MATHEMATICSCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 144
(Vertrouwelijk)

Segregatieproeven met een mengsel van twee fijnkorrelige poeders

door

R.Doornbos
en
A.Benard

1954

Inleiding.

Dit rapport sluit aan op het rapport van de heer J.A.WOLKOFF, getiteld "Segregation of sodium perborate in Omo and Radion", betreffende onderzoekingen verricht bij de Lever's Zeep-Maatschappij N.V. te Vlaardingen. In het volgende zullen we dit laatste rapport zonder meer met "het rapport" aanduiden.
Door het uitvoeren van enkele aanvullende statistische onderzoekingen kunnen wij aan de in het rapport vermelde conclusies nog enige nieuwe toevoegen. Bij de verschillende onderdelen, die achtereenvolgens ter sprake komen, zullen we de, in het rapport gevolgde, nummering aanhouden.

I. Eerste proefnemingen.

Het criterium, dat in het rapport wordt gebruikt om de homogeniteit aan te geven van een zeker mengsel, is de gemiddelde range van het gehalte aan perboraat over een aantal pakjes. Daarnaast hebben wij de methode der m rangschikkingen toegepast (zie memorandum S 47 (M 1V)) [1] om na te gaan of er een systematisch verschil bestaat tussen de gehalten perboraat op verschillende hoogte in de pakjes. Deze methode is gevoelig voor die soort van segregatie, waarbij het perboraat zich in een deel van het pakje, midden, boven of onder, ophoopt, zodat een beeld van de aard der segregatie verkregen wordt. De gevonden waarden voor de kolomtotalen (hier eigenlijk rijtotalen), de waarde der toetsingsgrootheid S (de som van de kwadraten van de afwijkingen van de kolomtotalen van hun gemiddelde) en de bijbehorende overschrijdingskansen k vinden we in tabel 1.

Tabel 1

Kolomtotalen en overschrijdingskansen gevonden met de methode der m rangschikkingen na de eerste transportproeven

		kolomtotalen van boven naar beneden				S	k
monohydraat		$22\frac{1}{2}$	$23\frac{1}{2}$	22	22	$1\frac{1}{2}$	0,99
zeer licht perboraat		$11\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$	26	15	$189\frac{1}{2}$	0,002
normaal perboraat	1e transport	9	19	24	28	202	0,0015
normaal perboraat	2e transport	8	11	12	9	10	0,75

----

1) De memoranda waarnaar, in ons rapport wordt verwezen, zijn aan het einde toegevoegd.

Bij het monohydraat vinden we geen enkele aanwijzing voor segregatie. Het zeer lichte perboraat is in het midden geconcentreerd. Bij het normale perboraat ten slotte vinden we overschrijdingskansen 0,0015 en 0,75. Bij de eerste proef hoopt het perboraat zich nl. duidelijk op in de onderste helft van de pakjes, bij de tweede proef is wel de gemiddelde range groot (zie het rapport), maar de extreme gehalten zijn vrij willekeurig over de lagen verdeeld.

Nemen we beide proeven met normaal perboraat samen, dan vinden we de kolomtotalen 17, 30, 36 en 37, met een overschrijdingskans 0,005; ook hieruit blijkt dus, dat in de bovenste laag te weinig perboraat zit.

IIa. Analyses voor en na transport.

In de eerste plaats hebben we hier weer de methode der m rangschikkingen toegepast. De resultaten zijn samengevat in tabel 2. De kolomtotalen zijn weer in de volgorde "van boven naar beneden" opgeschreven.

Tabel 2

Resultaten van de methode der m rangschikkingen toegepast op analyses in 3 lagen voor en na transport

Radion	voor transport				na transport			
	kolomtotalen			k	kolomtotalen			k
zeer grof	22	20	12	0,05	24	20½	15½	0,20
grof	25½	21½	13	0,02	28	19	13	0,002
normaal	29	20½	10½	0,00001	23½	19	17½	0,40
fijn	26	17	11	0,0007	19	24	17	0,32
monohydraat	12½	20½	27	0,003	14	22½	17½	0,16

Omo	voor transport				na transport			
	kolomtotalen			k	kolomtotalen			k
zeer grof	24	21	15	0,14	30	16	14	0,00009
grof	28½	18	13½	0,002	26	18½	15½	0,06
normaal	24½	21	14½	0,09	16	24	20	0,22
fijn	26½	18½	15	0,03	22½	17½	14	0,16
monohydraat	18½	20½	21	0,90	18	19½	22½	0,65

In de eerste plaats valt het op dat voor het transport alle mengsels met perboraat hetzelfde beeld vertonen; de kolomtotalen nemen nl. alle af van boven naar beneden. (Gaan we op deze 8 groepen kolomtotalen opnieuw de methode der m rangschikkingen toepassen, dan vinden we een overschrijdingskans $<10^{-5}$.)

De gevonden overschrijdingskansen doen vermoeden dat het transport in sommige gevallen invloed op de menging heeft gehad. Bij de Radion-mengsels b.v. zijn de overschrijdingskansen na het transport alle groter dan er voor, hetgeen er op wijst dat het transport een gunstige invloed op de menging gehad kan hebben.

Om dit laatste te toetsen gaan we op twee verschillende manieren te werk.
In de eerste plaats toetsen we met de toets van WILCOXON (zie memorandum S 47 (M 7)) of de twee groepen waarden voor de range Δ, voor en na het transport, uit eenzelfde waarschijnlijkheidsverdeling afkomstig zijn. Daarnaast willen we toetsen of het perboraat door het transport naar boven of naar beneden wordt bewogen. Hiertoe bepalen we per pakje de "doorzakkingscoëfficiënt"

$$d = \frac{f_2 + 2f_3}{f_1 + f_2 + f_3} ,$$

waarin f_1, f_2 en f_3 de percentages O_2 zijn in de drie lagen van het pakje. Naar gelang het perboraat meer boven dan wel onderin zit varieert d van 0 tot 2. Voor en na het transport vinden we dus een groep d-waarden en op deze twee groepen passen we weer de toets van WILCOXON toe. In tabel 3 zijn de aldus gevonden overschrijdingskansen vermeld.

Tabel 3

Overschrijdingskansen van de toets van WILCOXON toegepast op de gemiddelde range en de doorzakking voor en na transport

	Radion				Omo			
	Δ		d		Δ		d	
zeer grof	0,78	V < N	0,94	↑	0,001	V < N	0,007	↑
grof	0,10	V < N	0,043	↑	0,57	V < N	1	
normaal	0,94	V > N	0,058	↓	0,013	V < N	0,015	↓
fijn	0,09	V > N	0,020	↓	0,007	V > N	0,043	↓
monohydraat	0,11	V > N	0,28	↑	0,71	V < N	0,33	↓

V < N wil zeggen dat de range voor het transport kleiner is dan er na, een pijl naar boven betekent dat het perboraat tijdens het transport naar boven is gegaan, dus dat de doorzakking kleiner is geworden.

Wat de Radion-mengsels betreft zien we dat het grove perboraat tijdens het transport naar boven is gegaan, dat wil, gezien de gevonden kolomtotalen in tabel 2, zeggen, dat de menging slechter is geworden. Dit wordt nog bevestigd door de overschrijdingskans van 0,10 in de eerste kolom, hetgeen een zwakke aanwijzing ervoor vormt, dat de range groter is geworden. Bij het fijne perboraat is het juist andersom, het perboraat zat eerst ook het meest in de bovenste laag en is door het transport naar beneden gegaan, terwijl de range wellicht ook wat kleiner is geworden.

Van de Omo mengsels is dat met het zeer grove perboraat gesegregeerd naar de bovenste laag, de range is eveneens groter geworden. Bij het mengsel met normaal perboraat is de range groter geworden, maar het perboraat is naar beneden gezaakt, waardoor de extreme waarden gelijkmatiger over het pakje zijn verdeeld. Het fijne perboraat is eveneens naar beneden gezakt en tevens is de range afgenomen.

We merken ten slotte nog op, dat het gunstige effect, dat het transport heeft op de mengsels van Radion en Omo met normaal en fijn perboraat, een gevolg zou kunnen zijn van het feit, dat toevallig over de juiste afstand is vervoerd. We kunnen ons namelijk voorstellen dat het perboraat verder doorzakt na langer vervoer en zich ten slotte het meest in de onderste laag ophoopt.

III. Bepaling van de doorzakking.

Daar bij deze proefneming niet uit het rapport was op te maken op welke wijze was bepaald welk soort perboraat het meest bovenin bleef, hebben wij bij deze waarnemingen opnieuw de in de vorige pragraaf gedefinieerd doorzakkingscoëfficiënt d bepaald, hier dus

$$d = \frac{f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 4f_5}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}$$

Hier loopt d dus van 0 (alles bovenin) tot 4 (alles onderin). Volledige menging geeft $d = 2$.

We hebben nu voor ieder pakje de waarde van d berekend en per groep van het basispoeder, b.v. voor normaal Omo, aan deze waarden rangnummers toegekend, die in tabel 4 vermeld staan. Daar voor normaal. grof en fijn Omo 3 pakjes met ieder soort perboraat onderzocht zijn, bevatten de eerste drie regels van tabel 4 drietallen rangnummers per vakje. De drie rangnummers van ieder drtietal staan in dezelfde volgorde genoteerd als in het rapport. Deze volgorde is voor het onderzoek van geen belang.

Tabel 5

Rangnummers van de doorzakkingscoëfficiënten

perboraat / Omo	zeer grof			grof			normaal			fijn			mono-hydraat		
normaal	12	8	7	10	15	13	11	14	5	6	9	4	2	1	3
grof	10	11	15	12	13	14	7	6	8	9	3	4	5	2	1
fijn	13	10	7	6	15	9	4	8	14	5	12	11	2	1	3
midden		3			4			1			2			5	
totaal	96			111			78			65			25		

Gaan we in iedere rij van tabel 4 rangnummers toekennen aan de soorten perboraat (nl. door de drie rangnummers, die voor ieder perboraat in de eerste drie regels voorkomen op te tellen en deze sommen per regel weer door hun rangnummers naar grootte te vervangen) en gaan we dan de overeenstemming toetsen tussen de rijen met de methode der m rangschikkingen (4 rangschikkingen van 5 dus), dan vinden we een overschrijdingskans van 0,006. De overeenstemming tussen de eerste drie regels alleen is nog veel groter. Bij de laatste kolom valt het rangnummer 5 voor monohydraat namelijk uit de toon en dit is weer een gevolg van de waarneming 2,55% O_2 bij fractie 4 (appendix III, p. 3).

We vinden dus eveneens dat het perboraat het meest bovenin blijft in de volgorde monohydraat - fijn - normaal - zeer grof - grof perboraat. Het is ons niet duidelijk geworden waaruit de conclusie in de summary van het rapport onder punt 2) is afgeleid, waarbij wordt opgemerkt dat het grootste verschil van twee opeenvolgende waarden bestaat tussen zeer grof en normaal perboraat. Uit tabel 4 (de totalen-regel) krijgt men eerder de indruk, dat het verschil tussen fijn perboraat en monohydraat groter is. Dit hangt er echter van af, hoe men de doorzakking precies definieert.

Conclusie en opmerkingen. De aanvullende statistische onderzoekingen geven in het algemeen een bevestiging van de in het rapport vermelde conclusies met hier en daar een precisering. In het bijzonder geven deze methoden een duidelijk inzicht in de aard der segregatie en maken zij het mogelijk de aan- of afwezigheid van invloed van vervoer te toetsen. Daarbij is speciaal gelet op het verschijnsel van segregatie naar boven of naar beneden (met behulp van de doorzakkingscoëfficiënt). Men kan gemakkelijk soortgelijke methoden bedenken, om segregatie naar het midden te onderzoeken. Klonterings-segregatie, die door het hele pakje op kan treden, is in dit rapport niet apart onderzocht. De range wordt groot door ieder soort segregatie en vormt dus een zeer algemeen criterium, dat op verschillende wijze gepreciseerd kan worden.

De bedoeling van de beschrijving van de gebruikte methoden is mede, deze methoden — die nog met andere aangevuld kunnen worden — ook voor de toekomst in dit onderzoek te introduceren.

2de Boerhaavestr.49
A M S T E R D A M O.
Statistische Afdeling
S47 (M14)

Methode der m rangschikkingen [1])

Een duidelijk voorstelling van deze toetsingsmethode verkrijgt men door n elementen te beschouwen, die een bepaald kenmerk, eventueel in verschillende mate, bezitten. dit kenmerk wordt door m waarnemers beoordeeld en ieder van deze waarnemers rangschikt deze n elementen volgens zijn beoordeling naar opklimmende waardering. Op deze wijze ontstaan m rijen van rangschikkingen. We willen nu een maat aangeven voor de overeenstemming tussen deze rangschikkingen, m.a.w. een maat voor de overeenstemming tussen de m beoordelingen. De hypothese H_0 , die met deze methode getoetst kan worden, houdt in dat er geen overeenstemming tussen de waarnemers bestaat; precieser gezegd, dat alle rangschikkingen onafhankelijk van elkaar op toevallige wijze zijn ontstaan. Dit is b.v. het geval, als het betrokken kenmerk in werkelijkheid voor alle elementen dezelfde waarde bezit.

We kunnen de afleiding voor de maat van overeenstemming het eenvoudigst geven aan de hand van een voorbeeld.

	elementen	A	B	C	D	E	F
rangnummers toegekend door waarnemer	a	5	4	1	6	3	2
	b	2	3	1	5	6	4
	c	4	1	6	3	2	5
	d	4	3	2	5	1	6
		15	11	10	19	12	17

De som van alle rangnummers is $\frac{1}{2}nm(n+1)$. Onder de hypothese H_0 is het theoretische gemiddelde van iedere kolom: $\frac{1}{2}m(n+1)$

We beschouwen nu de afwijkingen van dit gemiddelde. In ons voorbeeld is het theoretisch kolomgemiddelde gelijk aan 14. De afwijkingen daarvan zijn

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad 5 \quad -2 \quad 3$$

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid

De som der kwadraten van deze afwijkingen noemen wij S.
In ons voorbeeld is S = 64.
Als alle m rangschikkingen gelijk zijn wordt het maximum van S bereikt.
Dit maximum is $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$.
We definiëren nu als <u>coëfficiënt van overeenstemming</u>

$$W = \frac{12\ S}{m^2(n^3-n)}$$

In ons voorbeeld is $W = \frac{12 \times 64}{16 \times 210} = 0{,}229$.
W varieert dus tussen 0 en 1.

De verdeling van $\underline{S}$ onder de hypothese H_o is exact berekend voor een aantal waarden van n en m [1] , terwijl voor grote m en n benaderingen bekend zijn.

De meeste gebruikelijke benaderingen zijn de volgende.

1°. De χ^2-benadering:

$\chi_r^2 = m(n-1)\underline{W} = \frac{12\ \underline{S}}{mn(n+1)}$ heeft voor $m \to \infty$ een χ^2-verdeling met n-1 vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg. 36-37).

2°. De z-benadering:

$\underline{V} = (m-1)\frac{\underline{W}}{1-\underline{W}}$ is bij benadering verdeeld als $\underline{F} = e^{2\underline{z}}$
($\underline{F}$ is de $\underline{F}$ van Snedecor, $\underline{z}$ de $\underline{z}$ van Fisher) met
$\nu_1 = n-1-\frac{2}{m}$
$\nu_2 = (m-1)\,\nu_1$ vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg.33-36)

Met behulp van de verdelingen van $\underline{S}$ of $\underline{W}$ onder de hypothese H_o, kan deze hypothese getoetst worden, waarbij H_o verworpen wordt als $\underline{W}$ waarden dichtbij 1 (resp. $\underline{S}$ dichtbij $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$) aanneemt, de kritieke zône is dus van de vorm $W \geq W_o$ (resp. $S \geq S_o$).

Het kan voorkomen dat de waarnemers geen onderscheid ontdekken in de mate waarin verschillende elementen het kenmerk bezitten. Ze geven deze elementen dan gelijke rangnummers.

Veronderstel, dat door een waarnemer geen onderscheid wordt gemaakt tussen de elementen, die de rangnummers 3 t/m 6 moeten dragen. Dan wordt als rangnummer van ieder van deze elementen het gemiddelde van de rangnummers $\frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 4\frac{1}{2}$ gebruikt.

Daar het maximum van $\underline{S}$ nu verandert, moeten wij een correctie op de formule voor $\underline{W}$ toepassen. Deze vindt men in [1] (pg 82) en [2] (pg. 28-30). Eveneens veranderen dan de formules voor χ^2-benadering ([1] pg. 86, [2] pg. 37) en voor de z-b ([1] pg. 86 [2] pg. 34), doch deze correcties zijn va betekenis, tenzij het aantal gelijken groot is.

Literatuur: [1] M.G.Kendall, Rank correlation methods, London 1948, Hoofdstuk 6, pag. 80.
Tabel van de verdelingsfunctie van $\underset{\sim}{S}$ voor:

$n = 3$ $m = 2$ t/m 10
$n = 4$ $m = 2$ t/m 6
$n = 5$ $m = 3$
op pag. 146-149.

Tabel van de waarden van S, waarvan de overschrijdingskansen onder de hypothese H_0 gelijk zijn aan 0,05 of 0,01, berekend met behulp van de z-benadering voor:

$n = 3$ $m = 8,9,10,12,14,15,16,18,20$
$n = 4$ $m = 4,5,6,8,10,15,20$
$n = 5$ t/m 7 $m = 3,4,5,6,8,10,15,20$
op pag. 150.

[2] Ph.van Elteren, Methode der m rangschikkingen, Cursus "Parametervrije Methoden", Hoofdstuk II, Rapport S 59, Mathematisch Centrum (1951), Blz. 18-45.

Mathematisch Centrum,
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.
Statistische Afdeling,
347 (M7).

Maart, 1952.

De toets van Wilcoxon.[1])

Deze methode dient tot het toetsen van de hypothese H_o, inhoudende, dat twee steekproeven $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ afkomstig zijn uit één collectie (ook wel populatie of universum genaamd).

Voor het toetsen van de hypothese H_o wordt gebruik gemaakt van een toetsingsgrootheid $\underline{U}$ [2]), die als volgt uit de waarnemingen berekend wordt. Onderstellen we, dat de waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, dan bepalen we eerst het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef, dat kleiner is dan de kleinste waarneming x_1 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1). Noem dit aantal V_1. Vervolgens wordt het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef bepaald, dat kleiner is dan de op één na kleinste waarneming x_2 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid wordt weer een $\frac{1}{2}$ in plaats van 1 geteld). Dit aantal noemen we V_2. Evenzo worden met betrekking tot $x_3,x_4,\ldots,x_n$ de aantallen $V_3,V_4,\ldots,V_n$ bepaald. De waarde U van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ wordt voor de twee steekproeven dan gegeven door

$$U=V_1+V_2+\ldots+V_n.$$

Wanneer onder de waarnemingen niet te veel gelijken voorkomen, kan bewezen worden, dat de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ onder de hypothese H_o voor grote waarden van n en m (beide $\geq$ 10) bij benadering een normale verdeling bezit. De waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ tezamen genomen vallen uiteen in een aantal groepen van gelijke waarnemingen. Noem het aantal van deze groepen k, dan is k minstens 1 (als alle waarnemingen gelijk zijn) en hoogstens m+n (als alle waarnemingen verschillend zijn).

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Stochastische grootheden worden door onderstreping aangeduid.

Zijn $t_1,\ldots,t_k$ de aantallen waarnemingen in deze groepen van gelijken, dan worden het gemiddelde μ en de variantie σ^2 van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ gegeven door

$$\mu(\underline{U}) = \tfrac{1}{2}nm,$$

en

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (\underline{U}) = \frac{1}{12}\,\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}\left\{(n+m)^3 + \right.$$
$$\left. -\ (t_1^{\,3}+t_2^{\,3}+\ldots+t_k^{\,3})\right\} \qquad {}^{1)}$$

De grootheid $\mu(\underline{U})$ is dus onafhankelijk van de waarden vast. Indien de hypothese H_0 niet vervuld is, zal de grootheid $\underline{U}$ grote of kleine waarden bezitten, al naar gelang $\underline{y}$ systematisch kleiner of groter is dan $\underline{x}$.

De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_0 verwerpt indien de gevonden waarde U van $\underline{U}$ te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{|U-\mu|}{\sigma} > \xi_\alpha \,, \qquad {}^{2)}$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_α volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha \,,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.

De (tweezijdige) overschrijdingskans k , behorende bij T, is gedefiniëerd als

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\left|\frac{U-\mu}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \qquad {}^{2)}$$

en kan ook in eenttabel van de normale verdeling worden gevonden.

Bij eenzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.

Een bijzonder geval van het bovenstaande is, dat onder de waarnemingen voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in 't geheel geen gelijken voorkomen. In dat geval kan de uitdrukking voor de variantie herleid worden tot

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\,nm(n+m+1).$$

---

1) Deze formule is een door T.J.Terpstra gegeven vereenvoudiging van de door J.Hemelrijk([5] en [7]) afgeleide formule. De afleiding van deze vereenvoudigde formule zal nog gepubliceerd worden.

2) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van $\underline{U}$.

Indien n en m kleiner zijn dan 10, zijn tabellen beschikbaar voor het berekenen van de overschrijdingskans <u>k</u> voor de uit de steekproef bepaalde waarde U van <u>U</u> (zie [2] en [4]). Dergelijke tabellen bestaan echter niet voor het geval, dat gelijke waarnemingen optreden.

<u>Opmerking</u>. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat de variantie van <u>U</u> door het optreden van gelijke waarnemingen vermindert. Het verschil, dat door deze gelijken optreedt, is echter in het algemeen gering. Men kan daarom in eerste instantie deze correctie op σ^2 verwaarlozen. De overschrijdingskansen, die men dan vindt, zijn iets te groot.

<u>Litteratuur</u>:

1. F.Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics <u>1</u> (1945), p.80-83.

2 H.B.Mann and D.R.Whitney On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Amer.Math.Stat. <u>18</u> (1947),p. 50-60.

3 H.R.van der Vaart Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples, Proceedings van de Kon. Ned.Ak.v.Wet., <u>53</u> (1950),p. 494-520.

4 H.R.van der Vaart Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, met tabellen voor n en $m \leq 10$, Rapport S32 (M4) (1950).

5 H.R.van der Vaart De toets van Wilcoxon voor het probleem van twee steekproeven. (Cursus "Parametervrije Methoden", 1951-'52).

6 D.van Dantzig Kadercursus Mathematische Statistiek, Math. Centrum, Amsterdam (1947-'50), hoofdst. 6, § 3.

7 J.Hemelrijk Note on Wilcoxon's two sample test, when ties are present, Ann.Math.Stat. <u>23</u> (1952) no. 2.