MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 134

Sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het vergelijken van twee onbekende kansen

door

Constance van Eeden

1954

1. Inleiding.

We beschouwen twee reeksen onafhankelijke experimenten, b.v. twee processen A en B, waarbij ieder experiment twee mogelijke uitkomsten heeft: succes of mislukking.

Stel de kans op succes bij ieder experiment van proces A gelijk aan p en bij ieder experiment van proces B gelijk aan p'.

Een sequente toets met twee beslissingsmogelijkheden voor het vergelijken van de twee kansen p en p' is gegeven door WALD [7] 1) (pg. 106 e.v.) voor het geval men paren waarnemingen verricht, d.w.z. voor het geval dat men bij iedere stap van het onderzoek voor ieder der processen A en B het experiment éénmaal uitvoert.

Heeft men groepen waarnemingen, d.w.z. wordt bij iedere stap van het onderzoek voor ieder der processen A en B het experiment een aantal malen uitgevoerd, dan kan men de in [9] beschreven sequente toets met twee beslissingsmogelijkheden toepassen. Bij deze toets gaat men als volgt te werk:

Stel bij de i-e stap van het onderzoek wordt bij proces A het experiment n_i maal uitgevoerd en bij proces B m_i maal. Zijn de aantallen successen resp. a_i en b_i dan kan men de resultaten als volgt samenvatten:

proces	succes	mislukking	totaal
A	a_i	c_i	n_i
B	b_i	d_i	m_i
totaal	r_i	s_i	N_i

De grootheden a_i en b_i bezitten beide een binomiale verdeling met parameters n_i en p resp. m_i en p'.

Men maakt bij deze toets nu gebruik van het feit dat als n_1 een binomiale verdeling bezit met parameters n en p, de grootheid:

$$(1.1)\qquad \left.\begin{array}{lll} y = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{n_1}{n}} & \text{als} & 0 < n_1 < n \\ y = \sqrt{\frac{2}{n}} & \text{als} & n_1 = 0 \\ y = \pi - \sqrt{\frac{2}{n}} & \text{als} & n_1 = n \end{array}\right\} 0 \leq y \leq \pi$$

bij benadering een normale verdeling bezit met gemiddelde

$$(1.2)\qquad \mu = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{p}$$

---

1) Cijfers tussen vierkante haken verwijzen naar de literatuurlijst.

en variantie

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \qquad (1.3)$$ 2)

Deze transformatie wordt toegepast op a_i en op b_i, waardoor zij overgaan in grootheden, die wij met u_i en v_i aangeven. Op het verschil

$$x_i \stackrel{\text{def.}}{=} u_i - v_i$$

wordt de door WALD [7] (pg. 117 e.v.) gegeven sequente toets met twee beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende spreiding toegepast.

De bovengenoemde toetsen zijn beide toetsen met twee beslissingsmogelijkheden, d.w.z. men komt met deze toetsen tot één der beslissingen $p > p'$ of $p < p'$.

De sequente toets van WALD voor het vergelijken van twee kansen p en p' voor het geval van paren waarnemingen kan met behulp van de door de BOER [2] en [3] gegeven sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor één onbekende kans, uitgebreid worden tot een toets met drie beslissingsmogelijkheden, dus een toets waarmee men tot één der beslissingen $p > p'$, $p < p'$ of $p \approx p'$ kan komen. Dit geval zullen wij hier niet verder beschouwen.

In dit rapport zal nu beschreven worden hoe men, met behulp van een door SOBEL en WALD gegeven sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende spreiding [8] de bovengenoemde toets voor het vergelijken van twee kansen p en p' voor het geval van groepen waarnemingen uit kan breiden tot een soortgelijke toets met drie beslissingsmogelijkheden.

Vóór wij deze toets in par. 4 bespreken, zullen eerst in par. 2 de sequente toets van WALD met twee en die van SOBEL en WALD met drie beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende spreiding in het kort beschreven worden. In par. 3 zullen wij de exacte verdeling van y voor enige waarden van n en p vergelijken met de bovengenoemde benadering.

---

2) Tabellen van y, μ en σ^2 zijn te vinden in [9] voor $n = 10(1)50$ en $0 \leqq n_1 \leqq n$; y is hierbij uitgedrukt in radialen.

2. Sequente toets voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende spreiding.

2.1. Twee beslissingsmogelijkheden.

Voor het geval dat de opeenvolgende waarnemingen $x_1, x_2, \ldots\ldots$ waarnemingen zijn van één stochastische grootheid $\underline{x}$, die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en bekende spreiding σ vindt men de sequente toets van WALD met twee beslissingsmogelijkheden voor μ beschreven in [7] (pg. 117 e.v.).

Wij zullen deze toets hier beschrijven voor het geval dat de spreiding niet constant is. De afleiding verloop geheel analoog aan het geval voor gelijke spreidingen.

Voor de toets is vereist dat een waarde μ_0 voor μ gekozen wordt. Volgens de sequente toets komt men dan tot één der beslissingen: $\mu < \mu_0$ of $\mu > \mu_0$, waarbij men ook, naar willekeur, het $<$ resp. $>$ door $\leqq$ resp. $\geqq$ kan vervangen.

Verder is vereist dat twee waarden μ_1 en μ_2 voor μ gegeven zijn met

$$\mu_1 < \mu_0 < \mu_2 ,$$

waarbij μ_1 en μ_2 zodanig gekozen moeten worden dat het voor het onderzoek van weinig belang is of men tot de beslissing $\mu < \mu_0$ dan wel de beslissing $\mu > \mu_0$ komt als $\mu_1 < \mu < \mu_2$, terwijl de beslissing $\mu > \mu_0$ een ernstige fout inhoudt, als $\mu \leqq \mu_1$ is en eveneens de beslissing $\mu < \mu_0$ als $\mu \geqq \mu_2$ is. Men spreekt dan alleen in deze twee gevallen van een foute conclusie en noemt het interval (μ_1, μ_2) de indifferentiezone.

Is nu

α de kans om te besluiten tot $\mu > \mu_0$ als $\mu = \mu_1$

β de kans om te besluiten tot $\mu < \mu_0$ als $\mu = \mu_2$

en kiest men α en β beide $< \frac{1}{2}$ dan is de kans op een foute conclusie $\leqq \alpha$ als $\mu \leqq \mu_1$ is en $\leqq \beta$ als $\mu \geqq \mu_2$ is.

Men moet er nu bij de keuze van μ_1 en μ_2 nog rekening mee houden, dat een verkleining van de indifferentiezone (μ_1, μ_2) een vergroting van het gemiddeld aantal waarnemingen, dat nodig is om tot een beslissing te komen, tot gevolg heeft.

De waarde μ_0 is verder voor de uitvoering van de toets van geen belang.

Heeft men μ_1, μ_2, α en β gekozen en is σ_i de (bekende) spreiding van $\underline{x}_i$ dan wordt de toets als volgt uitgevoerd:

Men gaat door met het nemen van waarnemingen zolang:

$$(2.1) \qquad \frac{\ln B}{\mu_2 - \mu_1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}}{\sigma_i^2} < \frac{\ln A}{\mu_2 - \mu_1} ,$$

waarin $A = \frac{1-\beta}{\alpha} > 1$

$B = \frac{\beta}{1-\alpha} < 1.$

Zodra niet meer aan (2.1) voldaan is houdt men op met het nemen van waarnemingen en besluit tot $\mu > \mu_0$ als

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}}{\sigma_i^2} \geqq \frac{\ln A}{\mu_2 - \mu_1}$$

en tot $\mu < \mu_0$ als

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}}{\sigma_i^2} \leqq \frac{\ln B}{\mu_2 - \mu_1} .$$

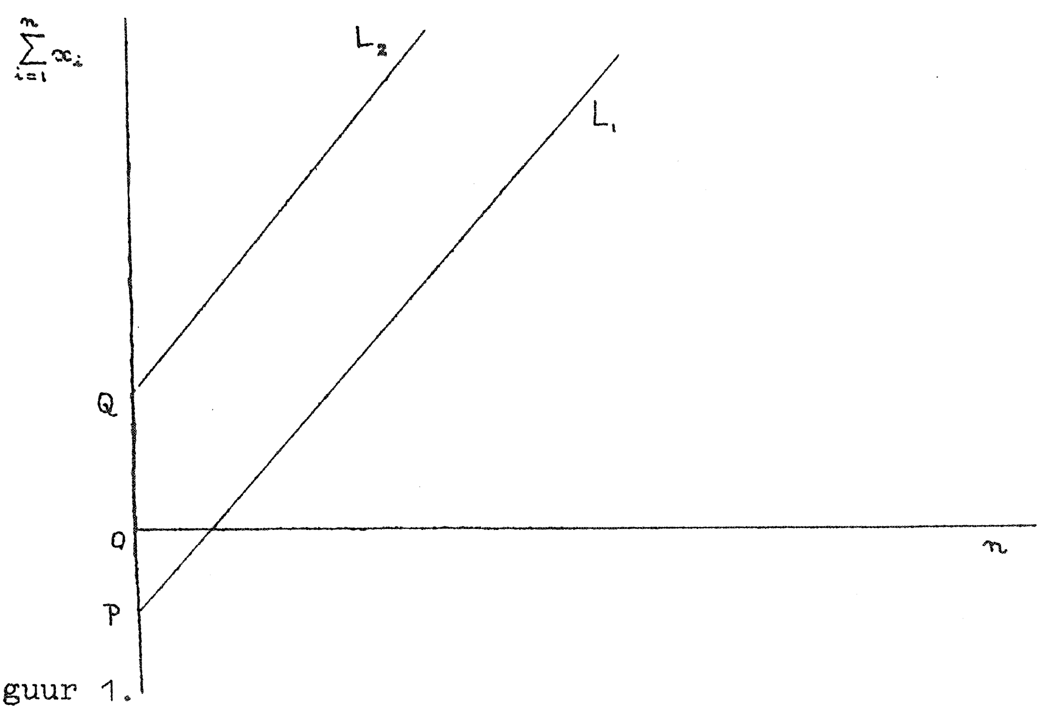
Hebben de stochastische grootheden $\underline{x}_i$ alle dezelfde spreiding σ dan gaat (2.1) over in:

$$(2.1a) \quad \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1} \ln B + \frac{\mu_1+\mu_2}{2} n < \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1} \ln A + \frac{\mu_1+\mu_2}{2} n.$$

In dit geval kan men de toets gemakkelijk grafisch uitvoeren. Daartoe zet men in een grafiek $\sum_{i=1}^{n} x_i$ uit tegen n. Men tekent twee evenwijdige rechten L_1 en L_2, waarvan de vergelijkingen zijn:

$$L_1: \quad y = \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1} \ln B + \frac{\mu_1+\mu_2}{2} x$$

$$L_2: \quad y = \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1} \ln A + \frac{\mu_1+\mu_2}{2} x.$$



figuur 1.
Schema voor de sequente toets met twee beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende constante spreiding.

Men gaat door met het nemen van waarnemingen zolang het punt $(n, \sum_{i=1}^{n} x_i)$ tussen L_1 en L_2 ligt. Zodra dit punt niet meer tussen L_1 en L_2 ligt, houdt men op met het nemen van waarnemingen en besluit tot $\mu > \mu_0$ als het punt op of boven L_2 ligt en tot $\mu < \mu_0$ als het punt op of onder L_1 ligt. Deze eenvoudige grafische procedure vervalt als de spreidingen ongelijk zijn.

Opmerking: Daar $A > 1$ en $B < 1$ snijdt L_1 de y -as onder de x -as en snijdt L_2 de y -as boven de x -as.

2.2. Drie beslissingsmogelijkheden.

De sequente toets van SOBEL en WALD met drie beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde μ van een normale verdeling met bekende spreiding vindt men beschreven in [8]. Deze toets kan alleen op de daar beschreven wijze worden toegepast als de spreiding van de grootheden $\underline{x}_i$ constant is.

Wij zullen hem hier in het kort beschrijven voor het geval dat de spreiding niet constant is. De afleiding verloopt weer geheel analoog aan het geval van constante spreiding. Voor deze toets is vereist dat twee waarden μ_0 en μ_0' en vier waarden μ_1, μ_2, μ_3 en μ_4 gekozen worden, met

$$\mu_1 < \mu_0 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_0' < \mu_4 ,$$

waarbij de drie beslissingsmogelijkheden van de toets zijn:

1. $\mu < \mu_0$
2. $\mu > \mu_0'$
3. $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0'$.

De intervallen (μ_1, μ_2) en (μ_3, μ_4) zijn de indifferentie-intervallen. Het interval (μ_1, μ_2) moet zo gekozen worden dat als $\mu_1 < \mu < \mu_2$ het voor het onderzoek van weinig belang is of men tot de beslissing 1 dan wel de beslissing 3 komt, terwijl beslissing 2 in dit geval een foute conclusie genoemd wordt. Het interval (μ_3, μ_4) moet men zo kiezen dat als $\mu_3 < \mu < \mu_4$ beslissing 1 als fout gewaardeerd wordt, terwijl het van weinig belang is of men in dit geval tot beslissing 2 dan wel beslissing 3 komt.

De twee waarden μ_0 en μ_0' zijn voor de uitvoering van de toets verder van geen belang.

Zij nu T de (gewone) sequente toets voor het toetsen van $\mu = \mu_1$ tegen $\mu = \mu_2$, dan leidt deze toets tot een beslissing zodra niet meer voldaan is aan

$$\text{(2.2)} \qquad \frac{\ln B}{\mu_2 - \mu_1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}}{\sigma_i^2} < \frac{\ln A}{\mu_2 - \mu_1} ,$$

waarin $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ en $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$ als

α = de kans om met T te besluiten tot $\mu \geqq \mu_0$ als $\mu = \mu_1$

β = de kans om met T te besluiten tot $\mu < \mu_0$ als $\mu = \mu_2$.

Is T' de (gewone) sequente toets voor het toetsen van $\mu = \mu_3$ tegen $\mu = \mu_4$, dan leidt T' tot een beslissing, zodra niet meer voldaan is aan:

$$(2.3) \qquad \frac{\ln B'}{\mu_4 - \mu_3} < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}}{\sigma_i^2} < \frac{\ln A'}{\mu_4 - \mu_3},$$

waarin $A' = \frac{1-\beta'}{\alpha'}$ en $B' = \frac{\beta'}{1-\alpha'}$ als

α' = de kans om met T' te besluiten tot $\mu > \mu_0'$ als $\mu = \mu_3$

β' = de kans om met T' te besluiten tot $\mu \leqq \mu_0'$ als $\mu = \mu_4$.

Wij voeren nu de volgende notatie in:

$$a = \frac{\ln A}{\mu_2 - \mu_1} \qquad a' = \frac{\ln A'}{\mu_4 - \mu_3}$$

$$b = \frac{\ln B}{\mu_2 - \mu_1} \qquad b' = \frac{\ln B'}{\mu_4 - \mu_3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}}{\sigma_i^2} = y_n \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}}{\sigma_i^2} = y_n',$$

dan leidt T tot een beslissing zodra niet meer voldaan is aan

$$(2.2a) \qquad b < y_n < a$$

en T' leidt tot een beslissing zodra niet meer voldaan is aan

$$(2.3a) \qquad b' < y_n' < a'.$$

Verder geldt nog dat a en $a' > 0$ zijn en b en $b' < 0$ en

$$(2.4) \qquad y_n > y_n'.$$

Wij voeren nu nog de onderstellingen in, dat

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} b &\leqq b' \\ a &\leqq a'. \end{aligned}$$

Uit (2.4) en (2.5) volgt nl. dat men dan volgens T' niet tot de beslissing $\mu > \mu_0'$ kan komen vóórdat T tot de beslissing $\mu \geqq \mu_0$ heeft geleid en dat men volgens T niet tot de beslissing $\mu < \mu_0$ kan komen vóórdat T' de beslissing $\mu \leqq \mu_0'$ heeft gegeven.

Er zijn nu dus de volgende mogelijkheden:

1. T' geeft de beslissing $\mu \leqq \mu_0'$ en T geeft (bij dezelfde of een latere stap) de beslissing $\mu < \mu_0$ of de beslissing $\mu \geqq \mu_0$.
2. T geeft de beslissing $\mu \geqq \mu_0$ en T' geeft (bij dezelfde of een latere stap) de beslissing $\mu \leqq \mu_0'$ of de beslissing $\mu > \mu_0'$.

De sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden wordt nu als volgt gedefiniëerd:

Men gaat door met het nemen van waarnemingen zolang niet beide toetsen T en T' tot een beslissing hebben geleid. Zodra T en T' beide een beslissing hebben gegeven is de toets afgelopen en met besluit

a. tot $\mu < \mu_0$ als volgens T' besloten is tot $\mu \leqq \mu_0'$ en volgens T tot $\mu < \mu_0$,

b. tot $\mu > \mu_0'$ als volgens T besloten is tot $\mu > \mu_0$ en volgens T' tot $\mu > \mu_0'$,

c. tot $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0'$ als volgens T besloten is tot $\mu \geqq \mu_0$ en volgens T' tot $\mu \leqq \mu_0'$.

Het zal nu ook duidelijk zijn waarom de onderstelling (2.5) is ingevoerd. Was hieraan niet voldaan, dan zou men volgens T' tot de beslissing $\mu > \mu_0'$ en later volgens T tot de hiermee tegenstrijdige beslissing $\mu < \mu_0$ kunnen komen.

Hebben de stochastische grootheden x_i alle dezelfde spreiding σ, dan gaan (2.2) en (2.3) over in:

$$(2.2b) \qquad \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1}\ln B + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}n < \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1}\ln A + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}n$$

$$(2.3b) \qquad \frac{\sigma^2}{\mu_4-\mu_3}\ln B' + \frac{\mu_3+\mu_4}{2}n < \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\sigma^2}{\mu_4-\mu_3}\ln A' + \frac{\mu_3+\mu_4}{2}n.$$

Men kan de toets dan grafisch uitvoeren. Daartoe zet men weer $\sum_{i=1}^{n} x_i$ uit tegen n en tekent vier rechten L_1, L_2, L_1' en L_2' (zie figuur 2), die twee aan twee evenwijdig zijn. L_1 en L_2 zijn de bij T behorende grenslijnen met als vergelijkingen:

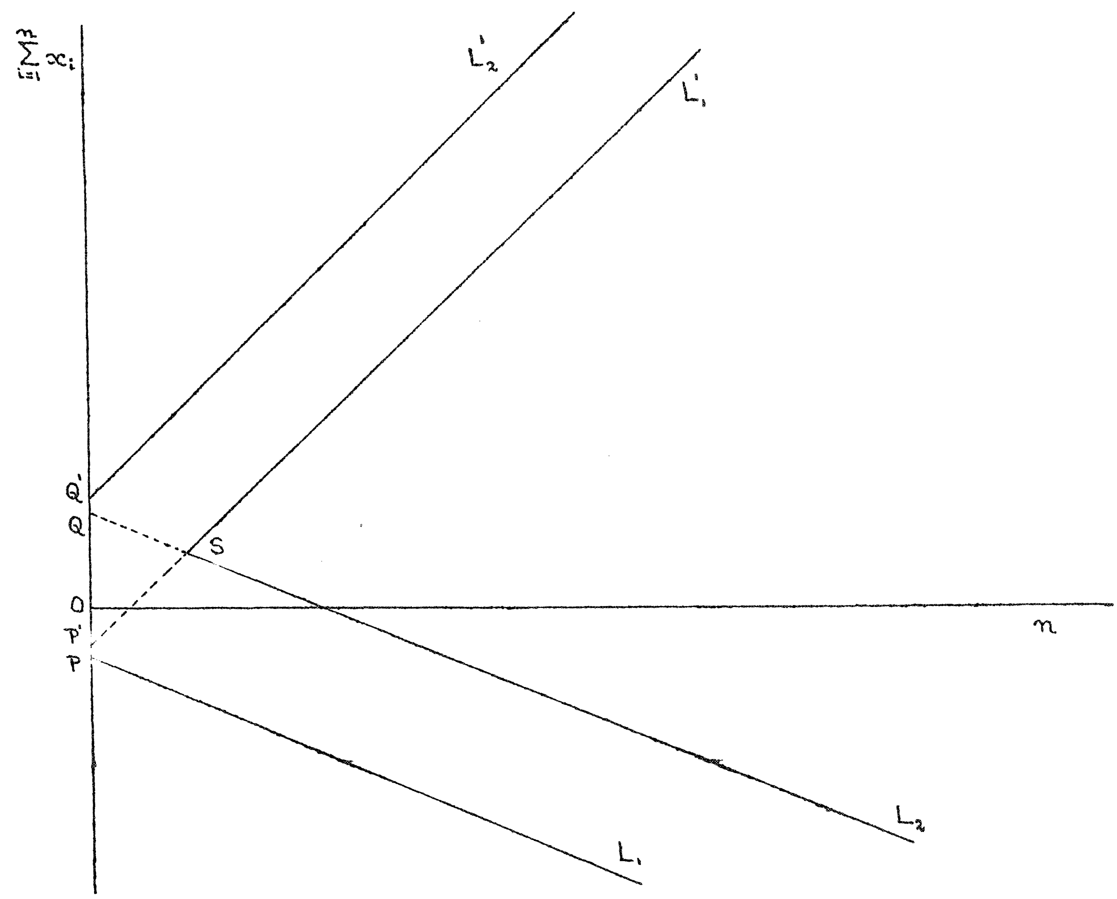
$$L_1: \; y = \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1}\ln B + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}x$$

$$L_2: \; y = \frac{\sigma^2}{\mu_2-\mu_1}\ln A + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}x.$$

De vergelijkingen van de bij T' behorende grenslijnen L_1' en L_2' zijn:

$$L_1': \; y = \frac{\sigma^2}{\mu_4-\mu_3}\ln B' + \frac{\mu_3+\mu_4}{2}x$$

$$L_2': \; y = \frac{\sigma^2}{\mu_4-\mu_3}\ln A' + \frac{\mu_3+\mu_4}{2}x.$$



figuur 2.
Schema voor de sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende constante spreiding.

Daar $\mu_3+\mu_4>\mu_2+\mu_1$ is de helling van L_1' en L_2' groter dan die van L_1 en L_2. Uit (2.5) volgt dat $OQ \leqq OQ'$ en $OP' \leqq OP$ is. De rechten L_2 en L_1' snijden elkaar dus rechts van de y-as en L_2' en L_1 snijden elkaar links van de y-as.

Er zijn nu de volgende mogelijkheden voor de weg, die het punt $(n, \sum_{i=1}^{n} x_i)$ beschrijft:

1. De weg passeert eerst $P'S$ en daarna (of bij dezelfde stap) L_1; volgens T' wordt dan besloten tot $\mu \leqq \mu_0'$ en volgens T tot $\mu < \mu_0$.
2. De weg passeert eerst QS en daarna (of bij dezelfde stap) L_2'; volgens T wordt dan besloten tot $\mu \geqq \mu_0$ en volgens T' tot $\mu > \mu_0'$.
3. De weg passeert eerst QS en daarna (of bij dezelfde stap) L_1' of de weg passeert eerst $P'S$ en daarna (of bij dezelfde stap) L_2; volgens T wordt dan besloten tot $\mu \geqq \mu_0$ en volgens T' tot $\mu \leqq \mu_0'$.

Volgens de toets met drie beslissingsmogelijkheden komen wij dus resp. tot de beslissingen $\mu < \mu_0$, $\mu > \mu_0'$ en $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0'$.

3. De verdeling van $y = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{n_1}{n}}$.

De boogsinus-wortel-transformatie, toegepast op de grootheid $\frac{n_1}{n}$, waarbij n_1 binomiaal verdeeld is met parameters n en p, is afkomstig van FISHER [5]. Hij gebruikt de transformatie

(3.1) $$y = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{n_1}{n}} \quad \text{3)} \qquad 0 \leq n_1 \leq n$$

BARTLETT [1] heeft de transformatie

(3.2)
$$y' = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{n_1}{n}} \qquad 0 < n_1 < n$$
$$y' = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{1}{4n}} \qquad n_1 = 0$$
$$y' = \pi - 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{1}{4n}} \quad \text{4)} \qquad n_1 = n$$

voorgesteld, terwijl we in [9] de reeds in de inleiding genoemde transformatie:

(3.3)
$$y'' = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{n_1}{n}} \qquad 0 < n_1 < n$$
$$y'' = \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad n_1 = 0$$
$$y'' = \pi - \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad n_1 = n$$

vinden.

Voor een uitgebreide behandeling van de transformatie verwijzen wij naar [4] (pg. 395-416).

Wij zullen nu, voor de laatste twee transformaties, het gemiddelde en de variantie van y' en y'' voor enige waarden van n en p vergelijken met de in [4] en [9] genoemde benaderingen hiervoor, die voor alle drie transformaties

(3.4) $$\mu \approx 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{p} \quad \text{5)}$$

(3.5) $$\sigma^2 \approx \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

zijn.

Tabel I geeft de resultaten voor μ (waarbij de benadering alleen van p afhangt) en tabel II die voor σ^2 (waarbij de benadering alleen van n afhangt).

----

3) Tabellen van $y = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{x}$ zijn te vinden in [6] voor $x = 0{,}000(0{,}001)1{,}000$, pag. 70-71; y is hier uitgedrukt in radialen.

4) Tabellen van $y = 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{\frac{1}{4n}}$ zijn te vinden in [4], pag. 406 voor $n = 10(1)50$.

5) Als $p = \frac{1}{2}$ dan geldt (3.4) exact; zie tabel I.

Tabel I

De verwachting van y' en y'', exact en benaderd

	exact						benaderd
	y'	y''	y'	y''	y'	y''	
p \ n	10		20		30		
0,50	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571	1,571
0,25	1,017	1,025	1,031	1,031	1,037	1,037	1,047
0,10	0,624	0,669	0,614	0,625	0,620	0,623	0,644
0,05	0,476	0,553	0,434	0,467	0,428	0,444	0,451

Tabel II

De variantie van y' en y'', exact en benaderd

	exact								benaderd
	y'	y''	y'	y''	y'	y''	y'	y''	
n \ p	0,50		0,25		0,10		0,05		
10	0,113	0,112	0,110	0,100	0,075	0,051	0,045	0,024	0,110
20	0,053	0,053	0,055	0,054	0,051	0,043	0,036	0,024	0,053
30	0,035	0,035	0,035	0,035	0,036	0,034	0,030	0,023	0,034

In figuur 3a en 3b (zie pg. 16 en 17) vinden wij voor enige waarden van n en p de exacte verdeling van y' en die van y'' en de normale verdeling met gemiddelde en spreiding volgens (3.4) en (3.5).

Uit de tabellen I en II en figuur 3 krijgen wij de indruk, dat de benadering (vooral wat σ betreft) voor de verdeling van y' iets beter is dan voor y'' en wel speciaal voor kleine waarden van p.

4. Sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het vergelijken van twee waarschijnlijkheden.

De door SOBEL en WALD gegeven sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het gemiddelde van een normale verdeling wordt nu als volgt toegepast om twee waarschijnlijkheden p en p' te vergelijken:

Op de grootheden a_i en b_i (zie inleiding) wordt één der in par. 3 genoemde transformaties (3.2) of (3.3) toegepast. Geven wij de grootheden na de transformatie aan met u_i en v_i, dan wordt de toets van SOBEL en WALD toegepast op de grootheden

$$x_i = u_i - v_i.$$

Het gemiddelde en de variantie van x_i zijn resp.:

(4.1) $$\mu \approx 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{p} - 2\,\mathrm{bgsin}\sqrt{p'} = 2\,\mathrm{bgsin}(\sqrt{pq'} - \sqrt{p'q}) \quad , \quad q = 1-p, \quad q' = 1-p'$$

(4.2) $$\sigma_i^2 \approx \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i^2} + \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_i^2} .$$

Daar de uitvoering van de toets van SOBEL en WALD eenvoudiger is als de spreiding van x_i constant is, moet men er, indien mogelijk, voor zorgen dat $\sigma_i = \sigma$ voor alle i. Dit kan b.v. door $n_i = n$ en $m_i = m$, voor alle i, te nemen.

Wij moeten nu twee waarden μ_0 en μ_0' en vier waarden μ_1, μ_2, μ_3 en μ_4 kiezen met

(4.3) $$\mu_1 < \mu_0 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_0' < \mu_4$$

en vier waarden α, α', β en β' (alle $< \frac{1}{2}$) zodanig, dat (zie (2.5)):

(4.4) $$\frac{\ln B}{\mu_2 - \mu_1} \leqq \frac{\ln B'}{\mu_4 - \mu_3}$$

$$\frac{\ln A}{\mu_2 - \mu_1} \leqq \frac{\ln A'}{\mu_4 - \mu_3} ,$$

waarin

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} \qquad B = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$A' = \frac{1-\beta'}{\alpha'} \qquad B' = \frac{\beta'}{1-\alpha'} .$$

Zijn deze waarden eenmaal gekozen, dan kunnen wij de sequente toets van SOBEL en WALD toepassen en daarmee komen tot één der volgende beslissingen:

(4.5)
1. $\mu < \mu_0$
2. $\mu > \mu_0'$
3. $\mu_0 \leqq \mu \leqq \mu_0'$.

Wij zullen nu onderzoeken wat zo'n beslissing zegt over p en p'.

Stel

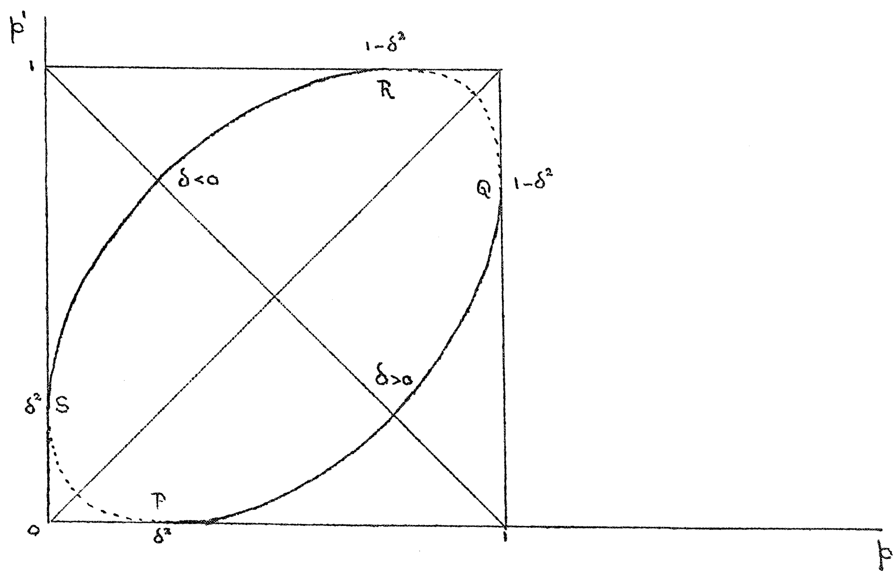
(4.6) $$\sqrt{pq'} - \sqrt{p'q} = \delta$$

dan is

(4.7) $$\mu = 2\,\mathrm{bgsin}\,\delta \qquad |\delta| \leqq 1.$$

Zetten wij nu, bij gegeven waarde van δ^2, p' uit tegen p (zie figuur 4), dan krijgen wij twee bogen van een ellips:

$$p^2 + p'^2 - 2pp'(1-2\delta^2) - 2\delta^2(p+p') + \delta^4 = 0 .$$



figuur 4.
Verband tussen p en p' bij gegeven waarde van δ^2.

De assen van deze ellips zijn de rechten

$$p - p' = 0$$

en

$$p + p' = 1$$

en de ellips raakt aan de p-as in het punt $(\delta^2, 0)$, aan de p'-as in $(0, \delta^2)$, aan de rechte $p = 1$ in $(1, 1-\delta^2)$ en aan de rechte $p' = 1$ in $(1-\delta^2, 1)$.

Voor positieve δ krijgen we het deel van de ellips tussen de punten P en Q en voor negatieve δ het deel tussen R en S.

Wij kiezen nu twee waarden δ_0 en δ_0' en vier waarden δ_1, δ_2, δ_3 en δ_4 voor δ met

(4.8) $$\delta_1 < \delta_0 < \delta_2 < 0 < \delta_3 < \delta_0' < \delta_4 .$$

De beslissingen (4.5) komen dan overeen met de volgende beslissingen voor δ (zie (4.7)):

(4.9)
1. $\delta < \delta_0$
2. $\delta > \delta_0'$
3. $\delta_0 \leqq \delta \leqq \delta_0'$

en dus met de volgende beslissingen voor p en p':

(4.10)
1. het punt (p, p') ligt boven de boog RS van figuur 4 met $\delta = \delta_0$,
2. het punt (p, p') ligt onder de boog PQ met $\delta = \delta_0'$,
3. het punt (p, p') ligt tussen of op de bogen PQ en RS met resp. $\delta = \delta_0'$ en $\delta = \delta_0$.

Wij merken hier nogmaals op dat de indifferentie-intervallen (δ_1, δ_2) en (δ_3, δ_4) zo gekozen moeten worden dat als $\delta_1 < \delta < \delta_2$ het voor het onderzoek van weinig belang is of men besluit tot $\delta < \delta_0$ dan wel tot $\delta_0 \leqq \delta \leqq \delta_0'$ maar dat de beslissing $\delta > \delta_0'$ dan een foute conclusie is en analoog voor (δ_3, δ_4).

Dit komt er dus op neer, dat men δ_1, δ_2, δ_3 en δ_4 zodanig kiest, dat men wil besluiten tot $p < p'$ als $\delta \leqq \delta_1$ is, tot $p > p'$ als $\delta \geqq \delta_4$ is en tot $p \approx p'$ als $\delta_2 \leqq \delta \leqq \delta_3$ is, terwijl het er weinig toe doet of men besluit tot $p < p'$ dan wel $p \approx p'$ als $\delta_1 < \delta < \delta_2$ en analoog voor het geval dat $\delta_3 < \delta < \delta_4$.

De keuze van δ_1, δ_2, δ_3 en δ_4 kan geschieden met behulp van figuur 5 (zie pg. 18), waar voor verschillende waarden van δ de ellipsbogen PQ en RS getekend zijn.

Indien de keuze met behulp van fig. 5 moeilijk is, kan men deze ook als volgt bepalen:

1. WALD [7] gebruikt de verhouding:

(4.11) $$u = \frac{p q'}{p' q}$$

als criterium voor de gewenste beslissing; op de lijn $p + p' = 1$ kan men nu de grootheid δ omrekenen in u en v.v. Daar geldt nl.

(4.12) $$u = \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2,$$

of wel

(4.13) $$\delta = 0 \quad \text{als} \quad u = 1$$ $$\delta = \frac{u + 1 - 2\sqrt{u}}{u - 1} \quad \text{als} \quad u \neq 1.$$

Kiest men nu vier waarden voor u met

(4.14) $$u_1 < u_2 < 1 < u_3 < u_4$$

en is

(4.15) $$\delta_i = \frac{u_i + 1 - 2\sqrt{u_i}}{u_i - 1} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

dan vindt men hieruit vier waarden voor δ met

(4.16) $$\delta_1 < \delta_2 < 0 < \delta_3 < \delta_4.$$

2. Op de lijn $p + p' = 1$ geldt ook nog:

(4.17) $$\delta = p - p'$$

en door vier waarden voor $p - p'$ te kiezen vindt men dus vier waarden voor δ .

De vier waarden voor δ (resp. u) moeten nu nog zo gekozen worden, dat voldaan is aan (4.4).

Nu zal men in de regel de vier waarden symmetrisch kiezen, d.w.z. zo, dat

$$\mu_4 = -\mu_1 \qquad (4.18)$$
$$\mu_3 = -\mu_2.$$

Dat wil dus zeggen, dat voor de vier waarden voor δ moet gelden

$$\delta_4 = -\delta_1 \qquad (4.19)$$
$$\delta_3 = -\delta_2$$

en voor u :

$$u_1 u_4 = u_2 u_3. \qquad (4.20)$$

Is voldaan aan (4.18), dan gaat (4.4) over in:

$$B \leq B' \qquad (4.21)$$
$$A \leq A'.$$

Opmerking.

In het bovenstaande is ondersteld, dat p en p' constant zijn, d.w.z. voor iedere stap van het procédé dezelfde waarde aannemen. Dit is echter niet noodzakelijk. Bij de sequente toets van SOBEL en WALD is vereist, dat de grootheden x_i alle hetzelfde gemiddelde hebben. Dit komt er in ons geval dus op neer, dat, als p_i en p_i' de kansen op succes zijn voor de twee processen bij de i^e stap van het onderzoek, $\sqrt{p_i q_i'} - \sqrt{p_i' q_i}$ constant moet zijn (zie (4.1)).

Literatuur.

[1] Bartlett, M.S., Some examples of statistical methods of research in agriculture and applied biology, Suppl. Journ. Royal Stat. Soc., 4 (1937), 137-183.

[2] de Boer, J., Sequente toets met drie beslissingsmogelijkheden voor het toetsen van een onbekende waarschijnlijkheid, Rapport S 85 (VP 1) van het Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1952.

[3] de Boer, J., Sequential test with three possible decisions for testing an unknown probability, Appl. Sci. Res., 3 (1953), 249-259.

[4] Eisenhart, C., M.W.Hastay and W.A.Wallis, e.a., Selected techniques of statistical analysis for scientific and industrial research and production and management engineering, New York, 1947.

[5] Fisher, R.A., On the dominance ratio, Proc. Royal Soc. of Edinburgh, 42 (1921-1922).

[6] Hald, A., Statistical tables and formulas, New York, 1952.

[7] Wald, A., Sequential analysis, New York, 1947.

[8] Sobel, M. and A.Wald, A sequential decision procedure for choosing one of three hypothesis concerning the unknown mean of a normal distribution, Ann. Math. Stat., 20 (1949), 502-522.

[9] Statistical Research Group of the Columbia University, Sequential analysis of statistical data, applications, section 3, New York, 1945.

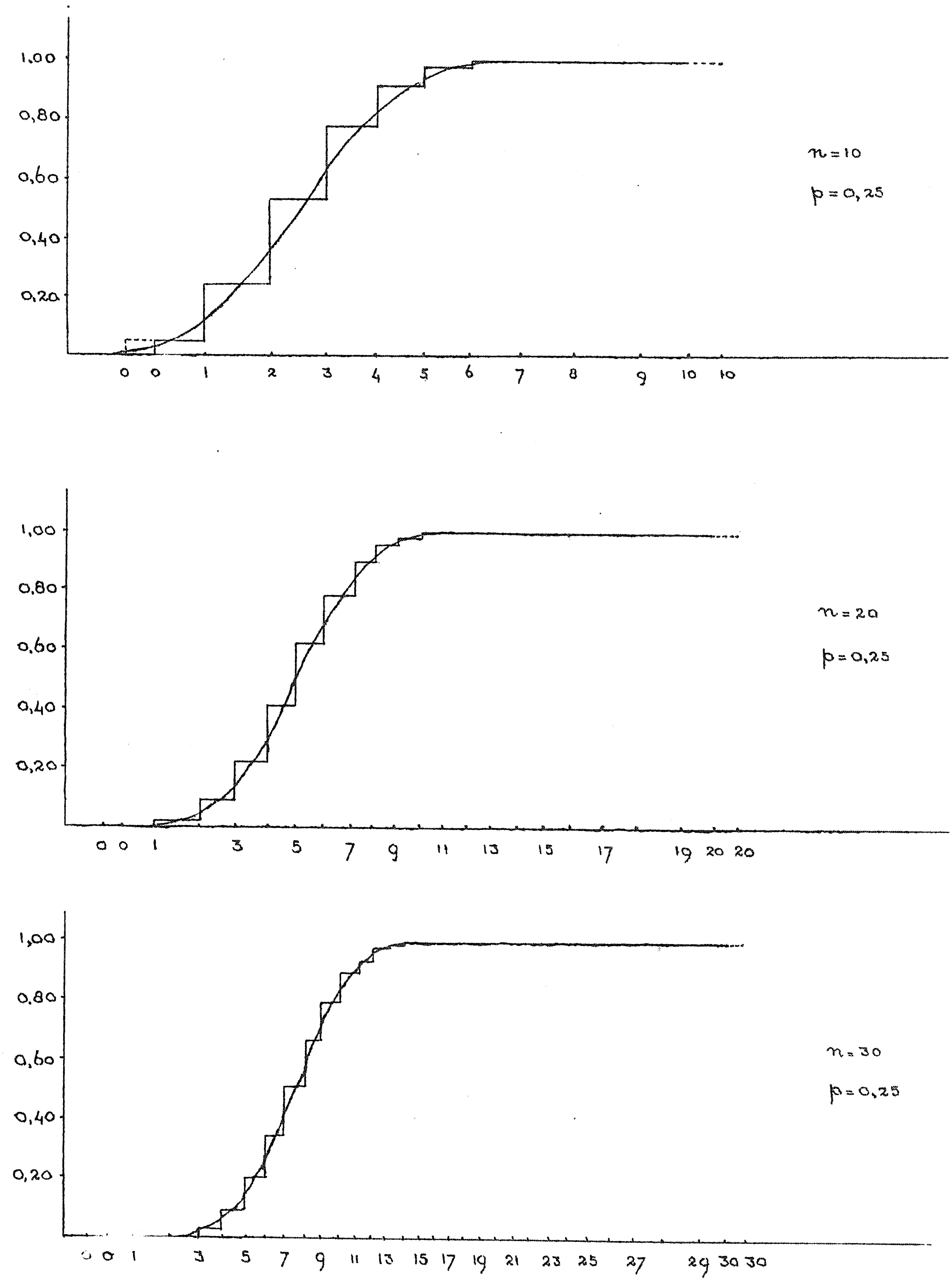


Fig. 3a. De exacte verdeling van $\underline{y}'$ en $\underline{y}''$ en de normale benadering.
De cijfers langs de horizontale as geven de waarden van n_1 aan.

--------- = y'
———— = y''

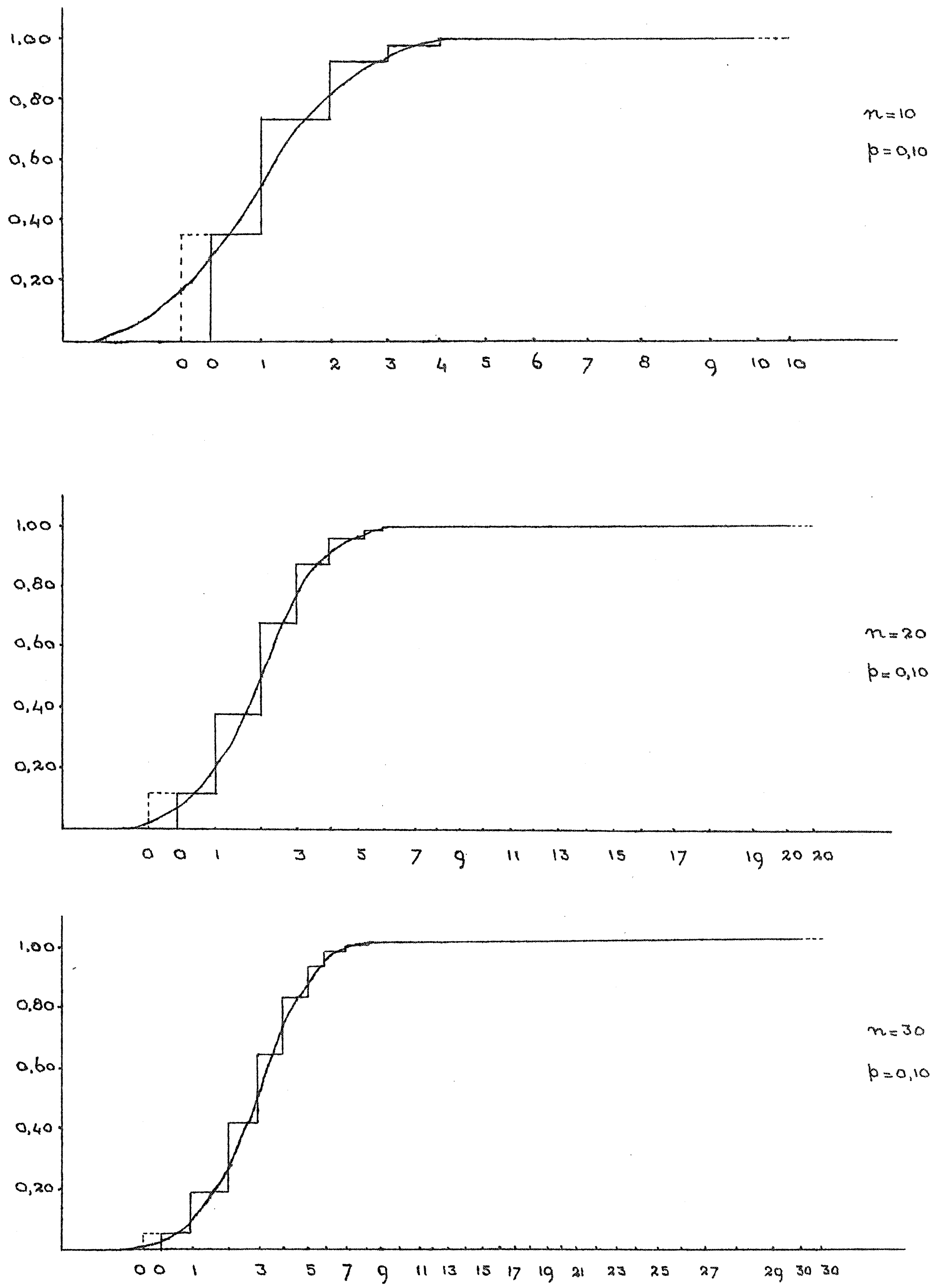


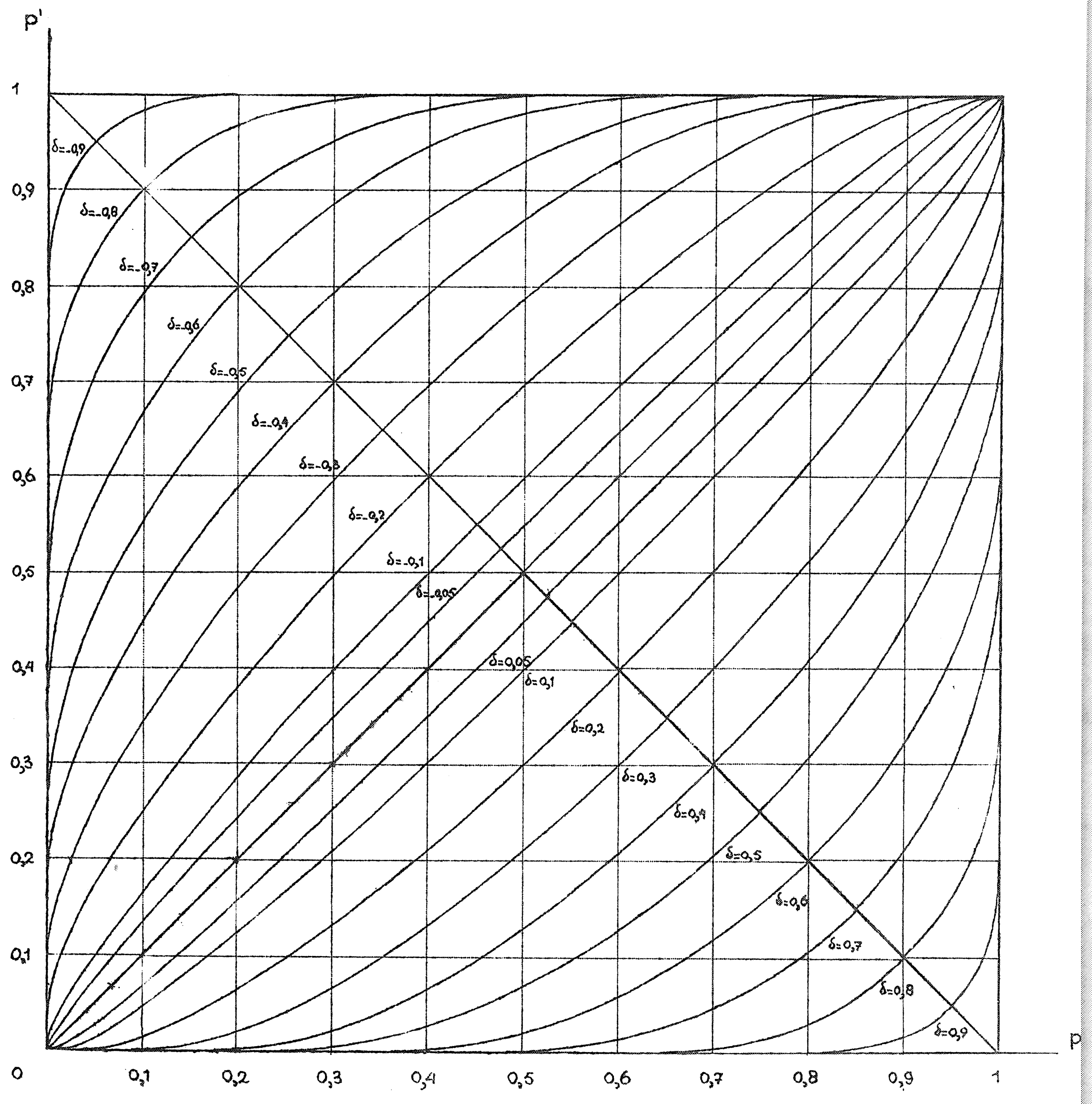
Fig. 3b. De exacte verdeling van $\underline{y}'$ en $\underline{y}''$ en de normale benadering.

De cijfers langs de horizontale as geven de waarden van n_1 aan.

--------- = y'

———— = y''

Figuur 5



Verband tussen p en p' voor enige waarden van δ.