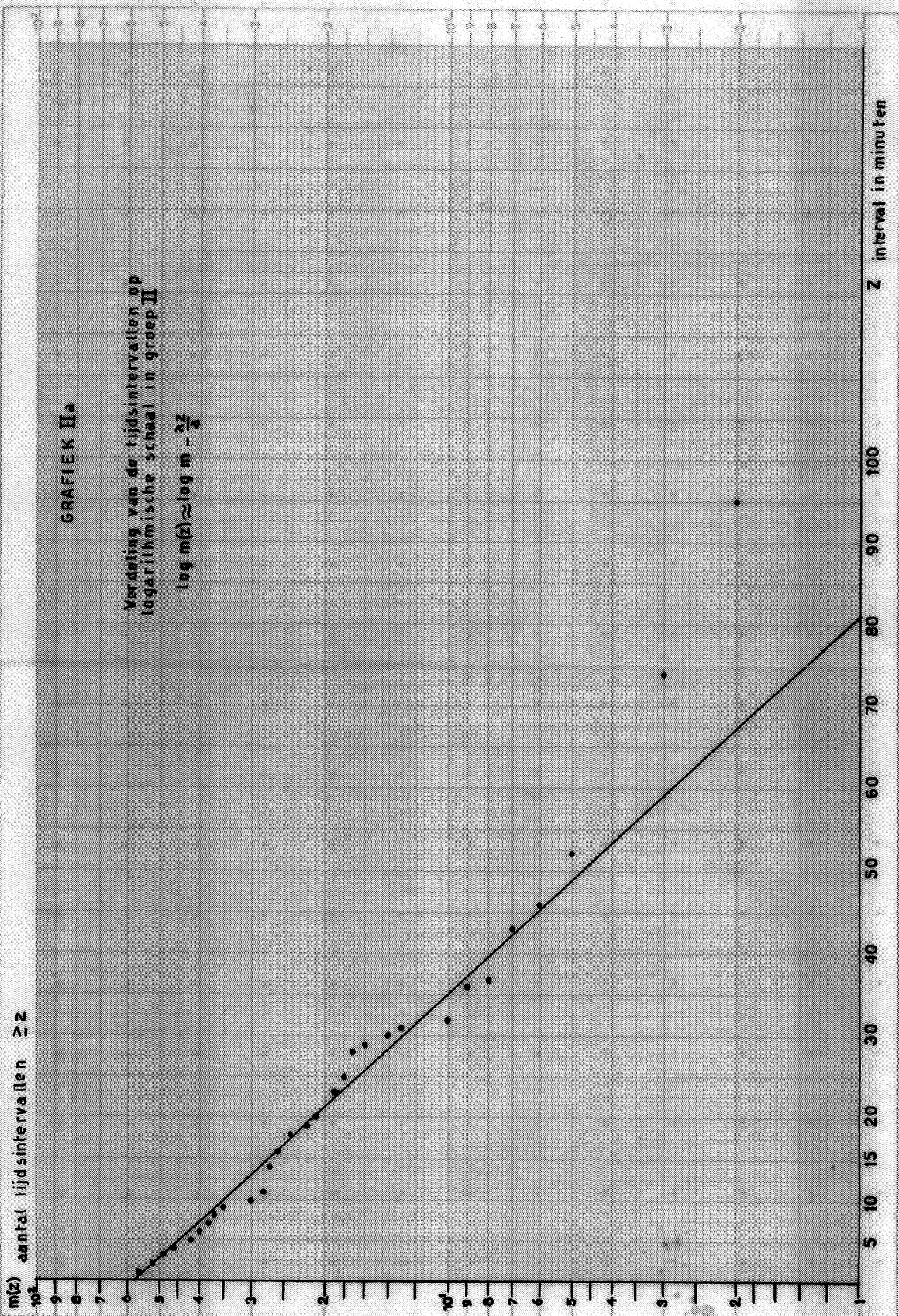
Verdeling van de tijdsintervallen

in groep III

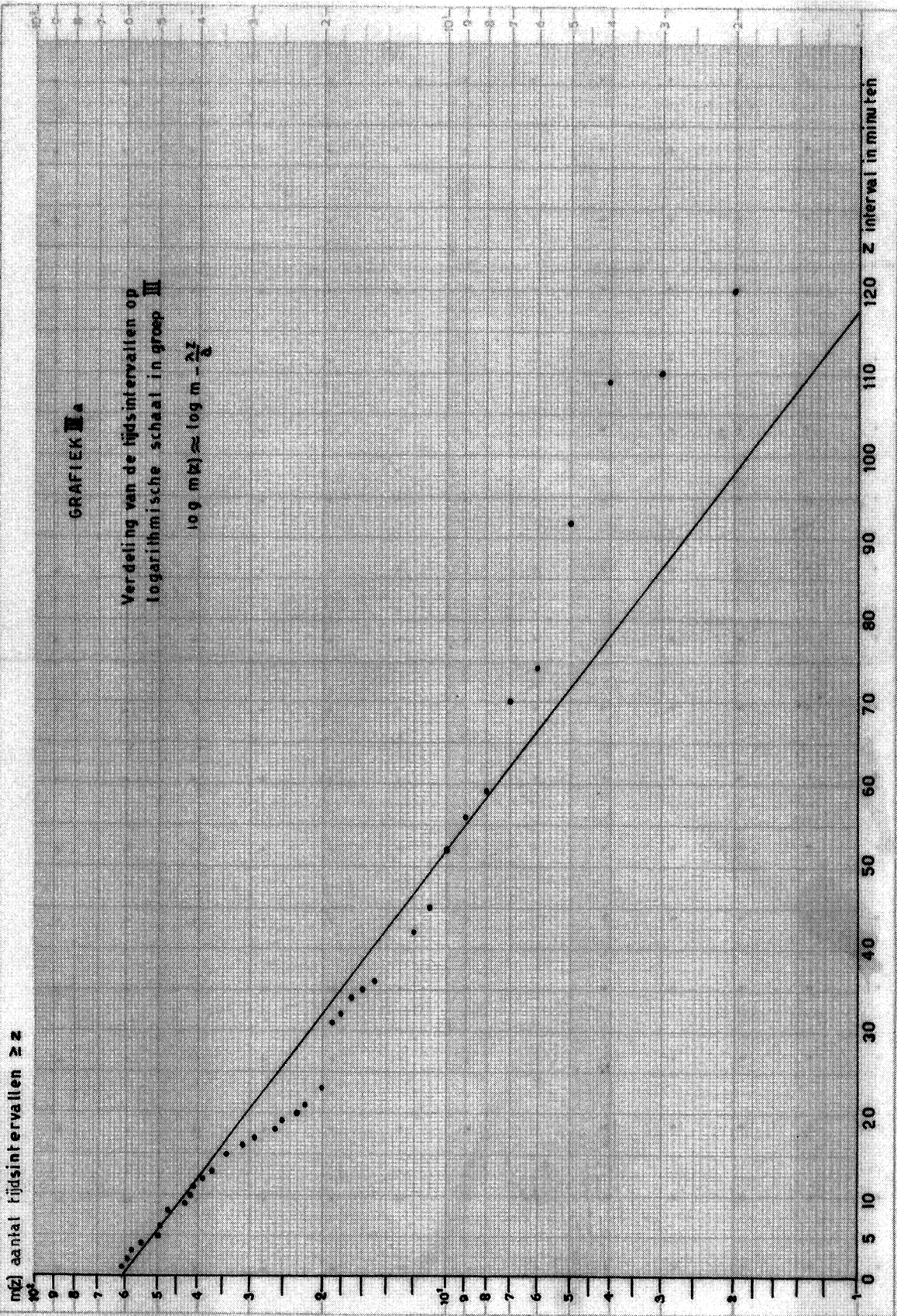
$$m(z) \approx me^{-\frac{z}{\lambda}}$$







$m(z)$ aantal tijdsintervallen $\geq z$



Verkeersintensiteit

λ ↑

GRAFIEK IV

Toegelaten verkeersintensiteit
bij gegeven maximale wachttijd.

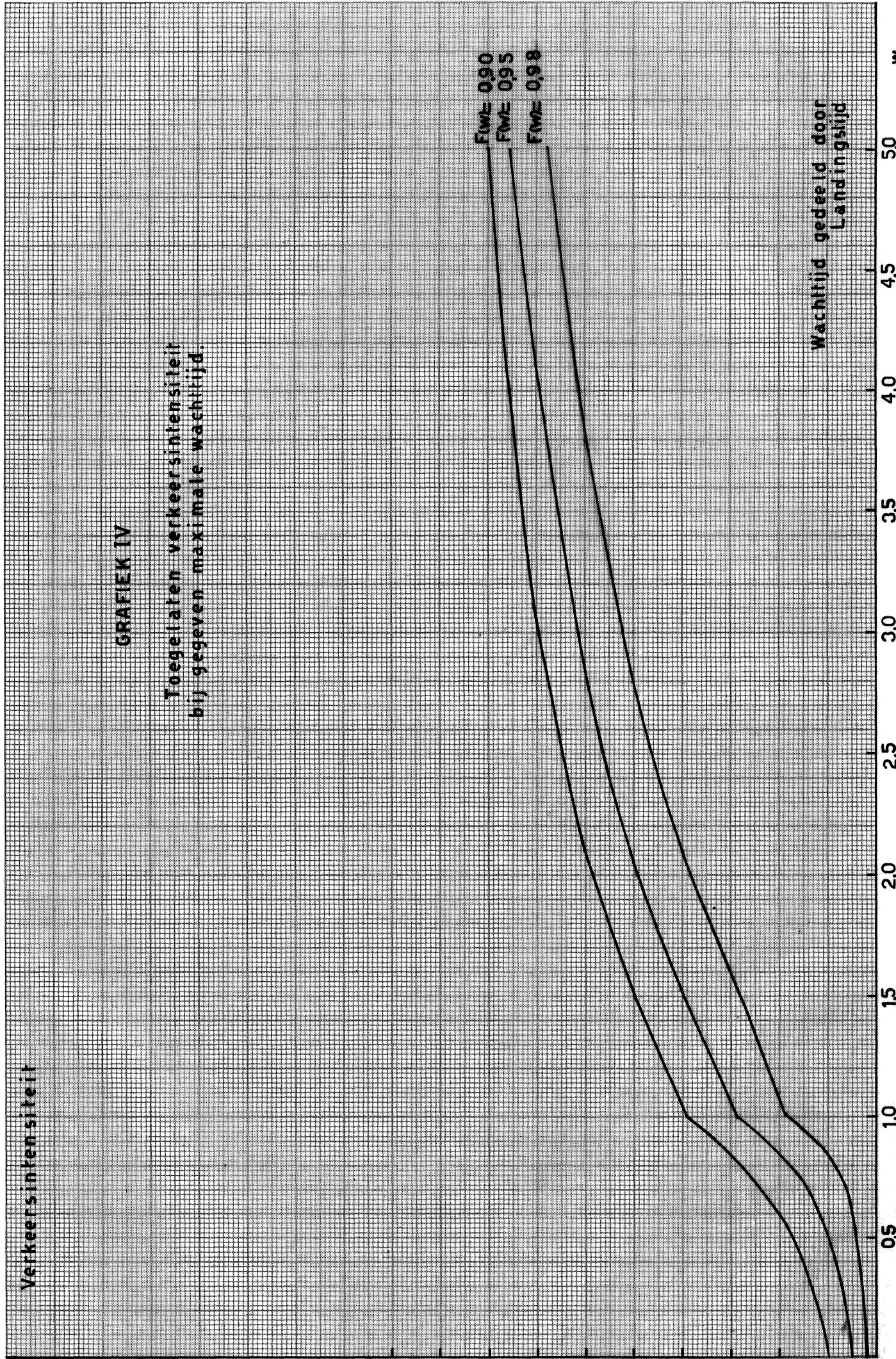
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

F(w) = 0.90
F(w) = 0.95
F(w) = 0.98

Wachttijd gedeeld door
Landingslengte

50
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0

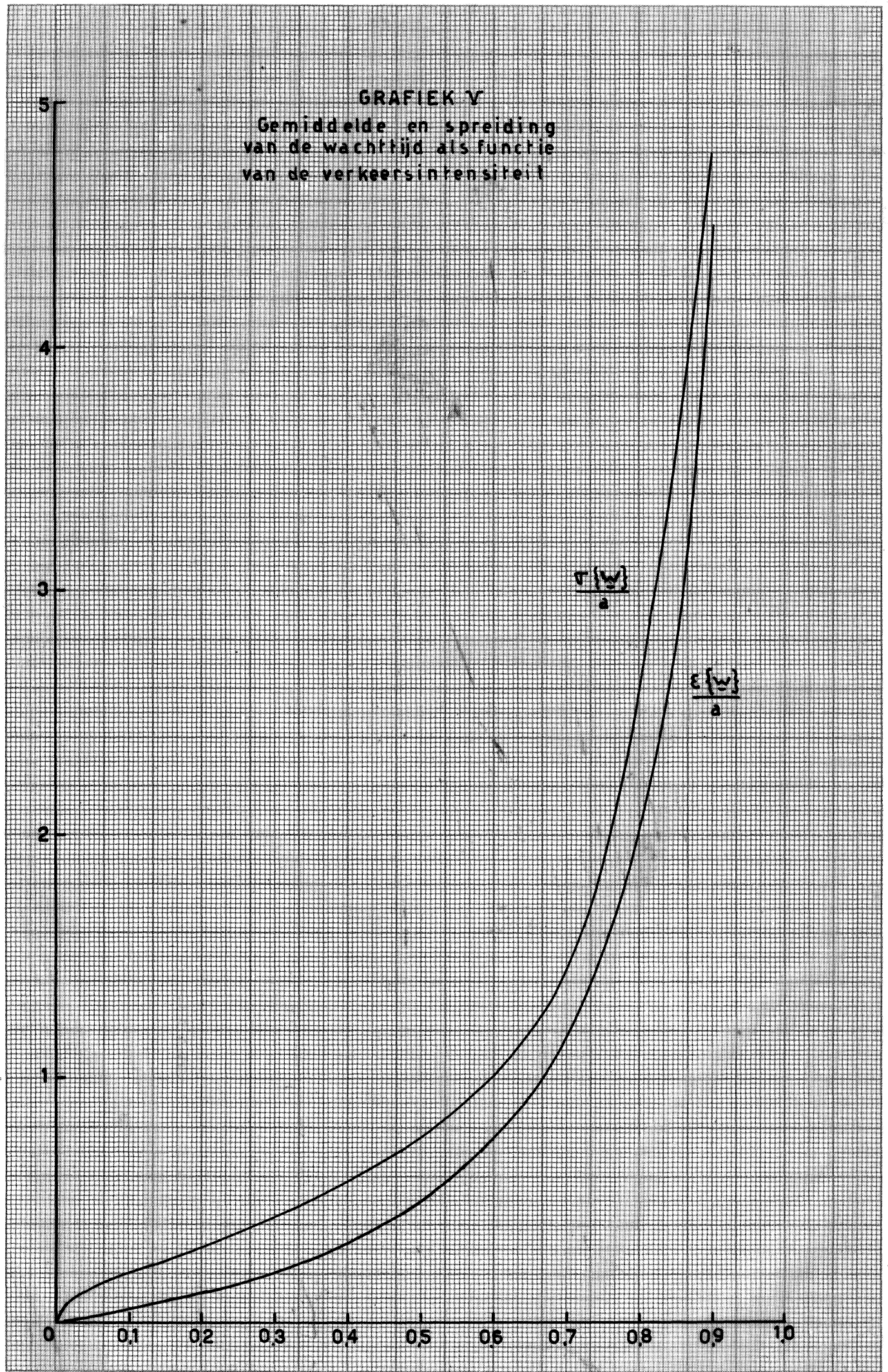
W →



GRAFIEK V

Gemiddelde en spreiding
van de wachttijd als functie
van de verkeersintensiteit

$\frac{\epsilon\{w\}}{a}$
resp.
 $\frac{\sigma\{w\}}{a}$



Verkeersintensiteit λ