8693 NL S 183

STATISTISCHE MISCELLANEA OVER HET MENGEN VAN POEDERS

door Prof. Dr. J. Hemelrijk

1. Het probleem is in de eerste plaats technisch: hoe mengt men poeders zo doeltreffend mogelijk *). Hiervoor zijn vele apparaten ontworpen, die hier niet behandeld zullen worden. Zij berusten op roeren, schudden, draaien enz.
2. Nu is de uitdrukking „zo doeltreffend mogelijk" vaag zolang men het doel niet noemt, dat men treffen wil. Daar zal men dus terdege rekening mee moeten houden. Dit wordt nogal eens over het hoofd gezien en voor het moment gaan wij er ook nu nog aan voorbij, om eerst de vraag te behandelen, wat men met een mengmachine kan verwachten te bereiken. Het best bereikbare resultaat zullen wij (voorlopig) *een ideaal mengsel* noemen.
3. Deze term „ideaal mengsel" komt men in de literatuur over dit onderwerp vaak tegen en wel in verschillende betekenis. Achtereenvolgens kan men de volgende definities vinden:
a. Een ideaal mengsel is volkomen homogeen, d.w.z. ieder monster bevat de bestanddelen in dezelfde verhouding.
b. Een ideaal mengsel is een mengsel met de grootst mogelijke regelmaat.
c. Een ideaal mengsel is een mengsel, dat verkregen had kunnen worden door de deeltjes aselect te verdelen.
4. Kritische beschouwing van de definities: a en b zijn wel erg naïef, maar komen toch telkens weer terug (merkwaardigerwijze); a kan eigenlijk alleen bij een vloeistofmengsel gerealiseerd worden, als men de monsters tenminste niet te klein neemt; b betekent een structuur, zoals zich bij kristallen voordoet met de ionen. Dit gaat voor een mengsel veel te ver en is technisch niet te bereiken, het schiet zijn doel ook verre voorbij; c is veel beter, tenminste wat de bedoeling betreft. Strict genomen, nl. letterlijk opgevat, valt ieder mengsel eronder, want ieder mengsel *kan* verkregen worden bij aselecte verdeling, ook het meest onwaarschijnlijke. Dus volgens a zijn alleen sommige vloeistofmengsels ideaal, volgens b alleen kristalstructuren en volgens c alle mengsels.
5. Nu is het tekort van definitie c eenvoudig te corrigeren, indien men te werk gaat met een practische instelling. Daartoe beschouwen wij een eenvoudig mengsel, van twee componenten A en B, met gelijke korrelgrootte. De korrels verschillen b.v. alleen in kleur. Dit geval, hoewel practisch niet voorkomend, is toch niet helemaal onbelangrijk, daar het statistisch goed te beheersen is en in het laboratorium gerealiseerd kan worden, b.v. om mengmethodes op hun merites te onderzoeken. Wat kan men nu van een mechanische menger verwachten? Zo'n ding is in de regel kleurenblind en kan de korrels dus niet van elkaar onderscheiden. Gooit men nu eerst de A-korrels in het mengvat en dan de B-korrels, dan heeft men een slecht mengsel. Laat men vervolgens de machine draaien, dan blijft het mengsel slecht, zolang het nog op het beginmengsel lijkt en men kan niet méér van de machine verwachten, dan dat na enige tijd de toestand van het mengsel *niet meer van de begintoestand afhangt.* Immers de kleurenblinde machine kan de toestand van het mengsel — en dus ook de begintoestand — helemaal niet zien, het is hem allemaal om het even. Maar dit betekent, dat men niet meer kan verwachten dan aselecte verdeling der korrels over het mengsel, nl. verdeling onafhankelijk van hun kleur. Dit komt overeen met definitie c, maar de term aselect heeft nu betrekking op de *menger,* niet op het mengsel. Dit is een niet onbelangrijk onderscheid. Een *munt* kan zuiver zijn, niet het resultaat (b.v. kruis). Niettemin kan men een mengsel, afkomstig van een aselecte menger, een aselect (tot stand gekomen) mengsel noemen. Deze term is beter dan „ideaal".
6. Wenst men nu na te gaan of (resp. in hoeverre) een *menger* aselect is, dan neemt men één of meer door deze machine geleverde mengsels en onderzoekt deze door middel van monsters, die geanalyseerd worden.
Men kan daarbij (in het geval van gelijke korrels) de theorie van de binomiale en multinomiale verdelingen en de χ^2-verdeling toepassen en men kan dan gemakkelijk een coëfficiënt bedenken, die de menggraad van een dergelijk mengsel *schat.* Het is in de regel overbodig — en weinig zinvol — deze coëfficiënt zo ingewikkeld van karakter te maken, dat het veel werk kost hem te bepalen. Dit zou wellicht zinvol zijn, als in de eerste plaats één bepaald mengsel onderzocht moest worden, maar dit is niet zo, het gaat om de methode.
Voor zoverre men in de literatuur ingewikkelde coëfficiënten aantreft is dat een gevolg van het over het hoofd zien van deze finesse, die dus niet alleen spijkers op laag water zoeken is. Heeft men zo'n coëfficiënt gekozen, dan zij men er zich van bewust, dat deze een kansverdeling bezit (hij valt bij één mengsel anders uit dan bij een ander, ook van dezelfde menger), waarbij twee elementen te onderscheidden zijn: de invloed van de menger, daarbij inbegrepen de duur van het mengen, en die van het nemen der monsters. De eerste factor kan ook nog afhangen van de aard der componenten van het mengsel. Men kan nu echter statistische toetsen opstellen, b.v. van het χ^2 -type, om de hypothese te toetsen, dat de menger aselect werkt. De wijze van monsternemen beïnvloedt dan het onderscheidingsvermogen van deze toets. Het zou te ver voeren de technische details hiervan te beschrijven. De theorie is trouwens traditioneel. Hierover alleen nog enkele opmerkingen:
a. De theorie legt geen beperkingen op aan de plaatsen, waar de monsters genomen worden. Deze kan men dus b.v. systematisch over het mengvat verdelen.
b. De grootte der monsters heeft juist een belangrijke invloed op de mengcoëfficiënt en op de toets. Indien hier en daar kleine klontjes voorkomen, die zelf weer aselect over het mengsel verdeeld worden, zal men dit bij gebruik van monsters, die groot zijn ten opzichte van de klontjes, niet gauw ontdekken; maar wel als de monsters en de klontjes dezelfde orde van grootte hebben. De grootte der monsters moet daarom aangepast worden aan het *doel* van het mengsel, d.w.z. aan de practische gebruikswijze. Bij een *doel*treffende methode van onderzoek zal dit trouwens ook gelden voor de plaatsen, waar de monsters genomen worden.
c. Indien de klontering systematisch optreedt, kan de (hier niet in detail beschreven) χ^2-methode gebruikt worden om de grootte der klontjes te schatten. Dit kan bij fijnkorrelige poeders van belang zijn. Hetzelfde geldt voor het aantal korrels in een monster, indien er geen klontering is, maar de korrelgrootte onbekend is.
d. De duur van de menging, nodig om een mengsel te krijgen dat redelijkerwijze aselect genoemd mag worden, kan met behulp van deze methode (voor iedere menger en voor ieder stel componenten apart) onderzocht worden.
Uit dit alles blijkt, dat de statistische theorie reeds veel steun kan geven aan laboratorium-onderzoek van mengmethodes.

*) Rapport S 183 (V13) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

Overdruk uit Sigma 1 (1955) nr 6

7. Ter illustratie van de statistische methoden geven wij een voorbeeld dat met een plaatje duidelijk gemaakt kan worden.

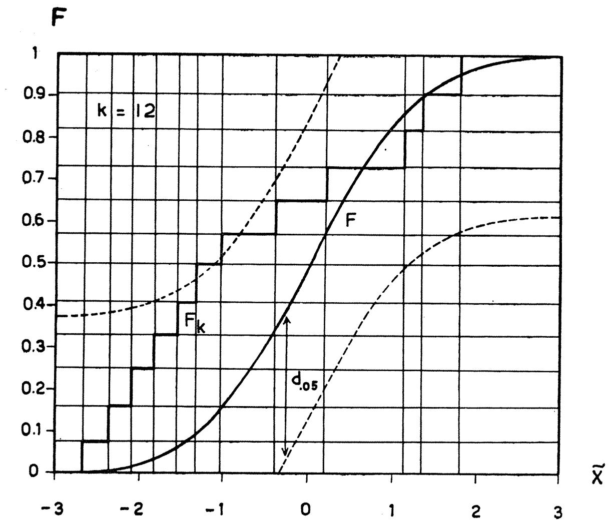

Fig. 1. Een grafische methode om de eigenschappen der monsters van een mengsel voor te stellen.

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j - \xi}{\sqrt{\dfrac{\xi(1-\xi)}{n_j}}} \qquad j = 1, \ldots, 12$$

ξ = gehalte component A

n_j = aantal korrels in monster j

$d_{.05}$ = MAX | F — F_K | voor $\alpha = .05$

F = normale verdelingsfunctie

De resultaten der analyses van de monsters ($x_1 \ldots x_{12}$ de in de monsters gevonden gehaltes aan component A) zijn cumulatief uitgezet (de traplijn F_K) na herleiding in zodanige vorm, dat zij min of meer dienen aan te sluiten bij een cumulatieve normale kromme (F). Men kan nu een bekende statistische methode gebruiken (van KOLMOGOROFF en SMIRNOFF) om twee (gestippelde) grenzen uit te zetten, waar F_k niet buiten behoort te komen behoudens een kans $\alpha = 0{,}05$ indien de menging aselect is. In de figuur is dit wel zo, dus wordt geconcludeerd, dat de menging niet aselect is geweest. Men ziet echter in de figuur tevens, waar dit aan ligt: er zijn te veel monsters met een klein A-gehalte. Daardoor loopt F_k in het begin te steil op. Op deze wijze verkrijgt men een aardig overzicht over de metingen. Nadeel van deze methode: ξ, het totale A-gehalte, moet bekend zijn.

8. Tenslotte een methode, geschikt voor een speciaal doel, die toepasbaar is op alle soorten mengsels, zonder beperking voor de korrelgrootten. Het punt van onderzoek is, of één der componenten van een mengsel, b.v. A (het kan voor iedere component apart onderzocht worden) in een bepaalde richting, b.v. naar beneden, „uitgezakt" is. Dit kan, bij oorspronkelijk aselect mengen, door schudden, b.v. bij transport, optreden. Om te onderzoeken of dit het geval is, neemt men nu een aantal monsters uit k verschillende lagen van het mengsel (dat b.v. in een pakje zit) en bepaalt voor ieder van deze monsters het gehalte A: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ in volgorde der lagen. Vervolgens berekent men de grootheid

$$d = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + kx_k}{(1 + 2 + \ldots + k)\,\overline{x}} - 1$$

die gelijk aan nul is als alle x_i dezelfde waarde bezitten, groter dan nul als er een toenemend verloop is en kleiner dan nul als het afnemend is. Van deze grootheid d, die dus een maat voor de doorzakking in de onderzochte richting is, kan men nu de kansverdeling bij aselecte menging berekenen. Dan zijn nl. alle permutaties der x_i even waarschijnlijk. Op grond hiervan kan dus de hypothese, dat het mengsel aselect is, getoetst worden met (positieve of negatieve) doorzakking als alternatieve hypothese. Immers speciaal dan zal de toets tot verwerping leiden. Men kan deze toets dus reeds op de resultaten van één pakje toepassen. Men zal er daarbij echter rekening mee moeten houden dat andere afwijkingen dan doorzakking, b.v. niet aselect over het pakje verdeelde klontering, de spreiding van d zullen vergroten, hetgeen de toets ongeldig maakt, ook als er geen doorzakking is. Aan deze moeilijkheid kan echter ook tegemoet gekomen worden. Meet men nl. op deze wijze een aantal mengsels door, dan kan men de gevonden waarden van d, na een hier niet te bespreken standaardisering, vergelijken met de theoretische verdeling, om de gestelde hypothese te toetsen. Is deze niet juist, dan zal een verschuiving naar de positieve of naar de negatieve kant waar te nemen zijn. Men zal dus speciaal op verschuivingen moeten letten en bij toetsing een toets moeten gebruiken, die wel reageert op verschuiving doch niet of nauwelijks op vergroting van de spreiding. Dit is echter zeer wel mogelijk, b.v. door van een symmetrietoets gebruik te maken. Ook is de verdeling van d bij benadering normaal als de te toetsen hypothese vervuld is en men kan dus b.v. de toets van Student voor de hypothese, dat het gemiddelde gelijk aan nul is, gebruiken. Daarbij wordt dan de theoretische spreiding van d vervangen door de schatting, die uit de waarnemingen verkregen wordt. Deze methode is minder exact dan de eerstgenoemde.

9. Een belangrijke vraag is bij dit probleem verder het vergelijken van twee partijen van pakjes van mengsels op hun doorzakking. Daarbij wordt dus niet getoetst of deze gelijk aan nul is, maar of hij voor beide partijen dezelfde is, d.w.z. dezelfde verdeling bezit. Men mengt b.v. de pakjes oorspronkelijk op dezelfde wijze, maar behandelt ze daarna verschillend: b.v. door verschillende duur of wijze van transport. De vraag is nu, of de doorzakking bij de toegepaste wijzen van behandeling gelijk is of niet. In deze situatie is van de verdeling der doorzakkingscoëfficiënten niets bekend. De menging behoeft zelfs niet aselect geweest te zijn (dat was het vorige punt) en zelfs al was dit wel zo, dan is de toestand na de behandeling niet meer dezelfde als daarvoor. Hier komt nu de verdelingsvrije statistiek goed van pas. Wij kunnen nl. met behulp van de toets van WILCOXON voor twee waarnemingsreeksen, of van een andere toets voor hetzelfde probleem, toch toetsen of de beide behandelingsmethoden æquivalent zijn wat hun invloed op de doorzakking betreft. Is dat zo, dan is nl. de (onbekende) kansverdeling van d voor beide partijen gelijk en dit kunnen wij met de genoemde toets onderzoeken, onafhankelijk van de vorm van die verdeling, door deze toets toe te passen op twee reeksen waarnemingen van d, verkregen uit steekproeven van pakjes uit beide partijen.

10. Indien deze weinig technische en summiere notities de lezer een indruk gegeven hebben van enkele toepassingsmogelijkheden van de statistiek op het probleem van mengen van poeders, dan hebben zij ruimschoots hun doel bereikt. Verdere uitwerking van de vermelde methoden en literatuurverwijzingen kan men in de volgende rapporten vinden: J. Hemelrijk, Statistical methods applied to the mixing of solid particles I, Rapport S 159, 1954. R. Doornbos, Idem II, Rapport S 184, 1955. Rapporten van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.