MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 205

Over keuring van bromfietsen

door

Gerda Klerk-Grobben

Juli 1956

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Inleiding

In dit rapport wordt een toets behandeld, die gebruikt kan worden bij de keuring van series artikelen waarvan een bepaalde grootheid, $\underline{x}$, een aangegeven waarde, A, niet mag overschrijden. Hierbij is ondersteld dat de betreffende grootheid met voldoende benadering een normale kansverdeling bezit over elke serie. Verder is aangenomen dat men bij de keuring hoogstens een kans 0,05 wil lopen om een serie artikelen goed te keuren, waarvan meer dan 15% de grootheid $\underline{x}$ een waarde groter dan A bezit, 0,05 is dan de onbetrouwbaarheid van de toets. Voor deze kans 0,05 en het percentage 15% kunnen andere waarden gekozen worden. Dit rapport ontstond in verband met een eventuele keuring van series bromfietsen waarvan de maximum snelheid niet meer dan 40 km/uur mag bedragen; voor A is daarom de waarde 40 gebruikt.

Bij enkele berekeningen over het onderscheidingsvermogen van de toets werden voor de spreiding van de normale verdeling (die onbekend is) de waarden 2,5 en 5 gebruikt, welke bij bromfietsen waarschijnlijk reeds aan de hoge kant zijn.

In verband met de beschikbare tabellen over de niet-centrale t-verdeling (N.L. JOHNSON and B.L. WELCH, Biometrika, 31 (1940), pp. 362-389) moest 5 als minimaal aantal exemplaren in een steekproef worden gekozen.

2. Toetsingsgrootheid en de te toetsen hypothese

De maximum snelheid van een bromfiets wordt voorgesteld door $\underline{x}$. De te toetsen hypothese H_0 bij de keuring van een serie luidt dan dat de kans dat $\underline{x}$ groter dan 40 km/uur is, niet meer dan 15% bedraagt; in formule:

$$H_0: \quad P\left[\underline{x} > 40\right] \leq 0,15 \; . \tag{2;1}$$

Wij onderstellen nu dat $\underline{x}$ een normale verdeling bezit met gemiddelde μ en spreiding σ (beide onbekend), aan te geven door $N(\mu;\sigma)$. H_0 kan dan in de vorm

$$H_0: \quad (40-\mu)/\sigma \geq k_{0,15} \tag{2;2}$$

geschreven worden, waarin $k_{0,15}$ die waarde uit de $N(0;1)$-verdeling is met een overschrijdingskans 0,15. Uit tabellen van de $N(0;1)$-verdeling blijkt dat $k_{0,15} = 1,036434$.

Uit de serie bromfietsen wordt nu een steekproef van n exemplaren genomen die dus n bepalingen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ van $\underline{x}$ zullen opleveren. Uit deze waarneming berekent men dan

$$\underline{\bar{x}} = \Sigma \underline{x}_i / n \quad \text{en} \quad \underline{s} = \left[\Sigma(\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2/(n-1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

en hieruit de toetsingsgrootheid:

$$(2;3) \qquad \underline{t} = \sqrt{n}(\underline{\bar{x}}-40)/\underline{s} \ .$$

Deze kan ook in de vorm

$$\underline{t} = \frac{\sqrt{n}(\underline{\bar{x}}-\mu)/\sigma + \sqrt{n}(\mu-40)/\sigma}{\underline{s}/\sigma}$$

geschreven worden; hierin bezit dan $\sqrt{n}(\underline{\bar{x}}-\mu)/\sigma$ een $N(0;1)$-verdeling en $(n-1)\underline{s}^2/\sigma^2$ een hiervan onafhankelijke χ^2-verdeling met n-1 vrijheidsgraden. De toetsingsgrootheid $\underline{t}$ bezit daarom een niet-centrale t-verdeling met als parameters: $f = n-1$ (aantal vrijheidsgraden) en $\delta = \sqrt{n}(\mu-40)/\sigma$ (excentriciteit). Dit geldt voor alle mogelijke waarden van μ en σ, dus zowel wanneer μ en σ voldoen aan de hypothese H_0 (2;2) als wanneer ze aan een alternatieve hypothese voldoen. Volgens H_0 (2;2) geldt nu voor δ:

$$(2;4) \qquad H_0: \ \delta \leq -\sqrt{n}\, k_{0,15} \ ;$$

onder een alternatieve hypothese is dus

$$\delta > -\sqrt{n}\, k_{0,15} \ .$$

Voor grotere waarden van δ zullen grotere waarden van de toetsingsgrootheid $\underline{t}$ vaker gaan optreden, dan bij kleinere δ; voor de toetsing van H_0 zal dus een <u>rechter kritiek gebied</u> voor $\underline{t}$ gebruikt moeten worden.

Met behulp van tabel V van JOHNSON en WELCH is nu bij verschillende waarden van n de kritieke waarde t_0 voor $\underline{t}$ berekend, waarvoor geldt:

$$P\left[\underline{t} > t_0 \middle| f = n-1;\ \delta = -\sqrt{n}\, k_{0,15}\right] = 0{,}05 \ .$$

Het gedeelte in het linkerlid achter de verticale streep geeft aan dat t_0 bepaald is in de onderstelling dat f en δ de aangegeven waarden bezitten. Voor een kleinere δ wordt dan deze kans bij een zelfde waarde t_0 kleiner dan 0,05. Door nu de hypothese H_0 te verwerpen zodra de toetsingsgrootheid $\underline{t}$ een waarde aanneemt die groter is dan de bijbehorende kritieke waarde t_0, is een toets met onbetrouwbaarheid 0,05 verkregen.

In tabel V van JOHNSON en WELCH is niet rechtstreeks t_o als functie van n en δ getabelleerd (bij $\varepsilon = 0,05$), maar een grootheid λ als functie van $f = n - 1$ en $\eta' = (\delta/\sqrt{2f})/\sqrt{1+\delta^2/(2f)}$. t_o kan dan hiermee berekend worden volgens de formule

$$t_o = \frac{\delta + \lambda\left[1 + \delta^2/(2f) - \lambda^2/(2f)\right]^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda^2/(2f)} \quad .$$

Een en ander is weergegeven in tabel 1.

3. Onderscheidingsvermogen

De kans dat een serie die voldoet aan de hypothese H_o wordt afgekeurd is dus hoogstens 0,05. Wat is nu de kans op afkeuring voor een serie die niet aan de hypothese H_o voldoet maar aan een alternatieve hypothese H, waarbij dus, zoals in de vorige paragraaf bleek, $\delta > -\sqrt{n}\, k_{0,15}$ is. Deze kans, het onderscheidingsvermogen van de toets ten opzichte van de alternatieve hypothesen, is een functie van de waarde δ_1 van δ.

$$P\left[\underline{t} > t_o \,\middle|\, f=n-1;\ \delta=\delta_1 > -\sqrt{n}\, k_{0,15}\right]$$

(en natuurlijk van f en t_o).

In verband met de inrichting van tabel IV van JOHNSON en WELCH kan niet bij een gegeven waarde van δ het onderscheidingsvermogen bepaald worden, maar wel omgekeerd de waarde van δ welke bij bepaalde waarden van het onderscheidingsvermogen behoort. Het onderscheidingsvermogen is de waarde van ε vermeld boven de tabellen IV. In de tabellen van JOHNSON en WELCH is weer λ getabelleerd als functie van $y = \left[1+t_o^2/(2f)\right]^{-\frac{1}{2}}$ of van $y' = yt_o/\sqrt{2f}$ (als $y \geq 0,80$ is) en van f. Hieruit volgt dan δ met $\delta = t_o - \lambda/y$.

Voor een waarde van het onderscheidingsvermogen $\varepsilon > 0,5$ bijvoorbeeld $\varepsilon = 0,90$ moet de tabel bij $\varepsilon = 0,10$ gebruikt worden met $-t_o$ in plaats van t_o . De hieruit bepaalde δ heeft dan het tegengestelde teken maar dezelfde waarde als de δ bij $\varepsilon = 0,90$. Voor 2 waarden van het onderscheidingsvermogen is zo de waarde van δ bepaald: $\varepsilon = 0,50$, tabel 2 en $\varepsilon = 0,90$, tabel 3.

Bij een bepaalde waarde van δ kan $(40-\mu)/\sigma = -\delta/\sqrt{n}$ berekend worden. Wordt nu een bepaalde onderstelling omtrent σ gemaakt (bijvoorbeeld $\sigma = 2,5$ of $\sigma = 5$) dan is hiermee ook μ vastgelegd en dus de normale verdeling, waar μ en σ resp. gemiddelde en spreiding van zijn. Voor deze verdeling kan dan het 15% punt bepaald worden, dus de waarde voor deze verdeling met een overschrijdingskans 0,15. Is dit 15% punt nl. b dan moet $(b-\mu)/\sigma = 1,0364$ (het 15% punt van de N(0;1)-verdeling) en dus is $b = \sigma . 1,0364 + \mu$.

Tabel 1. Rechtséénzijdige kritieke waarden t_o voor de toetsingsgrootheid $t=\sqrt{n}(\underline{x}-40)/\underline{s}$ (onbetrouwbaarheid $\leqq 0{,}05$)

n	$\sqrt{n}$	$\delta = -1{,}0364\sqrt{n}$	$f = n-1$	$\frac{\delta^2}{2f}$	$\frac{\delta}{\sqrt{2f}}$	$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{2f}} / \sqrt{1+\frac{\delta^2}{2f}}$	λ (tabel V)	$\frac{\lambda^2}{2f}$	$t_o = \frac{\delta+\lambda(1+\frac{\delta^2}{2f}-\frac{\lambda^2}{2f})^{\frac{1}{2}}}{1-\lambda^2/2f}$
5	2,2361	-2,317	4	0,671	-0,819	-0,633	1,604	0,322	-0,67
6	2,4495	-2,539	5	0,645	-0,803	-0,626	1,603	0,257	-0,88
7	2,6458	-2,742	6	0,627	-0,792	-0,621	1,602	0,214	-1,07
8	2,8284	-2,931	7	0,614	-0,784	-0,617	1,603	0,184	-1,24
9	3,0000	-3,109	8	0,604	-0,777	-0,614	1,604	0,161	-1,41
17	4,1231	-4,273	16	0,571	-0,756	-0,603	1,611	0,0811	-2,51

Tabel 2. De alternatieve waarde van δ ten opzichte waarvan de toets een onderscheidingsvermogen $\varepsilon = 0{,}50$ bezit

$f = n - 1$	t_o	$\frac{t_o^2}{2f}$	$y = \left[1+\frac{t_o^2}{2f}\right]^{-\frac{1}{2}}$	$y' = yt_o/\sqrt{2f}$	λ, $\varepsilon = 0{,}50$ (tabel 1V)	$\delta = t_o - \frac{\lambda}{y}$
4	-0,67	0,0561	0,973	-0,2305	-0,040	-0,63
5	-0,88	0,0774	0,963	-0,2680	-0,042	-0,84
6	-1,07	0,0954	0,955	-0,2950	-0,043	-1,02
7	-1,24	0,1098	0,949	-0,3145	-0,043	-1,19
8	-1,41	0,1260	0,942	-0,3321	-0,043	-1,36
16	-2,51	0,1969	0,914	-0,4056	-0,037	-2,47

Tabel 3. De alternatieve waarde van δ ten opzichte waarvan de toets een onderscheidingsvermogen 0,90 bezit.

f=n-1	$-t_o$	y	y'	λ, ε = 0,10 (tabel IV)	$\delta = \frac{\lambda}{y} - t_o$
4	0,67	0,973	0,2305	1,317	0,304
5	0,88	0,963	0,2680	1,319	0,200
6	1,07	0,955	0,2950	1,319	0,117
7	1,24	0,949	0,3145	1,319	0,053
8	1,41	0,942	0,3321	1,319	-0,003
16	2,51	0,914	0,4056	1,314	-0,446

Tabel 4. Het 15% punt en de fractie met een maximum snelheid > 40 km/uur van een serie ten opzichte waarvan de toets een onderscheidingsvermogen 0,50 bezit.

n	$(40-\mu)/\sigma =$ $= -\delta/\sqrt{n}$	σ = 2,5		σ = 5		fractie met x > 40
		μ	15% punt = =σ.1,0364+μ	μ	15% punt = =σ.1.0364+μ	
5	0,28	39,30	41,9	38,60	43,8	0,39
6	0,34	39,15	41,8	38,30	43,5	0,37
7	0,39	39,03	41,6	38,05	43,3	0,35
8	0,42	38,95	41,5	37,90	43,1	0,34
9	0,45	38,88	41,5	37,75	43,0	0,33
17	0,60	38,50	41,1	37,00	42,2	0,27

Tabel 5. Het 15% punt en de fractie met een maximum snelheid > 40 km/uur van een serie ten opzichte waarvan de toets het onderscheidingsvermogen 0,90 bezit.

n	$(40-\mu)/\sigma =$ $= -\delta/\sqrt{n}$	σ = 2,5		σ = 5		fractie met x > 40
		μ	15% punt = = σ.1,0364+	μ	15% punt = = σ.1,0364+μ	
5	-0,30	40,8	43,4	41,5	46,7	0,62
6	-0,20	40,5	43,1	41,0	46,2	0,58
7	-0,12	40,3	42,9	40,6	45,8	0,55
8	-0,05	40,1	42,7	40,3	45,5	0,52
9	+0,003	40,0	42,6	40,0	45,2	0,50
17	+0,45	38,9	41,5	37,7	43,0	0,33

Bij een bepaalde waarde van δ dus van $(40-\mu)/\sigma$ kan, zonder onderstelling omtrent σ, bepaald worden hoe groot de fractie exemplaren met $x > 40$ uit de serie, die aan deze alternatieve hypothese voldoet, ongeveer zal zijn. Dit is namelijk gelijk aan de overschrijdingskans van de waarde van $(40-\mu)/\sigma$ in de $N(0;1)$-verdeling. Tabel 4 en 5 geven de berekeningen bij de boven gebruikte waarden van het onderscheidingsvermogen.

4. Samenvatting

Wordt bij de keuring van een serie bromfietsen een steekproef met bijvoorbeeld 5 exemplaren gebruikt; wordt als toetsingsgrootheid $\underline{t}$ (2;3) genomen en als rechter kritieke waarde $t_o = -0{,}67$ (tabel 1), dan zal een serie waarin hoogstens 15% der bromfietsen een hogere maximum snelheid heeft dan 40 km/uur hoogstens met kans 0,05 worden afgekeurd, terwijl een serie waarin 39% (resp. 62%) en maximum snelheid groter dan 40 km/uur heeft een kans 0,50 (resp. 0,90) heeft om afgekeurd te worden (tabel 4 en 5). Is de spreiding van de maximum snelheid in een serie ongeveer 2,5 km/uur dan betekent dit dat een serie waarin ongeveer 15 % een maximum snelheid groter dan 41,9 km/uur bezit een kans 0,50 heeft om afgekeurd te worden en een serie, waarin het 15% punt bij 43,4 km/uur ligt, zelfs een kans 0,90.

Alle kansen zijn berekend onder het voorbehoud dat de verdeling van de maximum snelheid voor een serie bromfietsen voldoende nauwkeurig met een normale verdeling benaderd kan worden.