MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 163

Het vergelijken van draadknoopmachientjes

door

Constance van Eeden.

1954.

1. Doel van het onderzoek en proefopzet.

Het doel van het onderzoek is om twee draadknoopmachientjes, die we in het volgende zullen aanduiden als X en Y, te vergelijken. Hiertoe laat men één of meer personen draadjes knopen met ieder der machientjes X en Y en sorteert deze draadjes naar het machientje waarmee, de dag waarop en de persoon waardoor ze geknoopt zijn. Stel dat dit sorteren geschiedt in een bak met vakjes (zie figuur)

X						
Y						
	1	2	3	4	5	6 enz.

Een rij correspondeert hierbij met een machientje en de draadjes in één kolom zijn geknoopt door één persoon op één dag.

Men neemt nu aselect paren draadjes: één uit een X-bakje en één uit het overeenkomstige Y-bakje en onderzoekt deze draadjes op hun treksterkte. Hierbij worden de draadjes vlakbij de knoop ingespannen zodat er ofwel breken in de omgeving van de knoop ofwel losslippen van de knoop optreedt.

Wij geven nu een waarneming van een breukspanning aan met x_i resp. y_i; een waarneming van een slipspanning met x_i' resp. y_i' (de letter x correspondeert met machientje X, de letter y met machientje Y). Er zijn dan voor het i^e paar draadjes de volgende mogelijkheden:

Men neemt waar

1. x_i en y_i (breuk bij beide draadjes),
2. x_i' en y_i' (slip bij beide draadjes),
3. x_i en y_i' (breuk bij X slip bij Y),
4. x_i' en y_i (slip bij X breuk bij Y).

Stel nu dat x_i, y_i, x_i' en y_i' waarnemingen zijn van resp. stochastische grootheden $\underline{x}_i$, $\underline{y}_i$, $\underline{x}_i'$ en $\underline{y}_i'$, dan zullen wij in het volgende aangeven hoe men met behulp van sequente methoden de volgende hypothesen kan toetsen:

I. Op grond van de waarnemingen van geval 1:

$$P[\underline{x}_i > \underline{y}_i] = P[\underline{x}_i < \underline{y}_i] \qquad \text{voor iedere } i$$

II. Op grond van de waarnemingen van geval 2:

$$P[\underline{x}_i' > \underline{y}_i'] = P[\underline{x}_i' < \underline{y}_i'] \qquad \text{voor iedere } i$$

III. Op grond van de waarnemingen van de gevallen 3 en 4, dat de kans op geval 3 gelijk is aan de kans op geval 4.

2. Beschrijving der methoden.

Om de drie in de inleiding genoemde hypothesen te toetsen kan men dezelfde methoden toepassen nl. de door WALD ([1] p. 88 e.v.) beschreven sequente toets voor het gemiddelde van een binomiale verdeling.

Wij zullen de methode hier beschrijven voor de eerste hypothese.

Stel $P[x_i > y_i] = p$ en $P[x_i < y_i] = q = 1-p$ dan luidt de te toetsen hypothese: $p = \frac{1}{2}$. Met de sequente toets komt men dan tot één der beslissingen: $p \geq \frac{1}{2}$ of $p < \frac{1}{2}$.

Men moet nu om de sequente toets te kunnen toepassen twee waarden p_1 en p_2 van p kiezen met $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$ zodanig dat als $p_1 < p < p_2$ het voor het onderzoek van weinig belang is of men tot de beslissing $p \geq \frac{1}{2}$ of tot de beslissing $p < \frac{1}{2}$ komt, terwijl de beslissing $p \geq \frac{1}{2}$ als fout beschouwd wordt als $p \leq p_1$ is en de beslissing $p < \frac{1}{2}$ als fout beschouwd wordt als $p \geq p_2$ is.

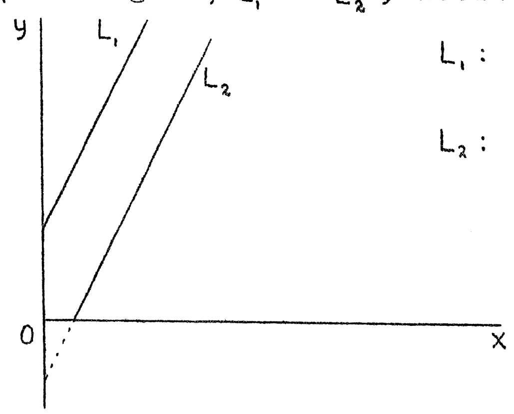
Verder moet men een waarde voor α en een waarde voor β kiezen, beide $< \frac{1}{2}$, waarbij

α = de kans om te besluiten tot $p \geq \frac{1}{2}$ als $p = p_1$,

β = de kans om te besluiten tot $p < \frac{1}{2}$ als $p = p_2$.

De toets wordt nu als volgt uitgevoerd:

Men tekent in een rechthoekig assenkruis twee evenwijdige rechten (zie figuur) L_1 en L_2, waarvan de vergelijkingen zijn:



$$L_1: \quad y \log \frac{p_2}{p_1} = \log A + x \log \frac{q_1}{q_2},$$

$$L_2: \quad y \log \frac{p_2}{p_1} = \log B + x \log \frac{q_1}{q_2},$$

waarin:

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Men begint nu in 0 en doet één stap in verticale richting als men de uitkomst $x_i > y_i$ heeft en één stap in horizaontale richting bij de uitkomst $x_i < y_i$.

Men gaat door met het nemen van waarnemingen zolang men tussen de rechten L_1 en L_2 blijft. Bereikt of passeert men L_1 resp. L_2 dan houdt men op met het nemen van waarnemingen en besluit men tot $p \geq \frac{1}{2}$ resp. $p < \frac{1}{2}$.

Voor deze toets is dus niet vereist dat de grootheden x_i alle dezelfde verdeling bezitten, noch dat de y_i alle dezelfde verdeling bezitten: wel moet $p = P[x_i > y_i]$ onafhankelijk van i zijn.

Om de twee waarden p_1 en p_2 te vinden kan men b.v. als volgt te werk gaan:
Als men aanneemt, dat x_i en y_i beide normaal verdeeld zijn met resp. gemiddelden $\mu(x_i)$ en $\mu(y_i)$ en resp. variantie $\sigma^2(x_i)$ en $\sigma^2(y_i)$ dan is $x_i - y_i$ normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_i = \mu(x_i) - \mu(y_i)$ en variantie $\sigma_i^2 = \sigma^2(x_i) + \sigma^2(y_i)$.
Als nu $\delta = \frac{\mu_i}{\sigma_i} = \frac{\mu(x_i) - \mu(y_i)}{\sqrt{\sigma^2(x_i) + \sigma^2(y_i)}}$ onafhankelijk van i is dan geldt dus

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

en uit twee waarden voor δ kan men dus, met behulp van een tabel der normale verdeling, twee waarden van p vinden. De onderstelling van normaliteit, hier gemaakt om δ in p om te rekenen, is overigens voor de toets niet nodig.

De boven beschreven toets kan ook gebruikt worden om de hypothesen II en III te toetsen. Bij hypothese II wordt p dan: $P[x_i' > y_i']$ en bij hypothese III wordt p de kans op geval 3. In het laatste geval doet men in het sequente schema één stap verticaal bij de uitkomst 3 en één stap horizontaal bij de uitkomst 4.
Neemt men aan dat ook x_i' en y_i' normaal verdeeld zijn met resp. gemiddelden $\mu(x_i')$ en $\mu(y_i')$ en resp. variantie $\sigma^2(x_i')$ en $\sigma^2(y_i')$ dan kan men, op dezelfde wijze als boven is aangegeven voor x_i en y_i, uit twee waarden van $\delta' = \frac{\mu(x_i') - \mu(y_i')}{\sqrt{\sigma^2(x_i') + \sigma^2(y_i')}}$ twee waarden van $p = P[x_i' > y_i']$ vinden.

Opmerking.

In het bovenstaande hebben wij dus een sequente methode beschreven om de hypothese

$$P[x_i > y_i] = P[x_i < y_i]$$

te toetsen. Hierbij hebben wij geen gebruik gemaakt van de grootte der verschillen $z_i = x_i - y_i$.

Men kan de bovengenoemde hypothese ook toetsen met behulp van een sequente methode, waarbij men wel gebruik maakt van de grootte van de verschillen z_i. Op de verschillen past men dan een sequente toets van Student toe [2].
Hierbij moet men echter onderstellen dat de z_i waarnemingen zijn van éénzelfde stochastische grootheid $\underline{z}$, die normaal verdeeld is, terwijl in het bovenstaande slechts vereist is dat $p = P[z_i > 0]$ niet van i afhangt.

Deze sequente toets van Student eist bovendien meer rekenwerk dan de bovenbeschreven sequente toets voor het gemiddelde van een binomiale verdeling.

Dit geldt uiteraard ook voor de toets voor de tweede hypothese.

Literatuur

[1] WALD, A., Sequential Analysis

[2] Een sequente toets van Student voor één steekproef, Rapport S 145(M 56) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.
Statistische afdeling
Rapport S 145(M 56)

Een sequente toets van Student voor één steekproef. 1) 2)

1. Inleiding

Stel de stochastische grootheid $\underset{\sim}{x}$ bezit een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en met onbekende spreiding σ en men wil, met behulp van een sequente methode, de hypothese $\delta \overset{df}{=} \frac{\mu}{\sigma} = \delta_0$ toetsen, waarbij δ_0 een gegeven getal is.
Daartoe kiest men twee waarden δ_1 en δ_2 voor δ $(\delta_1 < \delta_2)$ zodat als $\delta_1 < \delta < \delta_2$ het voor het onderzoek van weinig belang is of men tot de beslissing $\delta \geq \delta_0$ of tot de beslissing $\delta < \delta_0$ komt, terwijl de beslissing $\delta \geq \delta_0$ onjuist is als $\delta \leq \delta_1$ is en de beslissing $\delta < \delta_0$ onjuist is als $\delta \geq \delta_2$ is.
Stel verder

α = de kans om te besluiten tot $\delta \geq \delta_0$ als $\delta = \delta_1$,

β = de kans om te besluiten tot $\delta < \delta_0$ als $\delta = \delta_2$.

Als nu $\phi(t|\delta,n)$ de verdelingsdichtheid van de toetsingsgrootheid $\underset{\sim}{t}$ van Student is, berekend op grond van n onafhankelijke waarnemingen van $\underset{\sim}{x}$, dan wordt de toets als volgt uitgevoerd.

Stel

$$l_n(t|\delta_1,\delta_2) = \frac{\phi(t|\delta_2,n)}{\phi(t|\delta_1,n)} \tag{1.1}$$

dan gaat men door met het nemen van waarnemingen zolang voldaan is aan

$$\lg \frac{\beta}{1-\alpha} < \lg l_n(t|\delta_1,\delta_2) < \lg \frac{1-\beta}{\alpha}. \tag{1.2}$$

3)

Zodra niet meer aan (1.2) voldaan is, houdt men op met het nemen van waarnemingen en besluit men tot $\delta \geq \delta_0$ als

$$\lg l_n(t|\delta_1,\delta_2) \geq \lg \frac{1-\beta}{\alpha}$$

----

1) Uittreksel uit: S. RUSHTON [3].

2) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

3) Met lg wordt steeds de natuurlijke logarithme bedoeld.

is en tot $\delta < \delta_0$ als

$$\lg l_n(t|\delta_1,\delta_2) \leq \lg \frac{\beta}{1-\alpha}$$

is.

2. Een benadering voor $\lg l_n(t|\delta_1,\delta_2)$.

Als $x_1, x_2, \ldots x_n$ onderling onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$ zijn en

$$(2.1) \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \,.$$

$$(2.2) \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2,$$

$$(2.3) \quad \underline{t} = \frac{\bar{x}}{\underline{s}}\sqrt{n} \,,$$

dan bezit $\underline{t}$ een niet centrale t-verdeling met $(n-1)$ vrijheidsgraden en parameter δ, d.w.z. de verdelingsdichtheid is (zie b.v. [2]):

$$(2.4) \quad \phi(t|\delta,n) = \frac{\Gamma(n)\, e^{-\frac{n(n-1)\delta^2}{2(n-1+t^2)}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}} \left(\frac{n-1}{n-1+t^2}\right)^{\frac{n}{2}} G_{n-1}(-\delta u) \,,$$

waarin

$$(2.5) \qquad u = t\sqrt{\frac{n}{n-1+t^2}}$$

en

$$(2.6) \qquad G_n(x) = \int_0^\infty \frac{z^n}{n!}\, e^{-\frac{1}{2}(z+x)^2}\, dz.$$ 4)

Nu is het in de praktijk eenvoudiger om met u te werken i.p.v. met t . Uit (2.5) volgt

$$(2.7) \qquad u = \frac{\sum_i x_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2}}$$

en uit (2.4) en (1.1):

$$(2.8) \quad \lg l_n(t|\delta_1,\delta_2) = g_n(\delta_2 u) - g_n(\delta_1 u) - \tfrac{1}{2}n(\delta_2^2 - \delta_1^2),$$

waarin

----

4) In het artikel van RUSHTON (zie voetnoot 1) wordt voor deze functie de notatie $\mathcal{H}h_n(x)$ gebruikt. Tabellen van deze functie zijn b.v. te vinden in [1] .

(2.9) $$g_n(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lg G_{n-1}(-x)$$

Met behulp van tabellen van $G_n(x)$. is de toets dus exact uitvoerbaar.

Het is echter eenvoudiger om met één der volgende benaderingen voor $g_n(x)$ te werken:

(2.10) $$g_n(x) \approx \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{n},$$

(2.11) $$g_n(x) \approx \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right).$$

(2.12) $$g_n(x) \approx \frac{1}{4}x^2 + x\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{x^2}{24n}\right)$$

waaruit men benaderingen voor $\lg l_n(t\,|\,\delta_1,\delta_2)$ vindt.

Als men $\delta_1 = -\delta_2$ neemt dan vindt men met behulp van (2.10), (2.11) en (2.12) resp.

(2.13) $$\lg l_n(t\,|\,\delta_1,\delta_2) \approx 2u\delta_2\sqrt{n}.$$

(2.14) $$\lg l_n(t\,|\,\delta_1,\delta_2) \approx 2u\delta_2\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right).$$

(2.15) $$\lg l_n(t\,|\,\delta_1,\delta_2) \approx 2u\delta_2\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right) + \frac{\delta_2^3 u^3}{12\sqrt{n}}.$$

In de praktijk kan men nu zo te werk gaan, dat men eerst met de benadering (2.11) werkt en (2.12) of (2.13) gebruikt als men in de buurt van één der grenzen $\lg \frac{1-\beta}{\alpha}$ of $\lg \frac{\beta}{1-\alpha}$ komt.

Een grafische methode is niet beschikbaar. Bij iedere stap moet de waarde van $\underline{u}$ uit alle beschikbare waarnemingen opnieuw berekend worden.

<u>Literatuur</u>

[1] AIREY, J.R., Tables of the Hh. functions, British Association Mathematical Tables, <u>1</u> (1931).

[2] JOHNSON, N.L. and B.L. WELCH, Applications of the non-central t-distribution, Biometrika <u>31</u> (1940), p. 362.

[3] RUSHTON, S., On a sequential t-test, Biometrika <u>37</u> (1950), 326-333.