

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Direction: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef de la Consultation Statistique:
Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 140a.

Rapport provisoire sur des recherches concernant
le rayonnement de flammes.

par
R. Doornbos

1. Introduction.

Ce rapport est relatif à l'analyse des résultats de la cinquième série des expériences faites à IJmuiden, sous les auspices du "Flame Radiation Research Joint Committee", concernant le rayonnement de chaleur de flammes. Cette cinquième série d'expériences avait pour objet l'étude de l'effet d'un certain nombre de facteurs sur l'intensité du rayonnement. En premier lieu, deux espèces de combustible furent utilisées, comprenant, l'une, 33% d'huile et 67% de gaz, l'autre, 67% d'huile, et 33% de gaz; ces combustibles seront désignés dans la suite, respectivement par 1 et 2. En outre, des flammes symétriques et non symétriques furent examinées, c'est-à-dire que le gaz et l'huile furent soufflés à la même place dans le four, ou l'un en dessous de l'autre, ce que nous désignerons respectivement par c et d.

Seize flammes au total firent l'objet de mesures: quatre pour chacune des quatre combinaisons 1c, 1d, 2c et 2d. En six fentes réparties sur la longueur du four, dans la paroi latérale, et numérotées 2,3,4,5,6,7, furent mesurés-en cal. cm⁻²sec⁻¹ pour chacune des seize flammes, le rayonnement de la flamme seule, le rayonnement de la flamme et de la paroi latérale arrière, et le rayonnement de cette paroi seule (R_1 , R_2 et R_3). On mesura, en outre, le rayonnement en trois points du fond du four (floor radiation). Nous désignerons la valeur du rayonnement du fond par B. On demandait aussi d'étudier l'effet des facteurs cités, sur le coefficient d'émission $e = (\text{par déf.}) 1 - \frac{R_2 - R_1}{R_3}$.

L'analyse a été faite en premier lieu par la méthode de l'analyse de la variance, due à R.A. FISCHER. On trouvera des références concernant ce sujet dans le livre de FISCHER [1] ainsi que, par exemple, dans les ouvrages de MANN[5] et de WILKS [8]. Les résultats de cette recherche sont mentionnés dans ce rapport provisoire.

L'applicabilité de la méthode de l'analyse de la variance est soumise toutefois à certaines conditions, dont il n'est pas certain qu'elles soient toutes remplies dans le cas considéré. C'est pourquoi il entre dans nos intentions de reprendre les recherches par d'autres méthodes, exigeant moins d'hypothèses sur les distributions de probabilité des grandeurs observées. Les résultats des deux groupes de recherches seront alors comparés et résumés dans un rapport définitif.

2. Recherches préliminaires.

L'analyse de la variance repose sur les hypothèses suivantes:

- a) Les observations sont indépendantes,
- b) Les résultats d'observations ont des distributions normales,
- c) Toutes ces distributions normales ont la même dispersion.

Si nous voulons, par exemple, appliquer l'analyse de la variance à l'ensemble des observations relatives à R_1 , ce qui donne une classification triple à 4 observations par cellule, il est nécessaire que toutes ces observations soient indépendantes. Comme il est très vraisemblable que les observations faites de diverses fentes mais relatives à une même flamme sont dépendantes, nous avons, en outre, analysé ce phénomène par la méthode des m-classifications (voir KENDALL 4). Cette méthode a été appliquée, pour R_1, R_2, R_3, e et B, aux quatre combinaisons 1c, 1d, 2c et 2d séparément.

Pour R_1, R_2, R_3 et e, nous avons donc 6 classifications, et pour B, 3 classifications, de 4 mesures chacune. Le tableau 1 contient les probabilités k de dépassement, trouvées.

Tableau 1

Probabilités de dépassement relatives à la recherche d'indépendance pour les observations des diverses fentes (méthode des m-classifications)

	R_1	R_2	R_3	e	B
1c	0,0073	0,001	0,00001	0,032	0,0017
1d	0,022	0,00005	0,0000001	0,375	0,017
2c	0,056	0,23	0,0085	0,51	$0,03 < k < 0,2$
2d	0,035	0,22	0,00001	0,609	0,017

Les petites probabilités de dépassement indiquent que sous l'hypothèse testée, impliquant que pour chaque petit groupe de 4 observations, les différentes permutations des rangs sont équiprobables, les résultats observés constituent des événements particulièrement rares. Nous rejetons donc cette hypothèse et concluons que, sauf peut-être pour les valeurs de e, les observations faites de différentes fentes pour une même flamme sont dépendantes, en ce sens qu'une flamme donnant lieu à une observation élevée à une fente, donnera lieu

aussi à des observations élevées aux autres fentes. Nous ne pouvons donc pas considérer comme une troisième classification la variation relative aux différentes fentes ou aux trois points d'observation du rayonnement du fond.

La deuxième hypothèse, concernant la normalité, ne peut être testée sur la base des observations dont on dispose, le nombre d'observations par case, soit quatre, étant trop petit. Nous pouvons cependant remarquer que si la distribution de R_1 , R_2 et R_3 était exactement normale la distribution de $e = 1 - \frac{R_2 - R_1}{R_3}$ ne serait certainement pas normale; par contre la distribution de $R_3 - R_2 + R_1$ serait normale. C'est pourquoi nous avons repris, à titre de contrôle, avec $R_3, e = R_3 - R_2 + R_1$, une partie des calculs relatifs à e ; les conclusions paraissent devoir être les mêmes.

L'égalité des dispersions, troisième condition d'applicabilité de la méthode de l'analyse de la variance, est testée au moyen du test de Bartlett (voir HARTLEY [2] et HARTLEY et PEARSON [3]). Ce test a été appliqué aux quatre groupes de quatre observations par fente ainsi que pour le rayonnement du fond. Nous avons trouvé, par conséquent, $4 \times 6 + 3 = 27$ probabilités de dépassement; 3 sont légèrement inférieures à 0,05. Or, sous l'hypothèse testée e , c'est-à-dire si les dispersions sont égales, la probabilité d'obtenir trois ou plus de trois pareils nombres, parmi 27 probabilités de dépassement, est égale à 0,15. Il n'y a donc ici rien de particulier, et nous pouvons pas rejeter l'hypothèse. Il en résulte, pour autant qu'on puisse en juger, qu'il n'y a pas d'objection sérieuse pour appliquer la méthode de l'analyse de la variance aux résultats relatifs à une fente.

3. Analyse de la variance.

Nous testons maintenant, par fente, les hypothèses suivantes:

- α . Le type de combustible n'a pas d'effet sur le rayonnement;
- β . La symétrie ou l'asymétrie de la flamme n'affecte pas le rayonnement;
- γ . Il n'y a pas d'interaction entre les deux effets cités. Ceci signifie que la différence entre les deux types de combustible, si elle existe, est la même pour la flamme symétrique et pour la flamme asymétrique.

Les valeurs typiques d'échantillon ont, sous les hypothèses à tester, une distribution F, avec, dans notre cas,

1 et 12 degrés de liberté. Le tableau 2 contient les résultats de l'analyse pour R_1 , R_2 et R_3 et e. Les valeurs de F qui sont dépassées, sous l'hypothèse nulle, avec les probabilités 0,05, 0,01 et 0,001, sont respectivement 4,75, 9,33 et 18,64. Ces dépassements sont indiqués dans le tableau par I, II et III. Les lignes relatives au combustible, à la symétrie et à l'interaction y sont notées respectivement α , β , γ .

Pour un seul cas, celui de l'observation du rayonnement R_1 par la fente 2, nous avons reproduit les résultats de l'analyse de la variance sous la forme habituelle, d'une manière plus développée dans le tableau 2a.

Tableau 2a.
Analyse de la variance pour R_1 , fente 2.

Source de variation	degrés de liberté	somme de carrés	somme moyenne de carrés	F	probabilité de dépassement
combustible	1	6,5025	6,5025	111,34	$k < 0,001$
symétrie	1	1,0000	1,0000	17,2	$0,001 < k < 0,01$
interaction	1	0,2756	0,2756	4,72	$k > 0,05$
hasard	12	0,7013	0,0584		
Total	15	8,4794			

Tableau 2.

Analyse de la variance à deux classifications pour chacune des fentes séparément.

FENTES		2			3			4			5			6			7		
R ₁	α	111,34	III	1 < 2	192,66	III	1 < 2	39,89	III	1 < 2	13,31	II	1 < 2	0,39		1 > 2	3,35	1 > 2	
	β	17,12	II	c < d	76,33	III	c > d	108,28	III	c > d	75,44	III	c > d	5,77	I	c > d	0,50	c > d	
	γ	4,72			2,19			1,29			1,77			0,64			3,88		
R ₂	α	91,49	III	1 < 2	72,09	III	1 < 2	28,02	III	1 < 2	6,45	I	1 < 2	4,12		1 > 2	0,44	1 > 2	
	β	21,31	III	c < d	24,24	III	c > d	57,81	III	c > d	16,14	II	c > d	1,87		c > d	0,56	c > d	
	γ	2,47			0,12			0,39			0,00			0,04			0,87		
R ₃	α	32,10	III	1 < 2	34,82	III	1 < 2	17,27	II	1 < 2	3,10		1 < 2	0,12		1 > 2	2,69	1 > 2	
	β	5,37	I	c < d	4,89	I	c < d	0,75		c < d	0,44		c > d	1,68		c > d	2,91	c > d	
	γ	0,27			0,83			0,61			1,29			1,34			1,90		
e	α	25,21	III	1 < 2	55,35	III	1 < 2	11,24	II	1 < 2	1,94		1 < 2	0,96		1 < 2	2,54	1 > 2	
	β	0,58		c < d	2,45		c > d	12,35	II	c > d	18,86	III	c > d	2,75		c > d	0,20	c < d	
	γ	2,11			0,80			0,84			4,00			1,75			1,46		

1 < 2 signifie que le rayonnement moyen - la moyenne portant sur c et d - est plus petit pour le combustible 1 que pour le combustible 2. Nous voyons qu'il n'y a aucun indice d'une quelconque interaction entre deux facteurs.

Dans les figures 1 à 8, l'intensité du rayonnement est représentée pour les différentes fentes. Les probabilités de dépassement inférieures à 0,05, 0,01 et 0,001 sont de nouveau indiquées par les chiffres I, II et III.

Dans ces figures sont tracés aussi les intervalles de confiance au niveau 0,05 pour les différences entre les moyennes relatives aux combustibles 2 et 1 ou entre les moyennes relatives aux flammes symétrique et asymétrique.

Nous ne pouvons perdre de vue que les résultats des tests dans le tableau 2, ainsi que les intervalles de confiance relatifs aux différentes fentes, sont dépendants par suite de l'effet-flamme, mis en évidence dans le §2. Les intervalles de confiance ne sont donc pas valables au même niveau de probabilité lorsqu'ils sont considérés simultanément. Nous essaierons d'en tenir compte dans le rapport définitif.

La même analyse a été effectuée pour la valeur moyenne du rayonnement de toute la flamme, pour celle de la première moitié et pour celle de la seconde moitié de la flamme. Ceci a été fait tant pour e que pour $R_1 - R_2 + R_3$. On trouvera dans le tableau 3 les valeurs typiques observées.

Tableau 3.

Analyse de la variance à deux classifications pour les moyennes relatives aux flammes entières ou aux demi-flammes.

		1re moitié			2e moitié			flamme entière		
R ₁	α	722,39	III	1 < 2	0,72		1 < 2	44,98	III	1 < 2
	β	62,55	III	c > d	21,94	III	c > d	47,32	III	c > d
	-γ	0,40			2,86			1,50		
R ₂	α	68,27	III	1 < 2	0,16		1 < 2	30,11	III	1 < 2
	β	20,37	III	c > d	9,32	I	c > d	20,61	III	c > d
	-γ	0,24			0,37			0,42		
R ₃	α	27,57	III	1 < 2	0,03		1 > 2	4,11		1 < 2
	β	3,01		c < d	1,62		c > d	0,00		c > d
	-γ	0,57			1,55			1,12		
e	α	57,41	III	1 < 2	0,09		1 < 2	19,94	III	1 < 2
	β	8,55	I	c > d	6,82	I	c > d	10,82	II	c > d
	-γ	0,78			4,53			3,37		
R ₁ -R ₂ +R ₃	α	65,26	III	1 < 2	0,00		1 < 2	13,33	II	1 < 2
	β	4,94	I	c > d	6,08	I	c > d	7,27	I	c > d
	-γ	0,86			4,72			3,27		

Une complication se présente pour le rayonnement du fond, du fait qu'ici une observation du groupe 2c est manquante au premier comme au deuxième point d'observation. Il découle de la théorie de l'analyse de la variance qu'on peut obtenir la valeur typique d'échantillon exacte en remplaçant les mesures manquantes par la moyenne des trois autres; on calcule ensuite la valeur typique d'échantillon de la manière habituelle, on multiplie le résultat par $\frac{12}{13}$ et on obtient ainsi une grandeur qui possède, sous l'hypothèse nulle, une distribution F avec 1 et 11 degrés de liberté. On trouvera la base théorique de cette méthode, par exemple, dans MANN, p.138, et le corollaire du th 4-3 à la p.37. Les valeurs de F, qui correspondent aux possibilités de dépassement 0,05, 0,01 et 0,001, sont respectivement 4,84, 9,65 et 19,69.

Le tableau 4 contient les résultats obtenus.

Tableau 4.

Analyse de la variance à deux classifications pour chacun des trois points du fond, séparément.

		1			2			3		
B	α	37,97	III	1 < 2	1,64	1 < 2	5,74	I	1 < 2	
	β	0,67		c < d	0,23	c > d	0,55		c > d	
	$-\gamma$	0,05			1,20		0,83			

L'intensité de B est représentée dans les figures 9 et 10; dans la figure 9, on a de nouveau fait la moyenne sur c et d, dans la figure 10, sur les combustibles 1 et 2. On a, en outre, tracé, comme dans les figures 1 à 8, les intervalles de confiance relatifs aux différences entre les valeurs moyennes.

Pour avoir enfin une idée de l'uniformité de la flamme dans les différents groupes, on a déterminé pour chaque flamme pour R_1 , R_2 , R_3 et e, la grandeur suivante:

$$V^2 = \sum_i^6 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i^6 x_i^2 - \frac{(\sum_i^6 x_i)^2}{6},$$

où x_1, x_2, \dots, x_6 et \bar{x} représentent respectivement les observations relatives aux 6 fentes et leur moyenne.

V^2 est une mesure de l'uniformité de la flamme, en ce sens que V^2 est d'autant plus petit que la flamme est plus uniforme. On trouvera dans le tableau 5 les valeurs de V^2 relatives à R_1, R_2, R_3 et e pour les 4 groupes.

Tableau 5.
Mesure de l'uniformité(V^2)

	R_1	R_2	R_3	e
1c	7,30	8,84	12,46	0,009
	8,86	10,10	15,11	0,020
	8,08	12,61	17,50	0,035
	8,82	11,34	17,33	0,016
1d	0,53	4,05	13,10	0,010
	0,27	4,99	11,57	0,013
	0,19	5,00	11,34	0,007
	0,27	5,36	15,29	0,024
2c	23,81	13,42	10,75	0,029
	18,91	7,02	11,29	0,074
	17,39	8,10	10,25	0,057
	23,91	14,81	11,79	0,032
2d	10,81	3,66	7,89	0,021
	9,65	4,06	6,30	0,095
	5,49	1,61	7,32	0,046
	6,14	2,57	6,40	0,048

Comme nous ne pouvons admettre ici que les conditions d'applicabilité de l'analyse de la variance sont remplies (l'hypothèse relative à l'égalité des dispersions, par exemple, n'est certainement pas satisfaite), nous utilisons une méthode non paramétrique pour l'étude de l'effet du combustible et de la symétrie sur l'uniformité de la flamme. Nous appliquons, par exemple, pour R_1 le test de WILCOXON (voir WILCOXON [7] et WHITE [6]) aux groupes 1c et 2c ainsi qu'aux groupes 1d et 2d. Puis nous combinons les deux applications du test par l'addition des deux valeurs typiques d'échantillon. Nous comparons de la même manière c et d, en confrontant les couples 1c - 1d et 2c - 2d et en combinant les résultats. De même pour R_2, R_3 et e. Le tableau 6 contient les probabilités de dépassement.

Tableau 6.

Comparaison de l'uniformité de la flamme par le test de WILCOXON:

	R ₁		R ₂		R ₃		e	
1-2	0,001	1 < 2	0,15	1 > 2	0,001	1 > 2	0,008	1 < 2
c-d	0,001	c > d	0,001	c > d	0,004	c > d	0,54	c > d

c > d signifie que V^2 est plus grand dans le premier cas que dans le second; c'est-à-dire que la flamme est la plus uniforme dans le cas asymétrique.

Conclusions.

Le rayonnement de la flamme entière est plus intense, en moyenne, avec le combustible 2 qu'avec le combustible 1; ceci vaut aussi bien pour R₁ et R₂ que pour R₃; le coefficient d'émission est encore le plus grand dans le cas de l'emploi du combustible 2. Les mêmes conclusions valent pour la première moitié de la flamme, mais nous n'avons pu mettre en évidence de différence pour la seconde moitié, quoique pour la fente 5 prise isolément, il est clair que le combustible 2 donne des valeurs plus grandes, en ce qui concerne R₁, et dans une mesure quelque peu moindre, en ce qui concerne R₂. Des résultats relatifs aux trois premières fentes se dégagent les mêmes conclusions que des moyennes sur ces fentes. En résumé, l'on peut dire que le rayonnement est plus intense avec le combustible 2 qu'avec le combustible 1, mais que cette différence se manifeste principalement dans la première moitié de la flamme.

De plus, en ce qui concerne la flamme entière, le combustible 1 donne un rayonnement R₁ plus uniforme que ne donne le combustible 2. Pour R₃, c'est l'inverse, et pour le coefficient d'émission c'est de nouveau le combustible 1 qui donne les résultats les plus uniformes. Le rayonnement du fond est aussi plus intense avec 2 qu'avec 1, spécialement au premier point, et dans une mesure moindre au troisième point. La différence entre la flamme symétrique et la flamme asymétrique désignées de nouveau dans la suite par c et d, est moins apparente. c donne en moyenne, pour la flamme entière, des résultats plus élevés que ne donne d, sauf pour R₃, où aucune différence n'est mise en évidence. Des conclusions semblables valent pour la première et la seconde moitié de la flamme, mais les différences sont les plus grandes pour la première moitié. Si nous considérons les fentes séparément, on observe

que pour R_1 , R_2 et R_3 , et pour la première fente (No 2), les résultats relatifs à c sont juste au-dessous de ceux relatifs à d. Pour R_1 et R_2 , où les différences sont beaucoup plus grandes que pour e, les rayonnement pour les fentes 3 et 4 est de nouveau beaucoup plus intense avec c, la première moitié de la flamme donnant les plus grandes valeurs avec c. Pour R_3 , il y a un indice que les fentes 2 et 3 donnent les plus grandes valeurs avec d. Le coefficient d'émission est plus élevé, avec c qu'avec d, pour les fentes 4 et 5; les autres fentes ne donnent pas de résultats significatifs. Pour les trois sortes de rayonnement R_1 , R_2 et R_3 , d donne, sur toute la largeur de la flamme, des résultats plus uniformes que ne donne c. Le rayonnement du fond enfin ne fournit aucun indice d'une différence entre c et d.

Bibliographie.

- [1] R.A.FISHER, The design of experiments, London 1949.
- [2] H.O. HARTLEY, Testing the homogeneity of a set of estimated variances. *Biometrika* 31 (1940), p. 249.
- [3] H.O.HARTLEY and E.S. PEARSON, Tables for testing the homogeneity of a set of estimated variances. *Biometrika* 33, (1946), p. 296.
- [4] M.G. KENDALL, Rank correlation methods, London 1948, Ch.6, p. 80.
- [5] H.B. MANN, Analysis and design of experiments, New York 1949.
- [6] C.WHITE, The use of ranks in a test of significance for comparing two treatments, *Biometrics* 8 (1952), p. 33.
- [7] F.WILCOXON, Individual comparisons by ranking methods, *Biometrics* 1 (1945), p. 80.
- [8] S.S. WILKS, Mathematical Statistics, Ch IX, Princeton 1946.

Fig.1

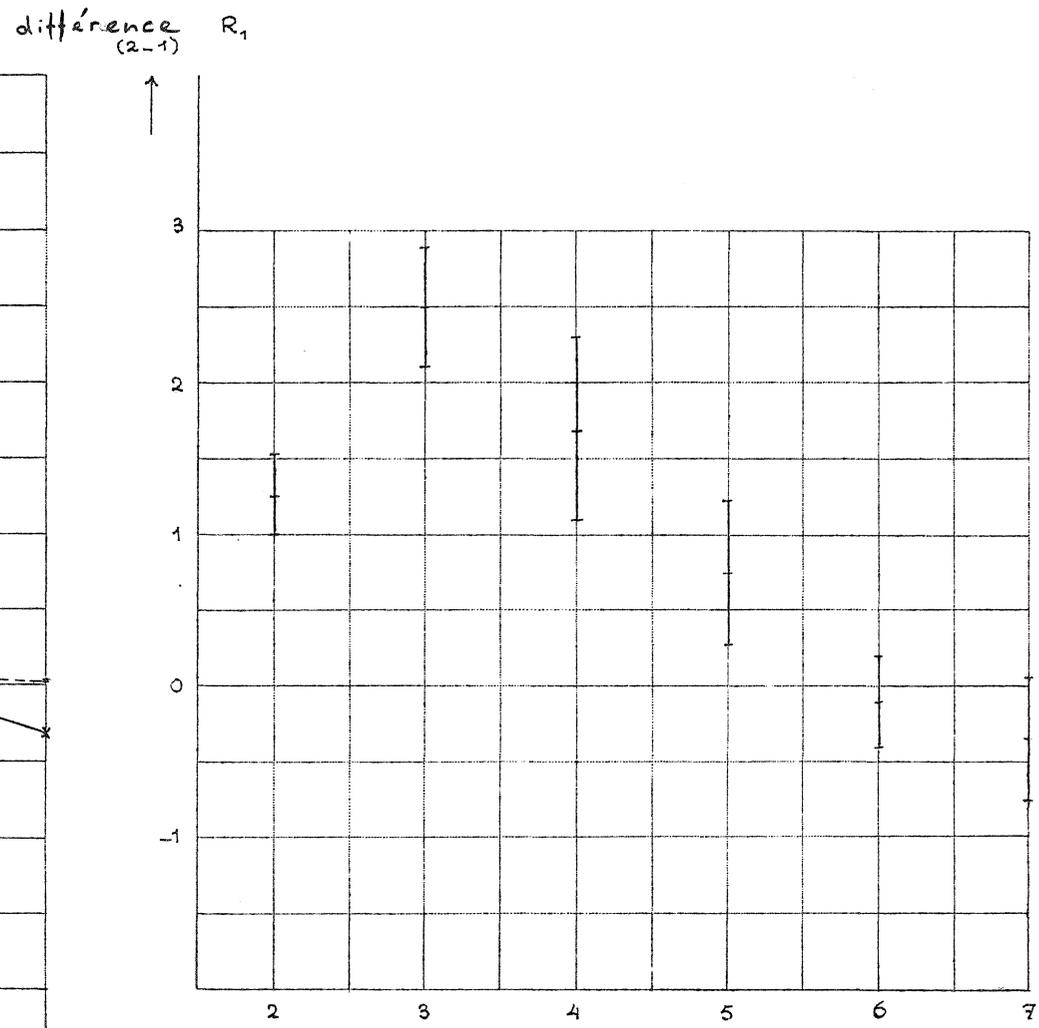
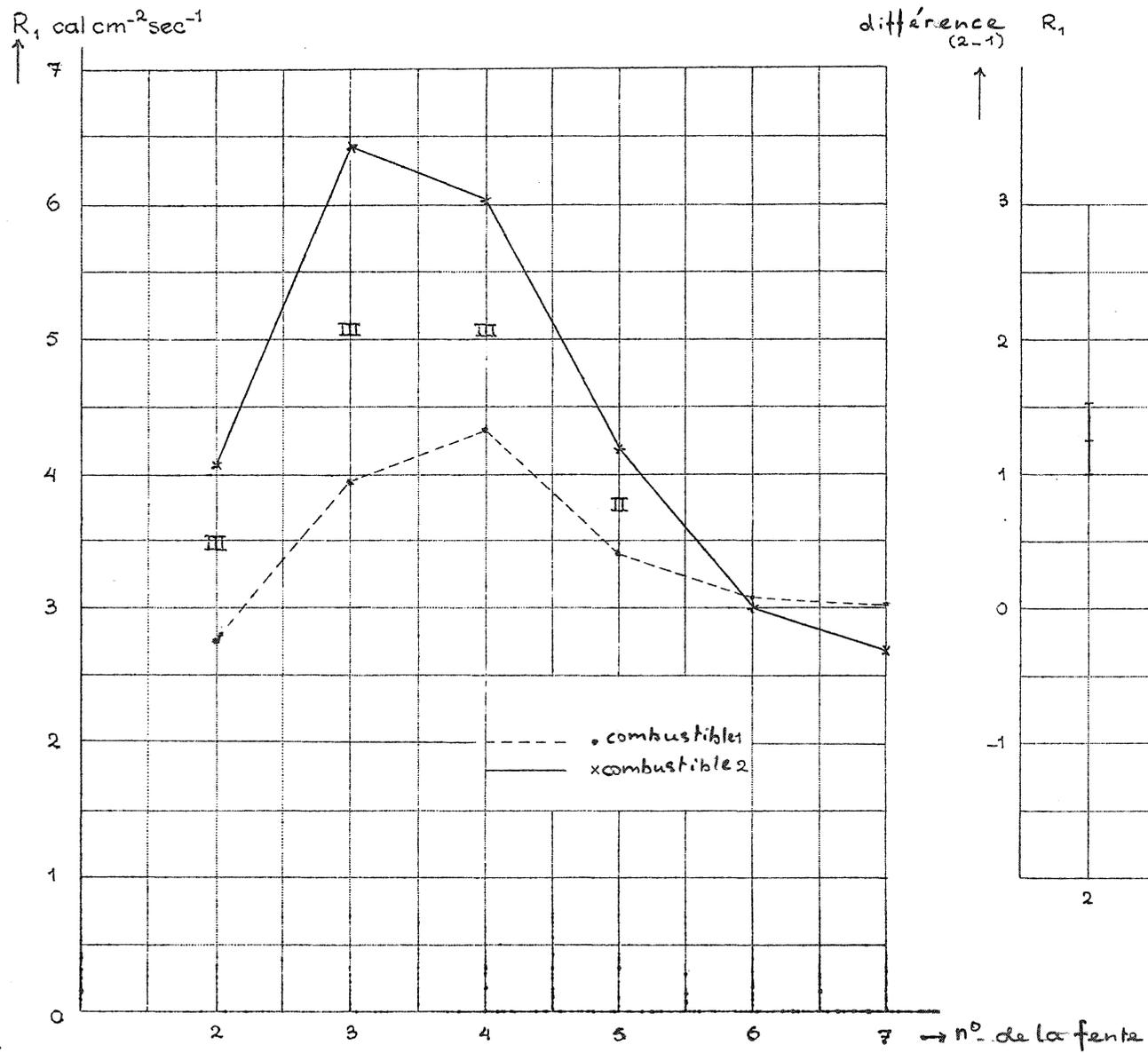
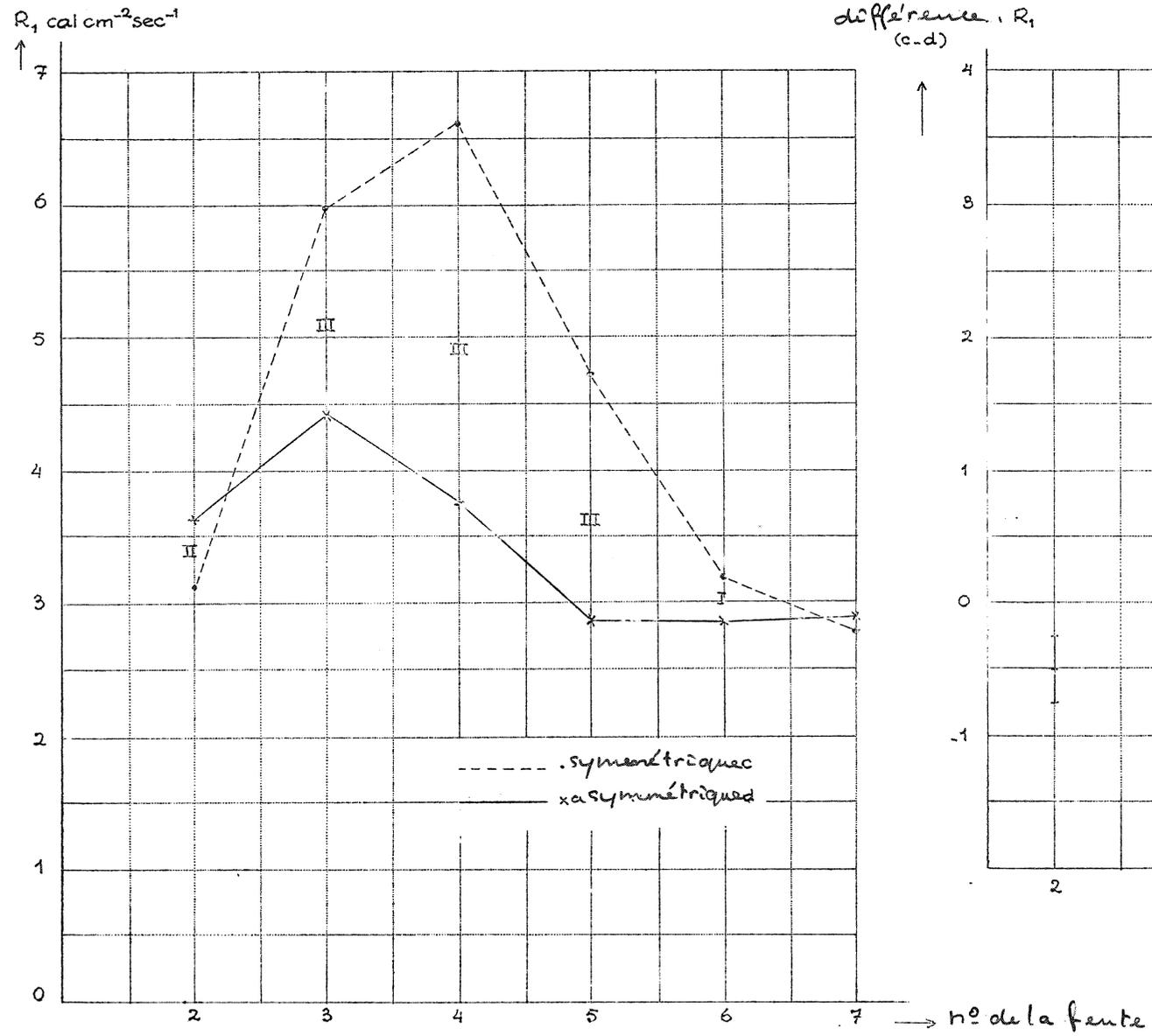


Fig. 2



différence R_1
(e-d)

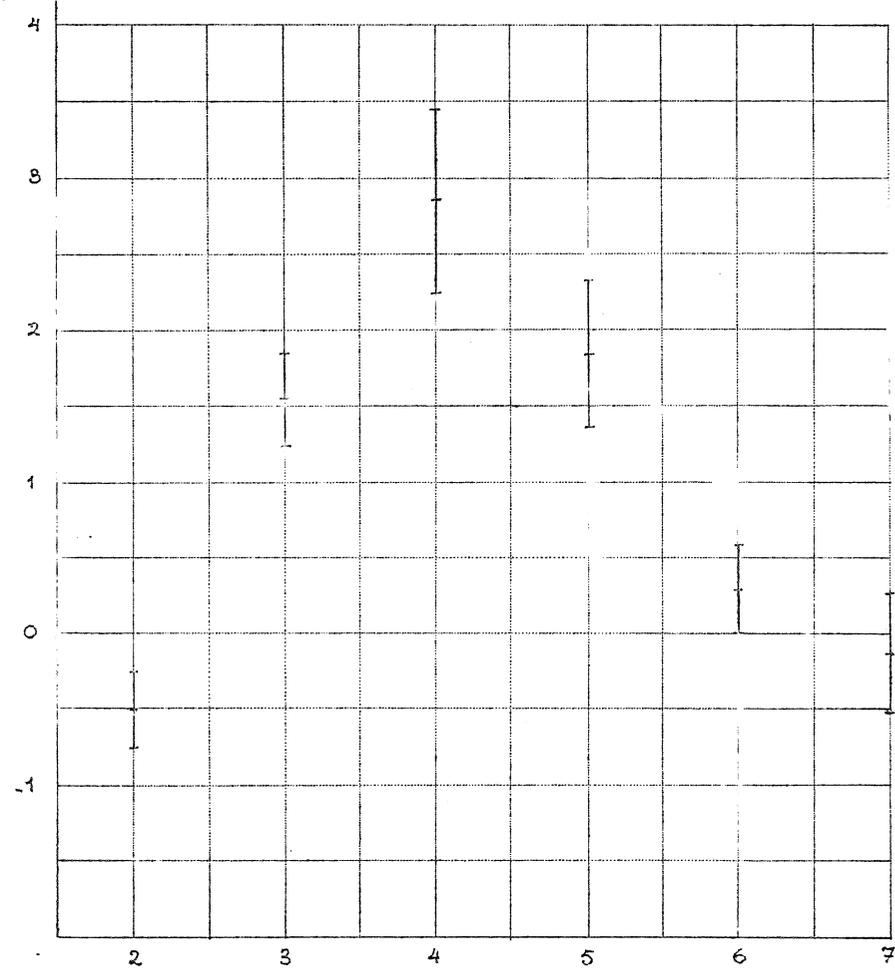


Fig. 3

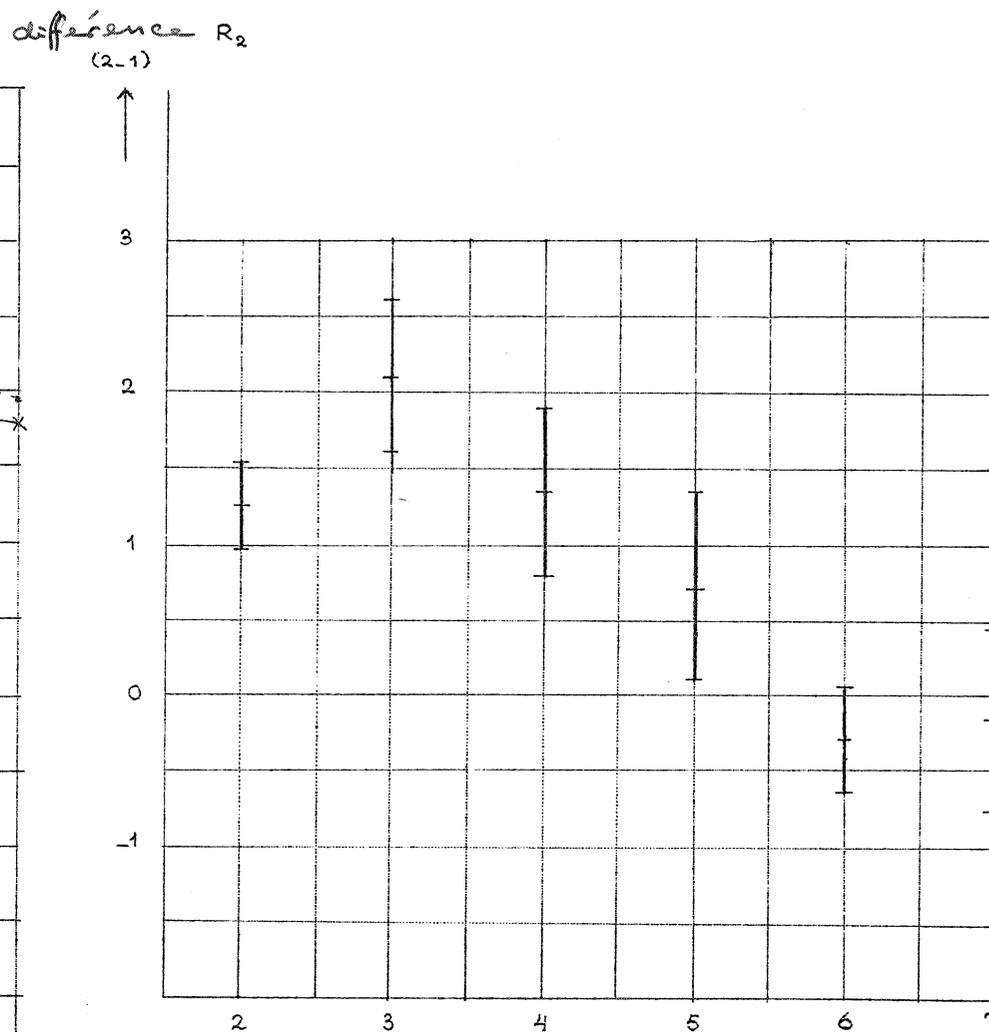
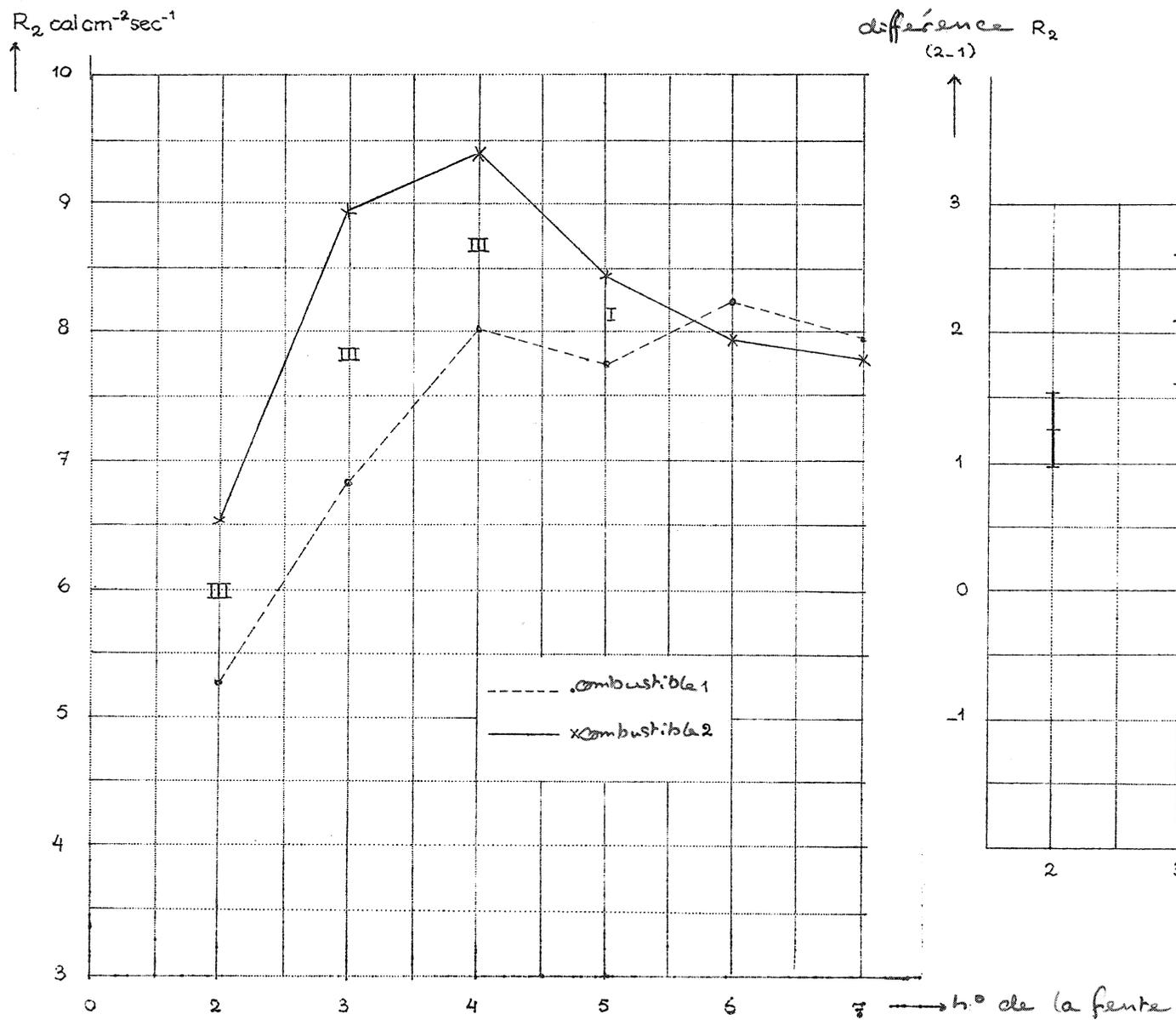


Fig. 4

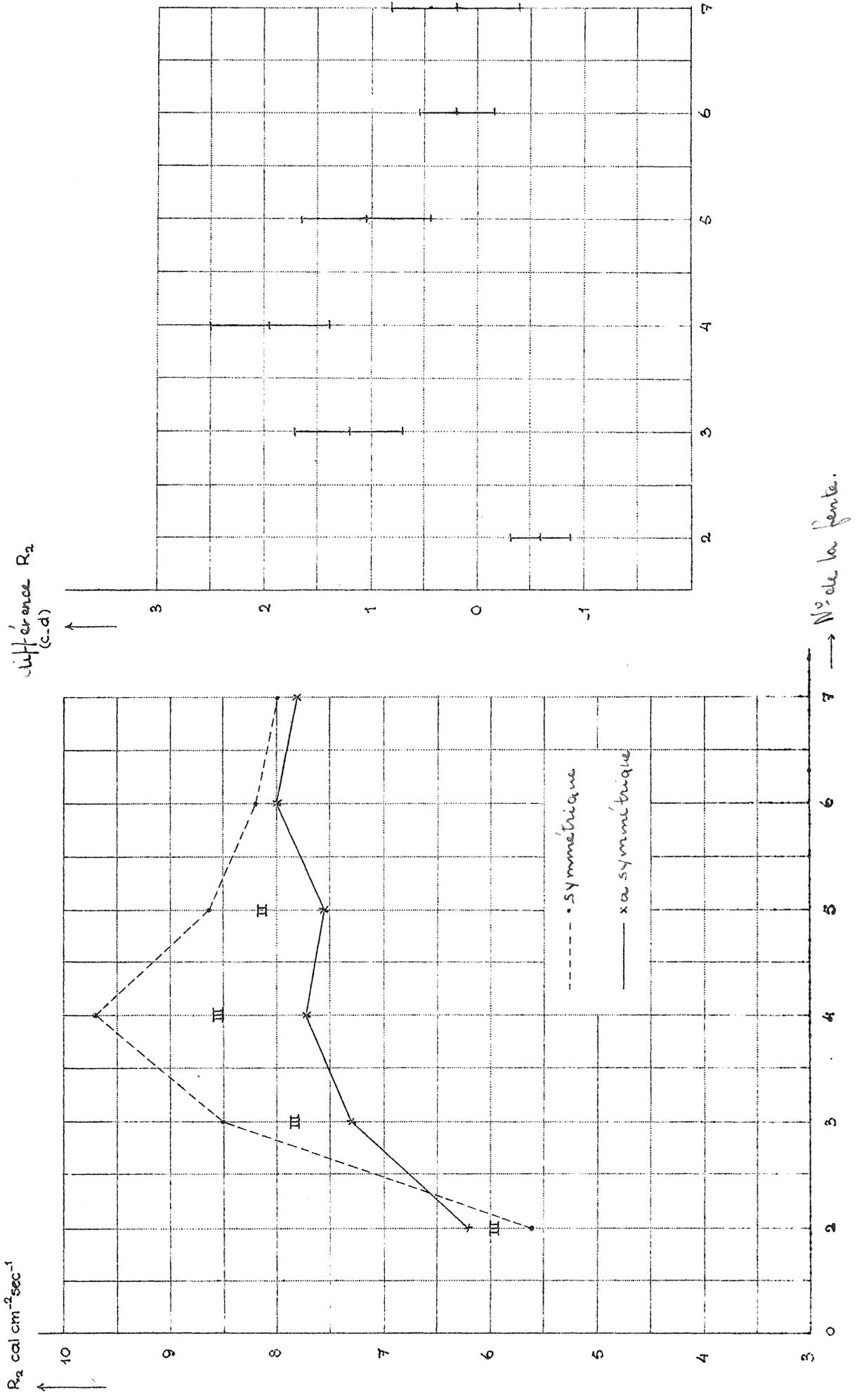


Fig. 5

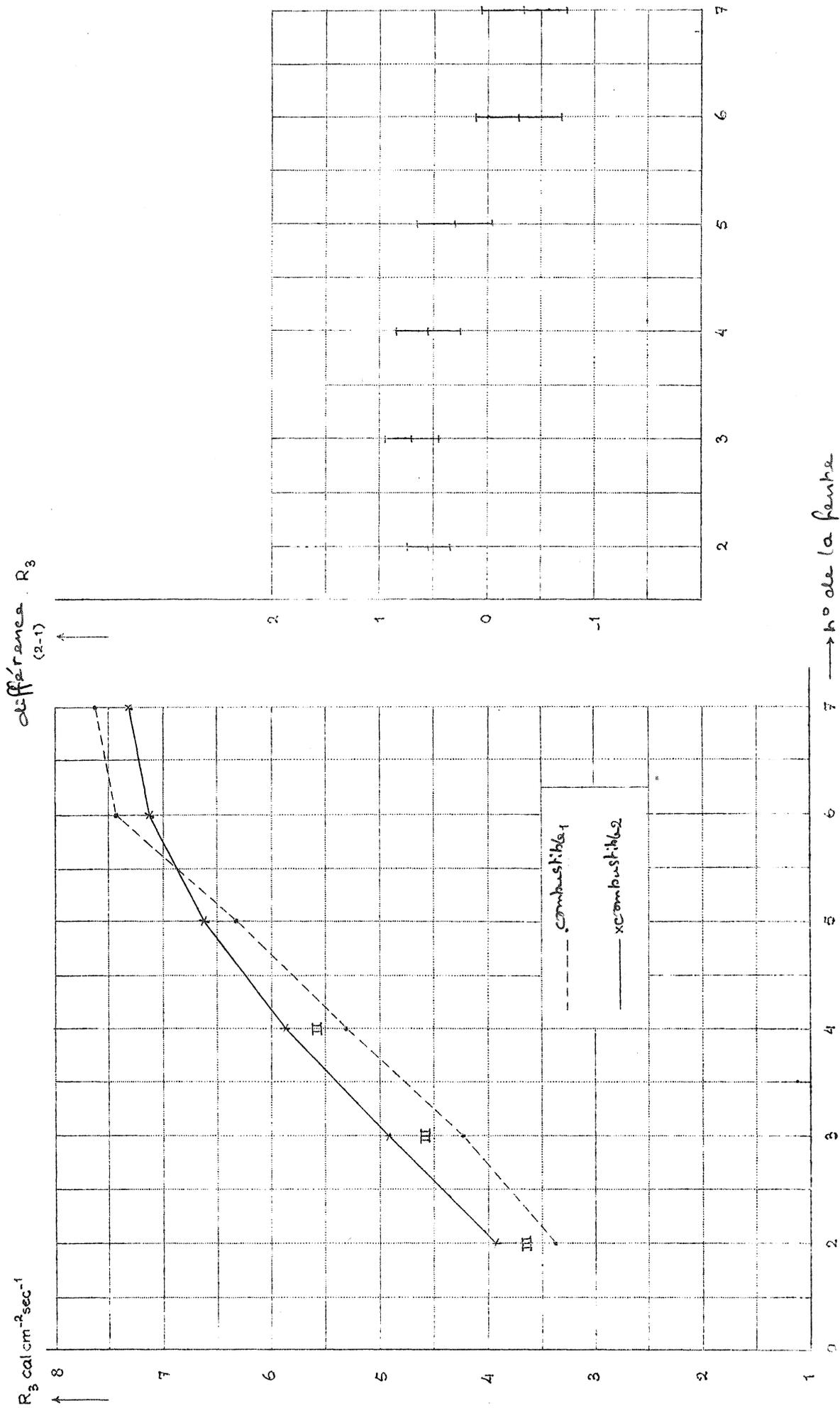


Fig. 6

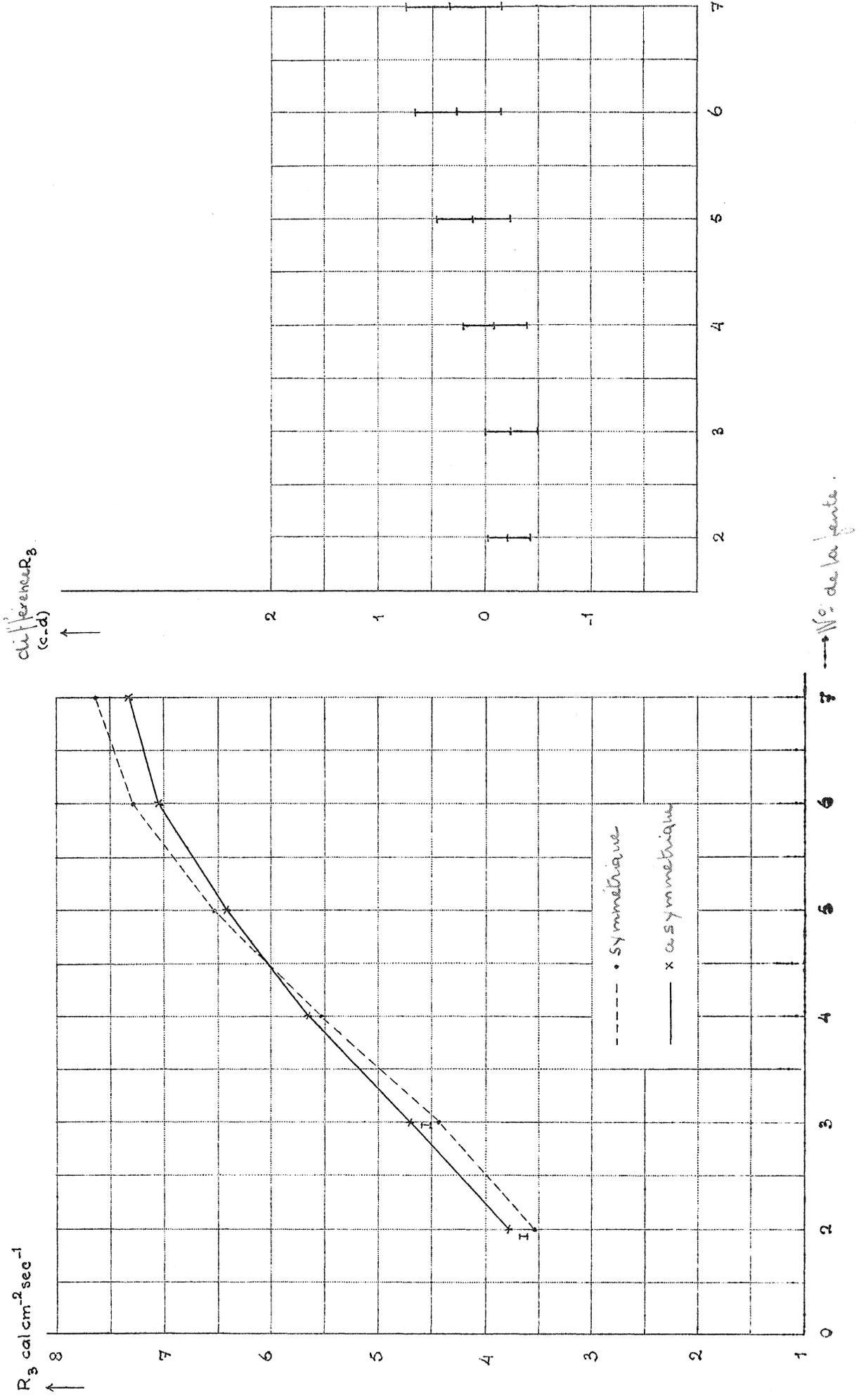


Fig. 7

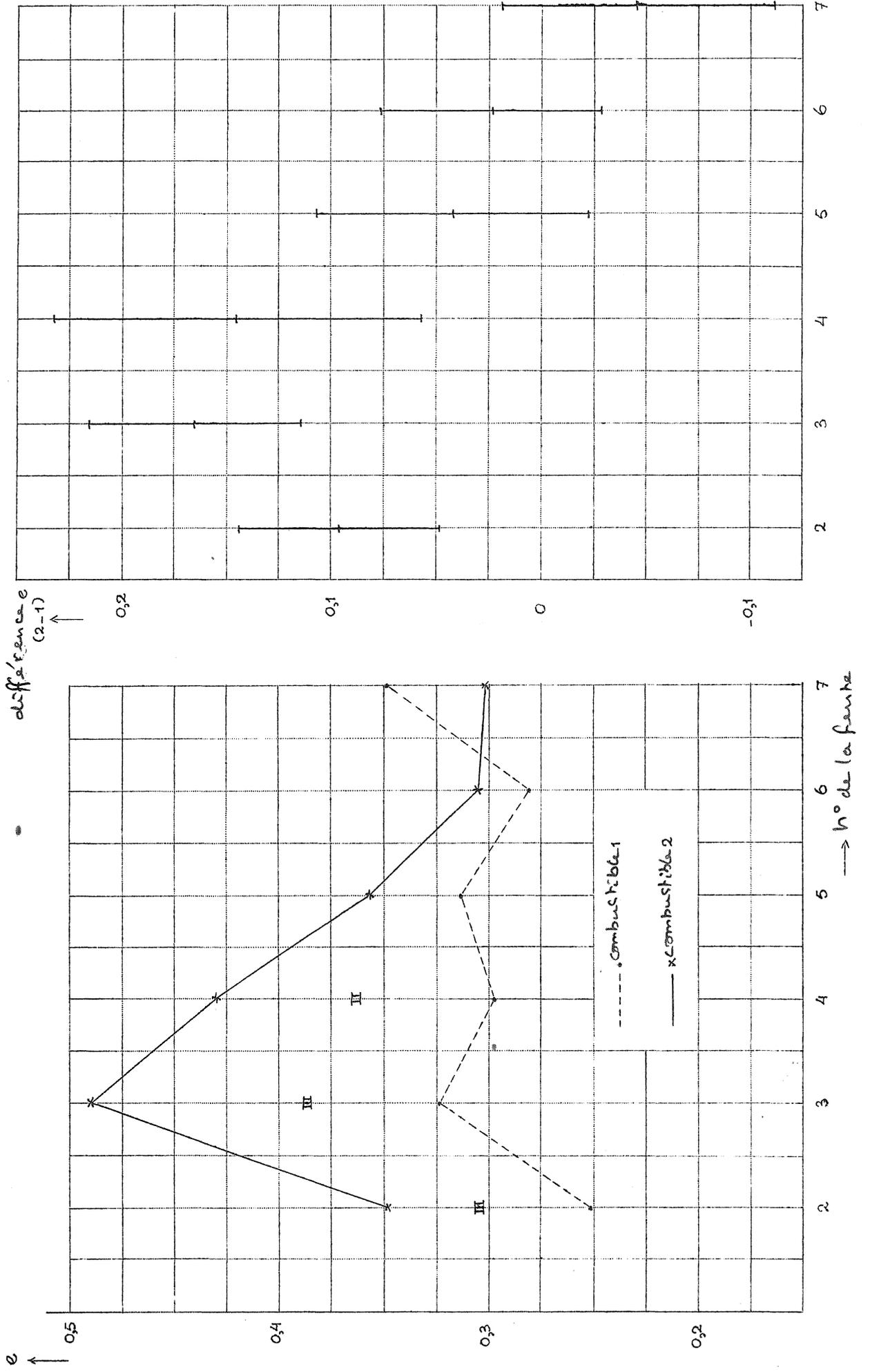


Fig. 8

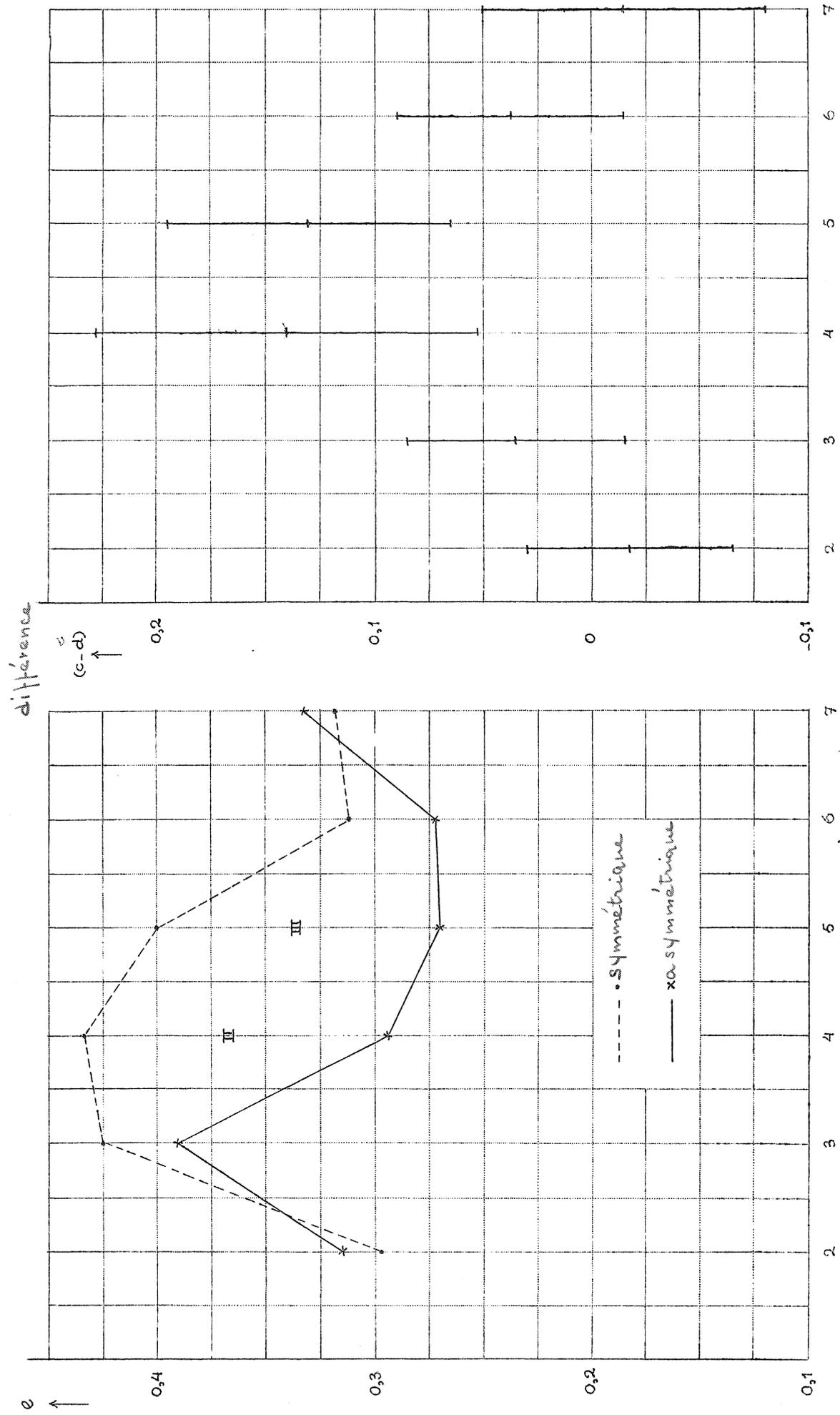


Fig. 9

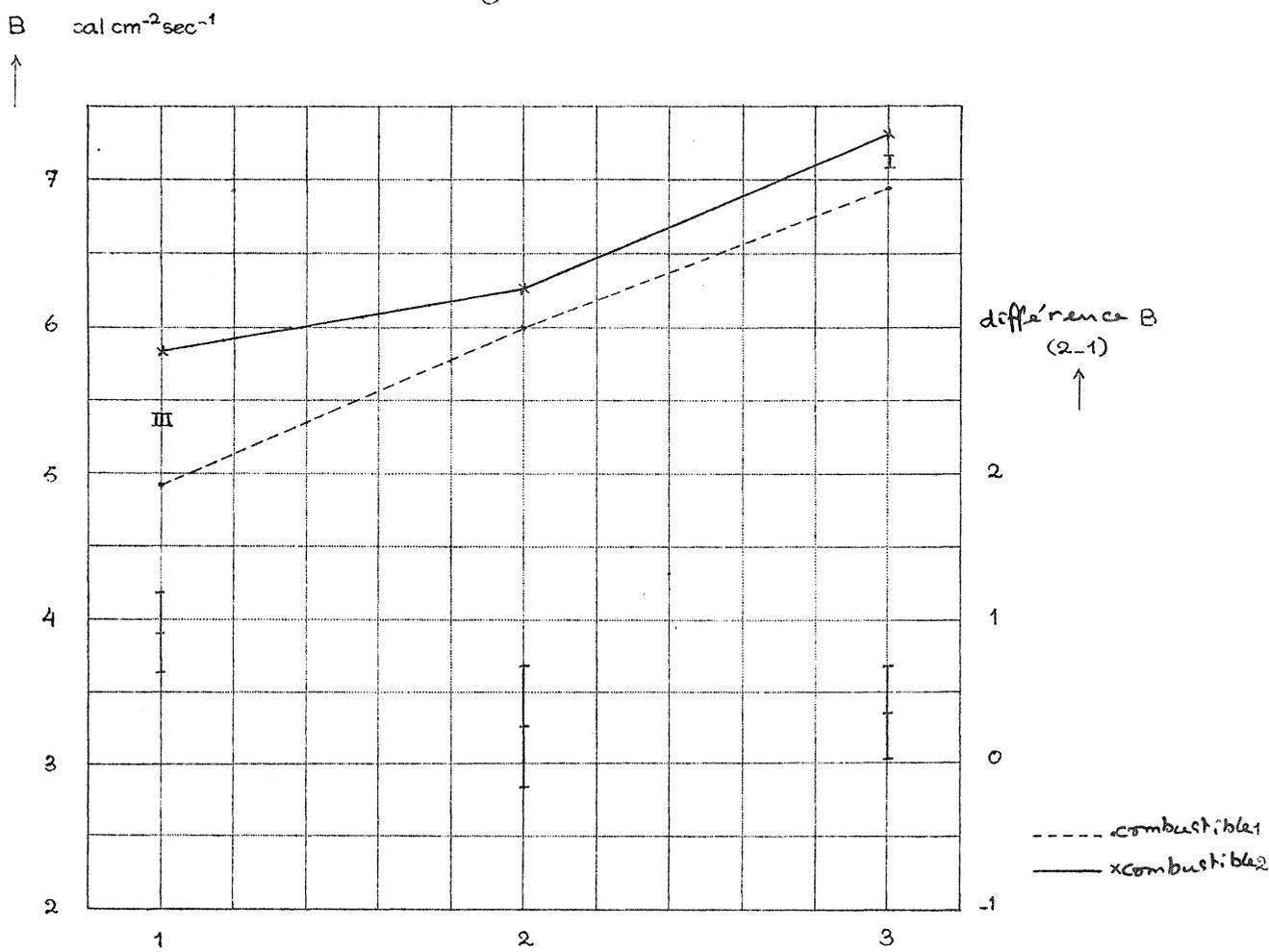


Fig. 10

