

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S181 (V11)

Enkele prolegomena voor een wetenschappelijke
didactiek van wiskunde en statistiek

door

Prof. Dr D. van Dantzig.

October 1955



Enkele prolegomena voor een wetenschappelijke didactiek van wiskunde en statistiek

door
Prof. Dr. D. van Dantzig

1. Het ingevolge het prijzenswaardig initiatief en de activiteit van de Vereniging van leraren in wiskunde, mechanica en cosmologie tot stand gekomen ontwerp leerplan en eindexamenprogramma voor de wiskunde in de HBS-B houdt een aanzienlijke vernieuwing en verbetering in in vergelijking met de bestaande toestand. Het is daarom te hopen, dat het spoedig zal worden verwerkelijkt. Mede door de voorgestelde invoering van het leervak statistiek is het een belangrijke stap in de richting van een verbeterde aanpassing van het wiskunde onderwijs aan hedendaagse maatschappelijke en wetenschappelijke behoeften. Door de voorgenomen en op kleine experimentele schaal reeds ten dele verwerkelijkte invoering van onderwijs in de statistiek bij het VHMO wordt evenwel een aantal moeilijke en fundamentele problemen opgeworpen.

Vooreerst vereist een doeltreffende keuze en presentatie van de leerstof een verdiepte beschouwing en ten dele zelfs herwaardering van het wiskunde onderwijs in het algemeen. Voorts zal het hoger onderwijs in wiskunde belangrijke wijzigingen moeten ondergaan, daar - onderstellende dat de plannen verwezenlijkt zullen worden - waarschijnlijkheidsrekening en wiskundige statistiek onder de verplichte leerstof van de toekomstige leraren in wiskunde zal moeten worden opgenomen, zowel aan de universiteit als bij de M.O.-examens. Een toekomstige moeilijkheid daarbij is, dat het geenszins gemakkelijk zal zijn, een toereikend aantal voldoende competente leerkrachten op universitair niveau te vinden. Tenslotte en wellicht ten dringendste moet de moeilijkheid onder ogen worden gezien, hoe de thans in functie zijnde leraren, die, met weinige uitzonderingen, nooit gelegenheid hebben gehad het nieuwe leervak te leren kennen, zich de voor het doceren ervan benodigde kennis kunnen eigen maken, en wel zó, dat zijn in voldoende mate "boven de stof staan".

Aan de bespreking dezer concrete problemen mogen enige beschouwingen van wijdere strekking voorafgaan, die weliswaar niet op korte termijn van praktische betekenis zullen worden, maar desondanks hopelijk niet als "utopistisch" van de hand zullen worden gewezen, daar zij voor een juiste probleemstelling van fundamenteel belang zijn.

2. De didactiek der wiskunde is nog steeds te zeer gebaseerd op veelal vage en/of aanvechtbare beschouwingen en doelstellingen als bevordering van het "logisch denken", het "ruimtelijk aanschouwingsvermogen", de "wiskundige intuïtie", e.d. Van deze niet nauwkeurig omschrijfbare faculteiten wordt doorgaans op onvoldoend bewijskrachtige gronden aangenomen, dat hun bezit 1^e voor alle leerlingen van nut zal zijn, 2^e voor allen, die een der aan het eindexamen gekoppelde rechten wensen te verwerven noodzakelijk is, 3^e wezenlijk door het wiskunde onderwijs wordt bevorderd. In werkelijkheid is evenwel vrijwel niets bekend omtrent de

vraag, of een groep van leerlingen die grondig wiskunde-onderwijs genoten (of niet genoten) heeft, ten aanzien van haar wijze van denken verificerbare significante verschillen vertoont ten opzichte van een daarmee intellectueel vergelijkbare controlegroep, van wie dit niet het geval is. En het feit, dat wij, mathematici, zoveel van wiskunde houden en dit vak zo belangrijk vinden, zullen wij als kritisch geschoolde denkers toch zeker niet als een bewijskrachtig argument voor deze thesen willen aanvoeren, dat alle leerlingen van eenzelfde schooltype verplicht zijn, het daargegeven wiskunde onderwijs in zijn volle omvang te volgen. Het is daarom gewenst de didactiek der wiskunde op een minder wankel basis te funderen, en wel op concrete doelstellingen, waarvan telkenmale toetsbaar is of, resp. in hoeverre zij bereikt zijn. Deze doelstellingen kunnen onmogelijk voor alle leerlingen van eenzelfde schooltype dezelfde zijn, maar dienen afhankelijk te worden gesteld van aanleg, belangstelling en levensdoel van de individuele leerlingen. Dit vereist dat de leerlingen binnen het kader van hun schooltype, en zo mogelijk, zelfs binnen het kader van hun klas enige vrijheid van keuze zullen verkrijgen met betrekking tot de mate waarin zij aan het wiskunde onderwijs zullen deelnemen en dat de aan het eindexamen toe te kennen rechten van deze keuze afhankelijk gesteld zullen worden. Dit gaat dus enigszins in de richting van het Amerikaanse systeem, waarbij elk leervak over een aantal "cursussen" ("courses") is verdeeld, waarvan enige verplicht zijn, terwijl uit de andere een keuze kan worden gemaakt. Een leerling die dus b.v. weinig aanleg en belangstelling voor wiskunde heeft, kan dan met een elementaire cursus in dit leervak volstaan, en de verdergaande kennis daarvan vervangen door diepergaande studie van andere vakken die hem meer interesseren. Daarmede ontnemt hij zichzelf evenwel de mogelijkheid - tenzij hij de ontbrekende kennis later aanvult - in een der sterk wiskundig georiënteerde vakken verder te studeren.

Hoewel een dergelijk systeem niet slechts een ingrijpende wetswijziging, maar ook grondige wijzigingen in ons onderwijssysteem vereist, is deze naar mijn mening op den duur onontkoombaar.

3. De voortschrijdende mathematisering van het wetenschappelijk en maatschappelijk leven in de huidige cultuurfase wordt sterk geremd door een bij velen aanwezige angst voor of weerzin tegen de wiskunde, die veelal een gevolg is van "overvoeding" en ondoeltreffende "dieetkeuze". Voor de grote massa der leerlingen zal daarom de belangrijkste doelstelling moeten zijn, door doeltreffende keuze en dosering van de leerstof te bereiken, niet slechts dat deze psychische weerstanden voorkomen worden, maar ook dat bij de leerlingen een voldoende vertrouwdheid met eenvoud-

dige algebraïsche formules, functies, grafieken, statistieken en statistische samenvattingsgetallen ontstaat, opdat zij deze vlot kunnen "lezen", het globale verloop ervan kunnen overzien en de voornaamste kenmerken kunnen waarnemen, kortom dat zij ze receptief min of meer vlot kunnen beheersen. Methodologisch zou hier wellicht een gemoderniseerde en beknotte versie van de methode van T. Percy Numn als uitgangspunt kunnen worden genomen. Voorts is het voor vrijwel iedereen van nut, een inzicht te hebben enerzijds in de nuttigheid, anderzijds in de begrensde nauwkeurigheid, betrouwbaarheid en algemeen-geldigheid van kwantitatieve conclusies uit waarnemingsuitkomsten, dit laatste opdat de daardoor gewekte kritische instelling een beschermingsmiddel zij tegen van statistische indexcijfers e.d. gebruikmakende suggestieve reclame en propaganda. Door Darell Huff zijn in "How to lie with statistics" (Illustraties door Irving Geizs, Londen, 1954) verschillende voorbeelden hiervan gegeven. Voorts kan een zekere mate van "common sense" logica, van ordelijk denken, van ordelijk weergeven, schematiseren en samenvatten van gegevens, en van het releveren van de belangrijkste punten uit een betoog, geacht worden voor vrijwel alle leerlingen van nut te zijn. De -geenszins gemakkelijk te beantwoorden - vraag, een wiskundige cursus (A) op te stellen, die deze doelstellingen op zo doeltreffend mogelijke wijze verwezenlijkt, houdt een probleem in, dat de didactiek slechts met moderne methoden van wetenschappelijk onderzoek zal kunnen oplossen.

Teneinde mijn bedoeling te verduidelijken zou ik enkele punten willen vermelden uit de na de fundamentele reorganisatie van 1945 in Japan aanvaarde leerprogramma's, ontleend aan Ryokichi Minobe ¹⁾.

Beseffende, dat er tussen leerplan en realisering daarvan een aanmerkelijke afstand kan bestaan, meen ik toch, dat de doelstelling het overdenken waard is.

De algemene doelstelling voor het rekenonderwijs op de (verplichte) 6-jarige) lagere school wordt als volgt geformuleerd:

- 1) the child should be given a wealth of experience, enabling him to make effective use of arithmetic in his social life in and out school.
- 2) the ability of the child to deal with quantitative relationships adeptly and comprehendingly should be fostered.

Dit wordt nader uitgewerkt met betrekking tot 1) o.a. als

- b) the ability and tendency to solve daily problems and analyse personal experience by quantitative methods should be encouraged.
- d) while deepening the comprehension that arithmetic, by means of quantitative treatment, permits accurate, handy and efficient description of things, the development of the ability and tendency to make use of numerical methods in daily life should be attempted.

1) "Statistical training in Japan", 28th session de l'Institut International de Statistique, Rome, 1953; Bull.Inst.Int.de Stat., tome 34, 2^{me} Livraison, 1954, p.672-693, Appendix 3, p.684-687.

en tot 2) als

- f) the ability to translate quantitative data into tables and graphical charts, and to interpret and utilise the facts thus represented should be developed.

Uit praktische, op statistiek betrekking hebbende opgaven die tegenwoordig in het rekenonderwijs in Japanse elementaire scholen worden geleerd, vermelden wij:

- 1st year : The ability to make simple graphical charts of matters related to school or home, using the simplest symbols, such as noughts and crosses, is taught and fostered.
- 2nd year i) The ability to make and read simple statistical tables or charts, covering matters related to school or home, is developed.
ii) Effort is made to cause the child to apply such representations to the field of actuality.
- 3rd year i) The ability to use binomial tables in regard to school and home matters is developed.
ii) The ability to employ pictorial and bar graphs in the field of experimentation is developed.
- 4th year : The ability to use joined-line graphs in relation to school and home life is fostered.
- 5th year i) The ability to read trends, increments, decrements, and other changes are developed.
- 6th year i) The reading and making of circular, ribbon, and polygonal graphical representation are developed.

Uit de doelstelling van wiskunde onderwijs in de driejarige "Junior High Schools", die op de lagere school volgt en sinds 1945 eveneens voor alle leerlingen verplicht is, vermelden wij:

- 1) Proper understanding of the effectiveness of quantitative judgments in forecasts for the future.
- 3) Cultivation of the ability to find and utilise reliable data for dealing with social and personal problems.
- 5) Comprehension of the fact that tables and graphs provide a simplified form of presenting factual data, and cultivation of the ability of express matters practically and simply by means of such representations.
- 7) Cultivation of the ability to treat quantitative relationships in a logical, efficient, accurate and appropriate way.
- 9) Awakening of the realisation that various mathematical abilities are important as qualification to become an element of importance in human society, and cultivation of the ability and habit of utilising mathematics for the social good.

en uit het leerplan voor deze scholen:

- 1st year 1) Reading and comprehension of the large figures given by the newspapers and other sources in connection with the census, the Budget, and other economic matters.

- 6) Reading of bar graphs, joined-line graphs, circular graphs, and others which appear in newspapers, periodicals and other publications; also graphical representation of acquired data to simplify explanation.
- 3rd year 7) The use of relativity for comprehension of various natural and social phenomena.
- 8) Comprehension of and exercises in daily economics phenomena that are related to the nation or to other social entities.

Zelfs aannemende, dat van dit programma in de praktijk maar een klein gedeelte slaagt, moeten wij toch toegeven, dat wij hier, 10 jaren later, zelfs voor het VHMO, nog niet aan een zo zeer bij het moderne leven aansluitende doelstelling toe zijn.

4. Een tweede cursus (B), die slechts verplicht zij voor leerlingen die een loopbaan in een begrensd, maar vrij uitgebreide groep van richtingen ambiëren (b.v. voor hen die een universitaire of semi-wetenschappelijke studie in de natuurwetenschappelijke, medisch of economische richting wensen te volgen, alsmede voor toekomstige bedrijfsingenieurs en enkele andere richtingen) zij b.v. gericht op het verkrijgen van vaardigheid in eenvoudige algebraïsche en statistische technieken volgens duidelijk voorgeschreven methoden. De mogelijkheid, deze technieken aan gewijzigde probleemstellingen te adapteren, blijve aan de vervolgstudie voorbehouden, maar kan in het VHMO reeds enigszins worden voorbereid.

5. Een derde cursus (C), slechts verplicht te stellen voor hen, die aan de wiskunde nauw verwante studierichting gaan volgen, zij bijvoorbeeld gericht op het verkrijgen van een scherpere logisch-critische houding, op een grotere en enigszins ruimere technische vaardigheid van enig inzicht in de logische achtergronden der genoemde technieken en eenvoudige methoden voor logische analyse daarvan, alsmede van enige vindingrijkheid in het overwinnen van nieuwe moeilijkheden en vaardigheid in het splitsen van een probleem in deelproblemen, die achtereenvolgens tot oplossing kunnen worden gebracht. Met betrekking tot deze laatste punten zij de aandacht gevestigd op de werken van G. Pólya, t.w. "How to solve it" en "Mathematics and plausible reasoning" (vol.1 "Introduction and analogy in mathematics", vol.2 "Patterns of plausible reasoning").

6. Met betrekking tot de toetsing in hoeverre de vereiste vaardigheden en inzichten inderdaad verkregen zijn, moet er op gewezen worden, dat het eindexamen in zijn overgeleverde vorm een hoogst ondoeltreffende vorm van kwaliteits-controle is. Het is een niet slechts zeer kostbare, maar ook onbetrouwbare methode, daar de inspectie der abituriënten t.a.v. de doelstelling onder abnormale omstandigheden wordt uitgevoerd. Het heeft ook ten gevolge, dat een groot gedeelte van het laatste schooljaar

door de noodzakelijke training voor eindexamen-sommen en -thema's vrijwel geheel voor normaal onderwijs verloren gaat.

Hoe zou men b.v. denken over een fabriek van rolfilms die, zeggen wij, 10% van de productiekosten besteedde, niet aan het verbeteren van het product, maar aan het pasklaar maken daarvan voor de qualiteits-controle, die vervolgens deze controle uitvoerde in een kamer gevuld met stoom van 2 atm en 100°C, en op grond daarvan 15% van de productie volledig afkeurde?

Naar mijn mening behoort het eindexamen in een voldoende aantal verschillende vormen voor te komen, opdat - met uitzondering van zéér weinig gevallen van aperte onwil of langdurige ziekte - iedere tot de hoogste klassen toegelaten leerling een voor hem passend eindexamen kan krijgen, waarbij b.v. een verminderd wiskunde programma kan worden gecompenseerd door een uitgebreider programma in een of meer andere vakken.

Nog een stap verdergaand, zou ik - al ben ik er mij van bewust, dat deze opvatting wel van verschillende zijden bestreden zal worden - zelfs een soortgelijke regeling voor de lagere klassen wenselijk teneinde de enorme door doubleren veroorzaakte energie- en investeringsverliezen aanzienlijk te beperken. Wanneer men zegt, dat een leerling voor een school ongeschikt is, zou men m.i. veel meer moeten zeggen, dat de school voor de leerling ongeschikt is. Naar mijn mening behoort een school (of desnoods een groep van scholen) een voldoende gedifferentieerdheid van onderwijsmogelijkheden te bezitten, opdat door een betrekkelijk vrije op aanleg en belangstelling der leerlingen en vooral ook op lerarenadviezen steunende keuze der leerlingen, behoudens weinige uitzonderingen, iedere leerling een voor hem passende combinatie van vakken kan vinden. Dan zou de school voor iedere leerling die zij als zodanig accepteert ook verantwoordelijkheid kunnen - en m.i. dienen te - aanvaarden, hem (in het ergste geval door afvloeiing naar een andere school) - wederom behoudens zeldzame uitzonderingen - zonder doubleren op een voor hem passende plaats en tot een voor hem passend eindexamen te brengen. Daarbij worde de keuze van dit diploma aan het lerarencorps toevertrouwd. Deze worde gedaan, niet op grond van een onder abnormale omstandigheden afgenomen examen, maar op grond van de normale klasprestaties, aan voldoende geunificeerde eisen onderworpen.

7. Het bovenstaande programma, ook als het instemming mocht vinden, is, en niet alleen door de ingrijpende wetswijziging die het zou vereisen, zeker niet voor verwezenlijking op korte termijn vatbaar. In ieder geval is het echter zeer gewenst, dat didactici en aanstaande didactici hun aandacht aan de hier opgeworpen problemen wijden en op een wijze, die aan moderne wetenschappelijke eisen voldoet, trachten een waarderingsschema

voor de verschillende door verschillende leerlingen te bereiken doeleinden op te stellen en methoden te vinden om deze met zo laag mogelijke "kosten" (in de vorm van leraar- en leerling-uren) te verwezenlijken. De huidige methode komt min of meer daarop neer, dat men aan de doeleinden uitsluitend de waarden 1 of 0 toekent, en wel simultaan voor alle leerlingen van eenzelfde schooltype. ("Dit moeten ze kennen; dat behoeven ze niet te kennen"). Daardoor worden vele verhinderd, voor hun nuttige vaardigheden, b.v. van type B, te verwerven, als zij niet in staat zijn de huidige, min of meer met C overeenstemmende doeleinden te bereiken. Ook teneinde het huidige en in de toekomst te verwachten tekort aan in verschillende graden wiskundig geschoolden op te vangen is een hoge mate van doelgerichtheid, doeltreffendheid, en "zuinigheid" bij de toe te dienen kennis onontbeerlijk.

3. Met betrekking tot het derde der genoemde problemen, de opleiding der huidige leraren, staat men voor de welhaast unieke situatie, dat een grote groep van leraren vermoedelijk binnen luttele jaren geroepen zal worden een leervak te onderwijzen, dat zijzelf nog niet kennen. Weliswaar lijkt deze situatie enigszins op die in de beschrijvende meetkunde, een vak dat ook door velen wordt gedoceerd, die er geen opleiding in genoten hebben, maar de verschillen zijn zeer belangrijk. Immers de beschrijvende meetkunde is een vak, dat vrijwel een ieder die een grondige algemeen-wiskundige opleiding heeft genoten, zich in betrekkelijk korte tijd zelfstandig eigen kan maken. Met de kansrekening, als deel van de zuivere wiskunde beschouwd, is ditzelfde ook wel min of meer het geval, al is dit vak in wezen moeilijker en behoort het op zijn hogere niveaus zelfs tot de moeilijkste delen der wiskunde. Maar bovendien is kansrekening nog geen statistiek, en hier zijn de verschillen fundamenteel en wellicht zelfs voor enkelen onoverkomelijk. De statistiek vereist immers een zeer sterk van de wiskundige afwijkende geesteshouding. Wiskundige begaafdheid gaat veelal gepaard met een min of meer "introvert" gerichte geesteshouding, waarbij men zich geheel concentreert op een zelf gekozen probleemstelling, op een uitsluitend van literatuurkennis en individuele denkkraft afhankelijke oplossingswijze, en een uitsluitend aan de eis van logische consistentie onderworpen kritische toetsing. De statistiek daarentegen is toegepaste wiskunde, en vereist een veel meer "extroverte" geesteshouding. De probleemstelling is doorgaans van andere wetenschapsgebieden of zelfs niet-wetenschappelijke levensgebieden afkomstig. De oplossingsmethode kan slechts doelmatig worden gekozen wanneer men zich min of meer in het waarnemingsmateriaal verdiept, in de wijze waarop dit wordt verkregen, het concrete doel waartoe het werd verzameld, en de in dit andere gebied beschikbare en gebruikelijke graad van exactheid of on-

exactheid. De eisen, waaraan de oplossing moet voldoen zijn tenslotte niet uitsluitend en zelfs niet in de eerste plaats, van deductief logische aard, maar hebben betrekking op de inpassing van de conclusies in een groter geheel van waarnemingsresultaten, theorieën en hypothesen. Niet zo zeer in de verkrijging der benodigde wiskundige kennis als wel in de overgang van een introverte tot een meer extroverte geestesrichting zullen vermoedelijk voor de meeste wiskunde leraren de grootste moeilijkheden liggen. Ook geldt dit voor de overgang van de in de wiskunde bij uitsluiting aanvaarde deductieve logica naar de aan veel minder stricte regels onderworpen inductieve en/of "plausibele" logica, die nauwer bij de "common sense" dan bij de formele correctheid aansluit. Tenslotte geldt dit ook voor het afstappen van de in de wiskunde vrijwel uitsluitend toegelaten onderscheiding in "goed" en "fout", die hier niet meer uitvoerbaar is, en door een (al dan niet quantitatief gepreciseerde) genuanceerdere differentiatie moet worden vervangen ("aannemelijk", "voldoende betrouwbaar", "zo goed mogelijk", e.d.)

De op verzoek van het bestuur van WIMECOS door het Mathematisch Centrum te ontwerpen cursus in Statistiek voor leraren moet slechts als een eerste poging worden beschouwd aan de bestaande behoeften althans enigszins tegemoet te komen, die reeds door de beperkte omvang en voorts doordat hier een eerste experiment wordt gedaan, onmogelijk verwacht kan worden een volledige en definitieve oplossing van het opleidingsprobleem van de in functie zijnde leraren in te houden.

9. Het probleem van de opleiding der toekomstige leraren voor het heden buiten beschouwing latende, willen wij tenslotte nog enkele losse opmerkingen maken over het VHMO in de statistiek zelf, opmerkingen die bij gebrek aan voldoende ervaring een zeer voorlopig karakter moeten dragen. Eenvoudigheidshalve zal daarbij de verdeling over de bovengenoemde drie niveaus A,B,C buiten beschouwing worden gelaten.

In de eerste plaats is het gewenst, de leerlingen, zij het aan het begin, zij het later, een globaal beeld te geven van de verschillende gebieden waarin statistiek wordt toegepast, en van de aard dezer toepassingen, en ook de toepassingen zo concreet en numeriek realistisch mogelijk te houden. Een historisch overzicht kan hier eveneens goede diensten bewijzen, en aanleiding geven tot een aantal boeiende lessen. Voorts is het gewenst, met zuiver empirische beschouwingen te beginnen, waarin nog geen kansrekening wordt gebruikt, en deze laatste, ook verder, tot de eenvoudigste problemen te beperken.

De behandeling van ordelijke tabellering en het weergeven in grafieken blijven hier verder onbesproken. Van belang is, er zorg voor te dragen, dat "stakendiagrammen" slechts bij exact bekende waarden, histogrammen slechts bij afgeronde waarden dienen te worden gebruikt. Behandeling,

althans kwalitatief, van twee-dimensionale puntendiagrammen zij ten sterkste aanbevolen.

Bij het bespreken van het gemiddelde is het gewenst, te beginnen met gevallen waarin de som van een aantal onregelmatig fluctuerende waargenomen waarden de enige grootheid is, waarvoor men zich in eerste instantie interesseert (opeenvolgende winsten of verliezen in gelijke perioden, opbrengsten in gewicht of geldwaarde van verschillende met eenzelfde gewas bebouwde percelen, melkproductie van koeien, aantal ziekte-dagen van een arbeider, enz.). In aansluiting bij mechanica en natuurkunde zal men hier ook de gemiddelde snelheid per tijdseenheid en gemiddelde dichtheid per volume-eenheid (soortelijke massa of s.g.) kunnen noemen. De onregelmatige waarnemingsreeks kan dus worden vervangen door twee getallen: aantal en gemiddelde. Daarbij gaat de formatie verloren, die men niet meer kan terugwinnen (vgl. voldoende, resp. nodige en voldoende voorwaarden). In alle gevallen, waarin de som niet zelf een duidelijk waarneembare zin heeft, is trouwens de betekenis van gemiddelden tamelijk dubieus (gemiddelde temperatuur, gemiddeld inkomen per hoofd der bevolking, enz.) Het enige dat hier wiskundig niet geheel triviaal is, is het bewijzen van de eigenschappen van gemiddelde, met name van een gemiddelde van gemiddelden. In verband hiermede kan iets over gewogen gemiddelden worden gezegd. Wanneer gemiddelden van met beperkte nauwkeurigheid gegeven getallenrijen worden bepaald, is het van belang op te merken, dat, zolang geen kousbeschouwingen worden ingevoerd, aan het gemiddelde geen geringere onnauwkeurigheid kan worden toegekend dan het gemiddelde der afzonderlijke onnauwkeurigheden: is $x_i = a_i + v_i h_i$, waarin $|v_i| \leq 1$ en $h_i > 0$ is, dan is $\bar{x} = \bar{a} + \bar{v} \bar{h}$ met $\bar{x} = n^{-1} \sum a_i$ enz. en $|\bar{v}| \leq 1$, waarbij de grenzen $\bar{v} = \pm 1$ kunnen worden bereikt. De onwaarschijnlijkheid dat alle $v_i = +1$ of $= -1$ zullen zijn, kan hier nog niet worden betoogd. Deze vereist namelijk méér informatie dan in de ongelijkheden $|x_i - a_i| \leq h_i$ alléén vervat is.

Om te laten zien dat waarnemingsreeksen veelal niet doeltreffend door hun gemiddelde gekarakteriseerd zijn, kan men gevallen beschouwen waarin het maximum (of het minimum) de belangrijkste kenmerkende grootheid is, met name de vraag of deze een bepaalde kritieke waarde al dan niet overschrijdt (hoogwaterstanden; ruïneringsmogelijkheid; knelpunten bij verschillende typen van verkeer, e.d.). Dit leidt tot beschouwing van het "bereik" ener waarnemingsreeks, d.i. het kleinste interval waarin alle waarden vervat zijn, en tot de vraag, hoe veelvuldig kleinere waarden over- (of onder-)schreden worden (voorbeeld: stukwerk; ieder stuk dat aan bepaalde kwaliteitseisen voldoet, wordt met een vast bedrag beloond; is dit niet het geval, dan moet een boete worden betaald). De frequentiequotiënten van niet-overschrijdingen van een bepaalde waarde geven de (cumulatieve) frequentie-verdeling, die aanschouwelijk kan wor-

den voorgesteld door voor elke waarneming een kaartje te maken waarvan de lengte met de (≥ 0 onderstelde) waargenomen waarde overeenkomt, en deze, naar niet-afnemende grootte gerangschikt, met op een vaste verticaal gelegen linker eindpunten op te stapelen. (Vgl. ook volgens grootte gerangschikte boontjes, grashalmen, recruten, enz.). Bij door afronding verkregen waarden zal men het polygoon door een continue functie vervangen. Van belang is, ook hier op te merken, dat men daarmee slechts schijnnaauwkeurigheid krijgt, daar de verloren informatie er niet door teruggewonnen kan worden; slechts als men uit andere informatiebronnen iets weet over de verdeling der afrondingsfouten heeft het zin een bepaalde kromme (of gebroken lijn) te kiezen. Hierbij laten zich geredelijk de mediaan en de quantilen (quartilen, decilen, percentilen, enz.) aansluiten. Met de spreiding (standaardafwijking) is dit niet zo zeer het geval, maar deze hééft nu eenmaal geen direct empirische betekenis. Men zou er eigenlijk goed aan doen (als dit niet zo zeer met de gebruiken in strijd was), gemiddelden (behalve in de bovengenoemde gevallen waar eigenlijk de sommen van belang zijn) alléén als globaal plaats bepalende parameters te bepalen als alle waarden in een klein interval gelegen zijn, en spreidingen als de verdelingen in goede benadering normaal zijn.

Het is nog van belang te vermelden, dat onlangs op het te Rio de Janeiro gehouden congres van het Institut International de Statistique door de mathematicus George Darmais en anderen sterke nadruk is gelegd op de noodzaak, dat het statistiek-onderwijs vóór alles in alle onderdelen duidelijk, begrijpelijk en eenvoudig dient te zijn. Anderzijds hebben o.a. zelfs weinig wiskundig georiënteerde beroeps-statistici als b.v. R.C. Geary nadrukkelijk betoogd: "Basic mathematics should be treated rigorously". Dit brengt o.a. met zich mee, dat men mathematische stellingen duidelijk zal scheiden van andere, b.v. empirische of filosofische beschouwingen en overal waar geen volgens de gebruikelijke normen exact bewijs wordt gegeven, nadrukkelijk zal vermijden, de schijn te wekken, alsof dit wel het geval ware.

10. Tenslotte nog enkele opmerkingen over de kansrekening, waarbij het wel duidelijk is, dat voor een grondige bespreking ten minste een geheel boekdeel zou zijn vereist.

Hier zal de leraar erop bedacht moeten zijn, dat hij, zodra hij hierover spreekt, van de zijde van leerlingen, collega's en vrienden met de zotste vragen naar berekening van kansen van zeer uitzonderlijke gebeurtenissen geconfronteerd zal worden. De leraar kan zich daartegen wapenen door het kansbegrip alléén dan als zinvol te erkennen, wanneer het betrekking heeft op een bepaalde verzameling van gebeurtenissen

("catégorie d'épreuves" volgens M. Fréchet). In een latere fase kan hij deze uitbreiden tot een verzameling van mogelijke gebeurtenissen ("eventualiteiten"), mits de werkelijk daaruit gerealiseerde gebeurtenissen daaruit ontstaan door een "aselect procédé", d.i. op een wijze, die in voldoende mate analoog is met een blindelingse trekking van een lot uit een loterijtrommel. Hij zal natuurlijk niet betogen, dat het werkelijke gebeuren een blindelingse trekking is, maar uitsluitend, dat het ten aanzien van onregelmatigheid en onvoorspelbaarheid voldoende (maar niet volkomen) gelijkenis met zulk een trekking vertoont.

Waarneembare grootheden - of ook kwalitatieve verschijnselen - worden dan gezien als de waarden van functies op deze verzameling; een werkelijk gedane waarneming is een functiewaarde, d.w.z. afhankelijk van diegene onder de mogelijke gebeurtenissen die werkelijk gebeurt. Waargenomen wordt een enkele functiewaarde (of een aantal functiewaarden); wiskundig behandelen kan men slechts de functie als zodanig. Deze bepalen elkaar beiderzijds niet ondubbelzinnig. Uit een nog zo groot (eindig) aantal functiewaarden kan men de functie nooit volledig leren kennen, en anderzijds zelfs, als men de functie kent, kan men wel haar waarde op een willekeurige gegeven eventualiteit berekenen, maar men weet niet, welke van deze eventualiteiten zich werkelijk zal voordoen, zodat men er nooit een ondubbelzinnige en exacte voorspelling uit kan afleiden. Deze functie en algemener iedere toepassing van wiskunde op ervaringwetenschappen worde gezien als het invoeren van een "mathematisch model" dat de werkelijkheid niet in alle details en volkomen exact, maar globaal en in voldoende benadering weergeeft. Ieder wiskundig bewijs heeft betrekking op dit model, maar laat, strikt genomen, geen conclusies toe over wat werkelijk zal worden waargenomen.

Een van de belangrijkste doeleinden van het statistiek onderwijs is het gewennen aan wat men "statistisch denken" kan noemen. D.w.z. het zien van een werkelijk aangenomen (of nog waar te nemen) gebeurtenis als één temidden van vele mogelijkheden; het beschouwen van een aselect procédé als één, waarbij - aansluitend bij Henri Poincaré, die evenwel het begrip "le hasard" gebruikt, dat men beter vermijdt - kleine oorzaken grote gevolgen hebben, d.w.z. dat, eenmaal gezien, door vele parameters bepaald is, en waarbij kleine veranderingen in de parameterwaarden tot grote veranderingen in de waargenomen uitkomsten kunnen leiden; en dat dientengevolge alléén zodanige verschijnselen berekenbaar, dus voorspelbaar zijn, die bij zulke kleine veranderingen zelf ook slechts kleine veranderingen ondergaan. Waar men doorgaans - en m.i. terecht - in het wiskunde-, en dan ook in het statistiek-onderwijs in eigenlijke zin filosofische, en met name levensbeschouwelijke vragen zal vermijden, zal men anderzijds het belangrijkste "epistemische" element in dit

onderwijs moeten zien als zijn fundamentele betekenis voor de algemene wetenschapsleer ("scientific method"), en in het bijzonder de wetenschapslogica, en, althans in de "Hogere" cursussen, beschouwingen van deze aard niet moeten schuwen. Merkwaardigerwijs is hier de taak van de mathematicus, met zo min mogelijk wiskunde, een denkbeeld en een overzicht te geven van noodzakelijkheden, mogelijkheden en typen van resultaten.