MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 149 A

Schets ener oplossing van het dijkverhogingsdecisieprobleem

door

Prof.Dr D. van Dantzig
en
J. Kriens

1954

1. Probleemstelling.

Ingevolge de door de voorzitter der Deltacommissie in de vergadering van 29 Maart j.l. aan het Mathematisch Centrum verstrekte opdracht, werd door deze instelling een nader onderzoek verricht naar het econometrisch decisieprobleem der dijkverhogingen langs de Westerschelde en de Nieuwe Waterweg [1].

De resultaten van een meer globaal onderzoek in deze richting, gedaan op verzoek van Prof. Ir J.Th.THIJSSE, werden vastgelegd in een voorlopig interimrapport [2].

Gevraagd werd met behulp van wiskundig-economische methoden een schatting te maken van die dijkverhoging welke economisch het meest verantwoord is te achten. Slechts een globale schatting werd verlangd, in die zin, dat geen rekening gehouden behoefde te worden met locale verschillen in de toestand van de huidige dijken, golfoploop, plaatslijke diepte- en stroomverschillen, de waarde van de beschermde goederen, e.d. In dit rapport wordt daarom niet ingegaan op de afzonderlijke berekeningen, doch het beperkt zich tot het geven van een <u>methode</u>, die als basis van de bepaling der gewenste verhoging kan worden gebruikt.

Ook in ander opzicht heeft de hier gegeven oplossing een schetsmatig karakter. Verschillende grootheden, die in de tijd veranderlijk zijn, moesten door constante gemiddelde waarden vervangen worden. Zuiver mathematisch bezien ware het in aanmerking nemen dezer fluctuaties tot op zekere hoogte nog wel mogelijk, maar in werkelijkheid zou dit niet verantwoord zijn, omdat tengevolge van de onzekere gegevens de verhoogde nauwkeurigheid van de schatting volkomen illusoir zou zijn.

De hier gevolgde oplossingsmethode is gebaseerd op de moderne, vooral in de Verenigde Staten ontwikkelde decisietheorie. Deze is ontstaan, deels naar aanleiding van de door J.von NEUMANN opgestelde vergelijking tussen een economische decisie en een handeling in een strategisch spel [3], deels op grond van het boek van A.WALD over statistische decisiefuncties [4]. Hoewel men hier feitelijk niet te maken heeft met een <u>statistisch</u> decisieprobleem in enge zin, kunnen toch verschillende methoden uit de genoemde theorieën in het onderhavige probleem worden toegepast. Ook zullen verschillende ideeën gebruikt worden, ont-

---

1) De conclusies, waartoe dit rapport leidt, zijn reeds in de vorm van een nota bekend gemaakt aan de leden van de Deltacommissie [1]. (Cijfers tussen vierkante haken verwijzen naar de literatuurlijst aan het einde van dit rapport.)

leend aan de schadeverzekeringsleer.

Ontdaan van alle bijzonderheden kan men het probleem als volgt formuleren.

De huidige hoogte der dijken is onbevredigend, daar de kans op een nieuwe overstroming te groot geacht wordt. De vraag rijst nu, op welke hoogte men de dijken moet brengen, opdat het land in voldoende mate is beveiligd. In eerste instantie zal men geneigd zijn deze zo te willen kiezen, dat een nieuwe overstroming niet meer kan plaatsvinden, doch men mag thans als algemeen bekend aannemen, dat dit op statistische gronden onmogelijk geacht moet worden. Hierdoor krijgt het probleem een geheel andere vorm, waarbij men tegen elkaar af moet wegen: de kosten verbonden aan de verhoging en de voordelen, die hier tegenover staan. Laat men ideële overwegingen buiten beschouwing (men vergelijke hiervoor par. 6), dan bestaat de winst uit een verminderde kans op nieuwe overstromingen en dientengevolge een afneming van de toekomstige schadeverwachting. Men moet dus de grootte van de benodigde investeringen stellen tegenover de overblijvende schadeverwachting. Een aanzienlijke verhoging brengt grote kosten mee, maar zal de overblijvende schadeverwachting klein maken, terwijl een geringe verhoging relatief goedkoop is, maar de schadeverwachting slechts weinig zal reduceren.

Problemen als deze, waarbij twee in tegengestelde richting werkende economische factoren de beslissing bepalen, worden "economische decisieproblemen" genoemd. Men moet hierin de gezochte grootheid zodanig kiezen, dat de beslissing in nader te preciseren zin "optimaal" is.

2. Vereenvoudigde onderstellingen.

Zij de toekomstige gemiddelde hoogte van de dijken H en de gemiddelde huidige hoogte H_o, dan moet de verhoging bedragen

(1) $$X = H - H_o \quad .$$

De kosten J hiervan vormen een functie van X, die bij benadering onafhankelijk is van H_o 2).

De eenvoudigste onderstelling omtrent mogelijke verliezen, met betrekking tot een enkele polder is die, waarbij geen verliezen optreden zolang de hoogste waterstand $h \leq H$ is en volledig verlies van alle in de polder aanwezige goederen (opstallen,

---

2) Een eventuele afhankelijkheid kan in rekening worden gebracht door de verderop in deze paragraaf voorkomende grootheid K iets groter te nemen dan ze in werkelijkheid is.

vee, enz.) zodra $h > H$.

Verder wordt voorlopig aangenomen, dat de waarde V van de in de polder aanwezige goederen en de waarschijnlijkheidsverdeling van de hoogwaterstanden constant is in de tijd. De overschrijdingskans van de hoogte h, d.w.z. de kans op overschrijding van h in de loop van één jaar, is dan (zie [5])

$$(2) \qquad p(h) = p_0 \, e^{-\alpha(h - H_0)} \; ,$$

waarin p_0 de overschrijdingskans van de huidige dijkhoogte is en

$$(3) \qquad \alpha = \frac{\ln 10}{a'}$$

met a' = de kansdecimeringsverhoging. In plaats van (2) kan men ook schrijven

$$p(h) = p_0 \cdot 10^{-\frac{(h - H_0)}{a'}} \; .$$

Bovendien wordt verondersteld, dat, indien een doorbraak plaatsvindt, de dijk het volgende jaar weer op het peil H gebracht is en dat per jaar hoogstens één doorbraak plaatsvindt.

De eenvoudigste wijze om het gestelde probleem op te lossen is het te behandelen als een verzekeringsprobleem. Men gaat er dan van uit, dat een bedrag L wordt gereserveerd, waarmee alle toekomstige verliezen kunnen worden gedekt.

Het verwachte verlies is voor ieder jaar gelijk aan de kans op schade, vermenigvuldigd met de grootte van de schade, dat is dus

$$p(H) \, . \, V \; .$$

De contante waarde van een verlies over t jaar bedraagt bij een rentevoet δ

$$p(H) \, V . (1 + 0{,}01\delta)^{-t} \; .$$

Voor de contante waarde van alle toekomstige verliezen tezamen wordt dan gevonden

$$p(H) \, . \, V \sum_{t=0}^{\infty} (1 + 0{,}01\delta)^{-t} \; ,$$

zodat het te reserveren bedrag moet zijn

$$(4) \qquad L(X) = p(H) . V . \sum_{t=0}^{\infty} (1 + 0{,}01\delta)^{-t} \approx \frac{100 \, p(H) . V}{\delta} = p_0 \, e^{-\alpha X} . V . \frac{100}{\delta} \; .$$

Als de kosten van dijkverhoging met X meter $I(X)$ bedragen, zijn de uitgevan dan in totaal $I(X) + L(X)$. De in par. 1 gestelde eis van "optimaliteit" wordt nu hierin gevonden, dat men X zodanig kiest, dat deze som minimaal is. X moet dus voldoen aan de vergelijking

(5) $$\frac{d\Upsilon}{dX} + \frac{dL}{dX} = 0 \quad .$$

Zolang slechts een betrekkelijk klein interval van positieve X-waarden wordt beschouwd kan men voor Υ een lineaire functie in X kiezen:

(6) $$\Upsilon = \Upsilon_0 + KX \quad ,$$

waarin Υ_0 de initiële kosten zijn, zodra men tot verhoging besluit en K de kosten per meter dijkverhoging.

Substitutie van (4) en (6) in (5) levert nu

(7) $$K - \frac{100\, p_0 V \alpha\, e^{-\alpha X}}{\delta} = 0$$

of, anders geschreven

(8) $$X = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{100\, p_0 V \alpha}{\delta K} \quad ,$$ 3)

of gebruik makende van $\ln 10 = 2{,}30$ en (3)

(9) $$\frac{X}{a'} = {}^{10}\log \frac{230\, p_0 V}{\delta K a'}$$

Voor het geval een groter variatiegebied van X in beschouwing moet worden genomen vormt (6) een te grove benadering voor Υ. Is b.v. voor een bepaalde verhoging een verbreding van de basis van de dijk vereist, dan kan men wellicht beter gebruik maken van de formule

(10) $$\Upsilon = \Upsilon_0 + KX^k \quad ,$$

waarin $k > 1$. Vergelijking (7) gaat dan over in de transcendente vergelijking

(11) $$kKX^{k-1} - \frac{100\, p_0 V \alpha\, e^{-\alpha X}}{\delta} = 0$$

---

3) Behalve de kanshalverings- en kansdecimeringsverhoging kan men nog invoeren de "nepereringsverhoging", dat is de verhoging, waardoor de overschrijdingskans e-maal kleiner wordt, dat is dus volgens (2) $\frac{1}{\alpha}$ meter. $\frac{K}{\alpha}$ zijn dan de kosten, nodig om de overschrijdingskans te nepereren en $0{,}01 \frac{\delta K}{\alpha}$ is de jaarlijkse rente hiervan. De optimale dijkverhoging, uitgedrukt in de nepereringsverhoging als eenheid van lengte, is dan gelijk aan de natuurlijke logarithme van het quotient van de jaarlijkse verliesverwachting bij de huidige dijkhoogte en de jaarlijkse rente van de nepereringskosten.

of, met $y = \frac{\alpha X}{k-1}$

$$y\, e^{y} = Constant = \left(\frac{100\, p_0\, V \alpha^{k}}{k(k-1)^{k-1} \delta K} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Benadert men $\mathcal{Y}$ met

(12) $$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 + K X + \tfrac{1}{2} \kappa K X^2 \quad ,$$

waarin κ een klein getal is, dan vindt men in plaats van (7)

(13) $$K(1+\kappa X) - \frac{100 p_0 V \alpha\, e^{-\alpha X}}{\delta} = 0 \quad ,$$

dus eveneens een transcendente vergelijking. Is κX klein, dan kan $1 + \kappa X + \frac{1}{2}\kappa^2 X^2$ worden vervangen door $e^{\kappa X}$, zodat (12) overgaat in

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 + \frac{K}{\kappa}\left(e^{\kappa X} - 1\right) ,$$

terwijl hieruit in plaats van (13)

$$K e^{\kappa X} - \frac{100 p_0 V \alpha\, e^{-\alpha X}}{\delta} = 0$$

verkregen wordt, met als oplossing

(14) $$X = \frac{1}{\alpha + \kappa} \ln \frac{100 p_0 V \alpha}{\delta K}$$

Dit verschilt van (8) alleen doordat $\frac{1}{\alpha}$ is vervangen door $\frac{1}{\alpha + \kappa}$, wat in vele gevallen nauwelijks van betekenis is aangezien κ klein is t.o.v. α.

In het vervolg zal overigens steeds uitgegaan worden van de lineaire kostenformule (6).

3. Toeneming van de welvaart en daling van de bodem.

In tweeërlei opzicht zijn de onderstellingen, gemaakt in par. 2, niet te handhaven.

In de eerste plaats is de waarde V van de goederen in een polder niet constant. Zowel het aantal, als de waarde van de opstallen (boerderijen, industrieën, woningen) neemt voordurend toe en wel volgens gegevens, verstrekt door Prof. Dr J.TINBERGEN met 1,5 à 2% per jaar. Dit percentage geven wij aan met γ. Hoewel er weinig over de ontwikkeling van γ bekend is, doet men vermoedelijk het beste deze waarde als een constante te beschouwen. Tegenover deze factor γ staat de interestfactor δ, over welker ontwikkeling eveneens weinig bekend is, zij het, dat toenemende economische stabiliteit aanleiding is voor een langzaam dalen van de rentevoet. Ook δ wordt in dit rapport constant verondersteld.

Voor de berekeningen is het gemakkelijk om de gereduceerde rentefactor $\delta' = \delta - \gamma$ [4] in te voeren en de tijd in eeuwen uit te drukken (t jaar = τ eeuwen, dus $t = 100\,\tau$). De waarde van een bedrag A nu, is over t jaren gegroeid tot $A(1 + 0{,}01\gamma)^t \approx$ $\approx A\,e^{0{,}01\gamma t} = A\,e^{\gamma\tau}$. Bij een continue rentevoet δ is de constante waarde hiervan

$$A\,e^{\gamma\tau}\,.\,e^{-\delta\tau} = A\,e^{-\delta'\tau} .$$

In de tweede plaats is de overschrijdingskans van de dijken niet constant in de tijd, doordat tengevolge van verschillende oorzaken de zeespiegel rijst ten opzichte van de dijkkruin. Dit betekent, dat een dijkkruin, die oorspronkelijk de hoogte H bezit, bij een relatieve daling van η meters per eeuw, na τ eeuwen gezakt is tot $(H - \eta\tau)$ meters. Formule (2) gaat dus over in

$$(15) \qquad p(H,\tau) = p_0\,e^{-\alpha((H-\eta\tau)-H_0)} = p_0\,e^{-\alpha(H-H_0)+\beta\tau}$$

waarin

$$(16) \qquad \beta = \alpha\eta$$

Uitdrukking (15) voor $p(H,\tau)$ kan niet voor iedere τ juist zijn; immers $p(H,\tau)$ is een waarschijnlijkheid en dus $\leqq 1$, terwijl het rechter lid van (15) bij voldoend grote τ willekeurig hoge waarden aanneemt. Men kan dit ook inzien door te overwegen dat na verloop van enige eeuwen de dijken volledig in zee weggezakt zijn, wanneer men geen verdere verhogingen aanbrengt; de overschrijdingskans is dan 1 en kan niet langer meer toenemen, zodat (15) haar geldigheid heeft verloren. Zover zal het echter niet komen, want het wegzakken van de dijken wordt uiteraard opgevangen door verhogingen, waarvan wij onderstellen, dat zij periodiek worden aangebracht. Verhoogt men telkens na T eeuwen en brengt men de dijken dan op het oude peil, dan is regelmatig een verhoging nodig van ηT meter. Dit impliceert, dat de nu aan te brengen verhoging minstens gelijk moet zijn aan ηT, daar anders de hoogte der dijk beneden de huidige zou dalen (vgl. de toevoeging bij de oplossing (25)).

---

4) Steeds wordt aangenomen, dat de rentefactor groter is dan het jaarlijkse percentage, waarmee de welvaart toeneemt; dus overal geldt: $\delta - \gamma = \delta' > 0$.

De kosten van deze periodieke verhogingen nemen langzaam toe in de tijd, doordat de verhogingen moeten worden aangebracht op een toenemende hoogte boven het polderpeil. Zijn de vereiste bedragen resp. R_1 na T eeuwen, R_2 na $2T$ eeuwen, enz., dan is het bedrag, nu nodig om de direct aan te brengen verhoging en de later uit te voeren voorzieningen te kunnen financieren, gelijk aan de som van $\mathcal{I}$ en de contante waarden van R_1, R_2, enz. De totale investering $\mathcal{I}'$ in de dijken bedraagt dus

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}_0 + KX + R_1 e^{-\delta T} + R_2 e^{-2\delta T} + \ldots\ldots =$$

(17)

$$= \mathcal{I}_0 + KX + \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-n\delta T}$$

of, indien

$$\mathcal{J} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-n\delta T}:$$

(18) $$\mathcal{I}' = \mathcal{I}_0 + KX + \mathcal{J}$$

Bij benadering is $\mathcal{J}$ onafhankelijk van X 5) en oefent derhalve geen invloed uit op de te nemen beslissing

Rekening houdende met de twee bovenstaande correcties wordt de in par. 2 gegeven oplossing als volgt gewijzigd.

De waarde van de in de polder aanwezige goederen is na τ eeuwen toegenomen van V tot $Ve^{\gamma\tau}$. Volgens (15) is de kans op een overstroming in een jaar over τ eeuwen $p_0 e^{-\alpha X + \beta\tau}$, zodat de schadeverwachting voor dat jaar bedraagt:

(19) $$p_0 V e^{-\alpha X} . e^{(\beta+\gamma)\tau}$$

waarvan de contante waarde is

(20) $$p_0 V e^{-\alpha X} . e^{-(\delta-\beta-\gamma)\tau} .$$

Gesommeerd over alle jaren tot de eerste additionele verhoging is dit de integraal van 0 tot T van (20) over $dt = 100\, d\tau$:

(21) $$L_0 = p_0 V e^{-\alpha X} \int_0^T e^{-(\delta-\beta-\gamma)\tau}\, 100\, d\tau = 100\, p_0 V e^{-\alpha X} \frac{1 - e^{-(\delta'-\beta)T}}{\delta' - \beta} .$$

Na T eeuwen worden de dijken weer in de huidige toestand

---

5) De kleine afhankelijkheid via de R_i kan eventueel gecompenseerd worden door K iets groter te kiezen.

gebracht: $p(H,o) = p(H,T)$; de waarde van de goederen is dan gestegen tot $V e^{\gamma T}$; bij het bepalen van de contante waarde moet een extra factor $e^{-\delta T}$ in rekening worden gebracht. De contante waarde van de schadeverwachting gedurende de periode tussen de eerste en de tweede verhoging is dus

$$L_o\, e^{(\gamma-\delta)T} = L_o\, e^{-\delta' T} .$$

Evenzo vindt men voor de derde periode $L_o\, e^{-2\delta' T}$, enz. De contante waarde van alle toekomstige verliezen tengevolge van overstromingen bedraagt nu (vergelijk ook voetnoot 4)):

$$(22) \qquad L = L_o \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta' T} = \frac{100\, p_o V e^{-\alpha X}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta'-\beta)T}}{1 - e^{-\delta' T}}$$

Uit substitutie van (18) en (22) in (5) blijkt nu, dat $Y + L$ minimaal is, wanneer X voldoet aan de vergelijking

$$(23) \qquad K - \frac{100\, p_o V}{\delta' - \beta} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta'-\beta)T}}{1 - e^{-\delta' T}}\, \alpha\, e^{-\alpha X} = 0$$

of

$$e^{\alpha X} = C$$

waarin

$$(24) \qquad C = \frac{100\, p_o V \alpha}{(\delta'-\beta) K} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta'-\beta)T}}{1 - e^{-\delta' T}}$$

De oplossing is dus

$$(25) \qquad \boxed{X = \frac{1}{\alpha} \ln C = a'\, {}^{10}\log C}$$

mits deze $X > \eta T$ is.

Evenals in par. 2 voor de hogere kosten bij hoge waarden van X kan men ook hier de hogere kosten van de dijkbouw op grotere hoogte boven het polderniveau in rekening brengen door α te vervangen door $\alpha + \kappa$ (men vergelijke formule (14)), waarin κ een klein getal is.

Volgens een suggestie van Ir F.J.de VOS [6] kan het in (25) verkregen resultaat worden geschreven in de vorm

$$X = X_o + X_1$$

waarin

$$(26) \qquad X_o = a' \cdot {}^{10}\log C_o \qquad \text{met} \qquad C_o = \frac{100\, p_o V \alpha}{\delta' K}$$

en

(27) $$X_1 = a' \cdot {}^{10}\log f_1 \quad \text{met} \quad f_1 = \frac{1 - e^{-\delta' T} e^{\beta T}}{1 - e^{-\delta' T}} \cdot \frac{\delta'}{\delta' - \beta}$$

X_0 is de verhoging, die zou worden aangebracht, wanneer er geen relatieve kruindaling bestond ($\eta = 0 \longrightarrow \beta = 0$). X_1 draagt het karakter van een correctieterm voor de kruindaling. Het is een functie van T, die tot nul nadert, wanneer T tot nul nadert, d.w.z. wanneer iedere daling op staande voet te niet wordt gedaan. In zekere zin kan ook een bovengrens voor X_1 worden aangegeven; X_1 blijkt nl. steeds kleiner te zijn dan de limietwaarde voor $T \to \infty$, waarbij in het geval $\delta' > \beta$ voor X_1 gevonden wordt $a' \cdot {}^{10}\log \frac{\delta'}{\delta' - \beta}$. Uiteraard heeft dit slechts een formele betekenis, daar men de dijken moeilijk onder het huidige peil H_0 kan laten zakken.

Is $\beta > \delta'$, dan nadert f_1 en ook X_1 tot ∞ voor $T \to \infty$; immers, men kan voor (27) schrijven

$$X_1 = a' \cdot {}^{10}\log \left(\frac{e^{(\beta - \delta')T} - 1}{1 - e^{-\delta' T}} \cdot \frac{\delta'}{\beta - \delta'} \right) =$$

$$= a' \cdot {}^{10}\log e \, . \, \ln \left(\frac{e^{(\beta - \delta')T} - 1}{1 - e^{-\delta' T}} \cdot \frac{\delta'}{\beta - \delta'} \right)$$

wat voor grote T benaderd kan worden door

$$X_1 \approx 0{,}43 \, a' (\beta - \delta') T + a' \cdot {}^{10}\log \frac{\delta'}{\beta - \delta'} = \left(\frac{\beta - \delta'}{\alpha} \right) T + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\delta'}{\beta - \delta'}$$

daar $a' \cdot {}^{10}\log e = \frac{1}{\alpha}$ is.

Voor $\beta = \delta'$ kan (27) worden vereenvoudigd tot

$$X_1 = a' \cdot {}^{10}\log \frac{\delta' T}{1 - e^{-\delta' T}} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\delta' T}{1 - e^{-\delta' T}} ,$$

een vorm, die voor $T \to \infty$ logarithmisch naar oneindig gaat.

4. De onzekerheden in de constanten.

De waarden van de in het decisieprobleem optredende constanten zijn alle zeer onzeker. Men beschikt slechts over ruwe schattingen, of wel over intervallen, waarbinnen de constanten vermoedelijk liggen. Behalve voor de kanshalveringsverhoging zijn dit geen betrouwbaarheidsintervallen in statistische zin, doch intervallen, aangegeven door terzake deskundigen. Aangezien het onmogelijk is de schattingen binnen afzienbare tijd te verbeteren, kan men het beste de constanten zodanig kiezen, dat men zich zoveel mogelijk aan de veilige kant bevindt.

Voor de decimeringsverhoging a' is ongeveer 75 cm gevonden met als rechter betrouwbaarheidsgrens (met betrouwbaarheid 0,95) de waarde 87 cm (zie [7]). Daar slechts betrouwbare gegevens beschikbaar zijn vanaf 1888 is er echter weinig zekerheid, dat de rechtlijnige extrapolatie van de hoogwateroverschrijdingslijn op lange termijn kan worden gehandhaafd. Men kan daarom een veiligheidsfactor f_2 invoeren, die hiervan rekenschap geeft. Op grond van de statistische practijk zou deze hier ongeveer 1,3 bedragen, terwijl in de technische practijk een factor 3 gebruikelijk is. Aangezien beide waarden betrekkelijk willekeurig zijn, zou men, daar het hier een technisch project betreft, wellicht het best de factor 3 kunnen kiezen. Van het aanbrengen van een correctiefactor in verband met de vóór de logarithme staande constante a' kan dan worden afgezien. Formule (25), die met (26) en (27) geschreven kan worden in de vorm

$$X = a' . \, {}^{10}\log C_0 f_1$$

gaat dan over in

$$X = a' . \, {}^{10}\log C_0 f_1 f_2 \tag{28}$$

Aangaande de andere factoren bevindt men zich aan de veilige kant, wanneer de meest ongunstige waarden gekozen worden uit de opgegeven intervallen; dat zijn die waarden, die de huidige toestand zo ongunstig mogelijk weergeven en die daardoor leiden tot de grootste waarde van X. Het probleem gaat dan over in een zogenaamd minimax probleem, waarbij men X zodanig kiest, dat de som van kosten en schadeverwachting minimaal wordt onder voorwaarden, die deze som zo groot mogelijk hebben gemaakt.

Uit (24) volgt direct, dat C en dus X groter wordt, wanneer p_0 of V toeneemt, respectievelijk K afneemt; dit in de onderstelling, dat de andere constanten dezelfde waarden behouden. Wat betreft α, δ' en η is het verband niet zo direct te zien, doch na enige berekeningen volgt, dat voor $\delta' > 0$ geldt, dat X toeneemt, indien η toeneemt, respectievelijk δ' of α afneemt (althans voor die waarden van α, die voor overweging in aanmerking komen). Dit alles is in overeenstemming met de verwachting. Zo correspondeert toenemende η met onveiliger gebieden, waarvoor dus grotere verhogingen nodig zijn. Afnemende δ' betekent afnemende δ, of toenemende γ; in het eerste geval brengt het kapitaal een hogere rente op, wat betekent, dat het bouwen van dijken duurder is; in het tweede geval neemt de waarde van de te beschermen goederen in sterkere mate toe, zodat een grotere verhoging verantwoord is. Analoge redeneringen kunnen voor de andere relaties worden opgebouwd.

Ten opzichte van T moet niet worden gemaximaliseerd, aangezien men deze variabele willekeurig kan kiezen.

5. Aard van de onzekerheden in de constanten en keuze van het model.

De in het onderhavige probleem optredende constanten kunnen grofweg verdeeld worden in drie groepen.

In de eerste plaats is er de groep van de "natuurconstanten", nl. η , p_0 en α. Door voortgezet onderzoek op geologisch, meteorologisch en oceanografisch gebied, tezamen met de wiskundige en statistische bewerking van de resultaten zal het gedrag van deze constanten in de toekomst zeker aanzienlijk beter bekend worden, dan op de huidige dag het geval is.

De tweede groep van constanten, welke de economische situatie van het ogenblik beschrijft, levert weinig moeilijkheden op. J_0 en K zullen goed bekend zijn en alleen bij V, de waarde van de in de polder aanwezige goederen, zullen onzekerheden optreden. De materiële verliezen, tengevolge van dijkdoorbraak blijven namelijk niet beperkt tot de directe verliezen, doch moeten worden verhoogd met de verliezen tengevolge van "consequencial loss" (migratiekosten, verliezen, die elders geleden worden door productiederving, enz.). Als een eerste ruwe schatting zou men V hiervoor met een bepaald getal, b.v. 1,2 kunnen vermenigvuldigen. Nader wetenschappelijk onderzoek kan ook deze factor nauwkeuriger bekend maken.

Ten opzichte van de laatste groep van constanten, waartoe δ en γ behoren, is de situatie moeilijker. Wil men nagaan, of goederen, die nu de waarde V bezitten over τ eeuwen inderdaad de waarde $Ve^{\gamma\tau}$ verkregen hebben, dan zou men moeten beschikken over een stabiele vergelijkingseenheid, die echter, noch door een munteenheid, noch door een bepaald goederenpakket verkregen kan worden. Ook ten aanzien van δ rijzen moeilijkheden, wanneer men de formele berekening wil vervangen door een reële economische beschrijving.

In par. 2 is het investeringsprobleem opgevat als een gewoon verzekeringsvraagstuk. Bij dit soort vraagstukken wordt als uitgangspunt genomen, dat de te verzekeren post er één is onder een groot aantal gelijke en dat de ontvangen premies belegd worden tegen een rentevoet δ . Aan de eerste voorwaarde is in dit investeringsprobleem zeker niet voldaan, terwijl het zeer de vraag is, of de vereiste premies inderdaad gereserveerd zouden worden. Bovendien zouden grote problemen ontstaan met betrekking tot de belegging, zowel als het op korte termijn liquide maken van de beleggingen bij een eventuele overstroming.

Voor een alternatief model zou men er vanuit kunnen gaan, dat de gelden nodig voor dijkbouw geleend worden. Komende generaties zouden dan moeten betalen voor 1) rente en aflossing van de schuld en 2) overblijvende schaden. Men zou dan het aflossingsschema zodanig kunnen kiezen, dat de lasten voor alle generaties gelijk waren en vervolgens deze gelijk verdeelde lasten door de keuze van X kunnen minimaliseren. Het voordeel van dit model boven het vorige is, dat de rentevoet δ dan bepaald zou worden door de huidige markt voor publieke leningen. Eventueel kan het aflossen van de lening nog vervangen worden door nieuwe investeringen in de dijken.

Afgezien van te verwaarlozen verschillen vindt men met dit tweede model dezelfde oplossing als met het eerste. Het is dus niet noodzakelijk een keuze te doen. Tegen beide modellen kan men echter het bezwaar aanvoeren, dat de te nemen beslissing in sterke mate afhankelijk is van de huidige rentevoet, terwijl moeilijk in te zien is, waarom de bescherming van de toekomstige welvaart afhankelijk moet zijn van één toevallige waarde van een in de loop der tijden in sterke mate fluctuerende grootheid.

6. Mensenlevens, ideële waarden en het vervangen van niet beheersbare door beheersbare factoren.

Tot dusverre is in het probleem slechts met materiële verliezen rekening gehouden. Daarnaast kunnen ook grote verliezen aan mensenlevens en ideële goederen plaatsvinden, die echter niet direct in geldswaarden uitgedrukt kunnen worden. Wel kan men onderzoeken hoeveel de staat per hoofd van de bevolking uitgeeft om de bevolking te beschermen tegen andere gevaren, als verkeersongelukken, ongelukken in fabrieken en dood door verdrinking. Het is wel zeker, dat deze bedragen in hoge mate variëren en dat in enkele gevallen zeer veel wordt uitgegeven, terwijl andere relatief weinig kostende voorzieningen niet worden getroffen. Daarom kan bij een bewuste beslissing als in dit decisieprobleem beter uitgegaan worden van een gewenst geacht bedrag dan van het werkelijke bestaande gemiddelde.

Zou men de verliezen aan mensenlevens in rekening brengen door de materiële schade met twee te vermenigvuldigen, dan zou dit voor de Februari-ramp betekenen, dat een bedrag van ongeveer één millioen per mensenleven gerechtvaardigd zou zijn (1800 personen verdronken, 1,5 à 2 milliard schade), een bedrag, dat vermoedelijk zeer veel hoger ligt dan de uitgaven per persoon, die het Rijk doet ter voorkoming van andere ongevallen. Bovendien kunnen mensenlevens ook worden beschermd door goede waarschuwings- en reddingssystemen, terwijl voortzetting en uitbreiding van het wetenschappelijk onderzoek de voorspelbaarheid van eventuele rampen aanzienlijk kunnen verbeteren.

Er zijn nog twee factoren, waarmee rekening gehouden moet worden, hoewel hun grootte lastig is te bepalen. In de eerste plaats kan de schade dermate groot zijn, dat het nauwelijks mogelijk geacht moet worden het land te herwinnen. Het is dan niet langer juist alleen met de waarde van de goederen en een zekere "consequential loss" rekening te houden, maar men moet becijferen hoe groot de verliezen zijn bij "total loss" van het gebied en de weerslag, die hiervan elders in het land wordt ondervonden, terwijl ook definitieve tewerkstelling van de bevolking uit de getroffen gebieden in andere streken grote kosten met zich meebrengt.

De kans op een dergelijke gebeurtenis en de hierdoor veroorzaakte verliezen zijn echter nauwelijks te schatten. In ieder geval kan men zich niet beperken tot de in par. 2 genoemde onderstelling van een verlies V indien $h > H$ en geen verlies, indien $h \leq H$. In figuur 1 is ruwweg aangegeven hoe het verlies verloopt als functie van het overstroomde gebied. Op een onbekend punt zal het verlies scherp toenemen en dan vervolgens naderen tot een asymptoot, die correspondeert met volledig verlies van het gehele land.

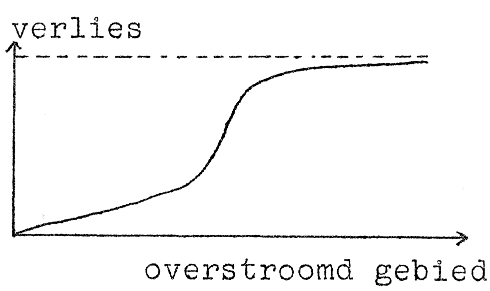

fig. 1

In de tweede plaats is het niet [illegible] verliesverwachting en investeringskosten zonder meer op te tellen. Men mag een te lijden schade in het algemeen niet gelijkstellen met een even grote uitgave, die een zeker optredende schade kan voorkomen. Immers, bij een eventuele keuze zal men zeker aan het laatste de voorkeur geven, ja, zelfs bereid zijn een veelvoud van de anders te lijden schade te betalen. In deze veelvoudsfactor is begrepen de desorganisatie van het maatschappelijk leven, die ontstaat bij een overstroming, de vergrote kans op besmettelijke ziekten, de psychologische "shock", enz. In het algemeen kan men zeggen, dat een eventuele niet beheerste toestand bij voorkomen van de schade vervangen wordt door een beheerste.

Het verdient aanbeveling de drie in deze paragraaf genoemde, zeer onzekere factoren, in de formule gezamenlijk te verantwoorden. Dit kan geschieden door het verlies V met een factor f_3 te vermenigvuldigen, zodat (28) overgaat in

$$X = a' \cdot {}^{10}\log C_o f_1 f_2 f_3 \tag{29}$$

Het bepalen van deze factor f_3 kan niet geschieden op mathematisch statistische, technische of economische gronden, doch moet veeleer worden beschouwd als een handeling van beleid van de verantwoordelijke autoriteiten. Keuze van een enigszins grote waarde van de factor f_3 kan ook beschouwd worden als een middel om te voorkomen, dat economische overwegingen bij een decisie van zo grote draagwijdte als de onderhavige een àl te sterke nadruk krijgen.

7. Conclusies.

De verhoging van de dijken, die men moet aanbrengen, opdat deze optimaal is, in de zin, gegeven in par. 2, kan worden voorgesteld door de formule

$$\boxed{X = a' \cdot {}^{10}\log C_o f_1 f_2 f_3} \quad \text{met} \quad C_o = \frac{100 p_o V \alpha}{\delta' K}$$

Men kan deze formule ook schrijven in de vorm

$$X = X_o + X_1 + X_2 + X_3 \tag{30}$$

waarin (met (26))

$$X_o = a' \cdot {}^{10}\log C_o = a' \cdot {}^{10}\log \frac{100 p_o V \alpha}{\delta' K}$$

afhangt van de bestaande onveiligheid (a', α en p_o) , de waarde van het beschermde gebied (V), de kosten van de dijkbouw (K) en de economische toestand (δ'), terwijl

$$X_1 = a' \cdot {}^{10}\log f_1$$

een extra term is tengevolge van de bodemdaling,

$$X_2 = a' \cdot {}^{10}\log f_2$$

waarin een extra verhoging f_2, de rol van "veiligheidsfactor" vervult, en

$$X_3 = a' \cdot {}^{10}\log f_3$$

een extra verhoging is om rekenschap te geven van de waarde van mensenlevens, culturele goederen en het vervangen van niet te voorziene rampschaden door beheersbare uitgaven van dijkbouw, algemeen: om een àl te zwaar accent op economische overwegingen te voorkomen.

Hoewel deze formule niet leidt tot een oplossing, alléén gebaseerd op in principe door wetenschappelijke onderzoekingen te bepalen factoren, doch nog in hoge mate afhankelijk is van een willekeurige keuze (via f_2 en f_3) heeft ze het grote voordeel, dat bij deze willekeur toch alle gebieden op gelijkwaardige wijze worden behandeld.

Neemt men als mogelijke keuze voor de verschillende constanten $\delta' = 2$, $\eta = 0{,}5$, $T = 2$, dus $f_1 \approx 2{,}5$, $f_2 = 3$ en $f_3 = 3$ en aanvaardt men de voor Hoek van Holland gevonden kansdecimeringshoogte a' van 0,75 m (dus $\alpha \approx 3$), dan leiden de overwegingen van dit rapport tot de conclusie dat de optimale dijkverhoging X kan worden weergegeven door de eenvoudige formule

$$X = 1 + 0{,}75 \cdot {}^{10}\log \frac{150\, p_0 V}{K} \tag{31}$$

waarin dus p_0 is de overschrijdingskans van de huidige dijkhoogte V de waarde van de beschermde goederen (inclusief de "consequential loss") en K de kosten van verhoging van de dijken met 1 meter. Andere keuzen van de constanten leiden uiteraard tot eenvoudige formules van hetzelfde type.

Appendix

Rentabiliteit.

Wanneer we de rentabiliteit ρ van een project definiëren als het quotiënt van de te verwachten jaarlijkse voordelen en de kosten van het project, dan is deze grootheid onder de vereenvoudigde onderstellingen van par. 2 bij het dijk-decisieprobleem gemakkelijk te berekenen. Immers het te verwachten jaarlijkse voordeel bestaat uit het verschil tussen de jaarlijkse schadeverwachting zonder dijkverhoging, d.i. $p_0 V$, en dezelfde grootheid na verhoging der dijken met X meter, dat is $p_0 V e^{-\alpha X}$, dus bedraagt het $p_0 V(1 - e^{-\alpha X})$ De totale investering voor het verhogen is $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + KX$ dus:

$$\rho = \frac{p_0 V(1 - e^{-\alpha X})}{\mathcal{I}_0 + KX}$$

Uit (7) en (8) volgt dan:

$$\rho = \frac{p_o V - 0{,}01 \frac{\delta K}{\alpha}}{\mathcal{J}_o + \frac{K}{\alpha} \ln \frac{100 p_o V \alpha}{\delta K}}$$

Noemen we:

(32) $\qquad \dfrac{\alpha p_o V}{0{,}01 \delta K} = C'$

dan is dus

(33) $\qquad \dfrac{\rho}{0{,}01\delta} = \dfrac{C' - 1}{\frac{\alpha \mathcal{J}_o}{K} + \ln C'} = \dfrac{C' - 1}{B}$

waarbij

(34) $\qquad B = \dfrac{\alpha \mathcal{J}}{K}$

Onderstellen wij bij wijze van voorbeeld $p_o = 0{,}02$, $\alpha = 3$, $V = 10$, $\delta = 3{,}5$, $K = 1{,}8$, $\mathcal{J}_o = 2{,}6$dus $C' = 9{,}5$,dan vinden we $X = 0{,}75$ en $\frac{\rho}{0{,}01\delta} = 1{,}3$, dus $\rho = 0{,}046$ waaruit de grootteorde van ρ blijkt.

Houden we rekening met de stijging in waarde der te beschermen goederen, de bodemdaling en de zeespiegelrijzing, dan is de situatie minder eenvoudig, daar de jaarlijkse voordelen in dat geval van de tijd afhangen. Volgens par. 3 bedraagt het jaarlijkse voordeel op een moment τ in de eerste periode:

$$p_o e^{\beta\tau} . V e^{\gamma\tau} - p_o e^{-\alpha X + \beta\tau} . V e^{\gamma\tau} = p_o V(1 - e^{-\alpha X}) e^{(\beta+\gamma)\tau}$$

zodat de rentabiliteit gedurende dat jaar gelijk is aan:

(35) $\qquad \rho(\tau) = \dfrac{p_o V(1 - e^{-\alpha X})}{\mathcal{J}_o + KX} e^{(\beta+\gamma)\tau}$

Deze grootheid neemt dus met de tijd toe.

Om de rentabilteit in een enkel getal uit te drukken kunnen we het quotiënt R beschouwen van de contante waarde van de totale risicovermindering en de totale investering. De contante waarde van de totale investering is volgens (18) gelijk aan $\mathcal{J}' = \mathcal{J}_o + kX + \mathcal{J}$. Definiëren we C volgens (24), dan volgt uit (22), dat de contante waarde van de schadeverwachting als de dijken X meter verhoogd zijn, gelijk is aan:

$L = \dfrac{KC}{\alpha} e^{-\alpha X}$,terwijl zonder verhoging dit bedrag gelijk is aan $L_o = \dfrac{KC}{\alpha}$

De teller van R is dus gelijk aan:

$$L_0 - L = \frac{KC}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha X}\right)$$

en

(35) $$R = \frac{\frac{KC}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha X}\right)}{\gamma_0 + \gamma + KX}$$

Toepassing van (25) en (18) geeft:

(36) $$R = \frac{KC - K}{\alpha(\gamma_0 + \gamma) + K \ln C} = \frac{C-1}{B'}$$

waarbij

(37) $$B' = \frac{\alpha \gamma'}{K}$$

De gemiddelde rentabiliteit $\bar{\rho}$ is nu te definiëren als de jaarlijkse intrest over R, dus $\bar{\rho} = 0{,}01\,\delta R$ en

(38) $$\frac{\bar{\rho}}{0{,}01\delta} = \frac{C-1}{B'}$$

Geven we $p_0, \alpha, V, K, \gamma_0$ en δ de reeds genoemde waarden en onderstellen we verder $\eta = 0{,}5$, dus $\beta = 1{,}5$, $\gamma = 2$ en $T = \frac{1}{\eta} = 2$ dan krijgen we:

$C = 70$, $X = 1{,}42$, $B = 9$, dus $\frac{\bar{\rho}}{0{,}01\delta} \leftrightharpoons \frac{69}{9} \approx 7.7$

We zouden de rentabiliteit ook kunnen definiëren als de intrest over het door de contante waarde van de kosten gedeelde verschil van de contante waarde van de vermindering der schadeverwachting en de contante waarde van de kosten. In plaats van R krijgen we dan als totale rentabiliteit $R - 1$.

Literatuur.

[1] D. van Dantzig, Nota voor de Delta-commissie. Samenvatting der uitkomsten van het econometrisch decisieprobleem der dijkverhogingen, Rapport S 149 van het Mathematisch Centrum, 1954.

[2] D. van Dantzig, Voorlopige oplossing van het investeringsdecisieprobleem van de Delta-commisssie (voorlopige vorm). Rapport 1953-32(3) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, 1953.

[3] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Revised Edition, 1947.

[4] A. Wald, Statistical Decision Functions, John Wiley and Sons, New York, 1950.

[5] Statistische analyse van waterstanden, methoden en resultaten, III: Splitsing van het jaar in groepen van maanden, Rapport 1954-11(2) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, 1954.

[6] F.J. de Vos, Bepaling economische dijkverhoging Terschelling, Nota Secretariaat Delta-commissie, 1954.

[7] Statistische analyse van waterstanden, methoden en resultaten, IV: Over de extrapolatie van de hoogwateroverschrijdingslijn van Hoek van Holland, Rapport 1954-11(2) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, 1954.

[8] D. van Dantzig, Economic decision problems for flood prevention, rapport SP 36 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, 1954.