MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 147

Onderzoek over het geslacht van kalveren

door

Ir Doraline Wabeke

1954

§ 1. Inleiding.

De gegevens, waarop dit rapport betrekking heeft, zijn in Tabel I samengevat. M en V geven hierin het aantal mannelijke resp. vrouwelijke nakomelingen aan.

Tabel I

Aantal mannelijke en vrouwelijke nakomelingen en het bevruchtingsgetal van stieren

naam stier	1949/50 M	1949/50 V	1950/51 M	1950/51 V	1951/52 M	1951/52 V	bevruchtingsgetal
Fientje's Jumbo	6	2	112	115	46	26	2,59
Cato 36's Prins	100	101	993	831	903	776	2,39
Johan	121	129	254	257	-	-	2,37
Cato 38's Prins	121	104	1090	952	1131	819	2,21
Mina 1's Sjoerd	59	54	628	622	48	35	1,81
Juul	100	87	5	-	-	-	2,03
Alwina's 3 Prins	2	1	306	277	604	499	2,01
Agnes Prins	12	13	-	-	-	-	2,55
Dora 45's Johan	-	-	65	55	134	134	2,11
Geertje's Jan	-	-	3	3	410	273	2,03
George	-	-	138	112	502	393	2,11
Dora 1's Prins	-	-	-	-	116	82	1,96
Doel	-	-	371	326	774	750	1,94
Flip	-	-	335	294	690	479	2,--
Cato 43's Sjoerd	-	-	-	-	188	139	2,31
Roza 2's Prins	-	-	3	-	249	253	1,77
Jeann. 42's Roland	-	-	4	-	372	249	1,87

Het bevruchtingsgetal is de verhouding van het totale aantal inseminaties uitgevoerd met het sperma van de betrokken stier en het aantal hiervan, dat succes heeft gehad.

Uit de cijfers bleek duidelijk, dat er systematisch meer mannelijke dan vrouwelijke nakomelingen zijn (overschrijdingskans $< 10^{-10}$) en naar aanleiding hiervan werden ons de volgende vragen gesteld:

I. Zijn er bepaalde stieren, die in verhouding meer mannelijke (of meer vrouwelijke) nakomelingen geven dan andere stieren?

II. Is er verband tussen het bevruchtingsvermogen en de fractie mannelijke nakomelingen?

III. Indien er stieren zijn, die in een bepaald jaar in verhouding meer mannelijke kalveren geven dan andere stieren, geven zij dat dan in andere jaren ook?

IV. Is de verhouding van het aantal mannelijke ten opzichte van het aantal vrouwelijke kalveren per stier voor ieder jaar gelijk?

Deze vragen kunnen strict genomen, niet beantwoord worden in de zin, waarin zij zijn gesteld, daar het niet bekend is welke koeien in dit onderzoek betrokken zijn geweest en hoe deze koeien over de stieren verdeeld zijn geweest. Ook was niet meer na te gaan, van welke koeien de kalveren afkomstig waren. Indien er dus tussen de koeien verschillen bestaan in vruchtbaarheid en in de verhouding van het aantal mannelijke en vrouwelijke nakomelingen, kunnen deze verschillen bij het onderzoek niet geëlimineerd worden. Noodgedwongen maken wij daarom de onderstelling, dat gedurende de drie jaren van onderzoek telkens ongeveer dezelfde koeien geïnsemineerd zijn met het sperma van een bepaalde stier. Een stier, tezamen met deze bij hem behorende koeien, noemen wij nu een onderzoekeenheid. Wij nemen aan, dat de wijzigingen in deze onderzoekeenheden gedurende de waarnemingsperiode niet van dien aard zijn geweest dat zij de resultaten merkbaar zouden hebben beïnvloed. Onder dit voorbehoud kan een statistische analyse uitgevoerd worden, waarbij de conclusies betrekking hebben op onderzoekeenheden in plaats van op stieren.

§2. Zijn er onderzoekeenheden, die meer mannelijke resp. vrouwelijke nakomelingen geven dan andere onderzoekeenheden?

Om te onderzoeken of er bepaalde onderzoekeenheden zijn, die in verhouding meer mannelijke (of meer vrouwelijke) nakomelingen geven dan de anderen, passen we de χ^2-methode toe (zie memorandum S 53 (M 23a), toegevoegd aan dit rapport), waarmee we de hypothese toetsen, dat voor iedere onderzoekeenheid de kans op mannelijke nakomelingen even groot is, tegen de alternatieve hypothese dat deze kansen ongelijk zijn.

Deze χ^2-toets wordt voor ieder jaar afzonderlijk berekend en de overschrijdingskansen zijn in Tabel II weergegeven.

Tabel II

Overschrijdingskansen van de χ^2-toets

jaar	χ^2	ν')	overschrijdingskans
1949/50	3,88	6	0,68
1950/51	9,35	9	0,40
1951/52	51,2	13	$<10^{-4}$

') ν = het aantal vrijheidsgraden, in dit geval één minder dan het aantal onderzoekeenheden, dat beschouwd is.

Alleen voor het jaar 1951/52 kunnen we concluderen, dat er bepaalde onderzoekeenheden zijn, waarvoor de verhouding van het aantal mannelijke t.o.v. het aantal vrouwelijke nakomelingen verschilt van die verhouding van de andere onderzoekeenheden.

In Tabel III zijn verschillende gegevens over het jaar 1951/52 van de onderzoekeenheden bijeengebracht.

Tabel III

Overzicht van de fracties stierkalveren van verschillende onderzoekeenheden in 1951/52

naam	1951/52 M/M+V	1951/52 M+V	M	$\mathcal{E}\,\underline{M}$ ')	% bijdrage tot χ^2
Roza 2's Prins	0,50	502	249	279,6	14,72
Mina 1's Sjoerd	0,58	83	48	46,2	0,30
Jeann. 42's Roland	0,60	621	372	245,8	8,73
Doel	0,51	1524	774	848,7	28,98
Dora 1's Prins	0,59	198	116	110,3	1,31
Flip	0,59	1169	690	651,0	10,29
Alwina's 3 Prins	0,55	1103	604	614,2	0,75
Geertjes Jan	0,60	683	410	380,4	10,18
Dora 45's Johan	0,50	268	134	149,2	6,86
George	0,56	895	502	498,4	0,11
Cato 38's Prins	0,58	1950	1131	1085,9	8,24
Cato 43's Sjoerd	0,57	327	188	182,1	0,84
Cato 36's Prins	0,54	1679	903	935,0	4,83
Fientjes Jumbo	0,64	72	46	40,1	3,83

') $\mathcal{E}\,\underline{M}$ = de verwachting van het aantal mannelijke nakomelingen.

Die onderzoekeenheden, die een grote bijdrage tot χ^2 hebben gegeven, komen in de eerste plaats in aanmerking om als afwijkend van de anderen beschouwd te worden, d.w.z. in de eerste plaats voor deze onderzoekeenheden kan men concluderen, dat hun verhouding $\frac{M}{M+V}$ afwijkt (naar boven of naar beneden) van deze grootheid berekend uit de resultaten van alle onderzoekeenheden tezamen genomen.

§3. Is er verband tussen het bevruchtingsvermogen en de fractie mannelijke nakomelingen?

Een maat voor het bevruchtingsvermogen is het bevruchtingsgetal, waarbij een laag bevruchtingsgetal een hoog bevruchtings vermogen aangeeft.

We hebben bij het onderzoeken van bovengenoemde vraag gebruik gemaakt van de bevruchtingsgetallen voor de drie jaren te zamen aangezien alleen deze totaalcijfers beschikbaar waren. Ook het aantal nakomelingen hebben we daarom over drie jaren tezamen genomen.

Om te onderzoeken of een hoog bevruchtingsvermogen (= laag bevruchtingsgetal) misschien samengaat met een hoog percentage mannelijke kalveren, hebben we de toets tegen verloop van een aantal kansen toegepast, nadat we de onderzoekeenheden in volgorde van opklimmend bevruchtingsgetal gerangschikt hebben (zie memorandum S 139 (M 48) en S 47 (M 7), toegevoegd aan dit rapport).

We toetsen dus weer de hypothese dat de kans op een stierkalf voor alle onderzoekeenheden dezelfde is, maar nu met als alternatieve hypothese dat deze kans toe- of afneemt met stijgend bevruchtingsgetal.

De waarde van de toetsingsgrootheid $\frac{U-\mu}{\sigma}$ blijkt - 0,78 te zijn met een tweezijdige overschrijdingskans 0,44.

Er is dus in dit materiaal geen aanwijzing dat er een verband bestaat tussen het bevruchtingsgetal en de fractie mannelijke nakomelingen.

§ 4. Indien er onderzoekeenheden zijn, die in een bepaald jaar naar verhouding meer mannelijke kalveren geven, geven zij dat dan in andere jaren ook?

We berekenen de verhouding M/(M+V) uit de gegevens over het jaar 1951/52 (het jaar met de meeste gegevens) en we rangschikken de onderzoekeenheden naar opklimmende volgorde van deze verhouding.

We onderzoeken nu vervolgens of de verhouding M/(M+V) in de jaren 1949/50 en 1950/51 in deze volgorde een toename vertoont van de kans op een stierkalf; wij gebruiken daartoe wederom de toets tegen verloop van een aantal kansen (zie par. 3).

Daar het onaannemelijk moet worden geacht, dat deze volgorde in twee opeenvolgende jaren tegengesteld zou zijn, wordt de toets eenzijdig toegepast, waarbij alleen die waarden van $\frac{U-\mu}{\sigma}$ als kritiek worden beschouwd, die op eenzelfde richting van volgorde wijzen. De resultaten zijn in Tabel IV samengevat.

Tabel IV

Onderzoek naar persistentie in de tijd van de verhouding $\frac{M}{M+V}$

jaar	$\frac{U-\mu}{\sigma}$	overschrijdingskans (eenzijdig)
1949/50	0,52	0,30
1950/51	0,91	0,18

In dit materiaal vinden wij dus geen aanwijzing, dat onderzoekeenheden, die in het laatste jaar in verhouding veel mannelijke kalveren gaven, dit in de andere jaren ook gedaan hebben.

§5. Is de kans op een stierkalf per onderzoekeenheid voor ieder der onderzochte jaren dezelfde?

Per onderzoekeenheid wordt de verhouding M/(M+V) over telkens twee jaren vergeleken met behulp van de methode der 2x2-tabel (zie memorandum S 53 (M 23), toegevoegd aan dit rapport). Deze methode is toegepast omdat voor vele onderzoekeenheden niet over alle drie jaren voldoende gegevens aanwezig waren, hetgeen het toepassen van één toets voor alle drie jaren tegelijk bemoeilijkt.

De uitkomsten der 2x2-tabellen worden voor ieder tweetal jaren gecombineerd volgens methode 2 en 4 van memorandum S 102 (M 17b) (zie achterin).

Volgens combinatiemethode 2 toetsen we de hypothese, dat de kans op een stierkalf voor ieder der onderzoekeenheden over de twee jaren gelijk is, met als alternatieve hypothese dat, zo er veranderingen zijn, deze voor de verschillende onderzoekeenheden in één richting liggen.

Volgens combinatiemethode 4 toetsen we dezelfde hypothese maar met als alternatieve hypothese, dat de kans voor minstens één der onderzoekeenheden verschillend is voor de twee in de toets betrokken jaren, onafhankelijk of dit verschil voor verschillende onderzoekeenheden in dezelfde richting ligt of niet De resultaten zijn in Tabel V samengevat.

Tabel V

Onderzoek naar verschillen in de kansen op stierkalveren in de verschillende jaren

jaren	h	methode 2: $\frac{T}{\sigma}$	methode 2: k	methode 4: $\sum \frac{t_1^2}{\sigma^2}$	methode 4: k
1949/50 1951/52	4	- 1,23	0,22	3,64	0,46
1949/50 1950/51	5	+ 0,25	0,80	3,81	0,57
1950/51 1951/52	9	- 2,57	0,01	23,30	0,006

h = aantal onderzoekeenheden

k = overschrijdingskans (tweezijdig)

Een minteken bij T/σ geeft aan, dat de verhouding M/(M+V) in het laatstgenoemde jaar hogere waarden aangenomen heeft dan in het eerstgenoemde.

Conclusie:

In het jaar 1951/52 is de verhouding M/(M+V) systematisch hoger dan in 1950/51. Voor de andere paren van jaren zijn er geen aanwijzingen voor systematische verschillen.

Opmerking:

Bij het beschouwen van de in Tabel V samengevatte uitkomsten verlieze men niet uit het oog, dat aan de drie regels van deze tabel verschillende onderzoekeenheden ten grondslag liggen.

Voor de jaren 1950/51 en 1951/52 geven wij meer volledige gegevens in Tabel VI.

Tabel VI

Onderzoek naar verschillen in de kansen op stierkalveren in de jaren 1950/51 en 1951/52 bij verschillende onderzoekeenheden

naam	M+V 1950/51	M+V 1951/52	M/(M+V) 1950/51	M/(M+V) 1951/52	$\frac{t}{\sigma}$	k (voor zover klein)
Mina 1's Sjoerd	1250	83	0,50	0,58	- 1,34	
Doel	697	1524	0,53	0,51	+ 1,07	
Flip	629	1169	0,53	0,59	- 2,35	0,02
Alwina 3's Prins	583	1103	0,52	0,55	- 0,89	
Dora 45's Johan	120	268	0,54	0,50	+ 0,76	
George	250	895	0,55	0,56	- 0,25	
Cato 38's Prins	2042	1950	0,53	0,58	- 2,94	0,003
Cato 36's Prins	1824	1679	0,54	0,54	+ 0,39	
Fientje's Jumbo	227	72	0,49	0,64	- 2,15	0,03

k = tweezijdige overschrijdingskans

We zien hieruit dat er in het bijzonder voor de onderzoekeenheden Flip, Cato 38's Prins en Fientje's Jumbo aanleiding bestaat om te vermoeden, dat de kans op een stierkalf in 1951/52 groter is dan in 1950/51.

§ 6. Samenvatting.

1. Uit de gegevens over het jaar 1951/52 kunnen we concluderen dat er bepaalde onderzoekeenheden zijn, waarvoor het percentage mannelijke nakomelingen systematisch kleiner of groter is dan van

de andere onderzoekeenheden.

2. Er zijn geen aanwijzingen gevonden voor een samenhang tussen bevruchtingsgetal en de fractie mannelijke nakomelingen.

3. Een persistentie van de verhouding M/(M+V) voor de verschillende onderzoekeenheden over de drie jaren is uit dit waarnemingsmateriaal niet aantoonbaar.

4. In het jaar 1951/52 bleek de kans op stierkalveren systematisch hoger te zijn geweest dan in 1950/51. De onderzoekeenheden Flip, Cato 38's Prins en Fientje's Jumbo leverden de grootste bijdragen tot dit verschil.

Opmerking.

Er zij nogmaals op gewezen, dat het gehele onderzoek gebaseerd is op de onderstelling, dat de onderzoekeenheden gedurende de drie jaren niet veranderd zijn, of althans, dat eventuele veranderingen daarin geen noemenswaardige invloed hebben gehad. In verband hiermede moeten de gevonden resultaten voorzichtig geïnterpreteerd worden; de mogelijkheid bestaat, dat sommige ervan aan veranderingen in de onderzoekeenheden geweten zouden moeten worden. Voor zoverre men aan bepaalde conclusies grote betekenis toe zou kennen, is een nadere bevestiging door een gedetailleerder onderzoek noodzakelijk.

MATHEMATISCH CENTRUM
Amsterdam
Statistische Afdeling.
S47(M6)

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese.[1]

De toetsing van een hypothese $\mathcal{H}_0$ berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \dots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden[2], of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid u (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \dots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat $\mathcal{H}_0$ juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van u, en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat u een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese $\mathcal{H}_0$, gelijk is aan een gegeven getal α, zodat Z dus van α afhankelijk is[3]. Z heet de kritieke zône van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu $\mathcal{H}_0$ op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \dots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van u in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien $\mathcal{H}_0$ juist is, gelijk aan α. Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met α = 0,05 resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie(universum,populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot aanvaarding van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze nevenvoorwaarden dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de overschrijdingskans k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α, waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α, waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootheid nog juist in de (bij α behorende) kritieke zone Z ligt. Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt verworpen, indien $k \leqq \alpha$ is.

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijke men bv. de tweede hieronder gegeven litteratuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

Litteratuur:

J.Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J.Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p.54-66.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.
Statistische Afdeling
S 145 (M 23a)

Toets voor de hypothese $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ met behulp van een 2 x k tabel [1)]

Wij beschouwen k reeksen $R_1, R_2, \dots, R_k$ van onafhankelijke waarnemingen, waarbij iedere waarneming als resultaat het kenmerk A of het kenmerk $\bar{A}$ (non A) kan geven. De kans op A is binnen ieder der reeksen constant en wel gelijk aan p_i voor de waarnemingen van reeks R_i ($i = 1,2,\dots,k$).
Laat het aantal waarnemingen van reeks R_i ($i = 1,2,\dots,k$) gelijk zijn aan n_i en laat hieronder het aantal met kenmerk A, m_i zijn.
Gevraagd wordt dan de hypothese H_0: $p_1=p_2= \dots =p_k$
te toetsen op grond van deze gegevens.
De gegevens kunnen in een 2 x k -tabel worden samengevat;

	R_1	R_2		R_i		R_k	totaal
A	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k	m
$\bar{A}$	n_1-m_1	n_2-m_2	...	n_i-m_i	...	n_k-m_k	$n-m$
totaal	n_1	n_2		n_i		n_k	n

waarin dus $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$
en $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.
De hypothese H_0 wordt getoetst met de grootheid

$$\chi_c^2 = \sum_i \frac{\left(m_i - \frac{m \times n_i}{n}\right)^2}{\frac{m\, n_i}{n}} + \sum_i \frac{\left(n_i - m_i - \frac{(n-m)n_i}{n}\right)^2}{\frac{(n-m)\, n_i}{n}} =$$

$$= \sum_i \frac{(n m_i - m n_i)^2}{m(n-m)n_i} = \frac{n^2}{m(n-m)} \sum_i \frac{m_i^2}{n_i} - \frac{nm}{n-m}$$

Deze grootheid $\underline{\chi}_c^2$ [2)] heeft onder de hypothese H_0 bij benadering een χ^2-verdeling met $k-1$ vrijheidsgraden (zie b.v. [1] p. 445 e.v.).

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.
2) Als wij grootheden als stochastische grootheden (dit zijn grootheden met een waarschijnlijkheidsverdeling) beschouwen geven wij dit door onderstreping aan. Niet onderstreepte letters geven waarden aan, die door de stochastische grootheden worden aangenomen.

Deze benadering is goed, indien $m\frac{n_i}{n} \geqq 5$ voor iedere i (zie [2]). Indien H_0 onjuist is, dus als er bij verschillende reeksen verschillende kansen op A zijn, zal $\underline{\chi}_c^2$ gewoonlijk grotere waarden aannemen, dan wanneer H_0 juist is.
De kritieke zone bestaat uit die waarden van χ_c^2, waarvoor geldt $\underline{\chi}_c^2 \geqq \chi_\alpha^2$. Hierin is χ_α^2 die waarde van $\underline{\chi}^2$, die voldoet aan

$$P[\underline{\chi}^2 \geqq \chi_\alpha^2] = \alpha$$

met α als van te voren vastgelegde onbetrouwbaarheid.
De overschrijdingskans behorende bij een bepaalde gevonden waarde χ_c^2 van $\underline{\chi}_c^2$ is gedefinieerd als

$$P[\underline{\chi}_c^2 \geqq \chi_c^2 | H_0]$$

waarin "$|H_0$" aangeeft, dat deze kans berekend wordt op grond van H_0.
χ_α^2 en de overschrijdingskans kunnen in tabellen of nomogrammen worden opgezicht (zie [3]).

Opmerking. Indien niet voldaan is aan de voorwaarde $m\frac{n_i}{n} \geqq 5$ voor iedere i, kan men een (meer bewerkelijke) exacte toets baseren op de voorwaardelijke waarschijnlijkheidsverdeling van de grootheden $\underline{m}_i$ ($i = 1,\ldots,k$), onder de voorwaarde, dat hun som de waarde m aanneemt:

$$P[\underline{m}_1 = m_1, \underline{m}_2 = m_2, \ldots, \underline{m}_k = m_k | \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \cdots + \underline{m}_k = m ; H_0] =$$

$$= \binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\cdots\binom{n_k}{m_k} \Big/ \binom{n}{m}$$

De geldigheid van deze formule volgt direct uit de waarschijnlijkheidsverdelingen van de $\underline{m}_i$ en van $\underline{m}$ (onder H_0) en uit de definitie van een voorwaardelijke waarschijnlijkheid.

In dit geval definiëren wij de overschrijdingskans behorend bij een gevonden resultaat $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ met $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$ als de som van alle waarschijnlijkheden van bovengenoemde verdeling (met de gevonden waarde van m), die hoogstens gelijk zijn aan de waarschijnlijkheid van het gevonden resultaat.

Literatuur.

[1] H.Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, 1946.

[2] P.G.Hoel, On indices of dispersion, Ann. Math. Stat. 14 (1943), p. 155-163.

[3] Tabellen en nomogrammen van de χ^2-verdeling.
M.G.Kendall, The advanced theory of statistics, I, 1947, p. 444-446.
H.Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, 1946, p. 559.
Statistica 1 (1946), p. 109.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Statistische Afdeling
Rapport S 139 (M 48)

door
A.Benard
en
Constance van Eeden.

Toets tegen verloop voor een aantal kansen.[1]

Deze toets kan worden toegepast in het volgende geval: $R_i (i = 1,2,\ldots,k)$ zijn k onafhankelijke reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment één der mogelijke uitkomsten: succes of mislukking heeft. Bestaat de i^e reeks uit t_i experimenten, treedt hierbij $\underline{n}_i$ maal de uitkomst: succes op en stellen wij $\underline{m}_i = t_i - \underline{n}_i$, dan kunnen wij de resultaten als volgt samenvatten:

reeks no.	aantal malen		aantal experimenten
	succes	mislukking	
1	$\underline{n}_1$	$\underline{m}_1$	t_1
2	$\underline{n}_2$	$\underline{m}_2$	t_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
k	$\underline{n}_k$	$\underline{m}_k$	t_k
totaal	$\underline{n}$	$\underline{m}$	N

Hierin zijn $\underline{n}_i$ en $\underline{m}_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, $\underline{n}$ en $\underline{m}$ stochastisch, terwijl t_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ en N gegeven getallen zijn.

Is nu bij ieder experiment van de i^e reeks de kans op succes p_i (en dus de kans op mislukking $q_i = 1 - p_i$), dan luidt de hypothese H_0, die we willen toetsen:

$$H_0 : \quad p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots = p_k ,$$

terwijl de alternatieve hypothesen inhouden, dat $p_1, p_2, \ldots, p_k$ in deze volgorde een stijgend of dalend verloop vertonen.

De toets wordt nu voorwaardelijk uitgevoerd onder de voorwaarde dat $\underline{n}$ en $\underline{m}$ de bij het experiment gevonden waarden n en m aannemen.

Wij kunnen nu de N waarnemingen opvatten als m waarnemingen van een stochastische grootheid $\underline{x}$ en m van een stochastische

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

grootheid y , waarbij x en y beide een discrete verdeling bezitten en de waarden 1,2,..., k aannemen. In de twee steekproeven heeft x m_i maal de waarde i aangenomen, terwijl bij y deze waarde m_i maal is opgetreden.

Stellen we nu de kans dat x de waarde i aanneemt p_i' en de kans dat y deze waarde aanneemt p_i'' dan geldt, als H_0 juist is

$$p_i' = \frac{t_i}{N} \qquad p_i'' = \frac{t_i}{N} , \quad (i = 1,2,\ldots\ldots,k)$$

dus:

$$p_i' = p_i'' \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots,k)$$

en dit kunnen we toetsen door de toets van WILCOXON (zie memorandum S 47 (M 7)) toe te passen op de twee steekproeven van x en y . Omgekeerd geldt ook dat, als $p_i' = p_i''$ voor iedere i , de hypothese H_0 vervuld is.

Indien de kansen p_1 , p_2, ..., p_k een stijgend verloop vertonen, dan zullen wij bij de waarnemingen van x weinig kleine en veel grote vinden, terwijl bij die van y veel kleine en weinig grote zullen optreden, zodat dus de twee steekproeven van x en y systematisch zullen gaan verschillen. Hieruit zien we dat de alternatieve hypothesen waartegen wij H_0 willen toetsen overeenstemmen met de alternatieven van de toets van WILCOXON, zodat dus een verloop in de p's inderdaad door toepassing van de toets van WILCOXON aangetoond zal kunnen worden.

Opmerking.

Men kan gemakkelijk bewijzen dat de bovenbeschreven toets voor de hypothese

$$H_0 \ : \ p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_k$$

identiek is met de door T.J.TERPSTRA gegeven toets tegen verloop voor groepen waarnemingen (zie memorandum S 73 (M 28) en de opgegeven literatuur), waarbij dan iedere reeks R_i een groep van waarnemingen is, die ieder de waarde 0 of 1 bezitten.

Literatuur.

Terpstra, T.J., The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend, when ties are present in one ranking, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., A 55 (1952).

Mathematisch Centrum,
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.
Statistische Afdeling,
S47 (M7).

Maart, 1952.

De toets van Wilcoxon.[1])

Deze methode dient tot het toetsen van de hypothese H_o, inhoudende, dat twee steekproeven $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ afkomstig zijn uit één collectie (ook wel populatie of universum genaamd).

Voor het toetsen van de hypothese H_o wordt gebruik gemaakt van een toetsingsgrootheid $\underline{U}$ [2]), die als volgt uit de waarnemingen berekend wordt. Onderstellen we, dat de waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, dan bepalen we eerst het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef, dat kleiner is dan de kleinste waarneming x_1 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1). Noem dit aantal V_1. Vervolgens wordt het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef bepaald, dat kleiner is dan de op één na kleinste waarneming x_2 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid wordt weer een $\frac{1}{2}$ in plaats van 1 geteld). Dit aantal noemen we V_2. Evenzo worden met betrekking tot $x_3,x_4,\ldots,x_n$ de aantallen $V_3,V_4,\ldots,V_n$ bepaald. De waarde U van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ wordt voor de twee steekproeven dan gegeven door

$$U=V_1+V_2+\ldots+V_n.$$

Wanneer onder de waarnemingen niet te veel gelijken voorkomen, kan bewezen worden, dat de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ onder de hypothese H_o voor grote waarden van n en m (beide $\geq$ 10) bij benadering een normale verdeling bezit. De waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ tezamen genomen vallen uiteen in een aantal groepen van gelijke waarnemingen. Noem het aantal van deze groepen k, dan is k minstens 1 (als alle waarnemingen gelijk zijn) en hoogstens m+n (als alle waarnemingen verschillend zijn).

---

[1]) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

[2]) Stochastische grootheden worden door onderstreping aangeduid.

Zijn $t_1,\dots,t_k$ de aantallen waarnemingen in deze groepen van gelijken, dan worden het gemiddelde μ en de variantie σ^2 van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ gegeven door

$$\mu(\underline{U})=\tfrac{1}{2}nm,$$

en

$$\sigma^2=\mathrm{Var}\,(\underline{U})=\frac{1}{12}\,\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}\left\{(n+m)^3+\right.$$
$$\left.-\,(t_1^{\,3}+t_2^{\,3}+\dots+t_k^{\,3})\right\} \qquad {}^{1)}$$

De grootheid $\mu(\underline{U})$ is dus onafhankelijk van de waarden ~~vast~~ van t.
Indien de hypothese H_0 niet vervuld is, zal de grootheid $\underline{U}$ grote of kleine waarden bezitten, al naar gelang $\underline{y}$ systematisch kleiner of groter is dan $\underline{x}$.
De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_0 verwerpt indien de gevonden waarde U van $\underline{U}$ te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{|U-\mu|}{\sigma}>\xi_\alpha\ , \qquad {}^{2)}$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_α volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\alpha}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\tfrac{1}{2}\alpha\ ,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.
De (tweezijdige) overschrijdingskans k , behorende bij T, is gedefiniëerd als

$$k=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\left|\frac{U-\mu}{\sigma}\right|}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \qquad {}^{2)}$$

en kan ook in een tabel van de normale verdeling worden gevonden.
Bij eenzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.
Een bijzonder geval van het bovenstaande is, dat onder de waarnemingen voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in 't geheel geen gelijken voorkomen.
In dat geval kan de uitdrukking voor de variantie herleid worden tot

$$\sigma^2=\frac{1}{12}\,nm(n+m+1).$$

---

1) Deze formule is een door T.J.Terpstra gegeven vereenvoudiging van de door J.Hemelrijk([5] en [7]) afgeleide formule. De afleiding van deze vereenvoudigde formule zal nog gepubliceerd worden.

2) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van $\underline{U}$.

Indien n en m kleiner zijn dan 10, zijn tabellen beschikbaar voor het berekenen van de overschrijdingskans k voor de uit de steekproef bepaalde waarde U van U (zie [2] en [4]). Dergelijke tabellen bestaan echter niet voor het geval, dat gelijke waarnemingen optreden.

Opmerking. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat de variantie van U door het optreden van gelijke waarnemingen vermindert. Het verschil, dat door deze gelijken optreedt, is echter in het algemeen gering. Men kan daarom in eerste instantie deze correctie op σ^2 verwaarlozen. De overschrijdingskansen, die men dan vindt, zijn iets te groot.

Litteratuur:

1.	F.Wilcoxon,	Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945), p.80-83.
2	H.B.Mann and D.R.Whitney	On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Amer.Math.Stat. 18 (1947),p. 50-60.
3	H.R.van der Vaart	Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples, Proceedings van de Kon. Ned.Ak.v.Wet., 53 (1950),p. 494-520.
4	H.R.van der Vaart	Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, met tabellen voor n en m$\leq$10, Rapport S32 (M4) (1950).
5	H.R.van der Vaart	De toets van Wilcoxon voor het probleem van twee steekproeven. (Cursus "Parametervrije Methoden", 1951-'52).
6	D.van Dantzig	Kadercursus Mathematische Statistiek, Math. Centrum, Amsterdam (1947-'50), hoofdst. 6, § 3.
7	J.Hemelrijk	Note on Wilcoxon's two sample test, when ties are present, Ann.Math.Stat. 23 (1952) no. 2.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.

Statistische Afdeling
S 53 (M 23).

Toetsing van de hypothese $p_1 = p_2$ met behulp van een 2 x 2-tabel [1])

Wij beschouwen twee reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment van de ene reeks één van de twee resultaten A of $\overline{A}$ (non-A) heeft en ieder experiment van de tweede reeks één van de beide resultaten B of $\overline{B}$ (hierbij kan A=B zijn). Daarbij wordt ondersteld, dat bij ieder der experimenten van de ene reeks de kans op A gelijk aan p_1 (en dus de kans op $\overline{A}$ gelijk aan $1-p_1$) is en bij ieder der experimenten van de tweede reeks de kans op B gelijk aan p_2 (en dus de kans op $\overline{B}$ gelijk aan $1-p_2$). De te toetsen hypothese luidt nu:

$$H_0 : p_1 = p_2.$$

Indien de eerste reeks uit n en de tweede reeks uit m waarnemingen bestaat, waaronder a (resp. b) maal A (resp. B) voorkomt, kunnen deze gegevens in de volgende 2 x 2-tabel worden samengevat:

	A resp. B	$\overline{A}$ resp. $\overline{B}$	totaal
eerste reeks	a	c	n
tweede reeks	b	d	m
totaal	r	s	N

Als toetsingsgrootheid wordt a, het aantal malen A in de eerste reeks waarnemingen, gebruikt. Indien H_0, juist is bezit deze grootheid onder de voorwaarde, dat r de bij het experiment gevonden waarde aanneemt, de volgende waarschijnlijkheidsverdeling: de kans, dat een bepaalde waarde a aangenomen wordt, is gelijk aan:

$$\frac{\binom{n}{a}\binom{m}{b}}{\binom{N}{r}}$$

Als kritieke zone worden de waarden van a met de kleinste waarschijnlijkheden bijeengezocht, tot de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert (bij éénzijdige toetsing bestaat de kritieke zone uitsluitend uit grote of uitsluitend uit kleine waarden van a).
De overschrijdingskans, behorende bij de gevonden waarde van a, is gedefinieerd als de som van alle waarschijnlijkheden van bovenstaande verdeling, die hoogstens gelijk aan de waarschijn-

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

lijkheid van de gevonden waarde zijn (bij éénzijdige toetsing echter gelijk aan de som van de waarschijnlijkheden van alle waarden die groter of gelijk aan de gevondene, of van alle waarden, die kleiner of gelijk aan de gevondene zijn). Deze exacte toetsingsmethode voor H_0 is afkomstig van R.A.FISHER.

Indien n en m zo groot zijn, dat deze exacte berekening te omslachtig wordt, maakt men gebruik van de volgende benadering:

Gemiddelde en spreiding van de grootheid a zijn (indien H_0 juist is):

$$\frac{nr}{N} \text{ resp. } \sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}} .$$

Men gebruikt dan in plaats van de exacte waarschijnlijkheidsverdeling van a de normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en dezelfde spreiding en in plaats van de gevonden waarde van a neemt men het getal dat $\frac{1}{2}$ dichter bij het gemiddelde ligt dan deze gevonden waarde (dit laatste is de z.g. "continuïteitscorrectie", die bij toenemende n en m weldra verwaarloosd kan worden). Bij positieve $a - \frac{nr}{N}$ berekent men dus:

$$a^* = \frac{a - \frac{nr}{N} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}} = \frac{aN - nr - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} = \frac{ad - bc - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}$$

en bij negatieve $a - \frac{nr}{N}$ berekent men:

$$a^* = \frac{a - \frac{nr}{N} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{nmrs}{N^2(N-1)}}} = \frac{ad - bc + \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}} .$$

De overschrijdingskans wordt nu opgezocht in een tabel der normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1. De rechts-éénzijdige (resp. links-éénzijdige) overschrijdingskans is het oppervlak rechts (resp. links) gelegen van a^*. De tweezijdige overschrijdingskans is twee maal het oppervlak der normale verdeling dat rechts van $\frac{|ad - bc| - \frac{1}{2}N}{\sqrt{\frac{nmrs}{N-1}}}$ ligt.

Literatuur.

R.A.Fisher, Statistical Methods for Research Workers, London 1948, p. 96. Opmerking: Fisher gebruikt hier de éénzijdige overschrijdingskans.

J.Hemelrijk, Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, Vacantiecursus Mathematisch Centrum, Amsterdam 1950, § 4.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Statistische Afdeling
Rapport S 102 (M 17b)

Het combineren van onafhankelijke toetsen (aanvulling) [1].

In memorandum S 73 (M 17a) wordt een methode voor combinatie van onafhankelijke toetsen behandeld, waarbij het nodig is de overschrijdingskans van iedere toets te bepalen. In vele gevallen kan men de combinatie ook direct op de afzonderlijke toetsingsgrootheden baseren en dit verdient zelfs de voorkeur.

Wij beschouwen hier het geval, dat een bepaalde toets moet worden toegepast op een heterogeen materiaal. Dit materiaal wordt dan eerst verdeeld in h homogeen geachte groepen. Het aantal waarnemingen van de i^e groep zij n_i en de toetsingsgrootheid $\underline{t}_i$ [2]. Laat verder gegeven zijn, dat de verdeling van $\underline{t}_i$ onder de getoetste hypothese (voor de i^e groep aangeduid door H_i) voor grote n_i asymptotisch normaal [3] is, met bekende verwachting μ_i en bekende spreiding σ_i. Aan deze voorwaarden is o.a. voldaan, indien wij te doen hebben met toetsen van WILCOXON, rangcorrelatietoetsen van KENDALL of SPEARMAN, tekentoetsen enz.

Wij toetsen met al de hier te behandelen gecombineerde methoden de hypothese H, dat voor iedere groep de desbetreffende hypothese H_i geldt, terwijl de groepen onderling onafhankelijk zijn. De toetsen verschillen echter ten aanzien van de alternatieve (van H afwijkende) hypothesen waarvoor zij gevoelig [4] zijn.

De meest gebruikelijke toetsingsgrootheden van gecombineerde toetsen zijn van de gedaante:

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} c_i(\underline{t}_i - \mu_i)$$

waarin de letters c_i ($i = 1,2,\ldots,h$) constanten voorstellen, die voor ieder van de combinatiemethoden op een bepaalde wijze

---

1) Dit memorandum dient slechts ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid. Het is bedoeld als een aanvulling op Rapport S 73 (M 17a).

2) De onderstreping geeft aan dat een toetsingsgrootheid stochastisch is, d.w.z. een waarschijnlijkheidsverdeling bezit

3) Dit houdt in dat $\underline{t}_i$ een waarschijnlijkheidsverdeling heeft, die als n_i toeneemt, steeds minder van een normale verdeling (verdeling van Gauss) afwijkt.

4) Een toets van hypothese H is gevoelig ten opzichte van een alternatieve hypothese H', als de kans dat H verworpen wordt, indien H' juist is, groot is.

gekozen worden. Onder de hypothese H zal $\underline{T}$ asymptotisch (voor grote h en/of grote n_i) normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en spreiding $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} c_i^2 \sigma_i^2}$. De dubbele overschrijdingskans van een gevonden waarde T van $\underline{T}$ is dus bij benadering gelijk aan:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left|\frac{T}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

en kan bepaald worden met behulp van een tabel van de normale verdeling. Indien de dubbele overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel α, zal men H verwerpen.

Wij geven hier 3 combinatiemethoden van dit type:

Methode 1: $c_1 = c_2 = \dots\dots = c_h = 1$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \underline{t}_i - \sum_{i=1}^{h} \mu_i$; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} \sigma_i^2}$

Methode 2: $c_1 = \frac{1}{\sigma_1}$, $c_2 = \frac{1}{\sigma_2}$, ..., $c_h = \frac{1}{\sigma_h}$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\underline{t}_i - \mu_i}{\sigma_i}$; $\sigma = \sqrt{h}$

Methode 3: $c_1 = \frac{1}{n_1}$, $c_2 = \frac{1}{n_2}$, ..., $c_h = \frac{1}{n_h}$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\underline{t}_i - \mu_i}{n_i}$; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\sigma_i}{n_i}\right)^2}$

Deze methoden zijn alleen gevoelig ten aanzien van alternatieve hypothesen volgens welke de grootheden $\underline{t}_i$ verdelingen hebben die, voor zover zij afwijken van de verdelingen onder de corresponderende hypothesen H_i, dit over het algemeen in dezelfde richting doen. Men zal dan methode 1 bij voorkeur toepassen als men aan de $\underline{t}_i$ met een kleine spreiding (in de regel zullen dat de $\underline{t}_i$ van kleine groepen zijn) een geringer gewicht wil toekennen dan aan de $\underline{t}_i$ met een grote spreiding. De methoden 2 en 3 zijn te gebruiken als men aan de verschillende groepen waarnemingen, ongeacht hun grootte, een ongeveer gelijke invloed op het resultaat wil toekennen. De keuze tussen deze twee methoden hangt verder van hier niet te behandelen theoretische overwegingen af (zie literatuur [1]).

Indien men verwacht dat mogelijke verschuivingen van de verdelingen der $\underline{t}_i$ in beide richtingen kunnen liggen, verdient het de voorkeur om gebruik te maken van de volgende toetsingsgrootheid:

$$\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\underline{t}_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \qquad \text{(methode 4)}$$

Deze grootheid is onder de hypothese H asymptotisch verdeeld volgens een χ^2-verdeling met h vrijheidsgraden. De overschrijdingskans van een gevonden waarde van deze grootheid kan dus met behulp van een tabel van de χ^2-verdeling bepaald worden.

De toets, behandeld in memorandum S 73 (M 17a) par. 1, waarbij men het product van linkszijdige en product van alle rechtszijdige overschrijdingskansen bepaalt en het kleinste van deze twee producten gebruikt, heeft betrekking op dezelfde gevallen als de hier behandelde methoden 2 of 3, terwijl de methode, behandeld in S 73 (M 17a) par. 2, berustend op het product van de tweezijdige overschrijdingskansen, meer overeenkomt met methode 4. Men mag echter verwachten, dat, zo aan de asymptotische normaliteit der t_i voldaan is, de in dit memorandum behandelde methodenscherper zijn dan de toetsen behandeld in S 73 (M 17a).

Literatuur:

1 C.van Eeden, Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen, Rapport S 115 (M 45) van het Mathematisch Centrum (1953).

2 -----------, Trendtoets met behulp van rangcorrelatie, Memorandum S 73 (M 13a). (Voorbeeld van toepassing van methode 1.)

3 Dr J.Hemelrijk, Het combineren van onafhankelijke toetsen, Memorandum S 73 (M 17a).