MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 128

Statistische analysemethoden voor wasproeven (vervolg)

(Vertrouwelijk)

door

Constance van Eeden

1954

1. Inleiding

Om twee wasmiddelen, die in het volgende zullen worden aangeduid als wasmiddel II en wasmiddel III, te vergelijken, werden door het Proefstation voor de Wasindustrie de volgende proeven uitgevoerd:

In ieder der twee wasmiddelen werd een aantal gemiddeld even vuile doeken gewassen. Na het wassen werd voor ieder der wasmiddelen het aantal geheel schone doeken geteld.

Deze proef werd 25 maal uitgevoerd; de doeken die voor de verschillende wasproeven werden gebruikt waren niet altijd even vuil.

Bovenbeschreven proeven werden ook uitgevoerd met twee andere wasmiddelen, die aangeduid zullen worden als wasmiddel A en wasmiddel C.

Gevraagd werd voor beide series wasproeven de overschrijdingskansen op te geven, verkregen bij toepassing van de symmetrietoets T_2 en T_2', zoals is aangegeven in rapport S 125.

In rapport S 125 werd nog een andere methode aangegeven om twee wasmiddelen te vergelijken; daarbij werd gebruik gemaakt van de toets van WILCOXON. Deze methode kan ook bij de bovenbeschreven proeven (waarbij het aantal geheel schone doeken wordt geteld) worden toegepast. De formules worden hier eenvoudiger en de toets van WILCOXON is in dit geval identiek met de methode van de 2x2-tabel (zie bijlage S 53 (M 23)), zoals in par. 2 zal worden aangetoond. In par. 3 zullen de resultaten van beide toetsen (symmetrietoets en toets van WILCOXON), toegepast op de bovenbeschreven series wasproeven worden vermeld.

In par. 3 zullen tevens de resultaten vermeld worden, verkregen door toepassing van deze toetsen op 24 wasproeven, waarbij twee wasmiddelen V en C werden vergeleken. Bij iedere wasproef werd hier een gelijk aantal gemiddeld even vuile keukendoeken in ieder der wasmiddelen gewassen. Ook hier werd het aantal geheel schone doeken geteld.

2. De toets van WILCOXON en de methode der 2x2-tabel

Geven wij een geheel schone doek aan met een 1 en een niet geheel schone met een 0 dan hebben wij, bij de in de inleiding beschreven proeven, twee stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$, die ieder de waarden 0 en 1 kunnen aannemen ($\underline{x}$ slaat hierbij op het ene wasmiddel en $\underline{y}$ op het andere). De twee steekproeven $x_1, \ldots, x_n$ en $y_1, \ldots, y_m$, waarop wij de toets van WILCOXON toepassen, bestaan nu dus uit een aantal nullen en een aantal enen.

De resultaten van de i^e wasproef kunnen we nu als volgt samenvatten:

wasmiddel	aantal malen		totaal
	0	1	
II	a_i	c_i	n_i
III	b_i	d_i	m_i
totaal	r_i	s_i	N_i

Hierin is dus n_i (resp. m_i) het aantal doeken dat bij de i^e wasproef met wasmiddel II (resp. III) gewassen is en c_i (resp. d_i) het aantal geheel schoon gewassen doeken met wasmiddel II (resp. III).

Passen wij nu op de twee steekproeven de toets van WILCOXON (zie bijlage S 47 (M 7) en rapport S 125) toe dan vinden wij:

$$\left.\begin{array}{l} U_i = a_i\left(\frac{1}{2} b_i + d_i\right) + \frac{1}{2} c_i d_i \\ \mu_i = \frac{1}{2} n_i m_i \end{array}\right\} \quad U_i - \mu_i = \frac{1}{2}\left(a_i N_i - n_i r_i\right)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{n_i m_i \{N_i^3 - (r_i^3 + s_i^3)\}}{12 N_i (N_i - 1)} = \frac{n_i m_i r_i s_i}{4(N_i - 1)} .$$

De in rapport S 125 (pagina 2) genoemde toetsingsgrootheid $\underline{W}$ wordt dus:

$$\underline{W} = \sum_i \frac{U_i - \mu_i}{N_i} = \frac{1}{2} \sum_i \left(a_i - \frac{n_i r_i}{N_i}\right) .$$

Indien de te toetsen hypothese H_0, inhoudende dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling bezitten, juist is, is $\underline{W}$ bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde nul en variantie

$$\sigma^2 = \sum_i \frac{\sigma_i^2}{N_i^2} = \frac{1}{4} \sum_i \frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i^2 (N_i - 1)} .$$

De grootheid:

$$\frac{\underline{W}}{\sigma} = \frac{\sum_i \left(a_i - \frac{n_i r_i}{N_i}\right)}{\sqrt{\sum_i \frac{n_i m_i r_i s_i}{N_i^2 (N_i - 1)}}}$$

is dus bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde 0 en spreiding 1.

Uit het bovenstaande blijkt dat in dit geval de toets van WILCOXON identiek is met de methode der 2x2-tabel, die in het kort beschreven is in bijlage S 53 (M 23) en uitvoeriger in rapport S 115 (M 45) van het Mathematisch Centrum; in dit laatste rapport zijn ook enige methoden beschreven voor het combineren van een aantal 2x2-tabellen.

3. Resultaten

Passen wij de symmetrietoets T_2 en T_2' toe op het in de inleiding beschreven waarnemingsmateriaal dan vinden wij:

Tabel I

Vergelijking der wasmiddelen met behulp van de symmetrietoets

wasmiddelen	toets toegepast op 1)	overschrijdingskans 2) T_2	T_2'
II-III	X-Y	0,27 +	$>0,05$ $<0,10$ +
	$\frac{X-Y}{X+Y}$	0,27 +	$>0,10$ +
A - C	X-Y	0,26 +	$>0,10$ +
	$\frac{X-Y}{X+Y}$	0,22 +	$>0,10$ +
V - C	X-Y	$>0,8$	$>0,10$
	$\frac{X-Y}{X+Y}$	$>0,8$	$>0,10$

De overschrijdingskansen in de laatste kolom van tabel I zijn verkregen door toepassing van de in [1] pag. 73-76 beschreven methode; hierbij worden de positieve verschillen vergeleken met de negatieve verschillen met behulp van de toets van WILCOXON. Een tabel met behulp waarvan deze overschrijdingskansen bepaald kunnen worden is te vinden in [2] pag. 1196.

Passen wij de toets van WILCOXON toe op de wijze aangegeven in rapport S 125, dan vinden wij:

Tabel II

Vergelijking der wasmiddelen met behulp van de toets van WILCOXON

wasmiddelen	overschrijdingskans 2)
II-III	0,12 +
A - C	0,48 +
V - C	0,55 -

---

1) Zie voor de betekenis van X en Y rapport S 125, pag. 3.
2) Het teken + bij een overschrijdingskans betekent dat het eerstgenoemde wasmiddel betere resultaten geeft dan het tweede; het teken - betekent het tegengestelde.

Conclusie. Alleen bij de vergelijking van de wasmiddelen II en III is er een geringe aanwijzing, dat II wellicht beter is dan III. Het gevonden resultaat wettigt geen definitieve conclusie, maar kan wel beschouwd worden als een aansporing tot verder onderzoek.

Literatuur

1 J.Hemelrijk, Symmetrietoetsen en andere toepassingen van de theorie van Neyman en Pearson, Diss. Amsterdam, 1950.

2 J.Hemelrijk, A family of parameterfree tests for symmetry with respect to a given point, I en II, Proc. Kon. Ned. Akad. van Wet., 53 (1950), p. 945-955 en 1186-1198.

3 C.van Eeden, Statistische analyse-methoden voor wasproeven, Rapport S 125 van het Mathematisch Centrum, 1953.

4 C.van Eeden, Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen, Rapport S 115 (M 45) van het Mathematisch Centrum, 1953.

MATHEMATICSCH CENTRUM
Amsterdam
Statistische Afdeling.
S47(M6)

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese.[1]

De toetsing van een hypothese $\mathcal{H}_0$ berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden[2], of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid $\underline{u}$ (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat $\mathcal{H}_0$ juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van $\underline{u}$, en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat $\underline{u}$ een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese $\mathcal{H}_0$, gelijk is aan een gegeven getal α, zodat Z dus van α afhankelijk is[3]. Z heet de kritieke zône van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu $\mathcal{H}_0$ op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van $\underline{u}$ in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien $\mathcal{H}_0$ juist is, gelijk aan α. Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met $\alpha = 0{,}05$ resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie (universum, populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen <u>geen</u> mogelijkheid om tot <u>aanvaarding</u> van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze <u>nevenvoorwaarden</u> dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de <u>overschrijdingskans</u> k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α, waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α, waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootheid nog juist in de (bij α behorende) kritieke zône Z ligt. <u>Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt verworpen, indien $k \leq \alpha$ is.</u>

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijke men bv. de tweede hieronder gegeven litteratuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

<u>Litteratuur:</u>

J. Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J. Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p. 54-66.

lathematisch Centrum,
!de Boerhaavestraat 49,
ımsterdam O.
Statistische Afdeling,
347 (M7).

Maart, 1952.

De toets van Wilcoxon.[1]

Deze methode dient tot het toetsen van de hypothese H_o, inhoudende, dat twee steekproeven $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ afkomstig zijn uit één collectie (ook wel populatie of universum genaamd).

Voor het toetsen van de hypothese H_o wordt gebruik gemaakt van een toetsingsgrootheid $\underline{U}$ [2], die als volgt uit de waarnemingen berekend wordt. Onderstellen we, dat de waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, dan bepalen we eerst het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef, dat kleiner is dan de kleinste waarneming x_1 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1). Noem dit aantal V_1. Vervolgens wordt het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef bepaald, dat kleiner is dan de op één na kleinste waarneming x_2 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid wordt weer een $\frac{1}{2}$ in plaats van 1 geteld). Dit aantal noemen we V_2. Evenzo worden met betrekking tot $x_3,x_4,\ldots,x_n$ de aantallen $V_3,V_4,\ldots,V_n$ bepaald. De waarde U van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ wordt voor de twee steekproeven dan gegeven door

$$U=V_1+V_2+\ldots+V_n.$$

Wanneer onder de waarnemingen niet te veel gelijken voorkomen, kan bewezen worden, dat de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ onder de hypothese H_o voor grote waarden van n en m (beide $\geq$ 10) bij benadering een normale verdeling bezit. De waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ tezamen genomen vallen uiteen in een aantal groepen van gelijke waarnemingen. Noem het aantal van deze groepen k, dan is k minstens 1 (als alle waarnemingen gelijk zijn) en hoogstens m+n (als alle waarnemingen verschillend zijn).

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Stochastische grootheden worden door onderstreping aangeduid.

Zijn $t_1, \ldots, t_k$ de aantallen waarnemingen in deze groepen van gelijken, dan worden het gemiddelde μ en de variantie σ^2 van de toetsingsgrootheid U gegeven door

$$\mu(\underline{U}) = \tfrac{1}{2}nm,$$

en

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (\underline{U}) = \frac{1}{12}\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}\left\{(n+m)^3 + - (t_1^{\,3} + t_2^{\,3} + \ldots + t_k^{\,3})\right\} \qquad ^{1)}$$

De grootheid $\mu(\underline{U})$ is dus onafhankelijk van de waarden vast. Indien de hypothese H_o niet vervuld is, zal de grootheid U grote of kleine waarden bezitten, al naar gelang y systematisch kleiner of groter is dan x.

De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_o verwerpt indien de gevonden waarde U van U te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{|U-\mu|}{\sigma} > \xi_\alpha\ , \qquad ^{2)}$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_α volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \tfrac{1}{2}\alpha\ ,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.

De (tweezijdige) overschrijdingskans k , behorende bij T, is gedefiniëerd als

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\left|\frac{U-\mu}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \qquad ^{2)}$$

en kan ook in eenttabel van de normale verdeling worden gevonden.

Bij eenzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.

Een bijzonder geval van het bovenstaande is, dat onder de waarnemingen voor x en y in 't geheel geen gelijken voorkomen. In dat geval kan de uitdrukking voor de variantie herleid worden tot

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\ nm(n+m+1).$$

---

1) Deze formule is een door T.J.T[illegible] diging van de door J.Hemelri[illegible] mule. De afleiding van deze [illegible] gepubliceerd worden.

2) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van U.

Indien n en m kleiner zijn dan 10, zijn tabellen beschikbaar voor het berekenen van de overschrijdingskans k voor de uit de steekproef bepaalde waarde U van U (zie [2] en [4]). Dergelijke tabellen bestaan echter niet voor het geval, dat gelijke waarnemingen optreden.

Opmerking. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat de variantie van U door het optreden van gelijke waarnemingen vermindert. Het verschil, dat door deze gelijken optreedt, is echter in het algemeen gering. Men kan daarom in eerste instantie deze correctie op σ^2 verwaarlozen. De overschrijdingskansen, die men dan vindt, zijn iets te groot.

Litteratuur:

1. F.Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945), p.80-83.
2. H.B.Mann and D.R.Whitney, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Amer.Math.Stat. 18 (1947), p. 50-60.
3. H.R.van der Vaart, Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples, Proceedings van de Kon. Ned.Ak.v.Wet., 53 (1950), p. 494-520.
4. H.R.van der Vaart, Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, met tabellen voor n en m$\leq$10, Rapport S32 (M4) (1950).
5. H.R.van der Vaart, De toets van Wilcoxon voor het probleem van twee steekproeven. (Cursus "Parametervrije Methoden", 1951-'52).
6. D.van Dantzig, Kadercursus Mathematische Statistiek, Math. Centrum, Amsterdam (1947-'50), hoofdst. 6, § 3.
7. J.Hemelrijk, Note on Wilcoxon's two sample test, when ties are present, Ann.Math.Stat. 23 (1952) no. 2.

.THEMATISCH CENTRUM,
.e Boerhaavestraat 49,
m s t e r d a m - O.

:atistische Afdeling
S 53 (M 23).

Toetsing van de hypothese $p_1 = p_2$ met behulp van een 2 x 2-tabel [1])

Wij beschouwen twee reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment van de ene reeks één van de twee resultaten A of $\overline{A}$ (non-A) heeft en ieder experiment van de tweede reeks één van de beide resultaten B of $\overline{B}$ (hierbij kan A=B zijn). Daarbij wordt ondersteld, dat bij ieder der experimenten van de ene reeks de kans op A gelijk aan p_1 (en dus de kans op $\overline{A}$ gelijk aan $1-p_1$) is en bij ieder der experimenten van de tweede reeks de kans op B gelijk aan p_2 (en dus de kans op $\overline{B}$ gelijk aan $1-p_2$). De te toetsen hypothese luidt nu:

$$H_o : p_1 = p_2.$$

Indien de eerste reeks uit n en de tweede reeks uit m waarnemingen bestaat, waaronder a (resp. b) maal A (resp. B) voorkomt, kunnen deze gegevens in de volgende 2 x 2-tabel worden samengevat:

	A resp. B	$\overline{A}$ resp. $\overline{B}$	totaal
eerste reeks	a	c	n
tweede reeks	b	d	m
totaal	r	s	N

Als toetsingsgrootheid wordt a, het aantal malen A in de eerste reeks waarnemingen, gebruikt. Indien H_o, juist is bezit deze grootheid onder de voorwaarde, dat r de bij het experiment gevonden waarde aanneemt, de volgende waarschijnlijkheidsverdeling: de kans, dat een bepaalde waarde a aangenomen wordt, is gelijk aan:

$$\frac{\binom{n}{a}\binom{m}{b}}{\binom{N}{r}}$$

Als kritieke zone worden de waarden van a met de kleinste waarschijnlijkheden bijeengezocht, tot de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert (bij éénzijdige toetsing bestaat de kritieke zone uitsluitend uit grote of uitsluitend uit kleine waarden van a). De overschrijdingskans, behorende bij de gevonden waarde van a, is gedefinieerd als de som van alle waarschijnlijkheden van bovenstaande verdeling, die hoogstens gelijk aan de waarschijn-

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

lijkheid van de gevonden waarde zijn (bij éénzijdige toetsing echter gelijk aan de som van de waarschijnlijkheden van alle waarden die groter of gelijk aan de gevondene, of van alle waarden, die kleiner of gelijk aan de gevondene zijn). Deze exacte toetsingsmethode voor H_0 is afkomstig van R.A.FISHER.

Indien n en m zo groot zijn, dat deze exacte berekening te omslachtig wordt, maakt men gebruik van de volgende benadering:

Gemiddelde en spreiding van de grootheid a zijn (indien H_0 juist is):

$$\frac{nr}{N} \text{ resp. } \sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}} .$$

Men gebruikt dan in plaats van de exacte waarschijnlijkheidsverdeling van a de normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en dezelfde spreiding en in plaats van de gevonden waarde van a neemt men het getal dat $\frac{1}{2}$ dichter bij het gemiddelde ligt dan deze gevonden waarde (dit laatste is de z.g. "continuïteitscorrectie", die bij toenemende n en m weldra verwaarloosd kan worden). Bij positieve $a - \frac{nr}{N}$ berekent men dus:

$$a^* = \frac{a - \frac{nr}{N} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}} = \frac{aN - nr - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} = \frac{ad - bc - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}$$

en bij negatieve $a - \frac{nr}{N}$ berekent men:

$$a^* = \frac{a - \frac{nr}{N} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}} = \frac{ad - bc + \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} .$$

De overschrijdingskans wordt nu opgezocht in een tabel der normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1. De rechts-éénzijdige (resp. links-éénzijdige) overschrijdingskans is het oppervlak rechts (resp. links) gelegen van a^*. De tweezijdige overschrijdingskans is twee maal het oppervlak der normale verdeling dat rechts van $\frac{|ad - bc| - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}$ ligt.

Literatuur.

R.A.Fisher, Statistical Methods for Research Workers, London 1948, p. 96. Opmerking: Fisher gebruikt hier de éénzijdige overschrijdingskans.

J.Hemelrijk, Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, Vacantiecursus Mathematisch Centrum, Amsterdam 1950, § 4.