MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 114

Over de mogelijkheid van statistische voorspelling van extreem hoge waterstanden en haar grenzen.

door
Prof. Dr D. van Dantzig
en
Prof. Dr J. Hemelrijk

1953

1. Inleiding.

Dit voorbereidend rapport bevat een aantal opmerkingen over de mogelijkheid en wenselijkheid van de toepassing van statistische methoden enerzijds en niet-statistische methoden anderzijds bij het onderzoek van het probleem der hoge waterstanden aan de Nederlandse kust.

Met het oog op de geringe tijd die voor dit voorbereidend rapport beschikbaar was — tengevolge waarvan wij ons nog niet voldoende van de bestaande literatuur op de hoogte konden stellen, terwijl ook een verwerking van massaal cijfermateriaal nog niet kon worden uitgevoerd — worden hier nog geen resultaten gegeven, doch worden slechts enkele richtlijnen voor verder onderzoek opgesteld.

Evenals vele andere verschijnselen van zeer ingewikkelde aard kan ook het onderhaivge probleem zonder twijfel met vrucht statistisch worden behandeld, in het bijzonder zolang het doel slechts is iets te weten te komen over de frequentieverdeling van de in het verleden bereikte waterhoogten. Ten gevolge echter van het feit, dat het vooral gaat om uitspraken over toekomstige frequenties van zeer hoge waterstanden, zodat men van extrapolaties gebruik moet maken, zou het onverantwoord zijn een onbegrensd vertrouwen te stellen in voorspellingen, die uitsluitend gebaseerd zijn op een statistische analyse van het beschikbare waarnemingsmateriaal. Dit waarnemingsmateriaal kan op geen enkele wijze uitsluitsel geven over het al of niet verantwoord zijn van de noodzakelijke extrapolatie en het zal dus nodig zijn te trachten deze zijde van het probleem langs andere wegen te benaderen. Een nadere uiteenzetting hieromtrent vindt men in deel II van dit rapport. Deel I bevat beschouwingen over de statistische analyse-methoden.

2. De probleemstelling.

Twee der belangrijkste problemen die ten aanzien van de benodigde dijkhoogten ter kering van hoge waterstanden gesteld kunnen worden zijn:

1e. Het schatten van de onveiligheid van een bepaalde dijkhoogte, d.w.z. van de kans, dat deze dijkhoogte in een gegeven aantal jaren overschreden zal worden;

2e. Een methode te vinden ter bepaling van aequivalente dijkhoogten voor verschillende plaatsen, d.w.z. dijkhoogten, die (ongeveer) gelijke kansen bezitten om overschreden te worden of in andere zin gelijke risico's dragen.

Voor zoverre een uitsluitend statistische methode gevolgd wordt, bestaat het waarnemingsmateriaal, op grond waarvan deze vragen zo goed mogelijk beantwoord moeten worden, uit waarnemingen van H.W.'s (H.W. = hoog water) op verschillende plaatsen langs de kust, verricht gedurende ongeveer 100 jaar.

3. Indeling van dit rapport.

Het rapport bestaat uit twee delen. In het eerste deel worden mogelijkheden besproken om te komen tot een zo zorgvuldig mogelijke statistische analyse van het zeer uitgebreide waarnemingsmateriaal. Een aantal van de daarin genoemde programmapunten zijn, resp. waren reeds vroeger bij verschillende diensten van Waterstaat voor een aantal kustplaatsen in onderzoek. De in I.2 en II gegeven opsommingen bedoelen dan ook niet de daar gemaakte opmerkingen als geheel nieuwe gezichtspunten te karakteriseren, doch vormen slechts een samenvattend programma, dat bij zo volledig mogelijke uitvoering een duidelijke indruk zal kunnen geven van de statistische samenhang der onderzochte verschijnselen.

In het tweede gedeelte van het rapport worden de gevaren besproken, die bij het onderhavige onderzoek verbonden zijn aan een directe statistische extrapolatie. Een aantal factoren, die de geldigheid van deze extrapolatie in gevaar zouden kunnen brengen, worden opgenoemd en de conclusie is, dat het uitermate wenselijk is het onderzoek niet tot een statistische analyse van het bestaande waarnemingsmateriaal te beperken, maar daarnaast ook bepaalde physische, t.w. meteorologisch-hydrodynamische problemen van ingewikkelde aard te onderzoeken en de daaruit voortvloeiende resultaten, voor zoverre mogelijk, wederom met behulp van een statistische analyse op hun waarschijnlijkheid te onderzoeken.

DEEL I

Statistische analyse-methoden.

I.1. Een gangbare analyse-methode.

Als uitgangspunt van onze overwegingen nemen wij het artikel van P.J.WEMELSFELDER (1939), waarin deze de H.W.'s in Hoek van Holland heeft geanalyseerd voor een periode van 50 jaar (1888 tot en met 1937). Dit artikel, dat zeer veel heeft bijgedragen tot het inzicht, dat een absolute beveiliging van ons land tegen overstromingen niet mogelijk is, heeft verder de grote verdienste duidelijk aan te tonen welke grote gevaren er in schuilen wanneer men de hoogst waargenomen waterstanden voor hoogst mogelijke aanziet en als zodanig voor het bepalen van dijkhoogten gebruikt.

Hoewel het niet de bedoeling is het genoemde artikel hier volledig te bespreken, is het voor ons verdere betoog van belang het beginsel van de door WEMELSFELDER gebruikte methode te beschrijven. Alle berekeningen en conclusies van dit artikel berusten namelijk uiteindelijk op één uit het waarnemingsmateriaal samengestelde grafiek, die wij hieronder reproduceren (fig. 1). Horizontaal is daarin het peil uitgezet in cm + N.A.P. en verticaal de logarithme van het aantal H.W.'s die gedurende de beschouwde 50-jarige periode een bepaald peil hebben overschreden, gedeeld door 50.

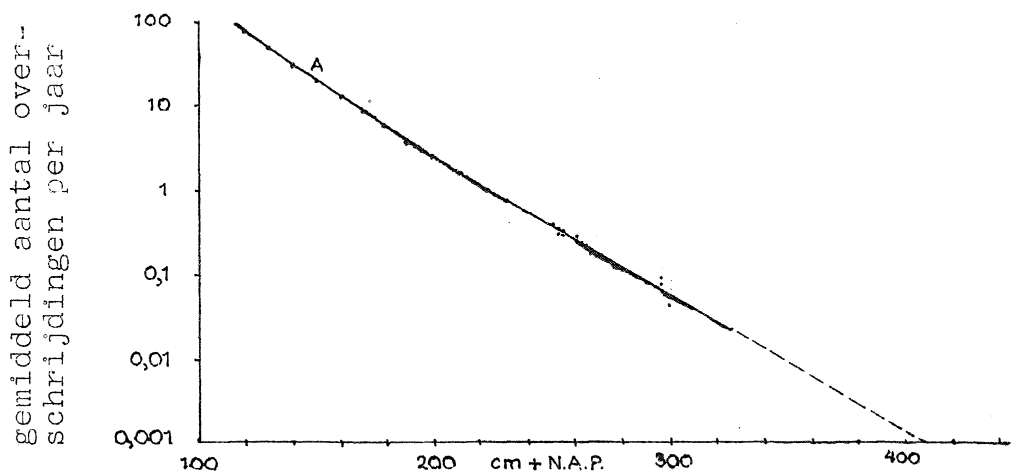

Fig. 1 H.W. te Hoek van Holland gedurende 1888-1937.

De waarnemingspunten die voor peilhoogten tot 250 cm + N.A.P. toe om de 10 cm zijn uitgezet, terwijl daarboven iedere nog hogere waterstand afzonderlijk genoteerd is, liggen in de genoemde grafiek netjes om een vrijwel rechte lijn heen gegroepeerd; deze lijn is door WEMELSFELDER in de grafiek getrokken en boven de hoogste in de waarnemingsperiode geconstateerde waterstand als een stippellijn geëxtrapoleerd. Op deze extrapolatie, waarvan de schrijver overigens het speculatieve karakter niet over het hoofd ziet, kunnen nu berekeningen gebaseerd worden over de frequenties van zeer hoge waterstanden en over aequivalente dijkhoogten.

I.2. Verdergaande analyse der H.W.'s.

Hoewel op deze wijze met eenvoudige middelen veel resultaten bereikt worden, is het waarnemingsmateriaal toch van een dergelijke aard, dat het niet wenselijk is de beschreven analysemethode zonder verder onderzoek als een definitieve te aanvaarden. De verzameling van alle op één plaats waargenomen H.W.'s kan nl. moeilijk als homogeen worden beschouwd, daar er verschillende factoren bekend zijn, die deze H.W.'s op systematische wijze beïnvloeden. Bij de in I.1 beschreven methode gaat men er echter van uit, dat deze homogeniteit wel aanwezig is, of dat althans de afwijkingen daarvan geen grote invloed op het uiteindelijke resultaat zullen hebben. Het besef, dat men hierover zonder nader onderzoek geen zekerheid bezit, heeft er, zoals boven opgemerkt, reeds toe geleid, dat deze verdere analyse op een aantal punten door het departement van Waterstaat ter hand is genomen.

De methode, die daarvoor het meest voor de hand ligt, is het waarnemingsmateriaal te splitsen in kleinere groepen van zoveel mogelijk homogeen karakter. Daarbij kunnen dan de volgende factoren in acht worden genomen.

1. Er is een duidelijk verschil tussen de zomer- en de winterwaarnemingen. Ongevaarlijke maanden, waarin zelden zeer hoge waterstanden optreden, hebben weliswaar op het rechterdeel van de lijn in fig. 1 geen invloed, maar kunnen toch het linkerdeel ervan omhoog drukken en daardoor wellicht tot een andere extrapolatie leiden, zodat een apart onderzoek van de gevaarlijkste maanden alléén een ander (en wellich ongunstiger) beeld van de situatie zou geven dan nu verkregen is.

2. In jaren met grote activiteit van de zon (zonnevlekken) komen hogere waterstanden voor dan in jaren met weinig zonneactiviteit. Het verdient dus aanbeveling een splitsing aan te brengen naar aanleiding van deze factor.

3. De H.W.'s kunnen verder onderscheiden worden naar aanleiding van het astronomisch getij, waarbij in het bijzonder de springvloeden van belang zijn. Zie in dit verband ook I.3.

4. Daar men het onderzoek van deze speciale groepen van H.W.'s op veel kleinere groepen waarnemingen zal moeten baseren, is een onderzoek naar de afhankelijkheden tussen de bij direct of vrij kort op elkaar volgende H.W.'s bereikte waterstanden wenselijk.

5. Deze onderzoekingen zullen, vooral met het oog op de vorm van de aan te passen waarschijnlijkheidsverdeling (waarvoor WEMELSFELDER een exponentiële nam, zie fig. 1) voor zo veel mogelijk kustplaatsen moeten worden uitgevoerd. Behalve de door WEMELSFELDER gebruikte verdeling kunnen wellicht ook andere geprobeerd worden.

In het bijzonder kan de door E.J.GUMBEL ontwikkelde theorie der hoogste en op m na hoogste waarden worden toegepast. Voor een exponentiële basisverdeling valt deze samen met de methode van WEMELSFELDER, maar de methode van GUMBEL biedt tevens de mogelijkheid de onderstelling van een bepaalde vorm voor de verdeling der H.W.'s te vermijden (of althans te verzwakken), voor zoverre het gaat om de hoogste waterstanden in lange perioden (zie ook II.3).

6. Ten slotte zal ook een onderzoek naar een eventueel verloop (stijging of daling in de loop der jaren) van de waterstanden (en van hun spreiding) moeten worden uitgevoerd. Indien men door splitsing der waarnemingen in zo homogeen mogelijke deelgroepen zoveel mogelijk rekening gehouden heeft met deze systematische invloeden, zal een belangrijk punt van onderzoek nog zijn: het zoeken naar afhankelijkheden van opeenvolgende waarnemingen of groepen van waarnemingen (bv. verschillende jaren) binnen ieder van deze groepen, daar dergelijke afhankelijkheden de uitkomst van het statistische onderzoek sterk kunnen beïnvloeden.

I.3. Meteorologisch effect.

Een verdere uitbreiding van de statistische analyse is mogelijk door eliminatie van het astronomische getij, dat als volledig bekend en volledig voorspelbaar kan worden beschouwd. De onregelmatige component van de waterstand, het meteorologische effect, kan, nadat men de waterstand verminderd heeft met het astronomische getij, apart worden onderzocht. Is de waterstand continu geregistreerd, dan kan men dit onderzoek zeer volledig uitvoeren. Voor de bepaling van het astronomische getij kan vermoedelijk wel volstaan worden met grafische interpolatie tussen bekende punten om op die wijze een overmaat aan rekenwerk te voorkomen. Is de waterstand niet continu geregistreerd, maar bv. alleen op de tijdstippen van H.W. en L.W., dan kan althans voor deze "momentopnamen" het verschil tussen de waterstand en het astronomische getij geanalyseerd worden.

Bij deze analyse doen zich, behalve de in I.2 genoemde problemen nog andere voor.

In de eerste plaats zou men wellicht geneigd zijn, de totale waterstand uit de astronomische en meteorologische componenten additief opgebouwd te denken en te onderstellen, dat deze componenten onafhankelijk van elkaar zijn. De vraag of deze onderstelling inderdaad juist is werd door één onzer in de Maartzitting der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen geopperd. Al schijnt het aannemelijk dat de meteorologische toestand, die in hoge mate van het gedrag van de atmosfeer in hogere luchtlagen afhangt, geen noemenswaarde invloed zal ondervinden van de relatief gesproken kleine en snelle rimpelingen van het zee-oppervlak, die het astronomisch getij vormen, terwijl verder de gravitatiekrachten, die het getij veroorzaken, wel zeker niet door het weer beïnvloed worden, toch kan men daaruit nog niet tot onafhankelijkheid besluiten. Naar Prof. THIJSSE ons deed opmerken ontstaat door vertraging van de getijgolven bij hoge waterstanden een negatieve correlatie. In ieder geval is deze onafhankelijkheid toetsbaar en met een eventuele correlatie kan vermoedelijk, door het aanbrengen van een correctie, rekening gehouden worden.

In de tweede plaats is niet alleen de hoogte van het meteorologische effect van belang, maar ook de duur, zodat de statistische analyse een gecompliceerd karakter zal moeten bezitten.

I.4. Verwerking van de gegevens van de stormvloed 1953.

De eerste indruk van de stormvloed 1953 was vrij algemeen, dat de daarbij bereikte waterstanden zo exceptioneel waren, dat zij wel niet zouden passen in de door WEMELSFELDER geschetste frequentieverdeling der waterstanden. Het is uiteraard van groot belang na te gaan of deze indruk gerechtvaardigd is of niet. Zonder op de uitkomst van een volledig onderzoek in die richting vooruit te lopen, wijzen wij hier op een complicatie van statistische aard, die bij de beantwoording van deze vraag in het oog gehouden dient te worden.

Deze complicatie bestaat hierin, dat de zeer hoge waterstanden van deze stormvloed en de daaruit voortgevloeide ramp zèlf de aanleiding zijn geweest tot het instellen van een hernieuwd en geïntensiveerd onderzoek van het statistische gedrag der hoge waterstanden. De tijd ontbreekt om te wachten tot opnieuw vele waarnemingen zijn verricht, zodat wij op dit ogenblik (en voor de eerstvolgende jaren) te maken hebben met een reeks waarnemingen, die weliswaar ongeveer honderd jaar geleden op een willekeurig ogenblik begonnen is, maar die nu op een allerminst willekeurig ogenblik als het ware afgebroken wordt.

Nu is er een groot verschil tussen een reeks waarnemingen, die op een willekeurig moment (d.w.z. op een moment, dat niet afhangt van de waargenomen waarden) wordt afgesloten en onderzocht, en een reeks, die wordt onderzocht juist nadat (en omdat) er een zeer hoge waarneming gevonden is. Deze tweede reeks waarnemingen immers bevat per se een zeer hoge waarneming, terwijl dit bij de eerstgenoemde wel mogelijk maar niet noodzakelijk is. In de appendix van deel I (I.5) wordt verder beschreven op welke wijze men deze gedachtengang iets verder kan uitwerken. Daar blijkt dan, dat een dergelijke hoge waarneming als die van de stormvloed 1953, die de aanleiding vormt om een onderzoek in te stellen, de neiging heeft hoger te liggen dan de hoogste waarneming, indien het moment van onderzoek gekozen wordt onafhankelijk van de waargenomen waarden. Houdt men geen rekening met dit effect van de keuze van het moment der onderzoekingen, dan zal men dus in de regel een te pessimistisch beeld van de situatie verkrijgen en in het bijzonder zou men er toe kunnen komen een statistisch model op grond van deze hoge waarneming ten onrechte of overhaast te verwerpen.

Bij de in de vorige paragrafen aangegeven statistische methoden kunnen derhalve de waarnemingen van de stormvloed niet zonder voorbehoud worden gebruikt. Een verdere uitwerking van de hierboven beschreven gedachtengang zal ons echter wellicht in staat stellen, deze uiterst belangrijke waarnemingen toch — en wel met inachtneming van hun bijzondere positie en van hun bijzonder grote betekenis voor het onderhavige probleem — in het onderzoek te betrekken.

Eén van de belangrijkste vraagstukken die wij op grond van de stormvloed 1953 kunnen aanpakken is wel de beantwoording van de vraag of deze waarnemingen beschouwd moeten worden als een statistische aanwijzing voor de aanwezigheid van de in deel II genoemde bijzonder ongunstige mogelijkheden, dus of het statistische model van WEMELSFELDER (of een ander soortgelijk model) met deze waarnemingen al of niet te rijmen valt. M.a.w. men kan op grond van bovenstaande overwegingen toetsen opstellen voor een statistisch model van de H.W.'s. Indien zou blijken (hetgeen wij op grond van onze voorlopige indrukken niet verwachten), dat de op 1 Februari bereikte waterstand met een dergelijk model niet te rijmen valt, zal men dit model moeten trachten te vervangen door een ander, waarbij dit wel het geval is.

Bij deze toets kan men twee aspecten van de stormvloed afzonderlijk beschouwen. In de eerste plaats kan men de kans beschouwen, dat een zekere hoogte h , die niet overschreden kan worden zonder dat een ernstige overstroming optreedt, gedurende de periode van waarneming (± 100 jaar dus) overschreden zou worden. Daartoe zal men het aantal waarnemingen beschouwen, verricht voordat de hoogte h voor het eerst overschreden is. Deze grootheid bezit een waarschijnlijkheidsverdeling, die men op grond van de verrichte waarnemingen en van het te toetsen model kan schatten. Indien nu blijkt, dat het tijdsverloop tussen het begin van het verrichten der waarnemingen en de eerste overschrijding van h zo kort is geweest dat dit niet behoorlijk in overeenstemming is te brengen met het gekozen model voor de frequentieverdeling der H.W.'s, dan kan men daaruit de gevolgtrekking maken, dat het gebruikte model blijkens de opgetreden stormvloed niet voldoende nauwkeurig is, om conclusies omtrent de tijdsduur vóór het optreden van een waterstand hoger dan h te rechtvaardigen.

In de tweede plaats kan men de mate van overschrijding van

h beschouwen. Ook hiervan kan de verdeling op grond van de waarnemingen en het model geschat worden en in dit geval zal men het model gaan wantrouwen, indien de waargenomen mate van overschrijding op grond van deze verdeling als te groot moet worden beschouwd. Het is duidelijk dat beide genoemde aspecten voor het onderhavige probleem van essentieel belang zijn.

De hierboven oppervlakkig beschreven procedure zal uiteraard nader moeten worden uitgewerkt, temeer daar er ook rekening mee gehouden moet worden dat de onderstelling van WEMELSFELDER evenals de methode van GUMBEL nog ruimte laat voor de aanpassing van parameters. Wij hebben dan ook slechts de gedachtengang willen aangeven, om erop attent te maken, dat de in het begin van deze paragraaf genoemde indruk over de betekenis van de stormvloed niet zonder nader onderzoek aanvaard (of ook verworpen) kan worden.

I.5. Appendix bij deel I.

In deze paragraaf wordt de in I.4 kort aangeduide gedachtengang iets verder uitgewerkt. Een volledigere uitwerking wordt tot een later rapport uitgesteld.

Wij denken ons de opeenvolgende waarnemingen van H.W.'s ontstaan door lukrake trekkingen van H.W.'s uit een zeer grote verzameling van H.W.'s, een verzameling, waarin de verschillende waarden een frequentieverdeling bezitten, die overeenkomt met de frequentieverdeling der H.W.'s over een zeer lange tijdsperiode, die gedeeltelijk in het verleden, gedeeltelijk in de toekomst ligt. Wij verrichten nu twee reeksen van waarnemingen van verschillend karakter die, om vergelijkbaar te zijn, op een nader te beschrijven wijze samenhangen. De eerste reeks (reeks A) van waarnemingen wordt verricht door zolang H.W.'s te "trekken" (dat is dus in de practijk: waar te nemen) tot voor het eerst een waarneming groter dan een van tevoren bepaald getal h wordt gevonden. Dit getal h stelt bv. de hoogte van een belangrijke dijk voor, zodat bij overschrijding daarvan een ernstige overstroming niet uit kan blijven. Het is duidelijk dat het aantal waarnemingen van reeks A niet van tevoren bepaald is; dit aantal, dat wij n zullen noemen, bezit een waarschijnlijkheidsverdeling, die afhankelijk is van de samenstelling van de verzameling der H.W.'s en van het getal h. Verder is het duidelijk, dat de laatste waarneming van reeks A de grootste is; deze waarneming geven wij aan met y. Ook y bezit een waarschijnlijkheidsverdeling, maar met zekerheid geldt: $y > h$. Natuurlijk kan y ook véél groter dan h zijn. De tweede reeks (reeks B) van waarnemingen wordt verkregen door eveneens H.W.'s te trekken en wel uit dezelfde verzameling, maar nu wordt de lengte van de reeks op een andere wijze bepaald. Onafhankelijk van de bij reeks B waargenomen waarden, worden nu nl. evenveel waarnemingen verricht, als er voor reeks A nodig waren, dus n. De hoogste waarneming van reeks B noemen wij z. Deze zal nu in de regel niet de laatste zijn. Verder kan z groter dan h zijn, maar ook kleiner. Men kan nu bewijzen (zie hieronder), dat bij veelvuldige herhaling van deze gehele procedure (dus van het verrichten van paren waarnemingsreeksen A en B op bovenbeschreven wijze, waarbij dus de lengte n van reeks B steeds opnieuw gelijk wordt gemaakt aan die van reeks A) de waarde van z in ongeveer de helft van de gevallen kleiner dan h zal zijn (althans als h groot is, d.w.z. als de overschrijding van h een zeldzaam verschijnsel is), terwijl uiteraard steeds $y > h$ is. Dit betekent dus — te meer daar ook als $z > h$ is nog zeer wel $z < y$ kan zijn — dat in meer dan de helft van de gevallen $z < y$ zal zijn. Het bewijs verloopt als volgt. Indien het getal h zo gekozen is, dat de fractie H.W.'s in de verzameling, die groter dan h zijn, gelijk is aan q (dus als de kans, dat een willekeurige H.W. h zal overschrijden gelijk is aan q), dan wordt de waarschijnlijkheidsverdeling van het aantal trekkingen van reeks A gegeven door

(1) $$P_n = p^{n-1}q \qquad (p = 1-q).$$

P_n stelt daarbij de kans voor, dat reeks A precies de lengte n heeft, dus dat de n^{e} waarneming de eerste is, die groter dan h is.

Voor iedere waarneming van reeks B geldt, dat deze een kans p bezit, om kleiner dan h te zijn. De kans, dat twee waarnemingen beide kleiner dan h zijn, is dus p^2, etc. De kans, dat alle waarnemingen van reeks B kleiner dan h zijn is dus, daar het aantal waarnemingen 1,2,3 enz. kan zijn met de door (1) gegeven waarschijnlijkheden, gelijk aan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot p^n = \sum_{n=1}^{\infty} p^{2n-1}q = \frac{p}{1+p}.$$

Voor grote h, dus p dicht bij 1, is deze kans ongeveer gelijk aan $\frac{1}{2}$. Voor deze benadering is het dus niet nodig de precieze waarde van q te kennen. De uitkomst geldt dus onafhankelijk van de frequentieverdeling der H.W.'s, indien de overschrijding van h tenminste een zeldzaam verschijnsel is.

DEEL II

We vermelden in dit deel enige mogelijkheden van verschijnselen, die een statistische extrapolatie illusoir zouden kunnen maken, alsmede enkele practische conclusies die daaruit voortvloeien.

II.1. Volgens HENRI POINCARÉ berust de toepasbaarheid van waarschijnlijkheidstheoretische beschouwingen op de mogelijkheid dat kleine oorzaken grote gevolgen kunnen hebben. Bv. bij de roulette kan de plaats waar het balletje tot rust komt aanzienlijke veranderingen ondergaan door op zichzelf vrijwel onmerkbare veranderingen in de beginsnelheid. Zodra er verschijnselen zijn, waarbij zich een analoge situatie voordoet zal men aan toepassing van waarschijnlijkheidsrekening kunnen denken. In het bijzonder is dit het geval bij het probleem van de extreem hoge waterstanden, daar de hoogte van een waterstand (bv. op een bepaalde plaats en een bepaald tijdstip) onder invloed staat van een groot aantal factoren en wel zó dat kleine wijzigingen van sommige daarvan (bv. van de ligging van oude depressiekernen, van de temperatuurverdeling e.d.) tot grote veranderingen in de waargenomen waterhoogte kunnen leiden. Het is onze bedoeling in dit gedeelte na te gaan in hoeverre zulke waarschijnlijkheidstheoretische beschouwingen een voldoend veilige basis voor voorspellingen van toekomstige hoge waterstanden kunnen bieden.

II.2. Statistische voorspellingen berusten steeds op een bepaald mathematisch model, dat het gemakkelijkst beschreven kan worden door zijn analogie met een z.g. "toevalsspel". Daarbij dient men te bedenken dat in werkelijkheid een analogie met zulk een toevalsspel natuurlijk niet aanwezig is, maar dat daarvan alleen het karakter van onregelmatigheid gebruikt wordt, en dat bij verschijnselen als de hier beschouwde de onregelmatigheid doorgaans alleszins voldoende is om de aan het model ontleende voorspellingen te rechtvaardigen. In haar eenvoudigste vorm kan een statistische voorspelling van extreem hoge waterstanden op het volgende model gebaseerd worden, al zullen wij later zien dat daarbij bepaalde afwijkingen in aanmerking zullen moeten worden genomen. De verschillende waterstanden die waargenomen worden komen met bepaalde veelvuldigheden, frequenties, voor. Het model bestaat nu daarin dat men doet alsof de "natuur" om zo te zeggen de verschillende waterstanden elk met zijn eigen frequentie in voorraad heeft en daaruit telken male lukraak ("aselect") een keuze doet. Wij herhalen dat dit model slechts bedoelt de onregelmatigheden van het onderzochte verschijnsel weer te geven. De in I.2 en I.3 genoemde systematische factoren factoren wijzen erop, dat de samenstelling van de "waterstandenvoorraad" in werkelijkheid niet constant is, maar dat deze bv. met de jaarlijkse seizoenwisseling en de intensiteit van de zonnevlekken fluctueert. Hiermede kan op de in I.2 aangegeven wijze rekening worden gehouden. Ditzelfde geldt ten aanzien van bekende systematische aperiodieke (bv. seculaire) veranderingen, b.v. ten gevolge van bodemdaling en zeespiegelrijzing. Op de mogelijkheid van onbekende systematische veranderingen komen we nog terug (II.5).

II.3. Dit leidt tot het waarschijnlijkheidstheoretische probleem de waarschijnlijkheidsverdeling te bepalen van de hoogst voorkomende onder een gegeven aantal onafhankelijke waarnemingen van een grootheid die een gegeven waarschijnlijkheidsverdeling bezit. Dit probleem is o.a. door MAURICE FRÉCHET (1927), R.A.FISHER and L.H.C.TIPPETT (1928), E.J.GUMBEL (1936) en ten onzent o.a. door Ir P.J.WEMELSFELDER (1939) bestudeerd. Toepassingen op het probleem van overstromingen zijn behalve door laatstgenoemde met name uitvoerig door E.J.GUMBEL behandeld (weliswaar voor overstromingen, niet door de zee maar door rivieren in Noord Amerika veroorzaakt), die wel als de grootste autoriteit op dit gebied beschouwd mag worden, al kunnen de door hem voorgestane methoden niet geheel zonder voorbehoud worden aanvaard. De fundamentele moeilijkheid is daarin gelegen, dat de samenstelling van de "waterstandenvoorraad" niet geheel bekend is, maar dat men slechts de vroeger waargenomen waterstanden kent. De conclusies waartoe GUMBEL c.s. komen zijn dan ook altijd gebaseerd op bepaalde vóóronderstellingen omtrent de aard van deze frequentie-verdeling, met name op de onderstelling dat deze in de regionen der extreem hoge waterstanden minstens exponentieel afnemen. Men kan aantonen (vgl. bv. D.van DANTZIG (1947), hoofdstuk 6, paragraaf 2) dat grote afwijkingen van de door GUMBEL aangegeven waarden kunnen ontstaan, indien de werkelijke verdeling aanzienlijk van de exponentiële verschilt. Als de verdeling aanzienlijk sneller dan de exponentiële tot 0 nadert, zoals bv. bij een normale verdeling het geval is, zijn de afwijkingen aan de veilige kant, d.w.z. de werkelijk voorkomende extreem hoge waterstanden zullen met grote waarschijnlijkheid beneden de waarden blijven die uit GUMBEL's approximatie volgen. Indien echter de verdeling langzamer dan de exponentiële tot 0 nadert, "een te dikke staart heeft", is de approximatie van GUMBEL aan de onveilige kant, d.w.z. het is dan waarschijnlijk dat de door hem aangegeven waarden in werkelijkheid nog overtroffen zullen worden. De door Ir WEMELSFELDER (1939) gepubliceerde statistische beschouwingen, die in wezen met de approximatie van GUMBEL overeenstemmen, geven, althans voorlopig, de indruk dat deze approximatie hier althans in eerste benadering wel bruikbaar zal zijn, al zal men met de door Ir F.VOLKER (1951) gevonden afwijkingen rekening moeten houden. De vraag is dus in hoeverre men op deze of een eventueel gecorrigeerde verdeling ook bij extrapolatie vertrouwen kan.

II.4. Dat zelfs de meest volmaakte overeenstemming tussen een reeks gedane waarnemingen en een theoretische frequentie-verdeling, ook zonder verandering van de waarschijnlijkheidsverdeling in de tijd, niet garandeert dat verderweg in de "staart" gelegen waarden frequenties zullen bezitten die met de theoretische verdeling overeenstemmen, kan men als volgt inzien: Onderstellen wij dat men in plaats van waterstanden de verkeersintensiteit in het Gooi wil bepalen en dat men daartoe op 300 opeenvolgende dagen de verkeersdichtheid gemeten heeft. Dan is het duidelijk, dat een daarop gebaseerde voorspelling van de maximale verkeersintensiteit totaal verkeerd kan uitvallen, indien onder de 300 waarnemingsdagen Pasen en Pinksteren niet voorkomen. Of om een ander voorbeeld te noemen: Indien men de elastische deformatie van een onderdeel van een brug meet bij een groot aantal verschillende over de brug bewegende lasten, zal men tot onjuiste conclusies kunnen komen indien men bv. verzuimd heeft een groep soldaten over de brug te laten marcheren. Een ander voorbeeld heeft men, als men een aantal worpen doet met een dobbelsteen, waarvan de ribben en hoekpunten enigszins afgeslepen zijn. Zolang het nog niet is voorgekomen dat de dobbelsteen op een ribbe of hoek tot stilstand komt, vindt men een constante grootste hoogte boven het horizontale vlak, maar zodra dit wel gebeurt — waarop een constante kleine kans bestaat — wordt deze hoogte $\sqrt{2}$ of zelfs $\sqrt{3}$ maal zo groot. Mathematisch gesproken komt deze gedachtengang op het volgende neer: Het is mogelijk dat onder de gewoonlijk voorkomende omstandigheden een grootheid (in casu de waterstand) een bepaalde verdelingsfunctie bv. van het exponentiële type bezit, maar dat er een constante kleine kans bestaat dat deze omstandigheden niet gerealiseerd zijn en dat in het laatste geval een geheel andere verdelingsfunctie bestaat, waarbij overwegend aanzienlijk grotere waarden voorkomen. Men krijgt dan een verdelingsdichtheid van het volgende type:

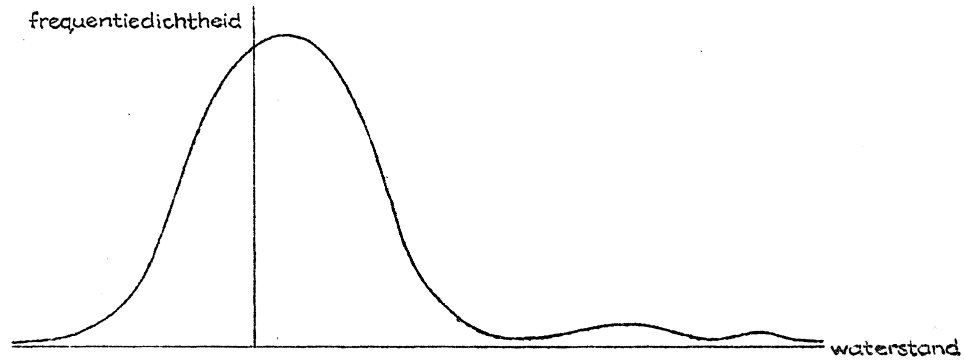

fig. 2

Indien de betrekkelijk zeldzame uitzonderingsomstandigheden die hier bedoeld zijn (die aanleiding geven tot de "bobbeltjes in de staart") onder de tot dusverre waargenomene nog niet voorgekomen zijn, kan men hun mogelijkheid op generlei wijze aan het tot dusverre gebruikte statistische model constateren.

Dit voorbeeld, waarbij zulke "bobbeltjes in de staart" optreden, is vooral ter illustratie gekozen. Het is echter ook mogelijk, dat deze "bobbeltjes" zó lang en zó breed zijn dat zij niet meer afzonderlijk herkenbaar zijn, maar alleen tot een "staartverdikking" leiden. Dat zich echter ook het door ons bedoelde verschijnsel inderdaad kan voordoen verduidelijken wij aan de hand van een voorbeeld, waarop Prof. Dr P.GROEN onze aandacht vestigde, waarbij wij ons tot een uitsluitend nog kwalitatieve beschouwing beperken.

Onderstellen we dat de waterstand y afhangt van een bepaalde grootheid x, die van de meteorologische toestand afhangt en die een eenvoudige verdelingsfunctie heeft, laten we zeggen bv. van een exponentieel type. Is y een monotone, bv. een lineaire functie van x, dan krijgt men de verdelingsfunctie van y door een eenvoudige transformatie, bv. een schaalverandering. Indien er echter een interval (a,b) van waarden van x is, waarin y groter is dan met de lineaire functie overeenkomt, dan kan men als volgt te werk gaan. Men denke zich de waarschijnlijkheidsverdeling van x vervangen door een massaverdeling (in figuur 3 is de dichtheid $f(x)$ daarvan beneden de x-as uitgezet) en projecteert deze massaverdeling op de kromme $y=\varphi(x)$, die y als functie van x weergeeft (in de figuur is dit schematisch aangeduid door het gedeelte met grote massadichtheid bijzonder dik te tekenen). Projecteert men vervolgens deze massa op de y-as, dan krijgt men daar de verdeling van y te zien (in de figuur links van de y-as aangegeven, gestippeld voor de lineaire afhankelijkheid, getrokken voor de hier beschouwde $y=\varphi(x)$). Beschouwt men bv. de kans dat y groter dan y_1 is. Bij de lineaire afhankelijkheid ware dit de kans dat $x > x_1$ is, dus zeer klein. Thans echter komt daar de kans bij, dat x in het inter-

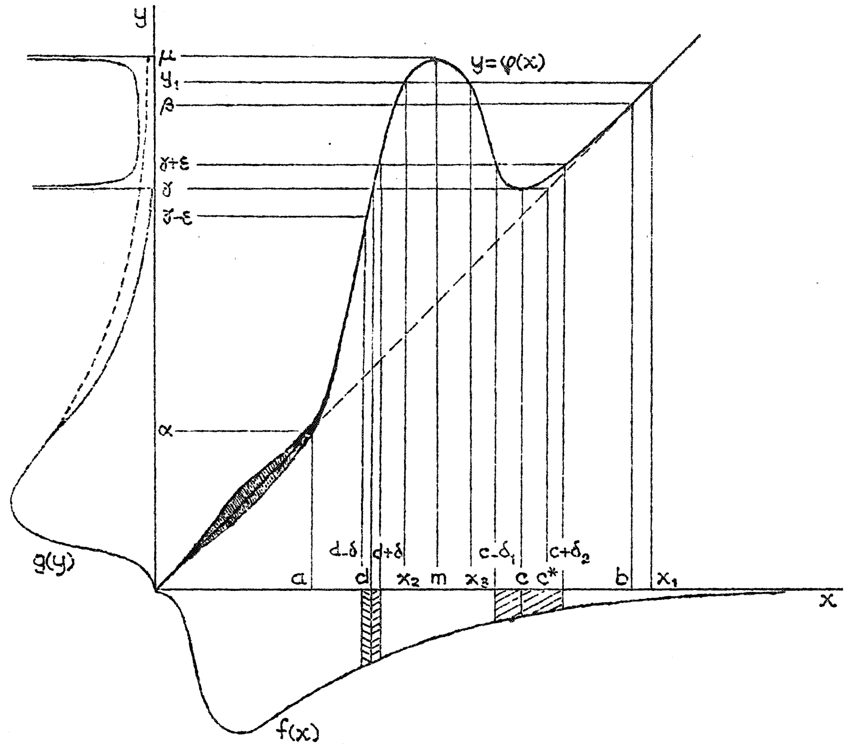

fig. 3

val (x_2, x_3) ligt en deze kan wellicht nog allerminst verwaarloosbaar zijn. (Terwille van de duidelijkheid hebben we de kleine kans dat $x > a$ is zeer veel vergroot, waardoor ook de overige daarbij behorende verschijnselen schromelijk overdreven voorgesteld zijn.)

Indien alleen waterstanden tot α waargenomen zijn, overeenkomende met $x \leqq a$, zou men door extrapolatie tot y_1 volgens GUMBEL en WEMELSFELDER een véél te kleine kans vinden dat y_1 overschreden zou kunnen worden (t.w. de kans dat $x > x_1$ is in plaats van deze tezamen met de kans dat $x_2 < x < x_3$ is).

Dat hierbij inderdaad een "bobbeltje" kan optreden kan men als volgt inzien. Noemen we α en β de waterstanden, die bij $x = a$ resp. $x = b$ behoren, en $x = c$, $y = \gamma$ de coördinaten van het (relatieve) minimum van de functie $y = \varphi(x)$ en c^* de abscis van het snijpunt van de lijn $y = \gamma$ met de rechte lijn, die het oorspronkelijke lineaire verband tussen x en y aangeeft. De kans dat y tussen α en γ valt, was bij de lineaire afhankelijkheid gelijk aan de kans dat x tussen a en c^* valt, thans echter slechts de kans dat x tussen a en d valt, waarbij d de abscis is van het eerste punt waarin de rechte $y = \gamma$ de kromme $y = \varphi(x)$ snijdt. De kansdichtheid is dus tussen α en γ véél kleiner dan zij bij de lineaire afhankelijkheid zijn zou. Zodra y echter de waarde γ te boven gaat, verandert de situatie. De kans dat y tussen γ en $\gamma + \varepsilon$ ligt bestaat uit
1e de kans dat x tussen d en $d + \delta$ ligt (dat is vrijwel gelijk aan de kans dat x tussen $d - \delta$ en d, dus dat y tussen $\gamma - \varepsilon$ en

γ ligt), en

2^e^ de kans, dat x in een klein intervalletje $(c-\delta_1, c+\delta_2)$ om c ligt. De kansdichtheid heeft dus bij $y=\gamma$ een discontinuïteit en wordt daar plotseling aanmerkelijk groter (zie fig. 3). Evenzo zal de kansdichtheid van y bij het passeren van de waarde μ van het (relatieve) maximum van de kromme een sprong naar beneden maken na eerst nog gestegen te zijn (althans indien de kansdichtheid van x nabij $x=m$, overeenkomende met $y=\mu$, bij benadering lineair is). Dit laatste kan men inzien door te bedenken, dat voor een y tussen γ en μ het interval $(y-\varepsilon, y)$ overeenkomt met twee intervalletjes op de x-as, waarvan de gezamenlijke lengte, dus ook de gezamenlijke kans toeneemt als y tot μ nadert (indien ε daarbij constant blijft). De zeer kleine kans dat x groter dan c is, beïnvloedt dit verschijnsel niet merkbaar. Wiskundig uitgedrukt: de kansdichtheid $g(y)$ van y is

(2) $$g(y) = \sum \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$$

waarin $f(x)$ de kansdichtheid van x, $y=\varphi(x)$ het verband tussen de grootheid x en de waterstand y en $|\varphi'(x)|$ de absolute waarde van de afgeleide van $\varphi(x)$ is, terwijl de som wordt uitgestrekt over die waarden van x, waarvoor $\varphi(x)=y$ (y gegeven) is [1]). Voor $y<\gamma$ of $y>\mu$ heeft men dus één term, voor $\gamma<y<\mu$ drie termen (waarbij de bijdrage van de derde term meestal te verwaarlozen zal zijn). Voor $y=\mu$ en $y=\gamma$ is de eerste resp. de tweede term oneindig, daar $\varphi'(c) = \varphi'(m) = 0$ is. De discontinuïteiten zijn dus zelfs oneindig grote sprongen. Daar y in werkelijkheid natuurlijk niet van x alléén afhangt, zullen de oneindig grote sprongen afgestompt worden, zodat de kansdichtheid inderdaad één of twee "bobbeltjes" gaat vertonen. In de (cumulatieve) verdelingsfunctie $G(y)$ uiten zich deze sprongen als punten met verticale raaklijn (fig. 4).

---

1) De kans $g(y)dy$ dat y ligt tussen y en $y+dy$ is de som van de kansen dat x in een der bijbehorende x-intervallen (x_i, x_i+dx_i) ligt, waarbij de getallen x_i de waarden van x zijn die bij de gegeven waarde van y aan $\varphi(x)=y$ voldoen. Voor de grootte van deze intervallen geldt $dy = |\varphi'(x_i)|dx_i$, en daar de kans dat x in (x_i, x_i+dx_i) ligt, gelijk is aan $f(x_i)dx_i = \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}dy$ vinden we dus
$$g(y)dy = \sum_i \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}\,dy\,,$$
waaruit voor de kansdichtheid $g(y)$ de relatie (2) volgt.

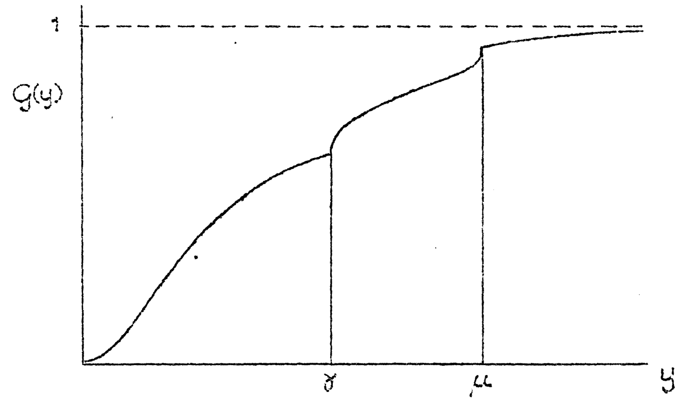

fig. 4

Op logarithmische schaal voorgesteld volgens de ook door WEMELSFELDER gebruikte methode krijgt men een kromme van het volgende type (fig. 5). Men ziet hieruit duidelijk hoe gevaarlijk het extrapoleren van het eerste stuk der kromme kan zijn. Immers als uitsluitend waterstanden $<\alpha$ of zelfs $<\gamma$ waargenomen zijn, zal men niet de juiste kromme vinden en daardoor geheel verkeerd kunnen extrapoleren (soms te laag, soms ook te hoog).

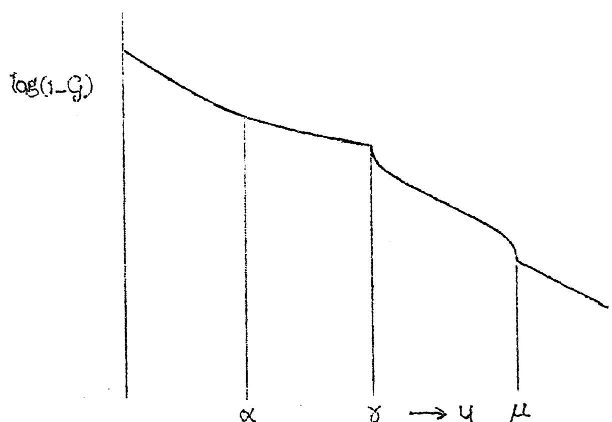

fig. 5

De vraag wanneer zich dergelijke uitzonderingstoestanden kunnen voordoen kan alleen beantwoord worden door de physische causale achtergrond, t.w. de structuur van het bestudeerde verschijnsel in de beschouwing op te nemen en daarop statistische beschouwingen te gaan toepassen. Met name zal men hierbij dus denken aan mogelijke resonantie-, of, algemener, interferentieverschijnselen of andere verschijnselen die daarmede enige overeenkomst vertonen.

Het fundamentele verschil tussen deze methode en de rechtstreekse toepassing van statistische methoden op de waterstanden zèlf is daarin gelegen, dat men in het laatste geval uitsluitend verschijnselen in aanmerking kan nemen, die zich in het verleden al eens hebben voorgedaan, terwijl de physische methode toestaat, te onderzoeken, welke verschijnselen zich in de toekomst onder bepaalde omstandigheden zouden kunnen voordoen, en onder welke omstandigheden dit het geval zou zijn. Een statistische bewerking achteraf is dan nodig om na te gaan of de waarschijnlijkheid dàt deze omstandigheden gerealiseerd worden voor de ernstigste gevallen klein genoeg is om deze te kunnen verwaarlozen, zodat men met voldoende vertrouwen de statistische extrapolatie op grond van de tot dusverre verkregen waarnemingen zal kunnen toepassen. Alleen op deze of een dergelijke wijze kan men een indruk krijgen van de betrouwbaarheid der statistische extrapolatie. Wèl kunnen de statistische methoden op de in I aangegeven wijze een aanwijzing geven over de vraag of er reden is aan te nemen dat de hier bedoelde verschijnselen zich in het verleden reeds hebben voorgedaan.

II.5. Het hiermede door ons opgeworpen probleem luidt in algemene formulering: Welke bijzondere meteorologische omstandigheden, in het bijzonder: baan, snelheid, diepte en vorm van depressies kunnen extreem hoge waterstanden veroorzaken en hoe hangt de hoogte daarvan van de genoemde grootheden af?

Het is duidelijk dat de oplossing van dit probleem niet binnen de competentie van het Mathematisch Centrum valt, doch slechts door de ter zake deskundige personen en instituten in nauwe samenwerking opgelost kan worden. Het Mathematisch Centrum zal hierbij gaarne zijn medewerking verlenen, al is het nuttig er reeds dadelijk op te wijzen dat de optredende mathematische moeilijkheden, doordat zomin lineariteit der vergelijkingen als stationariteit kan worden ondersteld, de huidige wiskundige kennis ongetwijfeld verre te boven zullen gaan en in het gunstigste geval slechts een vrij ruwe benadering zullen toestaan. Het ware daarom gewenst zo een theoretisch onderzoek van het probleem van een experimenteel onderzoek vergezeld zou kunnen gaan. Met name hebben wij ons afgevraagd, gezien het feit dat wij hier met een gecombineerd meteorologisch-hydrodynamisch probleem te maken hebben, of het wellicht mogelijk zou zijn, in het Waterloopkundig Laboratorium een model van de Noordzee te maken en daarover langs verschillende banen "depressies" te laten trekken, teweeg gebracht door bewegende ventilatoren. Aangezien er aan het maken van een realistisch model ongetwijfeld grote moeilijkheden verbonden zullen zijn, waardoor slechts in beperkte mate kwantitatieve overeenstemming met de realiteit te bereiken zal zijn, ware het van belang te onderzoeken of verwaarlozing van de Coriolis-krachten de resultaten al dan niet in ernstige mate zou beïnvloeden. Wil men de Coriolis-krachten mede in aanmerking nemen, dan zou het model op een draaiende schijf geplaatst moeten worden.

Van de verschijnselen die voor onze kust gevaarlijk kunnen zijn en tot een "staartverdikking" op de in II.4 beschreven wijze kunnen leiden, willen wij er twee noemen, die beide reeds min of meer bekend en bestudeerd zijn (vgl. SCHALKWIJK ( )) Het eerste verschijnsel komt als volgt tot stand. Wanneer gedurende enige tijd zuidelijke winden over de Noordzee gewaaid hebben, dan zal een stationnaire toestand ontstaan, waarbij de waterstand in het zuidelijk deel van de Noordzee (na aftrek van het astronomisch getij) onder het gemiddelde peil is gedaald. Houden deze winden op zeker tijdstip t_0 op, dan zal het water terugstromen en ten gevolge van de traagheid van de bewegende watermassa's zal er een gedempte slingering optreden, waarvan de periode 40-50 uur is (vgl. fig. 6, waar voor het beschouwde geval het verschil y tussen de waterstand bij onze kust en het astronomisch getij als functie van de tijd uitgezet is; op t_1, d.i. ca. een halve periode na t_0 is de waterstand dus hoger dan de gemiddelde stand). Beschouwen we nu een depressie die in west-oostrichting over de Noordzee trekt, dan zullen aanvankelijk in hoofdzaak zuidenwinden waaien, waardoor de hierboven beschreven waterstandsverlaging ontstaat. Bij het overtrekken van de depressie worden de zuidenwinden vervangen door noordenwinden. De door deze noordenwinden veroorzaakte opwaaiing kan nu (tijdelijk) versterkt worden door de schommelende beweging, welke het gevolg is van het ophouden van de zuidenwind (zodat op de tijd t_1 de verhoging van de waterstand aanzienlijk hoger kan zijn dan de bij deze noordenwinden behorende stationnaire opwaaiing).

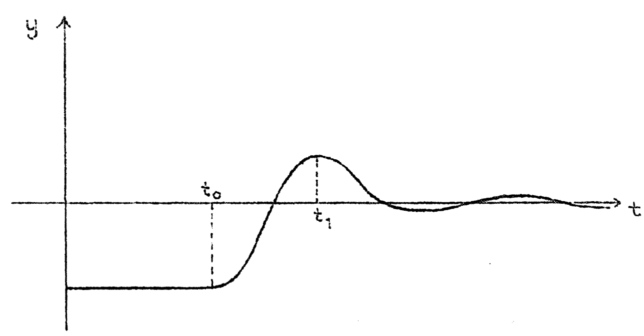

fig. 6

Het tweede effect, dat speciaal optreedt bij een depressie, die zich op de Noordzee op enige afstand van de Engelse kust snel in een zuidelijke richting verplaatst, bestaat hierin, dat door de hierbij in het westelijk deel van de Noordzee optredende noordelijke winden een voorshands niet stationnaire opstuwing veroorzaakt wordt. Indien nu de snelheid, waarmee deze opstuwing zich naar het zuiden uitbreidt, te vergelijken is met de snelheid waarmee het centrum van het windveld zich naar het zuiden verplaatst, dan kan deze opstuwing een zeer gevaarlijke hoogte gekregen hebben, wanneer zij bij onze kust aankomt.

Het is duidelijk dat een enigszins gedetailleerde bestudering van bovengenoemde en andere mogelijkheden neerkomt op een uitbreiding van de door SCHALKWIJK gegeven beschouwingen in de richting van niet-stationnaire toestanden en niet-homogene windvelden.

Het tweede gedeelte van ons probleem is natuurlijk weer van statistische aard. Daarbij doet zich vooreerst de moeilijkheid voor, dat gegevens over depressiebewegingen over véél kortere perioden aanwezig zijn dan die over de hoogwaterstanden zelf en dat hun volledigheid en nauwkeurigheid gering is. Voorts moet hier de mogelijkheid overwogen worden, dat seculaire veranderingen (bv. afsmelten van de poolijskap en de daarmee samenhangende stijging van de temperatuur van het water in het noordelijke deel van de Atlantische Oceaan) op de normale waterstanden zèlf slechts een zeer geringe invloed kunnen hebben, maar dat de loop en vormverandering der depressies er veel eerder aanmerkelijke wijzigingen door zou kunnen ondergaan.

II.6. Ten slotte menen wij aan ons rapport nog een opmerking te moeten toevoegen over de wijze waarop statistische voorspellingen in verband met de onvermijdelijk eraan verbonden onzekerheid practisch zullen worden toegepast.

Deze opmerking vloeit op natuurlijke wijze voort uit de door A.WALD (1950) ontwikkelde theorie der "statistische beslissingsfuncties". Deze theorie, die oorspronkelijk vooral in verband met de statistische kwaliteitscontrole ontwikkeld is heeft ten doel beslissingen, die op grond van statistische (dus: onzekere) gegevens genomen moeten worden, systematisch zodanig te nemen, dat de te verwachten schade zoveel mogelijk beperkt zal blijven. Deze theorie laat zich ook op het onderhavige probleem toepassen, doordat men de vooralsnog overwegende beoordeling der door een dijkdoorbraak ontstane gevaarssituatie naar de kans dat zij zich voordoet, vervangt door een beoordeling naar het daarmee verbonden risico. Zodra men zich ten volle realiseert, dat de kans op doorbraak van een bepaalde dijk nooit geheel tot 0 kan worden gereduceerd, - o.a. doordat bv. opzettelijke vernietiging van dijken in oorlogstijd nooit geheel kan worden uitgesloten -, ligt het voor de hand dat men rekening houdt met de (ideële en materiële) schade, die ontstaat als een bepaalde dijk of een bepaald dijkgedeelte het begeeft.

Ongeacht of men uiteindelijk tot afsluiting der zeearmen dan wel tot verzwaring der bestaande dijken overgaat, zal men daartoe bedenken, dat iedere dijk en ieder dijkgedeelte een bepaalde "verantwoordelijkheid" voor bescherming van mensenlevens en economische goederen draagt, die, althans in ruwe trekken, vrij goed te schatten is.

Het lijkt daarom gewenst niet in de eerste plaats de doorbraakkans, maar vooral de daarmee verbonden "verantwoordelijkheid" zo gelijkelijk mogelijk over de verschillende dijken te verdelen, en vooral deze verantwoordelijkheid voor elke dijk binnen redelijke grenzen te houden. Zoals ook een scheepsbouwer de verantwoordelijkheid voor het behoud van een belangrijk schip nooit doör de buitenbekleding alléén zal laten dragen, maar deze door het aanbrengen van waterdichte tussenschotten enigszins zal verdelen, zo lijkt ook waterstaatkundig een uitbreiding van de aloude methode der slaperdijken door een systematische verdeling van het beneden N.A.P. gelegen gedeelte van ons land (bv. door aanpassing aan dit doel van de het land doorsnijdende auto- en spoorwegen) in een aantal niet te grote "waterdichte compartimenten" een voor de hand liggende gedachte. Niet slechts de recente ervaringen met de Hollandse IJsel immers doen de vraag rijzen, of men in redelijkheid aan de dijken daarvan alléén de verantwoordelijkheid voor enkele der belangrijkste gedeelten van twee provinciën mag opleggen. In ieder geval moge hiermede het probleem aan de orde gesteld worden, de vraag naar gelijkmaking van doorbraakkansen te vervangen door die naar een evenwichtige verdeling der door de verschillende dijken te dragen verantwoordelijkheden.

Literatuur.

D.van Dantzig (1947), Kadercursus Statistiek, Hoofdstuk 3, Verdelingen, § 9, Whr p. 214-217 en Hoofdstuk [illegible], § 2, Uiterste waarden, Whr p. 373-383.

R.A.Fisher and L.H.C.Tippett (1928), Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest members of a sample, Proc. Cambridge Phil. Soc. 24, p. 180-190.

M.Fréchet (1927), Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, Ann. Soc. Polon. Math. 6, p. 93-116.

E.J.Gumbel (1935), Les valeurs extrêmes des distributions statistiques, Ann. Inst. H.Poincaré 5, p. 115-158.

(1937-1938), La distribution des inondations, Aktuárské Vědy, no 2, Praag.

(1941), The return period of flood flows, Ann. Math. Stat. 12, p. 163-190.

(1942), Statistical control curves for flood discharges, Trans. Am. Geophys. Union, p. 489-500.

(1943), On the plotting of flood-discharges, Trans. Am. Geophys. Union, p. 699-719.

(1945), Simplified plotting of statistical observations, Trans. Am. Geophys. Union 26, p. 69-82.

W.F.Schalkwijk (1947), A contribution to the study of storm surges on the Dutch Coast, Rijksuitgeverij, 's-Gravenhage.

L.H.C.Tippett (1925), On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, Biometrika 17, p. 364-387.

F.Volker (19[illegible]1), De frequentie van stormvloeden in het algemeen en van die te Hoek van Holland in het bijzonder, Rijkswaterstaat, Directie Algemene Dienst.

A.Wald (1950), Statistical decision functions, J.Wiley and Sons, New York.

P.J.Wemelsfelder (1939), Wetmatigheden in het optreden van stormvloeden, De Ingenieur, no. 9, Bouw- en Waterkunde 3.