MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 161.

Voedingsonderzoek bij zwangere vrouwen

II. Verband tussen voedselopname en tijd van het jaar, resp. stadium der zwangerschap.

door

Constance van Eeden.

1954.

1. Inleiding.

Bij een onderzoek naar de voedings- en gezondheidstoestand van zwangere vrouwen werden ons o.a. de volgende gegevens verstrekt over de voedselopname gedurende de zwangerschap van 498 gezonde zwangere vrouwen: Voor ieder der vrouwen apart werd, meestal voor drie verschillende tijdstippen tijdens de zwangerschap, de over drie opeenvolgende dagen gemiddeld opgenomen hoeveelheid van verschillende bestanddelen van het voedsel opgegeven. En wel van:

1. Calorieën (in 100-tallen),
2. Eiwitten (in 10-tallen gr.),
3. Vetten (in gr.),
4. Koolhydraten (in 10-tallen gr.),
5. Calcium (in 100-tallen mgr.),
6. Phosphor (in 100-tallen mgr.),
7. IJzer (in mgr.),
8. Vitamine A (in 100-tallen eenheden),
9. Caroteen (in 100-tallen eenheden),
10. Vitamine B_1 (in 100-tallen eenheden),
11. Vitamine C (in 10-tallen mgr.),
12. Melk. Hierbij werd een indeling gemaakt in vier groepen, nl.:
    - a. geen melk,
    - b. minder dan $\frac{1}{2}$ liter,
    - c. $\frac{1}{2}$ liter tot 1 liter,
    - d. meer dan 1 liter.

De genoemde drie tijdstippen vallen in de 3^e, de 6^e- en de 9^e maand van de zwangerschap[1]. Bij die vrouwen waarbij slechts éénmaal een waarneming werd verricht is dit steeds een waarneming uit de eerste periode; bij degenen met twee waarnemingen ontbreekt steeds de waarneming uit de derde periode. Verder werden ons nog gegevens verstrekt over de gebruikte vitamine en kalkpraeparaten, echter alleen over het al of niet gebruiken daarvan zonder gegevens over de hoeveelheden.

De waarnemingsperiode strekte zich uit van Maart 1950 tot December 1951. Wij hebben verondersteld, dat zich in deze vrij korte periode geen systematische veranderingen in de voedingsgewoonten hebben voorgedaan, zodat b.v. Maart 1950 als aequivalent met Maart 1951 beschouwd is.

De vragen, die ons naar aanleiding hiervan gesteld werden waren, voor ieder der bestanddelen 1 t/m 12:

---

1) Deze drie tijdstippen zullen we in het volgende aanduiden als resp. de eerste, de tweede en de derde periode der zwangerschap.

1. Is er een verschil tussen de maanden van het jaar wat betreft de opgenomen hoeveelheden,
2. Is er een verschil tussen de drie perioden der zwangerschap wat betreft de opgenomen hoeveelheden.

Verder werd ons gevraagd voor ieder der bestanddelen 1 $^{t}/_{m}$ 12 een schatting te geven van gemiddelde en spreiding.

2. Resultaten.

2.1. Onderzoek naar een verschil tussen de maanden.

Dit onderzoek is uitgevoerd met behulp van de generalisatie van de methode der m rangschikkingen (zie bijlage S 47 (M6) en S 145 (M 55)). Het waarnemingsschema bestaat hier uit twaalf kolommen (één voor iedere maand van het jaar) en drie rijen (één voor ieder der perioden). Het aantal waarnemingen in een vakje is het aantal vrouwen waarbij in de betreffende maand van het jaar en de betreffende periode waarnemingen gedaan zijn. Deze aantallen liggen tussen 11 en 67 (zie tabel V pg. 7). Nu is de toets, als de aantallen waarnemingen per vakje verschillend zijn zeer bewerkelijk. Daarom hebben wij uit ieder vakje een aantal waarnemingen door loting weggelaten zò dat er 11 per vakje overbleven. Er blijven dan nog 3 x 12 x 11 = 396 waarnemingen over voor ieder der 12 te onderzoeken bestanddelen.

Passen wij nu de toets toe dan vinden we tabel I (zie blz. 3).

Uit tabel I zien we dat er geen reden is om aan te nemen dat er een verschil is tussen de maanden van het jaar wat betreft de opgenomen hoeveelheden calorieën, vetten, koolhydraten, vitamine A en melk, terwijl we een verschil tussen de maanden vinden voor: eiwitten, calcium, phosphor, ijzer, caroteen, vitamine B_1 en vitamine C.

Verder zien we dat die gegevens, waarvoor we een verschil tussen de maanden vinden, uitgezonderd vitamine C, één analoog verloop vertonen n.l. hoog in Maart, April, Mei en Juni; terwijl veel vitamine C wordt opgenomen in de maanden Juni, Juli, Augustus, December en Januari. (zie ook fig. 1, pg. 8 en fig. 2, pg.9.).

2.2. Onderzoek naar een verschil tussen de perioden.

Het onderzoek naar een verschil tussen de perioden kan eveneens met de gegeneraliseerde methode der m rangschikkingen uitgevoerd worden. Voor die bestanddelen, waarvoor het verschil tussen de maanden afwezig of gering is, kan men een meer gedifferentiëerde methode toepassen dan voor die, waarbij de opname in de verschillende waarden wel verschilt. Daarbij wordt dan aan de gegevens van ieder der vrouwen apart een rangschikking ontleend, waardoor het aantal (m) daarvan zeer

Tabel I.

Onderzoek naar een verschil tussen de maanden van het jaar met behulp van de generalisatie van de methode der rangschikkingen:

	kolomtotalen voor de maanden												Overschrijdingskans.
	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D	
Calorieën	487	-679	674	560	521	123	- 15	-400	141	-612	-361	-439	0,25
Eiwitten	508	-909	599	751	974	-229	384	-800	264	-474	-568	-490	0,012
Vetten	276	-52	792	469	441	-451	128	-893	75	-843	-38	96	0,20
Koolhydraten	574	-748	514	376	138	312	-48	207	-2	-153	-812	-358	0,38
Calcium	-167	-934	612	621	1098	544	168	-443	-153	-606	-450	-290	0,03
Phosphor	137	-1001	739	852	1098	581	272	-711	-25	-585	-820	-537	0,002
IJzer	78	-582	403	1125	681	1157	-462	-673	-314	-188	-680	-545	0,005
Vitamine A	387	-390	242	724	493	-48	431	-232	66	-981	-65	-627	0,22
Caroteen	-319	-555	88	922	1309	1298	-360	76	-1293	-1363	290	-93	10^{-4}
Vitamine B_1	497	-806	930	1130	306	122	-307	-125	-110	-190	-715	-732	0,02
Vitamine C	582	348	104	-1263	-2124	607	1745	1195	83	-840	-601	164	10^{-4}
Melk	-107	-478	512	656	12	-370	152	-293	146	-208	-227	205	0,80

groot wordt, n.l.498 of iets minder. In ieder vakje komt dan hoogstens één waarneming te staan. Het grote aantal rijen komt het onderscheidingsvermogen ten goede, mede omdat er nu geen waarnemingen weggelaten behoeven te worden. Bij de andere methode, die overeenkomt met de in de vorige paragraaf toegepaste, maar met verwisseling van rijen en kolommen (de kolommen behoren nu bij de drie perioden en de rijen bij de twaalf maanden), werden weer dezelfde gegevens als in de vorige paragraaf gebruikt.

Wij hebben daarom de eerstgenoemde methode toegepast voor de bestanddelen , waarvoor wij geen verschil tussen de maanden vonden, dus voor calorieën, vetten koolhydraten, vitamine A en melk en de tweede methode voor: eiwitten, calcium, phosphor, ijzer, caroteen, vitamine B_1 en vitamine C.

De resultaten van dit onderzoek naar een verschil tussen de perioden staan vermeld in tabel II:

Tabel II.

Onderzoek naar een verschil tussen de perioden met behulp van de generalisatie van de methode der m rangschikkingen.

	Kolomtotalen voor periode			Overschrijdingskans.
	1	2	3	
Calorieën	31	65	-96	0,002
Eiwitten	108	318	-426	0,0001
Vetten	12	79	-91	0,0015
Koolhydraten	-58	100	-42	0,0025
Calcium	-30	6	24	>0,95
Phosphor	99	147	-264	0,046
IJzer	-3	164	-161	0,20
Vitamine A	-19	62	-43	0,03
Caroteen	233	-371	138	0,0015
Vitamine B_1	179	8	-187	0,13
Vitamine C	-98	-93	191	0,19
Melk	-15	-16	31	0,28

Uit tabel II zien we dat er een verschil is tussen de drie perioden wat betreft de opgenomen hoeveelheden: calorieën, eiwitten, vetten, koolhydraten, vitamine A en caroteen, terwijl wij voor phosphor een aanwijzing voor een verschil vinden. Voor de overige gegevens is er geen reden om aan te nemen dat er een verschil is tussen de perioden. Verder blijkt dat zes van de acht gegevens, waarvoor wij een verschil tussen de perioden vinden een zelfde verloop vertonen, n.l. hoog in de tweede periode en laag in de derde. Alleen koolhydraten en caroteen wijken hiervan af.

2.3. Schattingen van gemiddelden en spreidingen.

Voor de gegevens, waarvoor wij wel een verschil tussen de maanden van het jaar, maar geen verschil tussen de drie perioden vonden (dat zijn dus calcium, ijzer, vitamine B_1 en vitamine C) hebben wij voor ieder der maanden het gemiddelde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

en de spreiding

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uit die maand berekend. Hierbij zijn dus de drie perioden tezamen genomen. Bij de gegevens, waarvoor wij wel een verschil tussen de perioden en geen verschil tussen de maanden vonden (dat zijn dus: calorieën, vetten, koolhydraten en vitamine A) hebben wij voor ieder der perioden apart gemiddelde en spreiding berekend, waarbij dus de maanden tezamen zijn genomen. Voor de gegevens: eiwitten, phosphor en caroteen, waarbij wij zowel een verschil tussen de perioden als een verschil tussen de maanden vonden zijn gemiddelde en spreiding berekend voor ieder der perioden en ieder der maanden apart. Bij het gegeven: melk hebben wij berekend de percentages vrouwen in de vier groepen (zie inleiding punt 12) en wel voor ieder der perioden apart. De resultaten van deze berekeningen staan vermeld in de tabellen III,IV,V en VI (zie pg. 6 en 7); de gemiddelden en de spreidingen zijn uitgedrukt in de in de inleiding genoemde eenheden. In fig. 1 (zie pg. 8) zijn de gemiddelden uit tabel VI grafisch uitgezet (vergelijk ook de conclusies uit tabel I). Fig. 2 geeft voor caroteen voor ieder der perioden de gemiddelden uit tabel V .

Tabel III.

Schattingen van gemiddelden en spreidingen voor: calorieën, vetten, koolhydraten en vitamine A.

Periode	1		2		3	
	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
Calorieën	26,2	5,6	27,2	6,0	26,2	5,5
Vetten	112,0	30,1	116,2	33,6	109,7	28,6
Koolhydraten	30,5	7,0	32,3	7,5	31,4	7,2
Vitamine A	25,1	29,1	25,1	19,3	26,5	26,3
Aantallen waarnemingen	488		376		309	

Tabel IV.

Percentages vrouwen in de verschillende groepen wat betreft melk

Periode \ Groep	a	b	c	d
1	1,6	48,8	44,2	5,4
2	0,3	50,7	43,2	5,8
3	0,6	47,6	43,8	8,0

Tabel V.

Schattingen van gemiddelden en spreidingen voor eiwitten, phosphor en caroteen:

maand ⟶		Jan.		Febr.		Mrt.		April		Mei		Juni		Juli		Aug.		Sept.		Oct.		Nov.		Dec.	
	periode ↓	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
	1	8,5	1,6	8,1	1,7	8,0	1,9	8,1	1,6	8,1	2,4	8,2	2,3	8,0	1,8	7,8	2,0	7,5	2,0	8,2	1,3	7,6	1,8	7,1	1,5
Eiwitten.	2	8,2	1,0	7,9	2,0	8,8	1,5	8,9	1,5	7,7	2,0	7,9	1,8	8,5	2,2	8,0	2,2	7,7	2,0	7,4	1,8	8,4	3,4	7,6	1,6
	3	7,4	1,1	7,2	1,5	7,4	1,4	7,5	1,9	7,9	1,3	7,7	1,3	7,9	1,9	7,9	2,3	8,7	1,7	7,2	1,8	7,2	1,6	7,6	1,7
	1	15,8	3,3	14,9	3,2	15,5	3,7	15,8	4,0	16,5	5,2	15,8	4,7	14,0	6,7	14,5	4,1	14,0	4,5	15,6	2,9	14,7	4,1	14,2	3,0
Phosphor.	2	15,8	2,9	14,5	3,7	16,7	3,2	17,6	4,5	15,6	4,3	15,7	3,4	17,1	5,0	15,5	5,0	14,5	4,0	12,1	4,9	15,0	4,6	14,5	2,9
	3	14,6	2,6	13,5	3,5	15,3	2,9	15,1	4,2	15,3	2,5	15,8	3,3	15,2	3,9	14,3	4,4	16,9	4,0	14,1	4,4	13,8	5,6	13,3	4,5
	1	32,7	42,0	26,3	30,1	32,1	28,9	31,2	26,7	50,2	47,0	32,3	27,0	29,6	28,3	30,8	28,6	20,5	18,7	18,7	15,9	23,7	22,8	43,1	36,9
Caroteen	2	13,0	14,5	26,4	24,2	39,2	35,6	39,2	40,0	33,6	32,5	38,0	32,5	22,1	19,4	26,4	30,0	20,8	28,6	23,1	25,0	29,7	26,8	22,7	29,7
	3	39,5	32,2	30,7	34,5	44,8	41,7	41,5	37,9	41,6	31,5	49,1	38,3	26,6	33,0	19,6	18,5	24,2	22,9	24,9	30,2	25,3	21,7	28,6	32,2
	1	33		40		67		57		56		55		54		38		29		19		23		17	
Aantallen waarnemingen	2	13		17		25		27		38		39		43		55		40		41		27		11	
	3	13		17		14		20		16		19		20		36		50		47		35		22	

Tabel VI.

Schattingen van gemiddelden en spreidingen voor: calcium, ijzer, vitamine B_1 en vitamine C:

maand ⟶	Jan.		Febr.		Mrt.		April		Mei		Juni		Juli		Aug.		Sept.		Oct.		Nov.		Dec.	
	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$	s
Calcium	10,0	3,5	9,5	3,1	10,6	3,6	10,4	3,5	11,2	4,9	10,5	3,9	10,0	3,9	9,7	3,9	10,0	3,9	9,4	4,4	9,4	3,9	9,4	3,6
IJzer	16,2	3,4	15,7	4,1	15,5	5,1	17,3	4,9	16,6	4,9	16,6	5,2	15,5	3,8	15,1	4,5	15,4	4,4	15,2	4,2	14,8	3,9	14,9	2,8
Vitamine B_1	14,5	3,9	13,0	3,7	13,8	3,9	13,9	3,8	13,2	3,8	13,2	3,6	13,2	3,4	13,7	8,0	13,1	3,7	12,5	3,4	12,5	3,2	12,3	2,6
Vitamine C	13,9	6,4	11,6	4,4	11,5	6,2	8,5	4,3	7,4	4,2	16,0	7,8	16,5	6,2	13,6	5,9	12,2	5,5	10,8	4,6	11,2	4,0	12,2	5,0
Aantallen waarnemingen	59		74		106		104		110		113		117		129		119		107		85		50	

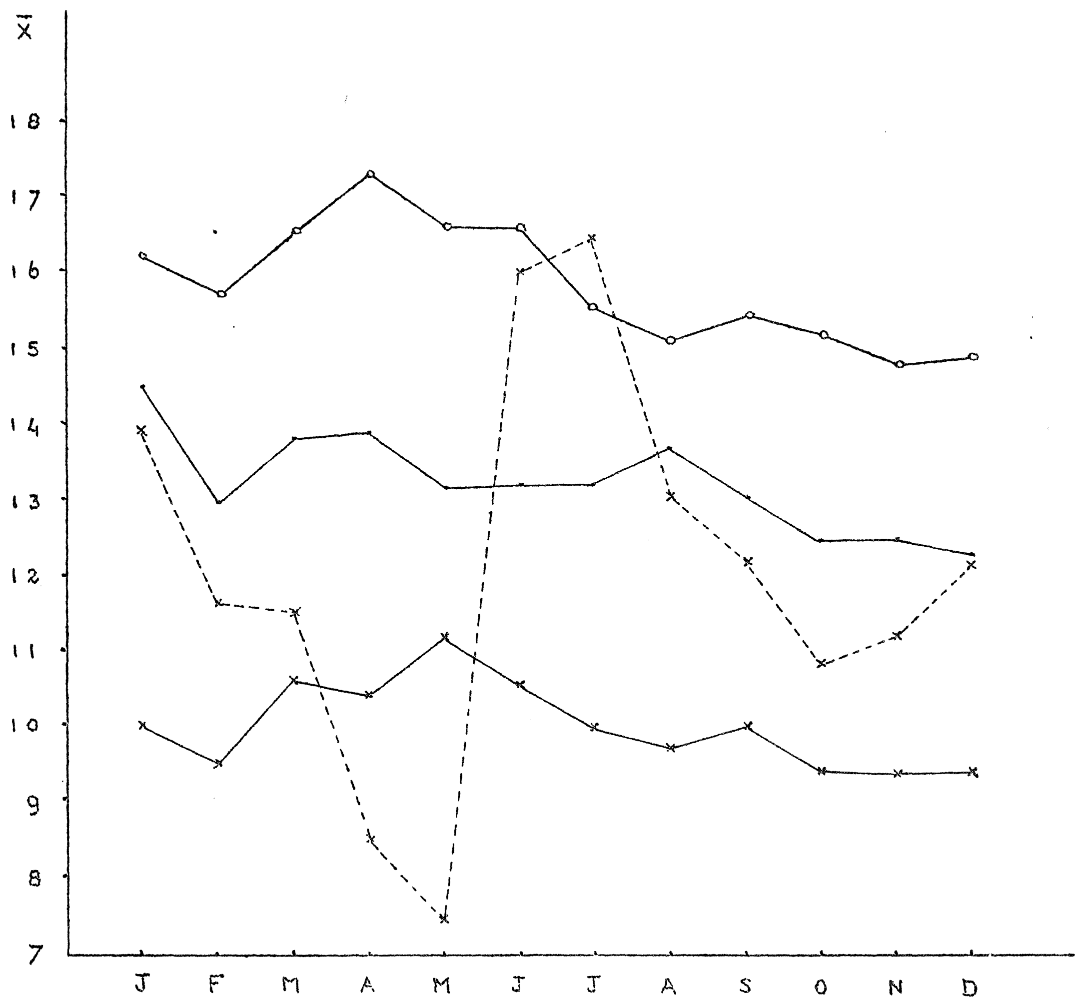

Fig.1: Grafische voorstelling van de opgenomen hoeveelheden calcium, ijzer, vitamine B_1 en vitamine C per maand.
(gegevens uit tabel VI).

x ——— x ——— x = calcium
o ——— o ——— o = ijzer
. ——— . ——— . = vitamine B_1
x - - - x - - - x = vitamine C.

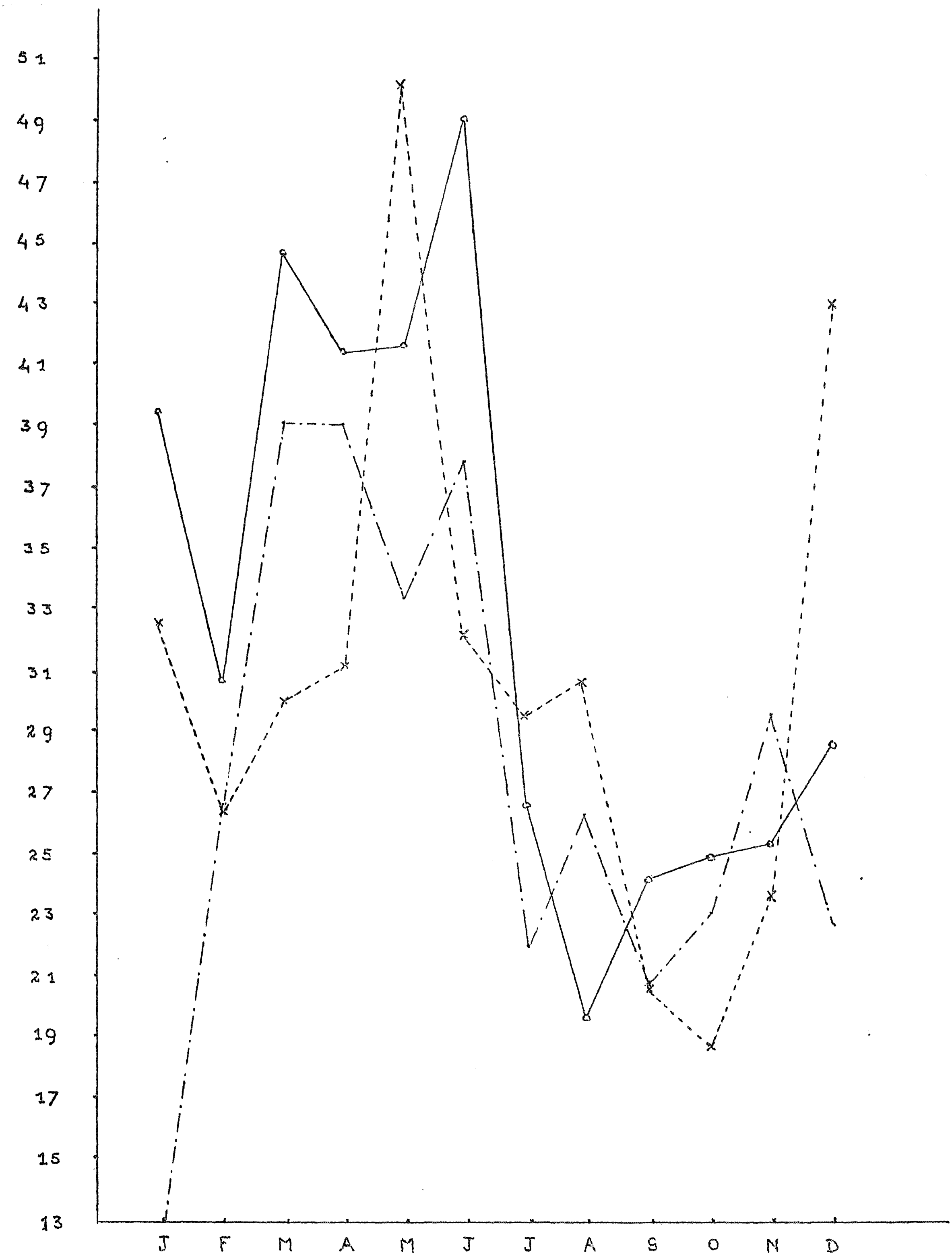

Fig. 2. Grafische voorstelling van de opgenomen hoeveelheden caroteen per maand voor ieder der perioden (gegevens uit tabel V).

x —— x —— x = periode 1
. -.- . -.- . = periode 2
o —— o —— o = periode 3

MATHEMATISCH CENTRUM
Amsterdam
Statistische Afdeling.
S47(M6)

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese.[1]

De toetsing van een hypothese $\mathcal{H}_0$ berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden[2], of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid $\underline{u}$ (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat $\mathcal{H}_0$ juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van $\underline{u}$, en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat $\underline{u}$ een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese $\mathcal{H}_0$, gelijk is aan een gegeven getal α, zodat Z dus van α afhankelijk is[3]. Z heet de kritieke zône van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu $\mathcal{H}_0$ op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van $\underline{u}$ in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien $\mathcal{H}_0$ juist is, gelijk aan α. Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met α = 0,05 resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie(universum,populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leqq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot aanvaarding van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze nevenvoorwaarden dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de overschrijdingskans k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α, waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α, waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootheid nog juist in de (bij α behorende) kritieke zône Z ligt. Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt verworpen, indien $k \leqq \alpha$ is.

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijke men bv. de tweede hieronder gegeven litteratuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

Litteratuur:

J.Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J.Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p.54-66.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr.49
A M S T E R D A M O.
Statistische Afdeling
S47 (M14)

Methode der m rangschikkingen [1])

Een duidelijk voorstelling van deze toetsingsmethode verkrijgt men door n elementen te beschouwen, die een bepaald kenmerk, eventueel in verschillende mate, bezitten. dit kenmerk wordt door m waarnemers beoordeeld en ieder van deze waarnemers rangschikt deze n elementen volgens zijn beoordeling naar opklimmende waardering. Op deze wijze ontstaan m rijen van rangschikkingen. We willen nu een maat aangeven voor de overeenstemming tussen deze rangschikkingen, m.a.w. een maat voor de overeenstemming tussen de m beoordelingen. De hypothese H_0, die met deze methode getoetst kan worden, houdt in dat er geen overeenstemming tussen de waarnemers bestaat; precieser gezegd, dat alle rangschikkingen onafhankelijk van elkaar op toevallige wijze zijn ontstaan. Dit is b.v. het geval, als het betrokken kenmerk in werkelijkheid voor alle elementen dezelfde waarde bezit.

We kunnen de afleiding voor de maat van overeenstemming het eenvoudigst geven aan de hand van een voorbeeld.

	elementen	A	B	C	D	E	F
rangnummers toegekend door waarnemer	a	5	4	1	6	3	2
	b	2	3	1	5	6	4
	c	4	1	6	3	2	5
	d	4	3	2	5	1	6
		15	11	10	19	12	17

De som van alle rangnummers is $\frac{1}{2}nm(n+1)$. Onder de hypothese H_0 is het theoretische gemiddelde van iedere kolom: $\frac{1}{2}m(n+1)$

We beschouwen nu de afwijkingen van dit gemiddelde. In ons voorbeeld is het theoretisch kolomgemiddelde gelijk aan 14. De afwijkingen daarvan zijn

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad 5 \quad -2 \quad 3$$

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid

De som der kwadraten van deze afwijkingen noemen wij S.
In ons voorbeeld is S = 64.
Als alle m rangschikkingen gelijk zijn wordt het maximum van S bereikt.
Dit maximum is $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$.
We definiëren nu als coëfficiënt van overeenstemming

$$W = \frac{12\ S}{m^2(n^3-n)}$$

In ons voorbeeld is $W = \frac{12 \times 64}{16 \times 210} = 0{,}229$.

W varieert dus tussen 0 en 1.

De verdeling van $\underline{S}$ onder de hypothese H_o is exact berekend voor een aantal waarden van n en m [1], terwijl voor grote m en n benaderingen bekend zijn.

De meest gebruikelijke benaderingen zijn de volgende.

1°. De χ^2-benadering:

$\chi_r^2 = m(n-1)\underline{W} = \frac{12\ \underline{S}}{mn(n+1)}$ heeft voor $m \to \infty$ een χ^2-verdeling met n-1 vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg. 36-37).

2°. De z-benadering:

$\underline{V} = (m-1)\frac{\underline{W}}{1-\underline{W}}$ is bij benadering verdeeld als $\underline{F} = e^{2\underline{z}}$
($\underline{F}$ is de $\underline{F}$ van Snedecor, $\underline{z}$ de $\underline{z}$ van Fisher) met

$\nu_1 = n-1-\frac{2}{m}$

$\nu_2 = (m-1)\,\nu_1$ vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg.33-36)

Met behulp van de verdelingen van $\underline{S}$ of $\underline{W}$ onder de hypothese H_o, kan deze hypothese getoetst worden, waarbij H_o verworpen wordt als $\underline{W}$ waarden dichtbij 1 (resp. $\underline{S}$ dichtbij $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$) aanneemt, de kritieke zône is dus van de vorm $W \geq W_o$ (resp. $S \geq S_o$).

Het kan voorkomen dat de waarnemers geen onderscheid ontdekken in de mate waarin verschillende elementen het kenmerk bezitten. Ze geven deze elementen dan gelijke rangnummers.

Veronderstel, dat door een waarnemer geen onderscheid wordt gemaakt tussen de elementen, die de rangnummers 3 t/m 6 moeten dragen. Dan wordt als rangnummer van iedere van deze elementen het gemiddelde van de rangnummers $\frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 4\frac{1}{2}$ gebruikt.

Daar het maximum van $\underline{S}$ nu verandert, moeten wij een correctie op de formule voor $\underline{W}$ toepassen. Deze vindt men in [1] (pg.82) en [2] (pg. 28-30). Eveneens veranderen dan de formules voor de χ^2-benadering ([1] pg. 86, [2] pg. 37) en voor de z-benadering ([1] pg. 86 [2] pg. 34), doch deze correcties zijn van weinig betekenis, tenzij het aantal gelijken groot is.

Literatuur: [1] M.G.Kendall, Rank correlation methods, London 1948, Hoofdstuk 6, pag. 80.
Tabel van de verdelingsfunctie van S voor:
n = 3 m = 2 t/m 10
n = 4 m = 2 t/m 6
n = 5 m = 3
op pag. 146-149.
Tabel van de waarden van S, waarvan de overschrijdingskansen onder de hypothese H_0 gelijk zijn aan 0,05 of 0,01, berekend met behulp van de z-benadering voor:
n = 3 m = 8,9,10,12,14,15,16,18,20
n = 4 m = 4,5,6,8,10,15,20
n = 5 t/m 7 m = 3,4,5,6,8,10,15,20
op pag. 150.

[2] Ph.van Elteren, Methode der m rangschikkingen, Cursus "Parametervrije Methoden", Hoofdstuk II, Rapport S 59, Mathematisch Centrum (1951), Blz. 18-45.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.
Statistische Afdeling.
S 145(M ~~54~~ 55)

Toets voor een generalisatie van het probleem van m rangschikkingen van A. Benard en Ph. van Elteren. [1]

1. Gegeven zijn m waarnemers, die ieder waarnemingen verrichten bij n objecten. Deze waarnemingen kunnen betrekking hebben op dezelfde, of op verschillende grootheden, doch iedere waarnemer meet slechts één grootheid. Het aantal metingen door de μ-de waarnemer verricht bij het ν-de object stellen wij voor door $k_{\mu\nu}(\mu=1,\ldots,m\,;\,\nu=1,\ldots,n)$. In dit memorandum wordt een verdelingsvrije methode besproken, om de hypothese H_0 te toetsen dat alle waarnemingen door éénzelfde waarnemer verricht, beschouwd kunnen worden als een steekproef uit éénzelfde waarschijnlijkheidsverdeling, terwijl de metingen van de verschillende waarnemers onderling onafhankelijk zijn. Deze toets reageert op alternatieven, waarbij de waarnemingen door iedere waarnemer verricht, afkomstig zijn uit verschillende waarschijnlijkheidsverdelingen, corresponderend met de objecten. De gemiddelden (of andere plaatsbepalende parameters) van deze waarschijnlijkheidsverdelingen moeten bovendien een voor de verschillende objecten enigszins overeenstemmend verloop vertonen. De toets is een verdelingsvrij analogon voor de toets tegen een hoofdeffect in de variantieanalyse met twee classificaties.

Voor het geval, dat álle aantallen $k_{\mu\nu}=1$ zijn, kan de gewone methode van m rangschikkingen (zie memorandum S47(M 14), worden toegepast. Bij de hier te behandelen generalisatie wordt toegelaten, dat $k_{\mu\nu}$ een willekeurig positief getal of 0 is.

2. Voor de berekening van de toetsingsgrootheid gaat men als volgt te werk:

a) De waarnemingen worden, voor iedere waarnemer afzonderlijk, gerangschikt naar opklimmende grootte en voorzien van rangnummers. Als de μ-de waarnemer in totaal $k_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}k_{\mu\nu}$ waarnemingen verricht, en alle waarnemingen zijn ongelijk, dan vormen de toegekende rangnummers dus een permutatie van de getallen $1,\ldots,k_\mu$. Als t waarnemingen van één waarnemer onderling gelijk zijn, doch ongelijk aan de overige van die waarnemer, dan worden de rangnummers van die waarnemingen onderling gelijk en wel het gemid-

1) Dit memorandum dient slechts ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

delde van de rangnummers die ze gekregen zouden hebben, als ze ongelijk geweest waren, doch overigens in de rangschikking dezelfde plaats ingenomen hadden. De verkregen rangnummers duiden wij aan met $\underline{r}_{\mu\nu\kappa}$, de index μ heeft betrekking op de waarnemer (dus $\mu = 1, \ldots, m$), de index ν op het waargenomen object ($\nu = 1, \ldots, n$), de index κ onderscheidt de waarnemingen van waarnemer μ met betrekking tot object ν onderling (dus $\kappa = 1, \ldots, k_{\mu\nu}$).

b) Voor iedere μ worden de door waarnemer μ toegekende rangnummers verminderd met hun gemiddelde $\frac{1}{2}(k_\mu + 1)$. De verkregen verschillen worden gereduceerde rangnummers genoemd en aangeduid met $\tilde{\underline{r}}_{\mu\nu\kappa}$. Er geldt dus:

$$\tilde{\underline{r}}_{\mu\nu\kappa} = \underline{r}_{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}(k_\mu + 1).$$

c) Men sommeert voor iedere μ en ν de reduceerde rangnummers van de waarnemingen van waarnemer μ betreffende object ν. Deze som wordt aangeduid met $\tilde{\underline{u}}_{\mu\nu}$. Er geldt dus:

$$\tilde{\underline{u}}_{\mu\nu} = \sum_{\kappa=1}^{k_{\mu\nu}} \tilde{\underline{r}}_{\mu\nu\kappa}.$$

Voor het geval dat $k_{\mu\nu} = 0$ is, wordt $\tilde{\underline{u}}_{\mu\nu} = 0$ gesteld.

d) Men sommeert nu voor iedere ν, de gevonden waarden $\tilde{\underline{u}}_{\mu\nu}$ over μ. De verkregen totalen, die kolom-totalen genoemd worden, worden aangeduid met $\tilde{\underline{u}}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Er geldt dus:

$$\tilde{\underline{u}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \tilde{\underline{u}}_{\mu\nu}.$$

$\tilde{\underline{u}}_\nu$ is dus de som van de gereduceerde rangnummers met betrekking tot object ν.

e) Zij nu $g_{\mu t}$ het aantal groepen van t gelijke waarnemingen verricht door waarnemer μ, ($g_{\mu 1}$ dus het aantal waarnemingen gelijk aan geen der andere), dan wordt berekend voor iedere μ:

$$K_\mu = \frac{k_\mu^3 - \sum_t t^3 g_{\mu t}}{12\, k_\mu (k_\mu - 1)}.$$

De sommatie in de teller strekt zich uit over alle waarden van t, die bij waarnemer μ voorkomen.

Steeds geldt $\sum_t g_{\mu t} = k_\mu$. Als alle waarnemingen ongelijk zijn, dus als $g_{\mu t} = 0$ is voor $t > 1$, geldt:

$$K_\mu = \frac{1}{12}(k_\mu + 1).$$

f) Nu berekent men de covariantie-matrix der kolomtotalen, die dus de elementen $\sigma_{\nu\nu'} = \mathcal{E}\, \tilde{\underline{u}}_\nu \tilde{\underline{u}}_{\nu'}$ heeft: ($\nu = 1, \ldots, n$; $\nu' = 1, \ldots, n$). Er geldt:

Er geldt:

als $\nu \neq \nu'$: $\sigma_{\nu\nu'} = - \sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} k_{\mu\nu'} K_{\mu}$

en $\sigma_{\nu\nu} = \sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} (k_{\mu} - k_{\mu\nu}) K_{\mu}$.

g) Men laat nu uit deze matrix de n-de rij en de n-de kolom weg.[2] De absolute waarde van de determinant van de verkregen matrix duiden wij aan met Δ . Er geldt dus:

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdot & \cdot & \sigma_{1,n-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \sigma_{n-1,1} & \cdot & \cdot & \sigma_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \right|.$$

Het geval, dat $\Delta = 0$ is, dat zich alleen kan voordoen als een groot aantal der $k_{\mu\nu} = 0$ zijn, zullen wij hier niet beschouwen.

h) Als $\Delta > 0$ is, berekenen wij:

$$\Delta_{\underline{u}} = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdot & \cdot & \sigma_{1,n-1} & \tilde{\underline{u}}_1 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n-1,1} & \cdot & \cdot & \sigma_{n-1,n-1} & \tilde{\underline{u}}_{n-1} \\ \tilde{\underline{u}}_1 & \cdot & \cdot & \tilde{\underline{u}}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

k) Als toetsingsgrootheid wordt nu gebruikt:

$$\underline{\chi}_{n}^{2} = \frac{\Delta_{\underline{u}}}{\Delta}.$$

3. De toetsingsgrootheid $\underline{\chi}_n^2$ heeft onder de hypothese H_0 bij benadering een χ^2 -verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden, o.a. in de volgende gevallen:

a) Iedere waarnemer heeft een betrekkelijk groot aantal waarnemingen bij ieder object verricht en deze aantallen lopen niet te sterk uiteen.

b) De aantallen $k_{\mu\nu}$ zijn klein, n is klein in verhouding tot m , en

$$\frac{\Delta}{\prod_{\nu=1}^{n} \sigma_{\nu\nu}}$$

ligt niet te dicht bij 0.

---

2) In feite doet het er niet toe welke rij en welke kolom weggelaten wordt.

4. De berekening van Δ en $\Delta_{\underline{u}}$ is in het algemeen een omslachtig werk. Wij geven daarom een aantal bijzondere gevallen, waarbij deze berekening eenvoudiger is. Het aantal vrijheidsgraden der toetsingsgrootheid is steeds $n-1$:

a. <u>n = 3</u>

Er geldt: $$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sigma_{23}\,\underline{\tilde{u}}_1^2 + \sigma_{31}\,\underline{\tilde{u}}_2^2 + \sigma_{12}\,\underline{\tilde{u}}_3^2}{\sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_{23}\sigma_{31}}.$$

b. De aantallen $k_{\mu\nu}$ kunnen steeds geschreven worden als een product:

$$k_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu ,$$

waarbij a_μ een constante is voor waarnemer μ en b_ν een constante voor object ν.

Er geldt dan, als $b = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\underline{\tilde{u}}_\nu^2}{b_\nu}}{b\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 K_\mu}$$

met $$K_\mu = \frac{k_\mu^3 - \sum_t t^3 g_{\mu t}}{12 k_\mu (k_\mu - 1)} .\qquad \text{(zie 2. e))}$$

In het bijzonder geldt, als alle waarnemingen ongelijk zijn:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{12\sum_{\nu=1}^{n} \underline{\tilde{u}}_\nu^2/b_\nu}{b\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 (a_\mu b+1)} .$$

c. Als in het vorige geval alle b_ν gelijk zijn, dus $b_\nu = \frac{b}{n}$ geldt:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{n\sum_{\nu=1}^{n} \underline{\tilde{u}}_\nu^2}{b^2\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 K_\mu}$$

of als er geen gelijke waarnemingen zijn:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{12\, n\sum_{\nu=1}^{n} \underline{\tilde{u}}_\nu^2}{b^2\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 (a_\mu b+1)} .$$

d. Als tenslotte alle aantallen $k_{\mu\nu}$ gelijk zijn, dus $k_{\mu\nu} = k$ voor $\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n$:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \underline{\tilde{u}}_\nu^2}{n k^2 \sum_{\mu=1}^{m} K_\mu}$$

of als alle waarnemingen ongelijk zijn:

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_\nu \tilde{u}_\nu^2}{m n k^2 (n k + 1)} .$$

e. Als alle $k_{\mu\nu} = 1$ zijn verkrijgen wij uit de laatste formule ($k = 1$):

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_\nu \tilde{u}_\nu^2}{m n (n + 1)} .$$

Deze formule komt overeen met de formule vermeld bij de χ^2-benadering voor de methode van m rangschikkingen (zie memorandum S 47 (M 14)).

f. Als $n = 2$ geldt $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^2$; $\tilde{u}_1^2 = \tilde{u}_2^2 = \tilde{u}^2$ en:

$$\chi_r^2 = \frac{\tilde{u}^2}{\sigma^2} .$$

$\chi_r = \frac{\tilde{u}}{\sigma}$ is dus bij benadering normaal verdeeld, met gemiddelde 0 en spreiding 1.

De toets gaat dan over in een combinatie van een aantal onafhankelijke toetsen van Wilcoxon. (verg.: Mem. S 47 (M 7) en S 102 (M 17b)).

g. Als alle $k_{\mu\nu}$ gelijk zijn aan 0 of 1, als $k_\mu = k$ voor iedere μ en als voor ieder paar objecten ν en ν' geldt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} k_{\mu\nu'} = \lambda \qquad (\lambda \text{ constant}),$$

zodat alle waarnemers evenveel objecten waarnemen en alle paren objecten precies door λ waarnemers vergeleken worden, geldt :

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{u}_\nu^2}{n \lambda (k + 1)} .$$

mits er geen gelijke waarnemingen in het systeem voorkomen.

Literatuur:

A. Benard en Ph. van Elteren, A generalization of the method of m rankings, Proc.Kon.Ned.Ak. van Wetensch. A 56 (1953) p. 358-369, Indagationes Mathematicae 15 (1953) p. 358-369.