MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Adviseur voor Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Bijdrage II

Mathematisch Centrum

2. Extrapolatie van de frequentielijn der hoge waterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen

door

Prof. Dr D. van Dantzig
en
Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 226

1958

Bijdrage II - Mathematisch Centrum

2. Extrapolatie van de frequentielijn der hoge waterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen

door

Prof. Dr D. van Dantzig en Prof. Dr J. Hemelrijk

2.1 Inleiding

In de zomer van 1953 verzocht de Deltacommissie het Mathematisch Centrum een statistisch onderzoek in te stellen naar de frequenties van stormvloedstanden van verschillende hoogten. Dit onderzoek werd door de schrijvers van dit rapport verricht, met assistentie van verschillende leden van de staf van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, in het bijzonder de heren Drs H. Kesten en Drs J.Th. Runnenburg.

Dit rapport behelst een overzicht van de methode, alsmede de overwegingen die tot de keuze daarvan geleid hebben en de resultaten van de analyse. Deze worden in het hoofdgedeelte globaal, en zoveel mogelijk op algemeen begrijpelijke wijze uiteengezet, terwijl de wiskundige preciseringen door Drs J.Th. Runnenburg in een aanhangsel zijn samengevat.

2.2 Het waarnemingsmateriaal; de keuze van Hoek van Holland

Het beschikbare waarnemingsmateriaal bestaat uit waargenomen hoogwaterstanden (te vinden in de Jaarboeken der Waterhoogten van de Algemene Dienst van de Rijkswaterstaat) 1) voor verschillende plaatsen langs de kust en in de zeearmen. Van deze plaatsen is Hoek van Holland - althans voor Centraal Holland en Zeeland - het geschiktste punt om de invloed van de Noordzee op de kust te onderzoeken. Het is centraal gelegen en de peilschaal bevindt zich dicht bij de kust, waardoor de storende invloeden, die zich verderop in rivieren en zeearmen voordoen, daar niet of althans het minst aanwezig zijn. Het onderzoek werd daarom voor Hoek van Holland uitgevoerd.

De beschikbare waarnemingen strekten zich uit over de jaren 1888 tot en met 1956. De in dit rapport gegeven resultaten berusten op onge-

---

1) Een hoogwaterstand (afkorting: H.W.) is de hoogste stand, die gedurende een periode van hoogwater wordt bereikt.

veer 49000 hoogwaterstanden. Van het aanbrengen van een bodemdalingscorrectie op de waarnemingen werd afgezien, omdat 1e deze correctie zeer onzeker zou zijn en 2e zijn invloed op de - voor dit onderzoek belangrijkste - hoge H.W.'s relatief zeer gering is. Dit geldt uiteraard niet meer indien men, bij extrapolatie, rekening wenst te houden met de bodemdaling in toekomstige perioden. Het is echter beter dit probleem afzonderlijk te beschouwen en het niet onder één hoofd te brengen met de onderzoekingen naar de hoogwateroverschrijdingslijn, die hier worden behandeld. De bodemdaling wordt wèl in rekening gebracht bij de in [2] beschreven ekonomische beschouwingen.

Naast de hoogwaterstanden zijn de astronomische standen (voorspelde standen volgens de getijtafels) beschikbaar. Het verschil tussen een waargenomen en de voorspelde hoogwaterstand (die dus niet precies op hetzelfde moment behoeven te vallen) wordt de <u>opzet</u> genoemd.

2.3 De frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden

De empirische frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden is in fig. 2.3.1 aangegeven. Op de horizontale as is daarbij de hoogte aangegeven (in m boven NAP) en op de vertikale - op logarithmische schaal - het gemiddeld aantal overschrijdingen van de beschouwde hoogte per jaar. De hoogste waargenomen waterstand is 3,85 m (1 februari 1953); het bijbehorende aantal overschrijdingen per jaar is 1/69 = 0,0145. De daarop volgende is 3,28 m (22 december 1894) met gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar 2/69 = 0,0290.

In 1939 introduceerde Ir P.J. Wemelsfelder [10] 1) deze statistische behandeling van hoogwaterstanden. Waar in het verleden veelal de hoogte van een te bouwen of te verhogen dijk werd gebaseerd op de hoogste <u>tot dan</u> waargenomen waterstand, betoogde Wemelsfelder terecht, dat men ook met hogere waterstanden dan de waargenomene rekening dient te houden en dat deze op de lange duur elk met een bepaalde frequentie voorkomen. Bij uitzetten van de toen beschikbare gegevens voor Hoek van Holland op de boven beschreven wijze, verkreeg hij een rij punten, die voor niet te geringe hoogte bij goede benadering op een

----

1) Cijfers tussen vierkante haken corresponderen met die van de volledige literatuurlijst van deze bijdrage II 2, die aan het eind is opgenomen.

rechte lijn lagen. Uit fig. 2.3.1 blijkt, dat dit ook voor de momenteel beschikbare waarnemingen boven 1,50 m het geval is. De hoogste waterstanden wijken echter merkbaar van de rechte lijn af en wel naar boven. Hoewel dit mogelijkerwijze aan hun geringe aantal te wijten is, zullen wij later zien, dat ook het niet-homogene karakter van dit waarnemingsmateriaal er de oorzaak van kan zijn.

Vervangt men de waargenomen punten door een zo goed mogelijk daarbij aansluitende rechte lijn als (voorlopige) "theoretische verdeling", dan blijkt dat bij een hoogteverschil van 0,55 m een frequentieverhouding 1:10 behoort; dit hoogteverschil wordt daarom de "(frequentie)decimeringshoogte" genoemd. De overeenkomstige "(frequentie)halveringshoogte" is ${}^{10}\log 2 = 0{,}301$ maal zo groot, dus 0,166 m, de "(frequentie)Napiereringshoogte" is ${}^{10}\log e = 0{,}434$ maal zo groot als de decimeringshoogte, dus 0,239 m.

2.4 Methoden

De waarnemingen van fig. 2.3.1 en daaraan analoge figuren, moeten wij, speciaal met het oog op extrapolatie naar hoge hoogwaterstanden, aanzienlijk buiten het gebied der tot nu toe waargenomen standen, vervangen door een bij die waarnemingen aanpassende continue kromme, ondanks alle bekende tegen extrapolatie in te brengen bezwaren (vgl. § 2.6).

Indien wij (dit wordt later besproken) de hoogwaterstanden als onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling mogen beschouwen, dan geeft deze kromme (op een bekende constante factor na, namelijk het totale aantal optredende hoogwaterstanden per jaar) de kans op overschrijding van een waterpeil h bij één bepaalde hoogwaterstand. Bij de bepaling van de kromme dienen we daarom het volgende in aanmerking te nemen. Voor lage hoogwaterstanden wordt de kromme vrij nauwkeurig door de waarnemingen vastgelegd, daar hierbij voldoende waarnemingen beschikbaar zijn. Bij de hogere hoogwaterstanden daarentegen moet het juiste verloop van de kromme uit een gering aantal waarnemingen geschat worden, die door stochastische fluctaties aanzienlijk van de kromme kunnen afwijken en bovendien door de gevolgde methode van uitzetten ver uiteenliggen. Desondanks lijkt het niet onredelijk betreffende die onbekende kromme uit de waarnemingen de volgende conclusies te trekken.

De kromme, die wij zoeken, bevat een bij benadering rechtlijnig gedeelte. De figuur doet denken aan een kromme, die een asymptoot heeft, die in een aanzienlijk deel van het waarnemingsgebied weinig van de kromme afwijkt. In werkelijkheid mag men niet onderstellen, dat de kromme inderdaad deze lijn als asymptoot bezit, d.w.z. dat zij zich bij willekeurig hoge peilen met onbeperkt toenemende nauwkeurigheid bij deze rechte zou gaan aansluiten. Integendeel, er zijn bepaalde argumenten, die er op kunnen wijzen, dat de hoogwateroverschrijdingslijn voor nog veel hogere peilen naar beneden moet afbuigen. Wij zien echter hiervan af, daar dit uit de thans beschikbare waarnemingen niet blijkt (vgl. § 2.12); eerder wordt een afwijking naar boven gesuggereerd, weshalve voor het bij de extrapolatie in aanmerking komende interval rechtlijnige voortzetting in de rede ligt. Wanneer wij dus hier van "asymptoot" spreken, bedoelen we daarmee alleen dat gedeelte van de kromme, waarvan men redelijkerwijs mag aannemen, dat het ook binnen het extrapolatiegebied nog bij vrij goede benadering met een rechte overeenstemt.

Dit alles betekent, dat wij voor ons doel kunnen volstaan met het schatten van de juiste ligging van de asymptoot. Wij zoeken dus naar een rechte lijn, die we ook wel met frequentielijn zullen aanduiden, die goed bij het rechtlijnige gedeelte der figuren past, maar bij de lagere hoogwaterstanden aanzienlijk mag en zal afwijken. Ook de hoogste waargenomen hoogwaterstanden zullen niet op een dergelijke lijn liggen, doch dit is gezien de grote stochastische fluctaties in die standen te verwachten.

Bij de definitieve schatting van de asymptoot (zie § 2.8 en volgende en Aanhangsel § 2.3) zullen wij, overwegende dat uit de figuren met niet te grote onnauwkeurigheid blijkt, vanaf welk niveau de "asymptoot" redelijk bij de waarnemingen past, de waarnemingen beneden dat niveau buiten beschouwing laten en met de waarnemingen boven dat niveau de "asymptoot" bepalen. Wanneer wij later spreken over het "beginpunt" van die rechte bij dat niveau, dan is dat alleen bedoeld in die zin, dat deze rechte met behulp van de waarnemingen boven dat niveau geschat is. Beschouwen wij na de schatting van de asymptoot alleen de waarnemingen, die boven een gegeven peil liggen, in het gebied waarin de rechte goed bij de waarnemingen past, dan kunnen wij de benadering, die nu voor de verdelingsfunctie met die rechte gevonden is, interpreteren als een benadering van de verdelingsfunctie der hoogwaterstanden vanaf dat beginpunt met een zogenaamde exponentiële verdeling. Aan deze interpretatie zullen wij verdere statistische beschouwingen verbinden. Alvorens hiertoe over te gaan, zullen wij nog enige andere methoden bespreken.

Hoewel de waarnemingen de toepassing van de zojuist besproken methode suggereren, dient men toch te overwegen, of ook andere veronderstellingen met deze waarnemingen te rijmen vallen en in het bijzonder of deze andere veronderstellingen, bij extrapolatie naar hogere waarden van H.W. (een punt dat later ter sprake komt), tot andere resultaten zouden leiden. Daarvoor komt dan in de eerste plaats de zogenaamde logarithmisch normale verdeling in aanmerking, die in de literatuur herhaaldelijk vermeld wordt als een geschikte verdeling bij problemen van analoge aard als het onderhavige. In ons geval echter valt aan te tonen (zie Aanhangsel, § 2.2), dat weliswaar ook deze verdeling goed aan de waarnemingen aangepast kan worden, doch dat de verkregen lijn dan niet of nauwelijks van de door ons gebruikte rechte lijn is te onderscheiden, ook niet bij extrapolatie tot b.v. 6 m hoogte[1]. De exponentiële verdeling geeft dus resultaten, die in het door de waarnemingen bestreken interval ook bij benadering in overeenstemming zijn met de veronderstelling van een logarithmisch normale verdeling. De eerstgenoemde verdeling is echter wiskundig veel beter hanteerbaar en wezenlijk bevredigender, daar zij tot minder willekeur bij de aanpassing en de extrapolatie aanleiding geeft, omdat zij van slechts één aan de waarnemingen aan te passen parameter afhangt. Daarom werd aan de exponentiële verdeling de voorkeur gegeven. De mate van aanpassing werd bovendien in een later stadium nog onderzocht met behulp van een daarvoor gangbare statistische methode. Het resultaat (zie Aanhangsel § 2.4) is zeer bevredigend.

Voorts komt de door M. Fréchet (1927) en R.A. Fisher en L.H.C. Tippett (1928) afgeleide verdeling der uiterste waarden in aanmerking, die door E.J. Gumbel (1934 en later) belangrijk is uitgebreid en op velerlei problemen, waaronder ook hydrologische, is toegepast ([6], [5] en [7]). In het onderhavige geval bestaat de toepassing hiervan daarin, dat men de jaarmaxima bepaalt, en deze op z.g. "Gumbel-papier" uitzet. Dit papier heeft op de vertikale as een lineaire en

---

1) Ditzelfde geldt voor vrijwel iedere verdeling, waarin een voldoende groot aantal parameters voorkomt, die aangepast kunnen worden.

op de horizontale as een dubbel-logarithmische schaal en als de jaarmaxima beschouwd zouden kunnen worden als de grootste waarnemingen uit onderling onafhankelijke waarnemingsreeksen, die alle dezelfde verdeling bezitten, dan zouden deze jaarmaxima op dit papier bij benadering een rechte lijn moeten volgen. Dit geldt ook, als de uitgangsverdeling der hoogwaters niet een exponentiële is, doch één van het zogenaamde "exponentiële type" waaronder behalve de exponentiële onder andere ook de normale (de verdeling van Laplace-Gauss) en de logarithmisch normale vallen.

Inderdaad (zie fig.2.4.1) liggen de jaarmaxima, op Gumbel-papier [8] uitgezet, zodanig, dat een rechte lijn aangepast zou kunnen worden. Deze methode heeft echter, in vergelijking met het gebruik van de exponentiële verdeling, het nadeel, dat slechts van 69 jaarmaxima gebruik wordt gemaakt, waardoor een niet onbelangrijk deel der in de waarnemingen vervatte informatie ongebruikt blijft. Bovendien kan worden bewezen (Aanhangsel, § 2.8), dat in het gebied, dat voor ons probleem van belang is (ongeveer van 2 tot 6 m boven NAP), de methode van Gumbel en het gebruik van de exponentiële verdeling, indien gebaseerd op dezelfde waarnemingspunten (b.v. de jaarmaxima alleen), tot hetzelfde resultaat leiden. Voor de exponentiële methode zijn echter meer waarnemingen bruikbaar dan de jaarmaxima alleen, zodat deze methode tot nauwkeuriger uitkomsten zal leiden.

Daarom is het verdere betoog gebaseerd op de veronderstelling van een exponentiële verdeling der hoogwaterstanden, terwijl de methode van Gumbel alleen incidenteel nog te pas komt om een bepaald punt van het betoog te ondersteunen.

2.5 Hoogwaterstanden of opzetten?

Bij de statistische verwerking moest verder beslist worden of de hoogwaterstanden zelf beschouwd zouden worden dan wel de daarbij behorende opzetten. Beschouwt men de opzetten, dan wordt de invloed van het astronomisch getij - althans ten dele - bij de statistische analyse geëlimineerd, hetgeen wellicht tot nauwkeuriger uitkomsten zou kunnen leiden. Nu blijkt echter, indien men de opzetten op dezelfde wijze uitzet als in fig.2.3.1 met de hoogwaterstanden is gedaan, dat een lijn wordt verkregen die evenwijdig aan die van de hoogwaterstanden verloopt. Analyse van deze lijn zou dus tot dezelfde (of nagenoeg dezelfde) resultaten leiden als van de lijn der hoogwaterstanden. Het eerstgenoemde houdt meer werk in dan het laatstgenoemde en heeft minder rechtstreeks betrekking op de praktische consequenties van het vraagstuk. Om die reden is het verantwoord, niet met de opzetten, maar met de hoogwaterstanden te werken.

Beter dan de hoogwaterstanden of opzetten zou wellicht het grootste verschil tussen de werkelijke waterhoogte en de voor hetzelfde moment voorspelde waterhoogte, die uit de getijkromme volgt, gebruikt kunnen worden. Deze grootheid is echter slechts voor enkele stormen bekend, doch niet voor een voldoende aantal perioden van hoogwater, om daarop een statistische analyse te kunnen toepassen.

2.6 Extrapolatie

Het behoeft geen betoog, dat extrapolatie van een zuiver empirisch verkregen lijn steeds in hoge mate onzeker is. In het hier beschouwde geval moeten veiligheidsmaatregelen genomen worden tegen eventualiteiten die mogelijk zijn, zonder dat het zeker is, dat - en zo ja, wanneer - zij zullen optreden. Dit leidt tot een mathematisch-statistische behandeling van het probleem: men zal een schatting moeten maken van de kans, dat bepaalde mogelijke waterstanden zullen worden overtroffen, en op grond daarvan de maatregelen moeten treffen, beseffende dat er steeds een - zij het zeer kleine - kans overblijft, dat zij toch zullen blijken onvoldoende te zijn geweest.

Men zal dus uit de waarnemingen een kansverdeling moeten afleiden, die zich ook verder uitstrekt dan de hoogst waargenomen stand. Dit betekent eigenlijk, dat men zich voorstelt, dat over lange tijd, b.v. na enkele honderden jaren, met de dàn beschikbare waarnemingen opnieuw een empirische frequentielijn zal worden afgeleid, en dat men nu reeds tracht te raden, hoe deze er zal uitzien. Dit is een gissing, dus onzeker. Door echter de thans bekende feiten zo goed mogelijk in aanmerking te nemen, kan men bereiken, dat redelijkerwijs te verwachten is, dat de toekomstige frequentielijn niet al te veel van de thans gegiste af zal wijken.

Extrapolatie is dus, ook al blijft onzekerheid bestaan, noodzakelijk. Om de onzekerheid zo veel mogelijk te beperken, dient men echter voorzorgen te nemen. De belangrijkste van deze voorzorgen is, dat men ertegen waakt, de extrapolatie te baseren op "niet-homogeen" waarnemingsmateriaal. Verder is het van belang de onzekerheid der extrapolatie, voor zoverre deze op grond van bepaalde veronderstellingen (hier de in §2.3 en 2.4 besproken veronderstelling van een exponentiële verdeling) valt te berekenen, vast te stellen en bij het nemen van een beslissing in de overwegingen te betrekken. Deze beide punten komen in het volgende ter sprake, te beginnen met het eerstgenoemde.

2.7 Het homogeen maken van het waarnemingsmateriaal door splitsing in "zomer" en "winter"

De eenvoudigste extrapolatie-procedure ware, in figuur 2.3.1 een rechte lijn door de waarnemingspunten te trekken en deze eenvoudig te verlengen, dus rechtlijnig te extrapoleren. Dit is in figuur 2.7.1 uitgevoerd. Op verschillende wijzen valt in te zien, dat deze procedure onjuist is.

In §2.4 is reeds opgemerkt, dat de Gumbellijn der jaarmaxima tot hetzelfde resultaat moet leiden als de extrapolatie van een rechte lijn als die van figuur 2.7.1. Brengen wij echter deze lijn van figuur 2.7.1 over op Gumbel-papier, waarop de jaarmaxima zijn uitgezet, dan wordt figuur 2.7.2 verkregen (voor de methode van overbrenging zie Aanhangsel, §2.8). Uit deze figuur is duidelijk te zien, dat de jaarmaxima systematisch van deze lijn afwijken. De lagere jaarmaxima liggen er alle onder en de hogere liggen er boven, d.w.z. de helling van de lijn is onjuist.

Dit verschijnsel is gemakkelijk te verklaren en in overeenstemming met de boven gemaakte opmerking, dat het onjuist is niet-homogeen materiaal te extrapoleren. Immers de jaarmaxima vallen steeds (of vrijwel steeds) in de winter, in de zomer zijn de hoogwaterstanden lager. Deze lagere hoogwaterstanden hebben <u>geen</u> invloed op de jaarmaxima, maar zij hebben <u>wel</u> invloed op de helling van de lijn in figuur 2.7.1 en 2.7.2. Deze helling wordt er door vergroot, waardoor bij extrapolatie een te lage schatting der kansen op overschrijding verkregen wordt. Het zou dus zeer onvoorzichtig zijn, beslissingen op deze extrapolatie te baseren.

Dat zomer en winter verschillen, wat de hoogwaterstanden betreft, is natuurlijk ook direct in te zien. De hoogwaterstanden van de maanden november tot en met januari (met de stand van 1 februari 1953 er bij, omdat deze de aanleiding tot het onderzoek was) geven, uitgezet op dezelfde wijze als in figuur 2.3.1 gedaan is, een lijn te zien met een helling, die duidelijk van die van de overige maanden tezamen verschilt (zie fig. 2.7.3). De keuze van de drie maanden november, december en januari als "winter"-maanden is uiteraard enigszins arbitrair; daarom is onderzocht of verkleining of vergroting (op beperkte schaal) van deze periode de resultaten nog aanzienlijk beïnvloedt. Dit bleek niet het geval te zijn, hetgeen de keuze van deze periode, waarin ook de meeste jaarmaxima vallen, rechtvaardigt.

Ook de hoogwaterstanden van deze drie maanden zijn echter nog verre van homogeen, doordat zij veroorzaakt worden door depressies, die van verschillende typen zijn. Op dit punt gekomen ligt het voor de hand meteorologische hulpmiddelen te gebruiken, om een grotere mate van homogeniteit te bereiken en daarmede de betrouwbaarheid van de extrapolatie verder te vergroten.

2.8 Selectie van depressies op meteorologische gronden

Een gevaarlijk hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus depressies in plaats van afzonderlijke hoogwaters, dan komen wij dichter bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één hoogwater en daardoor ontstaat afhankelijkheid van op elkaar volgende hoogwaters, hetgeen de statistische analyse belemmert. Dit wordt vermeden, indien depressies in plaats van hoogwaters worden beschouwd. Daar het gevaar, dat een depressie voor de dijken geeft, sterk samenhangt met de hoogste tijdens die depressie bereikte waterstand, ligt het voor de hand de verdere analyse te baseren op hoogste standen per depressie.

Lang niet alle depressies zijn echter potentieel gevaarlijk. De verzameling van deze hoogste standen is, meteorologisch beschouwd, nog steeds niet homogeen. In verband daarmede werden door Drs. C.J. van der Ham van het K.N.M.I. die depressies geselecteerd, die op grond van het feit, dat zij bepaalde eigenschappen bezitten, als de potentieel gevaarlijke depressies beschouwd moeten worden. De kriteria voor deze selectie zijn in het Aanhangsel (§2.5) beschreven. Het belangrijkste kriterium was daarbij, dat deze depressies een binnen een bepaald vak gelegen baan volgden.

Het totale waarnemingsmateriaal, dat nu overblijft, bestaat uit 332 hoogwaterstanden van een gelijk aantal potentieel gevaarlijke depressies. Deze waarnemingen zijn in fig.2.8.1 op soortgelijke wijze uitgezet als in fig.2.3.1 voor alle hoogwaters is gedaan. In verband met het feit, dat de verdere analyse op deze waarnemingen is gebaseerd, is bij het uitzetten van deze punten een door A. Benard en E.C.Bos-Levenbach [1] uitgewerkte verfijning van de in fig.2.3.1 gevolgde techniek toegepast, die in het Aanhangsel (§2.8) is beschreven. De invloed hiervan is gering, behalve voor de hoogste 20 à 30 waargenomen standen, die nu bij een wat kleiner gemiddeld aantal overschrijdingen worden uitgezet. Deze methode is ook in figuur 2.4.1 en 2.7.2 reeds zonder expliciete vermelding gebruikt.

In figuur 2.8.2 zijn dezelfde punten uitgezet met de meest aannemelijke rechte lijn, aangepast aan de punten boven 1,70 m. De aanpassing van deze punten aan de rechte is niet overal even fraai, doch dit is, gezien het betrekkelijk geringe aantal punten, niet verwonderlijk. Wel valt op, dat de hogere waarnemingen nu veel minder van de aangepaste lijn afwijken dan in figuur 2.7.1 het geval is; dit verleent steun aan de in §2.3 vermelde veronderstelling, dat de afwijking in figuur 2.7.1 door de inhomogeniteit van het waarnemingsmateriaal veroorzaakt wordt. Vergelijken wij de overschrijdingskans van de hoogte 5 m, die door deze lijn wordt aangewezen, met de uit figuur 2.7.1 af te leiden waarde voor dezelfde kans, dan zien wij dat nu de waarde $1{,}5 . 10^{-4}$ verkregen wordt, terwijl figuur 2.7.1 de waarde $7{,}1 . 10^{-6}$ geeft. Het verschil is vrij aanzienlijk en geeft een indruk van het belang van de toepassing van de boven beschreven selectie.

2.9 Toetsing der aanpassing

Alvorens een verdere statistische analyse te baseren op de veronderstelling, dat de waarnemingen in figuur 2.8.1 vanaf een voldoende hoog peil beschouwd kunnen worden als onafhankelijke waarnemingen uit een exponentiële verdeling, is het nu van belang deze onderstelling te toetsen.

In de eerste plaats is het duidelijk, dat het begin van de door de punten gevormde kromme (tot ongeveer 1,70 m toe) aanmerkelijk afwijkt van een rechte lijn door de hogere waarnemingen. Dit zelfde verschijnsel doet zich voor bij de lijnen, (zie figuur 2.3.1 en 2.7.3), die op alle hoogwaters betrekking hebben. Deze lage standen zijn echter voor het doel van het onderzoek niet belangrijk en kunnen dus gevoeglijk buiten beschouwing blijven.

Voor de hoger gelegen waarnemingen zijn nu verschillende statistische toetsen uitgevoerd om de gemaakte veronderstelling te toetsen. Deze zijn in het Aanhangsel (§24) beschreven. Zij leiden tot een alleszins bevredigend resultaat.

Wij gaan hier alleen na, of de in figuur 2.8.2 getrokken lijn nu wel in overeenstemming is met de jaarmaxima, uitgezet volgens Gumbel. In fig. 2.8.3 is de lijn van fig. 2.8.2. overgebracht. De helling van de lijn komt nu zeer goed met de uitgezette punten overeen. Er is echter een systematisch hoogteverschil van ongeveer 10 cm. Daar de puntenreeks de cumulatieve verdelingsfunctie bij benadering weergeeft, wordt zulk een systematisch verschil vrijwel uitsluitend veroorzaakt door afwijkingen bij kleine waarden van h, die echter voor ons probleem van weinig belang zijn. Zij zouden er hoogstens toe kunnen leiden, dat men moest aannemen, dat de selectie nog niet homogeen genoeg is, en er nog een aantal minder gevaarlijke depressies in voorkomen. Een verschil van 10 cm is bovendien klein en blijft bij extrapolatie onveranderd, zodat het verschil van geen belang is.

Pogingen om het materiaal zo mogelijk nog beter homogeen te maken, werden langs twee andere wegen verricht, n.l. door te onderzoeken of er een verband tussen de H.W.'s en de zonnevlekken-intensiteit te vinden was en of aan te tonen viel, dat de jaren verdeeld konden worden in "gevaarlijke" en "minder gevaarlijke" jaren. Beide onderzoekingen hadden een negatief resultaat: er waren in het ter beschikking staande materiaal geen aanwijzingen voor een merkbare invloed van de zonnevlekken-intensiteit op de H.W.'s en een splitsing, zoals die van de maanden en die van de depressies, in gevaarlijke en minder gevaarlijke, kan bij de jaren niet worden verkregen. Een meteorologische basis ontbrak trouwens bij deze beide onderzoekingen.

2.10 Verschillende schattingen van de baanselectie-lijn

De gezochte frequentielijn, die past bij de punten in fig. 2.8.1 waarvan dus de lijn in fig. 2.8.2 een schatting is, noemen wij de baanselectie-lijn.

Deze lijn begint in fig. 2.8.2 bij 1,70 m, waarbij de punten beneden deze hoogte buiten beschouwing zijn gelaten. De keuze van het "beginpunt", 1,70 m, is echter betrekkelijk arbitrair. Men kan ook een ander beginpunt nemen, b.v. 1,80 of 2,00 m, en dan wordt een andere schattingslijn verkregen. Beneden 1,70 m buigen de punten in fig. 2.8.1 duidelijk af, dus is het niet wenselijk het beginpunt lager te nemen. Het is echter zeer wel mogelijk het hoger te kiezen.

Bij ieder beginpunt kan nu, op grond van de boven dit beginpunt gelegen waarnemingen, een z.g. aannemelijkste schatting van de halverings- en decimeringshoogte (vgl. §2,3) berekend worden. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in het Aanhangsel (§ 2,3) beschreven. De resultaten zijn in tabel 2.10.1 samengevat 1). Daar de derde decimaal slechts betekenis heeft voor de figuren, kan voor de halverings - resp. decimeringshoogte bij 1,70 m 0,23 m resp. 0,78 m genomen worden.

Tabel 2.10.1

Helling van de baanselectie-lijn (aannemelijkste schattingen)

beginpunt (in m)	aantal overschrijdingen	decimeringshoogte	halveringshoogte	Napiereringshoogte
1,50	257	0,881	0,265	0,383
1,60	212	1,814	0,245	0,354
1,70	166	0,776	0,234	0,337
1,80	129	0,739	0,223	0,321
1,90	94	0,749	0,226	0,325
2,00	71	0,725	0,218	0,315
2,10	53	0,700	0,211	0,304
2,20	33	0,838	0,252	0,364
2,30	24	0,891	0,268	0,387
2,40	18	0,908	0,273	0,394
2,50	17	0,725	0,218	0,315
2,60	13	0,699	0,210	0,304

In fig. 2.10.1 zijn de overeenkomstige lijnen getekend. Bij iedere lijn is het beginpunt verdikt aangegeven. Deze figuur geeft een inzicht enerzijds in de grootten der te verwachten overschrijdingsfrequenties van verschillende hoogten, anderzijds in de onzekerheid, waarmede deze getallen behept zijn.

Zo blijkt b.v., dat voor een hoogte van 5 m de overschrijdingskans, bij extrapolatie verkregen, nog sterk van de keuze van het beginpunt afhangt. De laagste gevonden waarde is $7,59 \cdot 10^{-5}$, de hoogste $4,36 \cdot 10^{-4}$. Voor 6 m bedragen deze waarden $2,25 \cdot 10^{-6}$ en $3,20 \cdot 10^{-5}$. Beschouwt men, anderzijds, de horizontale lijn, die bij een overschrijdingskans 10^{-4} behoort, dan lopen de schattingen van de daarbij behorende hoogten uiteen van 4,85 m tot 5,56 m. De overschrijdingskans bij 3,85 m is nu $4,47 \cdot 10^{-3}$, afgerond $4,5 \cdot 10^{-3}$.

2.11 Andere beschouwingen over de nauwkeurigheid der schattingen

Een tweede methode, dienende om een indruk van de onzekerheid van de extrapolatie te verkrijgen - steeds uitgaande van de veronderstelling van een exponentiële verdeling, dus van lineaire extrapo-

---

1) De halveringshoogte (resp. Napiereringshoogte) is 0,301 (resp. 0,434) maal de decimeringshoogte.

latie - , is het bepalen van betrouwbaarheidsgrenzen voor de decimerings- , halverings- en Napiereringshoogte.

Daar wij slechts over een vrij gering aantal waarnemingspunten beschikken (nl. 166 waarnemingen $\geq$ 1,70 m in 63 jaar) zal zelfs de best mogelijke schatting van de decimerings- en halveringshoogte nog vrij veel van de "werkelijke" waarde kunnen verschillen.

Een betrouwbaarheidsbovengrens (speciaal een bovengrens is hier van belang) is nu een uit deze waarnemingen berekend getal, dat, behoudens een van tevoren bepaalde onbetrouwbaarheid (waarvoor de waarden 0,05 en 0,01 zijn genomen), groter is dan de onbekende werkelijke waarde. "Onbetrouwbaarheid 0,05 (resp. 0,01)" betekent daarbij, dat bij toepassing van deze methode slechts een kans 0,05 (resp. 0,01) bestaat, dat de gevonden betrouwbaarheidsgrens toch kleiner is dan de werkelijke waarde.

Een dergelijke bovengrens is groter dan de aannemelijkste schatting zelf, daar deze laatste een kans van ongeveer $\frac{1}{2}$ bezit om kleiner dan de gezochte werkelijke waarde te zijn. Het verschil tussen deze beide getallen - en ook dat tussen de bovengrens en de werkelijke waarde - wordt kleiner, naarmate het aantal waarnemingen toeneemt. Het is daarom van belang zoveel mogelijk der waarnemingen in de berekening van de bovengrens te betrekken, daar anders een te pessimistisch beeld verkregen wordt. Daarom zijn de berekeningen gebaseerd op alle waarnemingen boven 1,70 m, het laagste beginpunt, waarbij de hier gevolgde methode nog redelijk wel bruikbaar is. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in het Aanhangsel (§ 2.7) opgenomen. De resultaten zijn opgenomen in tabel 2.11.1.

Tabel 2.11.1

Bovengrenzen (in m) van halverings-, decimerings- en Napiererings-hoogte met onbetrouwbaarheid 0,05 resp. 0,01 bij beginpunt 1,70 m

	aannemelijkste schatting	bovengrens met onbetrouwbaarheid resp.	
		0,05	0,01
halveringshoogte	0,234	0,267	0,282
decimeringshoogte	0,776	0,886	0,936
Napiereringshoogte	0,337	0,385	0,407

Dit resultaat is verder in fig.2.11.1 in beeld gebracht, waarbij de (geringe) onzekerheid in de hoogte van het bij 1,70 m liggende beginpunt buiten beschouwing gelaten is, daar een geringe evenwijdige verplaatsing van de lijn geen invloed van betekenis heeft.

Uit fig.2.11.1 valt af te lezen, dat bij een overschrijdingskans van 10^{-4} een geschatte hoogte van 5,13 m behoort (hetgeen tot 5,1 m afgerond kan worden), terwijl de twee bovengrenzen 5,62 m (met onbetrouwbaarheid 0,05) en 5,83 m (met onbetrouwbaarheid 0,01) bedragen. Anderzijds is de geschatte overschrijdingskans van de hoogte 5 m gelijk aan $1,5.10^{-4}$, maar de bovengrenzen bedragen 5.10^{-4} (onbetrouwbaarheid 0,05) resp. $7,8.10^{-4}$ (onbetrouwbaarheid 0,01). De verschillen tussen schatting en bovengrens zijn aanzienlijk, hetgeen het gevolg is van de extrapolatie.

2.12 Interpretatie der uitkomsten

Bij de interpretatie van deze uitkomsten is de praktische betekenis van een overschrijdingskans van een bepaalde hoogte van het grootste belang.

Indien men, om de gedachten te bepalen, ervan uit zou gaan, dat men de dijken bij Hoek van Holland voor 100 jaar veilig wil maken, dan dient men het begrip "veilig" nader te omschrijven. Immers absolute veiligheid is niet mogelijk. Men zou nu b.v. kunnen zeggen, dat men een kans van ongeveer 1% op overstroming van de dijk gedurende die 100 jaar nog acceptabel vindt. In dat geval zal men de dijk zo hoog moeten maken, dat (afgezien van extra verhogingen voor golfslag, bodemdaling, enz.) de overschrijdingskans van de gekozen hoogte 10^{-4} is, of althans dicht daarbij ligt.

In het licht van deze interpretatie is een overschrijdingskans 10^{-4} zeker niet extreem laag. De indruk, dat dit wel zo is, wordt ten onrechte gewekt, indien men deze overschrijdingskans interpreteert als: "gemiddeld éėns in de 10.000 jaar", daar men dan de neiging heeft, hiervoor te lezen:" voor het eerst over 10.000 jaar". Men realisere zich echter, dat de kans op een volgende overstroming binnen 100 jaar reeds 1% bedraagt, dus, zeker bij een zo belangrijke veiligheidsmaatregel, geenszins te verwaarlozen is.

Dit klemt te meer, indien men voor de bepaling van de dijkhoogte, die de gewenste overschrijdingskans dient te bezitten, gebruik maakt van een schatting in plaats van een bovengrens of althans een waarschijnlijk hoge schatting. Neemt men b.v. bij 5 m als schatting voor de overschrijdingskans $1{,}5.10^{-4}$, dan heeft men, blijkens fig.2.10.1 en 2.11.1 geen enkele garantie, dat deze schatting niet aan de lage kant is; is dit echter het geval, dan is, bij aanhouden van 5 m als richtpunt voor de hoogte bij Hoek van Holland, de kans op overstroming in de eerstvolgende 100 jaar wellicht nog vrij veel hoger dan 1%. Waarden als 5% zijn volgens onze uitkomsten nog mogelijk, zij het minder aannemelijk dan 1%.

Bij deze overwegingen is steeds van lineaire extrapolatie gebruik gemaakt, dus van een voortzetting van het exponentiële karakter der verdeling bij grotere hoogten. Er zijn (niet-statistische) argumenten aangevoerd, op grond waarvan de lijn bij extrapolatie naar lagere overschrijdingskansen zou moeten afbuigen. De beoordeling van deze argumenten valt buiten de competentie van de statisticus. Wel dient er echter op gewezen te worden, dat de thans beschikbare waarnemingspunten (zie b.v. fig.2.8.1) geen enkele steun aan deze theorie verlenen. De allerhoogsten vertonen eerder de neiging naar de andere kant af te buigen; ook al zijn de afwijkingen van rechtlijnigheid niet statistisch aantoonbaar 1). Trouwens, ook als de lijn inderdaad bij grotere hoogte naar kleinere overschrijdingskansen gaat afbuigen, dan is er nog geen reden om aan te nemen, dat dit reeds bij 5 of 6 m merkbaar het geval zou moeten zijn. Dit alles tezamen wijst er op, dat grote voorzichtigheid gewenst is.

Een punt, dat eveneens in deze richting wijst, is, dat de stormvloed van 1953 zoveel hoger was dan de op één na hoogste. Het verschil bedroeg 0,57 m. Dergelijke grote verschillen bij overschrijding van de hoogst waargenomen waarde zijn in overeenstemming met het karakter van de exponentiële verdeling. Deze heeft nl. de eigenschap, dat het genoemde verschil steeds dezelfde kansverdeling bezit, hoe hoog ook de hoogst waargenomen stand moge zijn. Het zou daarom onjuist zijn, te verwachten, dat een stormvloed, die hogere standen geeft dan die van 1953 "wel niet zo veel hoger zal komen dan deze laatste, omdat die al zo hoog was". Indien de stand van 1953 overschreden wordt, is een overschrijding van opnieuw ongeveer $\frac{1}{2}$ m of meer geenszins onwaarschijnlijk.

---

1) Indien men bij de aanpassing van een hoogwateroverschrijdingslijn aan de waarnemingen een grotere klasse van verdelingen (nl. de z.g. Pearson verdelingen) als basis neemt, wordt een kromme lijn verkregen, die aanzienlijk naar boven afwijkt (Aanhangsel § 2,6).

Een uiteindelijke keuze van een bepaalde hoogte als richtpunt kan op grond van de hier gegeven analyse alleen niet tot stand komen. Daarvoor is het nodig, ook ekonomische, technische en wellicht nog andere aspecten in de beschouwingen optenemen. Ekonometrische beschouwingen en berekeningen zijn in een afzonderlijk rapport vervat [2].

Aanhangsel

A 2.1 Notatie

In Hoek van Holland blijken de hogere H.W. standen, cumulatief uitgezet op halflogarithmisch papier, voor lange perioden ongeveer op een rechte lijn te liggen[10]. Stelt n(h) het verwachte aantal overschrijdingen van de hoogte h per jaar voor, dan wordt dus door de waarnemingen gesuggereerd, dat voor voldoende grote h

(1) $$n(h) = ck^{-c'h}, \qquad (k>0)$$

waarin één der parameters k of c' nog willekeurig gekozen kan worden.

Daar het nuttig is, de parameters in deze en andere vergelijkingen een aanschouwelijke betekenis te geven, worden de volgende parameters ingevoerd 1).

1) a_k = het hoogteverschil, waardoor het gemiddelde aantal overschrijdingen k maal zo klein wordt. Deze grootheid wordt dus gedefinieerd door

(2) $$n(h+a_k) = \frac{1}{k}\, n(h)$$

voor iedere h en $h+a_k$. In het lineaire gebied van de lijn is a_k een constante.

Uit (1) en (2), dus bij veronderstelling van rechtlijnigheid, volgt

(3) $$c' = \frac{1}{a_k},$$

dus

(4) $$n(h) = ck^{-\frac{h}{a_k}}.$$

2) h_k = hoogte, die gemiddeld $\frac{N}{k}$ maal per jaar wordt overschreden, waarbij N het aantal H.W.'s per jaar voorstelt. Deze grootheid wordt dus gedefinieerd door

(5) $$n(h_k) = \frac{N}{k}$$

en uit (4) en (5) volgt

(6) $$c = N.k^{\frac{h_k}{a_k}-1}.$$

Vullen wij (6) in (4) in, dan verkrijgen wij

(7) $$n(h) = Nk^{-\frac{h-h_k}{a_k}-1} \qquad (k>0).$$

In deze formule, waarin k dus nog willekeurig gekozen kan worden,

---

1) Indertijd voorgesteld door Prof. Dr D. van Dantzig.

hebben nu alle parameters een aanschouwelijke betekenis en bij iedere gewenste waarde van k kunnen zij gemakkelijk uit de grafiek van de lijn bepaald worden.

Werkt men niet met het gemiddeld aantal overschrijdingen van h per jaar, maar met de <u>kans</u> op overschrijding bij één waarneming, dan vervalt de factor N in het rechterlid.

Het grondtal k kan nu in (7) nog willekeurig gekozen worden. Voor twee verschillende grondgetallen k en g geldt volgens(7):

(8) $$k^{-\frac{h-h_k}{a_k}-1} = g^{-\frac{h-h_g}{a_g}-1}$$

voor iedere h in het lineairiteitsgebied.

Vullen wij hierin $h = h_k - a_k$ in, dan volgt gemakkelijk

(9) $$h_k - h_g = a_k - a_g \ .$$

Invullen van $h=h_k$ resp. $h=h_g$ in (8) geeft na enige herleiding de beide ook direct uit elkaar volgende betrekkingen

(10) $$a_k = a_g \ {}^{g}\log k$$
$$a_g = a_k \ {}^{k}\log g \ .$$

Drie in het bijzonder voor de hand liggende <u>waarden voor het grondtal</u> k zijn: <u>e</u> (het grondtal der Napierse logarithmen), <u>2</u> en <u>10</u>. Voor deze drie grondtallen kunnen wij de parameter a_k de namen "<u>Napiereringshoogte</u>", "<u>halveringshoogte</u>" resp. "<u>decimeringshoogte</u>" geven, waarbij "hoogte" in de zin van "hoogteverschil" bedoeld is.

Daar veelvuldig slechts een deel van de in een jaar voorkomende waarnemingen wordt beschouwd (b.v. de winterwaarnemingen of de naar bepaalde depressies geselecteerde waarnemingen), gaan we er van uit, dat het aantal waarnemingen in een jaar stochastisch is, d.w.z. dat er een kans p_n op n waarnemingen in een bepaald jaar bestaat en dat de aantallen voor verschillende jaren onafhankelijk zijn. Als [1]

(11) $$g(h) = P\{\underline{h} \geq h\}$$

de kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming voor-

---

1) Stochastische grootheden worden door onderstreping onderscheiden van waarden, die zij in een steekproef kunnen aannemen. Met $P\{A\}$ geven we de kans op gebeurtenis A aan.

stelt, dan vinden wij voor p(h), de kans op overschrijding van het peil h in een jaar,

$$(12) \qquad p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \{1 - g(h)\}^n\right] p_n \, ,$$

hetgeen voor grote h benaderd kan worden met

$$(13) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n \, p_n \cdot g(h),$$

daar $\{1 - g(h)\}^n$ in dat geval door $1 - n\,g(h)$ vervangen mag worden[1]. Het verwachte aantal overschrijdingen van het peil h in een jaar is

$$(14) \qquad n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n g(h) . p_n \, ,$$

zodat we kunnen concluderen:

Het verwachte aantal overschrijdingen van een hoog peil h in één jaar is gelijk aan de kans op overschrijding van dat peil h in één jaar.

Het verwachte aantal overschrijdingen n(h) van een peil h in één jaar kunnen we schatten uit de beschikbare gegevens van 60 à 70 jaar met het gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van het peil h, dat we f(h) zullen noemen.

In de figuren 2.3.1, 2.7.3, 2.8.1 is f(h) voor verschillende gevallen getekend, met dien verstande, dat bij de opgetreden hoogwaterstanden het gemiddeld aantal overschrijdingen is weergegeven. Zo is b.v. in figuur 2.3.1 de stand 3,28 m éénmaal voorgekomen in 69 jaar en tweemaal overschreden, daar de standen 3,28 m en 3,85 m elk een keer opgetreden zijn. Het gemiddeld aantal overschrijdingen van het peil 3,28 m per jaar is dus 2/69 = 0,0290. Bij de lagere hoogwaterstanden komen de uitgezette punten zo dicht bijeen te liggen, dat ze door streepjes vervangen zijn.

Alvorens de consequenties van de aanpassing van een rechte lijn aan log f(h) te onderzoeken, zullen wij het verband met de logarithmisch normale verdeling bespreken.

---

1) De grootste waarde die n kan aannemen is ongeveer 706.

A2.2 Aanpassing van een afgeknotte logarithmisch normale verdeling

In de literatuur wordt vaak in problemen als het onze een logarithmisch normale verdeling aan de waarnemingen aangepast. Omdat we ons hier niet interesseren voor de lage hoogwaterstanden, kunnen we de waarnemingen het beste vergelijken met een aan de linkerkant afgeknotte logarithmisch normale verdeling. Aan het einde van deze paragraaf zullen wij aantonen, dat een exponentiële verdeling willekeurig dicht benaderd kan worden met een afgeknotte logarithmisch normale verdeling, waaruit we de volgende conclusies kunnen trekken:

Waarnemingen, die verkregen zijn door trekking uit een exponentiële verdeling, kunnen ook afkomstig zijn uit een afgeknotte logarithmisch normale verdeling. Met een eindig aantal waarnemingen kan men nooit de conclusie trekken: "deze waarnemingen zijn wel uit een exponentiële, maar niet uit een afgeknotte logarithmisch normale verdeling afkomstig". De afgeknotte logarithmisch normale verdeling is <u>algemener</u> dan de exponentiële, omdat zij meer parameters bevat, zodat zij altijd <u>minstens zo goed</u> aan waarnemingen aangepast kan worden als de exponentiële verdeling. In gevallen, waarin de exponentiële verdeling een <u>bevredigende</u> aanpassing geeft, verdient de laatst genoemde de voorkeur boven de afgeknotte logarithmisch normale verdeling, daar zij veel eenvoudiger te hanteren is.

We bewijzen nu de in de eerste alinea gemaakte bewering, die we als volgt preciseren.

De exponentiële verdeling

$$F(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha h} & \text{voor } h \geq 0 \\ 0 & \text{voor } h < 0 \end{cases} \tag{15}$$

met $\alpha > 0$, kan op het interval $0 \leq h \leq 1$ willekeurig dicht benaderd worden met een afgeknotte logarithmisch normale verdeling, gegeven door

$$G(h) = \begin{cases} \dfrac{\int_{\ell_1}^{\ell_2} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv}{\int_{\ell_1}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv} & \text{als } h \geq 0, \\ 0 & \text{als } h < 0, \end{cases} \tag{16}$$

waarin a, μ en σ positieve constanten zijn en $\ell_1 = \frac{\log \mu a}{\sigma}$ en $\ell_2 = \frac{\log \mu (h+a)}{\sigma}$.

Hiermede wordt bedoeld, dat bij een gekozen $\varepsilon > 0$ de parameters

a, μ en σ zo gekozen kunnen worden, dat

$$|F(h) - G(h)| < \mathcal{E}$$

is voor $0 \leq h \leq 1$.

Als we bij gegeven a en $\alpha > 0$ met $G_a(h)$ die functie $G(h)$ aangeven, waarvoor $a\sigma^2 = 1$ en $\mu a = e^{\alpha}$ is, dan is het voldoende te bewijzen, dat

$$\text{(17)} \qquad \lim_{a \to \infty} \log \left\{ 1 - G_a(h) \right\} = -\alpha h \qquad \text{voor } 0 \leq h \leq 1.$$

Nu is voor $x > 0$

$$x e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - x e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv$$

en

$$x e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv \leq \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{x^2},$$

zodat

$$\text{(18)} \qquad \lim_{x \to \infty} x e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 .$$

Passen wij dit toe op $G_a(h)$, dan blijkt inderdaad, dat voor alle h, die voldoen aan $0 \leq h \leq 1$

$$\text{(19)} \qquad \lim_{a \to \infty} \log \left\{ 1 - G_a(h) \right\} = \lim_{a \to \infty} \log \frac{\displaystyle\int_{\frac{\log \mu (h+a)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv}{\displaystyle\int_{\frac{\log \mu a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv} =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \log \left\{ \frac{\log \mu a}{\log \mu a + \log(1 + \frac{h}{a})} \, e^{-\frac{1}{2}\left\{ \frac{\log \mu a + \log(1 + \frac{h}{a})}{\sigma} \right\}^2 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\log \mu a}{\sigma} \right\}^2} \right\} =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{2}\left\{ \frac{\log \mu a + \log(1 + \frac{h}{a})}{\sigma} \right\}^2 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\log \mu a}{\sigma} \right\}^2 \right] =$$

$$= \lim_{a \to \infty} - \frac{h \log \mu a}{a \sigma^2} = -\alpha h \qquad \text{is.}$$

Ter illustratie is figuur A 2.2.1 toegevoegd. Hierin is uitgezet op halflogarithmisch papier

$(a=\infty) \quad 1 - F(h) = e^{-\alpha h}$ voor $h \geq 0$

met $\alpha = 3$ en de benaderingen

$(a = 1) \quad 1 - G_1(h)$,
$(a = 10) \quad 1 - G_{10}(h)$,
$(a = 100) \quad 1 - G_{100}(h)$.

Voor het tekenen van de figuur werd van tabel A 2.2.1 gebruik gemaakt:

Tabel A 2.2.1

h	$a = \infty$	$a = 1$	$a = 10$	$a = 100$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,2231	0,2447	0,2250	0,2238
1,0	0,04979	0,0820	0,0531	0,0501
1,5	0,01111	0,0333	0,0131	0,01130
2,0	0,002479	0,0154	0,00336	0,00256
2,5	0,0005531	0,00782	0,000899	0,000584
3,0	0,0001234	0,00427	0,000249	0,000133
3,5	0,00002754	0,00247	0,000071	0,000031

A 2.3 Aanpassing exponentiële verdeling

Indien we een kromme

(20) $$n(h) = Ne^{-\frac{h-h_e}{a_e}} - 1$$

aan het in Hoek van Holland gevonden gemiddelde aantal overschrijdingen van het peil h per jaar f(h) willen aanpassen, dan kunnen we dit als volgt doen. We beperken ons tot de waarnemingen, die het peil b overschrijden, waarbij we b kiezen in het gebied, waarin we volgens figuur 2.3.1 met een rechte lijn te doen hebben. f(h) wordt dus alleen voor $h \geq b$ aan de waarnemingen aangepast. Als n het aantal waarnemingen $\geq$ b in m jaar is, dan schatten we n(b) met [1)]

(21) $$\hat{n}(b) = \frac{n}{m}$$

en als de gevonden waarnemingen $h_1, \ldots, h_n$ zijn(met $h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_n \geq b$), dan wordt a_e geschat door

---

1) Schattingen van parameters geven we met ^ aan.

$$\hat{a}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_i - b) \quad . \tag{22}$$

Daar de invloed van de keuze van $\hat{n}(b)$ gering is, hebben we deze zo eenvoudig mogelijk gehouden. Voor $\hat{a}_e$ is de aannemelijkste schatting van de parameter van een exponentiële verdeling met gegeven beginpunt genomen.

Tabel A 2.3.1 bevat de schattingen, die op de zojuist voor fig. 2.3.1 besproken wijze werden verkregen 1). De in drie decimalen opgegeven waarde voor $\hat{a}_e$ behoren bij de in de grafieken getekende lijnen. De onzekerheid in deze schattingen die ten eerste blijkt uit de verschillen die bij verschillende waarden van b verkregen worden en ten tweede uit de wijde betrouwbaarheidsintervallen van tabel 2.11.1, ontneemt echter aan de derde decimaal iedere praktische betekenis, behalve voor de figuren.

Tabel A 2.3.1

	b (in m)	$\hat{n}$ (b)	$\hat{a}_e$
fig. 2.3.1	1,10	126	1,212
2.7.1	1,30	47,2	0,231
	1,50	19,7	0,236
	1,70	8,41	0,243
	1,90	3,62	0,255
	2,10	1,65	0,255
fig. 2.7.3	0,70	130	0,362
(links)	0,90	86,2	0,296
	1,10	46,6	0,270
	1,30	22,3	0,269
	1,50	10,9	0,260
	1,70	4,93	0,269
	1,90	2,29	0,280
	2,10	1,19	0,259
fig. 2.7.3	1,10	79,4	0,178
(rechts)	1,30	24,8	0,197
	1,50	8,86	0,208
	1,70	3,48	0,207
	1,90	1,33	0,211
fig. 2.8.1	1,30	4,97	0,500
2.8.2	1,40	4,65	0,430
	1,50	4,08	0,383
	1,60	3,37	0,354
	1,70	2,64	0,337
	1,80	2,05	0,321
	1,90	1,49	0,325
	2,00	1,13	0,315
	2,10	0,841	0,304
	2,20	0,524	0,364
	2,30	0,381	0,387
	2,40	0,286	0,394
	2,50	0,270	0,315
	2,60	0,206	0,304

1) Er werd nog een continuïteitscorrectie toegepast.

A 2.4. Toetsing der aanpassing

Een gangbare toets voor het beoordelen van de aanpassing van een theoretische verdeling aan een steekproefverdeling is de χ^2-toets. Bij toepassing op een voldoende groot aantal waarnemingen geeft deze betrouwbare resultaten. In tabel A 2.3.1 zijn de Napiereringshoogten, die behoren bij aangepaste krommen, welke bij toepassing van deze toets met een onbetrouwbaarheid van 5% verworpen moeten worden, d.w.z. waarbij de aanpassing slecht is, door onderstreping aangegeven. Dubbel onderstreept zijn die gevallen, waarbij de aanpassing zéér slecht is. Uit de gevonden waarden blijkt, dat de aanpassing zéér slecht is voor lage beginpeilen, hetgeen te verwachten was, daar in deze gevallen de lage hoogwaterstanden in onze figuren ten duidelijkste niet op een rechte lijn liggen. Daarentegen kunnen de gevonden waarnemingen (althans volgens de nu toegepaste toets) vanaf voldoende hóge peilen zeer wel uit exponentiële verdelingen afkomstig zijn.

Echter is bekend, dat de waarnemingen in figuur 2.3.1 en 2.7.3 uitgezet, géén homogeen materiaal vormen en bovendien sterk afhankelijk zijn. (Hoogwaterstanden die direct na elkaar bereikt worden, hebben een gemeenschappelijke oorzaak). Dit is in veel mindere mate het geval met de waarnemingen, die in figuur 2.8.1 en de daarop volgende figuren gebruikt zijn.

A 2.5. De selectie volgens V.d.Ham

Een gevaarlijke hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus de depressies in plaats van de afzonderlijke H.W.'s, dan komen wij dichter bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één H.W. en het is juist daardoor dat er afhankelijkheden tussen op elkaar volgende H.W.'s kunnen ontstaan.Deze zullen dus grotendeels geëlimineerd worden, indien wij met één waarneming per depressie volstaan en daar het gevaar, dat eendepressie voor onze dijken geeft, vrij nauwkeurig weergegeven kan worden door de hoogste waterstand, die tijdens die depressie bereikt wordt, ligt het voor de hand ook de hoogwateroverschrijdingslijn te beschouwen, die verkregen wordt uit deze hoogste standen per depressie.

Zelfs nu is het waarnemingsmateriaal nog inhomogeen.

Daarom werden door Drs C.J. VAN DER HAM van het K.N.M.I., tevens met het oog op onderzoekingen van het K.N.M.I. over de stormramp, uit de lijst van depressies die depressies geselecteerd, die een baan volgden, gelegen in een bepaalde strook boven de Noordzee, en die daarom op meteorologische gronden als bijzonder gevaarlijk voor ons land beschouwd kunnen worden. Een uitvoerige beschrijving van deze groep van depressies, van de hand van de heer VAN DER HAM, vindt men hieronder . Wij volstaan hier met de opmerking, dat hij zich beperkte tot depressies, waarbij een opzet van minstens 50 cm geconstateerd werd, enerzijds omdat lichte depressies moeilijk te herkennen en van elkaar te onderscheiden zijn en anderzijds omdat op deze wijze een aanzienlijke werkbesparing verkregen werd, terwijl bovendien de depressies met een lage opzet ook lage H.W.'s geven, die voor de extrapolatie van hoogwateroverschrijdingslijnen niet van belang zijn. Voortbouwend op deze meteorologische gedachtengang van het K.N.M.I. ligt het voor de hand die <u>hoogwateroverschrijdingslijn</u> te beschouwen, die verkregen wordt uit de <u>hoogste standen per depressie</u> voor deze groep van <u>gevaarlijke depressies</u>. Immers op die wijze wordt dan gebruik gemaakt van meteorologische ervaring omtrent het ontstaan van hoge waterstanden. Het resultaat van deze selectie is in fig.2.8.1 getekend voor de wintermaanden, d.w.z. november, december en januari.

Hieronder volgt een korte beschrijving van de hand van Drs C.J. VAN DER HAM van de op de waterstanden in Hoek van Holland toegepaste baan-selectie-methode.

Teneinde de waterstandgegevens meer homogeen te maken werd op het K.N.M.I de volgende selectiemethode toegepast.

Nagegaan werd langs welke banen de depressies zich bewogen hadden, die in de periode van 1898 tot 1953 een hoog- of laagwateropzet van meer dan 160 cm te Hellevoetsluis veroorzaakt hadden. Onder de baan van een depressie wordt hier verstaan de baan van het centrum van het lagedrukgebied.

Deze depressiebanen (47 in getal) bleken, op één uitzondering na, alle te gaan door het vak, dat als volgt begrensd is:

op 10° W.L. tussen 51° N. en 62° N.
op 0° tussen 52° N. en 61° N.
op 7° E.L. tussen 52° N. en 61° N.

De waterstandgegevens van Hoek van Holland werden nu eerst gecombineerd tot opwaaiperioden, waarbij als één opwaaiperiode werd beschouwd de periode waarin de opwaaiing aan één en dezelfde depressie te danken was. Alleen de opwaaiperioden,waarin de maximale opzet te Hoek van Holland meer dan 50 cm bedroeg,werden daarbij beschouwd.

De selectie bestond nu uiteindelijk hierin, dat voor elke opwaaiperiode werd nagegaan of de bijbehorende depressie een baan gevolgd had, die al of niet binnen het vak gelegen was, dat door de eerdergenoemde "hoofddepressies" was bepaald.

De opwaaiperioden met een depressiebaan, die geheel of gedeeltelijk buiten het genoemde vak viel, werden van de lijst geschrapt.

A 2.6 Nadere beschouwing der geselecteerde waarnemingen

Nu we een zo homogeen mogelijk materiaal verkregen hebben, willen we nogmaals onderzoeken, of onze waarnemingen als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling beschouwd kunnen worden.

We hebben al (§A 2.4) gezien, dat volgens de χ^2-toets de waarnemingen $\geq 1{,}50$ m als zodanig beschouwd mogen worden, maar, daar we ons voor extrapolatie interesseren, zegt het resultaat van de χ^2-toets niet veel: alleen zeer grote afwijkingen van de exponentialiteit komen bij deze toets te voorschijn. We kunnen echter, aannemend, dat de waarnemingen $\geq 1{,}70$ m onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling zijn, onderzoeken of deze onderstelling tot onwaarschijnlijke afwijkingen van de hoge waarnemingen t.o.v. de lagere aanleiding geeft.

a) Als $h_1, \ldots, h_n$ (geordende) onderling onafhankelijke waarnemingen zijn uit de exponentiële verdeling

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b \end{cases}$$

met $b \leq h_n \leq h_{n-1} \leq \ldots \leq h_1$, dan vormen $x_1, \ldots, x_n$, waarbij $x_i = (h_i - h_{i+1})\, i$, eveneens een steekproef van onderling onafhankelijke waarnemingen uit $F_b(h)$.

Men kan nu, bij gegeven k, toetsen of het quotiënt

$$B = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{x_1 + \ldots + x_{k+1} + \ldots + x_n} = \frac{h_1 + \ldots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \ldots + h_n - nb} \tag{23}$$

ongewoon groot of klein is, d.w.z. of de som van de verschillen van de k hoogste waarnemingen te sterk afwijkt van wat op grond van alle n waarnemingen een redelijke waarde genoemd kan worden.

De stochastische grootheid

$$\underline{B} = \frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_k}{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}$$

heeft een $B_{k,n-k}$-verdeling d.w.z.:

$$P\{\underline{B} \leq B\} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^B x^{k-1} (1-x)^{n-k-1}\, dx. \tag{24}$$

Toepassing op de waarnemingen $\geqslant 1{,}70$ m brengt geen bijzondere kenmerken van de hoogste standen aan het licht, zoals uit tabel A 2.6.1 blijkt:

Tabel A 2.6.1

n = 166	k	B	$P\{\underline{B} \leqslant B\}$
	4	0,0231	0,53
	8	0,0542	0,68
	16	0,0942	0,49
	32	0,2117	0,75

b) Indien we alleen veronderstellen, dat de waarnemingen uit fig. 2.8.1 onderling onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling vormen, kunnen we met behulp van formule (11) van L.H.Miller [9] een bovengrens aangeven voor de onbekende verdelingsfunctie.

In fig. A 2.6.1 zijn opnieuw de waarnemingen van fig. 2.8.1 uitgezet. Het theoretisch verwachte aantal overschrijdingen per jaar komt behoudens een kans van 10% niet boven de getekende trapfunctie uit, die gegeven wordt door

(25) $$5{,}27\left(\frac{i}{n} + 0{,}0584\right) \qquad h_{i+1} < h \leqslant h_i$$

(waarin $h_n \leqslant \ldots \leqslant h_1$ de gevonden n=332 waarnemingen voorstellen) en alleen voor $h \geqslant 2{,}00$ m is ingetekend.

Uit de figuur blijkt duidelijk, dat deze begrenzing vrijwel waardeloos is voor de extrapolatie (dit wijst er opnieuw op, dat extrapolatie slechts onder zeer veel voorbehoud mogelijk is).

c) We kunnen onderstellen, dat de waarnemingen uit een interval, b.v. de waarnemingen $\geqslant 1{,}70$ m en $< 2{,}45$ m, de parameter α van de exponentiële verdeling nauwkeurig bepalen en toetsen of de waarnemingen $\geqslant 2{,}45$ m uit deze exponentiële verdeling afkomstig kunnen zijn met de toets van Kolmogorov-Smirnov met behulp van de tabellen van L.H.Miller [9].

De parameter α van de exponentiële verdeling

$$F_{b_1}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_1)} & h \geqslant b_1 \\ 0 & h < b_1 \end{cases}$$

kan geschat worden uit de $n-\ell$ waarnemingen $h_n, \ldots, h_{\ell+1}$, waarvoor geldt $b_1 \leqslant h_n \leqslant \ldots \leqslant h_{\ell+1} < b_2$ met behulp van de aannemelijkste schatting ([3]):

$$(26)\quad \hat{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{indien } \sum_{i=1}^{n-\ell} \frac{h_i - b_1}{n-\ell} \geq \frac{b_2 - b_1}{2}, \\ \left(\sum_{i=1}^{n-\ell} \left(\frac{h_i - b_1}{n-\ell} + \frac{(b_2-b_1)e^{-\hat{\alpha}(b_2-b_1)}}{1-e^{-\hat{\alpha}(b_2-b_1)}} \right) \right)^{-1} & \text{indien } 0 < \sum_{i=1}^{n-\ell} \frac{h_i - b_1}{n-\ell} < \frac{b_2 - b_1}{2}. \end{cases}$$

(Hier wordt α dus geschat onder de voorwaarde, dat er $n-\ell$ waarnemingen $< b_2$ zijn).

De waarnemingen $h_1, \ldots, h_\ell$ ($h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_\ell \geq b_2$) vormen een geordende steekproef van onafhankelijke waarnemingen uit

$$F_{b_2}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_2)} & h \geq b_2 \;, \\ 0 & h < b_2 \;. \end{cases}$$

Zij:

$$(27)\quad s_\ell(h) = \begin{cases} 0 & b_2 \leq h_\ell \\ 1 - \frac{i-1}{\ell} & h_i < h \leq h_{i-1} \\ 1 & h > h_1 \;, \end{cases}$$

dan kan uit de tabel van Miller bij gegeven Θ en ℓ een $\mathcal{E}$ bepaald worden, zodat

$$(28)\quad P\left\{ \max \left[F_{b_2}(h) - \underline{s}_\ell(h) \right] \geq \mathcal{E} \right\} = \Theta \,.$$

Nu is voor $h \geq b_2$

$$(29)\quad f(h) = \frac{\ell}{m} \left\{ 1 - s_\ell(h) \right\} \,,$$ waarin m het beschouwde aantal jaren aangeeft, zodat met

$$(30)\quad z(h) = \frac{\ell}{m} \left\{ 1 - F_{b_2}(h) + \mathcal{E} \right\}$$

een functie gevonden is, waarvoor

$$(31)\quad P\left\{ \max_{h \geq b_2} \left[\underline{f}(h) - z(h) \right] \geq 0 \right\} = \Theta \,.$$

We vinden dus een grens $z(h)$, die behoudens een kans Θ niet door f(h) wordt overschreden.

Hiervoor moeten we echter $F_{b_2}(h)$ kennen; daar we de juiste waarde van α niet kennen, nemen we in plaats daarvan $\hat{\alpha}$, daar we mogen verwachten, dat dit weinig invloed zal hebben.

Op grond van de in 63 jaar gevonden 166 waarnemingen $\geq 1{,}70$ m, waarvan er 17 $\geq 2{,}45$ m zijn, vinden we $\hat{\alpha} = 2{,}92$ m $^{-1}$ en bij $\Theta = 10\%$ een $\varepsilon = 0{,}25039$.

Voor dit geval is z(h) getekend in fig. A 2.6.2. Voor $b_1 =$ 1,80 m en $b_2 = 2{,}55$ m resp. $b_1 = 1{,}70$ m en $b_2 = 2{,}35$ m werden soortgelijke figuren gevonden, die niet in dit rapport zijn opgenomen. Tevens werden in figuur A 2.6.2 de punten van de baanselectielijn (van figuur 2.8.1 dus) en de schattingen van n(h) (met $\hat{\alpha} =$ 2,92 m^{-1}) bij beginpunt 1,70 m resp. beginpunt 2,45 m getekend. Uit deze figuren blijkt, dat de hoge waterstanden slechts weinig van de "theoretische" verdeling afwijken.

We kunnen nog opmerken, dat met de gevonden schatting $\hat{\alpha} =$ 2,92 m^{-1}, indien er (zoals hier) 13 waarnemingen $\geq 2{,}55$ m zijn, de kans, dat de grootste van die waarnemingen $\geq 3{,}85$ m is 0,16 bedraagt en deze hoogste waarneming behoudens een kans 0,05 $\leq 4{,}22$ m is.

d) In fig. A 2.6.3 is aan alle geselecteerde waarnemingen een Pearson kromme aangepast. De methode van aanpassen wordt door Elderton [4] uitvoerig beschreven. Voor het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar werd gevonden

$$\hat{n}(h) = \begin{cases} 5{,}27 & \text{voor} \quad h < 0{,}523 \\ 5{,}27 \displaystyle\int_0^{\frac{\gamma}{h-0{,}523}} \frac{e^{-z}\, z^{\delta}}{\delta!}\, dz & \text{voor} \quad h \geq 0{,}523 \end{cases} \tag{32}$$

met $\gamma = 14{,}5$ en $\delta = 11{,}74$.

Hoewel de methode is verouderd, is het toch interessant haar met de andere aanpassingen te vergelijken. Bij het aanpassen van een Pearson verdeling wordt namelijk géén rekening gehouden met de extrapolatie, die uitgevoerd moet worden, doch alleen die kromme uit een gegeven klasse gezocht, die in zekere zin het beste bij de waarnemingen past. Bij het 5,00 m niveau wordt nu een kans $2{,}70 \cdot 10^{-4}$

gevonden en bij een kans 10^{-4} behoort het peil 5,47 m. Wenst men niet met een kromme, die naar boven afbuigt te extrapoleren, dan kan aan de getekende kromme de raaklijn in het buigpunt (dat bij (2,41m;3,06.10^{-1}) valt) getrokken worden. Behalve het raakpunt ligt het punt, dat bepaald wordt door het peil 4,52 m en 3,56.10^{-4} op deze raaklijn. Nu behoort bij het 5,00 m niveau een kans 7,79.10^{-5} en bij een kans 10^{-4} het peil 4,92 m.

Al deze beschouwingen voeren ons tot de conclusie:
De baanselectiewaterstanden $\geq$ 1,70 m kunnen beschouwd worden als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling.

A 2.7. Betrouwbaarheidsintervallen

Als wij onderstellen, dat de baanselectiewaterstanden, $h_1, \ldots, h_n$ (alle $\geq b$) uit een exponentiële verdeling:

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b \end{cases}$$

afkomstig zijn, dan kunnen we een getal τ_Θ berekenen, waarvoor geldt

$$(33) \qquad P\left\{\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\Theta\right\} = \Theta$$

op grond van

$$(34) \qquad P\left\{\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\Theta\right\} = \int_0^{\tau_\Theta} \frac{n^n t^{n-1} e^{-nt}}{(n-1)!}\, dt = \Theta$$

of

$$(35) \qquad \tau_\Theta = \frac{\chi^2_{2n}(1-\Theta)}{2n}$$

waar $\chi^2_{2n}(1-\Theta)$ die waarde voorstelt, die bij een χ^2-verdeling met 2n vrijheidsgraden een overschrijdingskans $1-\Theta$ heeft.
Nu geldt tevens $P\left\{\alpha \leq \frac{n\tau_\Theta}{\sum_{1}^{n}(h_i - b)}\right\} = \Theta$, zodat dus $\alpha > \frac{n\tau_\Theta}{\sum_{1}^{n}(h_i - b)}$ is, behoudens een kans Θ, waarmee een betrouwbaarheidsondergrens voor α

is gevonden.

Bovendien is bij h > b $P\left\{e^{-\alpha(h-b)} \geq e^{-\frac{n\tau_\Theta}{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}}\right\} = \Theta$,
zodat met $e^{-\alpha(h-b)} < e^{-\frac{n\tau_\Theta}{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}(h-b)}$ behoudens een kans Θ,

een betrouwbaarheidsbovengrens gevonden is voor de overschrijdingskans van het niveau h bij een individuele waarneming.

Nu is dus (m is het beschouwde aantal jaren)

$$\frac{n}{m}\, e^{-\frac{n\tau_\Theta}{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}(h-b)} \tag{36}$$

behoudens een kans Θ een bovengrens voor het verwachte aantal overschrijdingen per jaar van het peil h of - wat immers voor voldoende grote h het zelfde is - voor de kans op overschrijding van het peil h in één jaar.

Beschouwen we een vaste kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming, dus b.v. $e^{-\alpha(h-b)} = p$, dan vinden we hieruit $h = b - \frac{\log p}{\alpha}$.

Nu is $P\left\{b - \frac{\log p}{\alpha} \geq b - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}{n\tau_\Theta}\cdot \log p\right\} = \Theta$,

zodat
$$b - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}{n\tau_\Theta}\cdot \log p$$

behoudens een kans Θ een bovengrens is voor het peil h, dat bij een waarneming met kans p overschreden wordt.

Evenzo is

$$b - \frac{n\tau_\Theta}{\sum_{i=1}^{n}(\underline{h}_i-b)}\cdot \log\left(\frac{m}{n}\, p\right) \tag{37}$$

behoudens een kans Θ een bovengrens van het peil, dat door het jaarmaximum der hoogwaterstanden met kans p overschreden wordt.

De krommen in figuur 2.11.1 geven in vertikale richting gelezen de betrouwbaarheidsbovengrenzen van $\Theta = 5\%$ en $\Theta = 1\%$ van de kans op overschrijding van het peil h in één jaar en, in horizontale richting gelezen, bij een kans p de betrouwbaarheidsbovengrenzen (met $\Theta = 5\%$ en $\Theta = 1\%$) voor het peil, dat door het jaarmaximum met kans p overschreden wordt.

A 2.8 De methode van Gumbel

De verdelingsfunctie van de grootste van N onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele kan, onder bepaalde voorwaarden, goed met een dubbel-exponentiële verdelingsfunctie benaderd worden.

Bij het onderzoek van de jaarmaxima der afvoeren van rivieren is bebleken, dat, hoewel we hier met maxima van afhankelijke grootheden te doen hebben, deze maxima toch vaak ondersteld kunnen worden onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling te zijn en dat dus de verdelingsfunctie

(38) $$H(h) = e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}}$$

een goede benadering voor de werkelijke verdelingsfunctie is.

We kunnen nu H(h) gebruiken voor het doen van de voorspellingen, nadat we β en γ hebben geschat uit de beschikbare gegevens. Met behulp van het door Gumbel ontworpen waarschijnlijkheidspapier (verder "Gumbelpapier" genoemd) kunnen we onderzoeken of de jaarmaxima der hoogwaterstanden, die in Hoek van Holland gevonden zijn, ook beschouwd kunnen worden als onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling.

De waargenomen standen zijn als volgt uitgezet:
Zijn $h_1, \ldots, h_m$ ($h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_m$) de waargenomen standen, dan wordt eerst $(i-0,3)/(m+0,4)$ berekend (voor $i=1,2,\ldots,m$) en vervolgens de punten $((i-0,3)/(m+0,4)\ ;\ h_{m-i+1})$ op het Gumbelpapier uitgezet, $(i-0,3)/(m+0,4)$ op de horizontale (niet lineaire) schaal en h_{m-i+1} op de vertikale schaal. In plaats van $(i-0,3)/(m+0,4)$ kan ook $i/(m+1)$ gebruikt worden of men kan de methode van Gumbel zelf volgen.

Wij geven aan $(i-0,3)/(m+0,4)$ de voorkeur, daar hierdoor, in geval van werkelijke onafhankelijke waarnemingen uit een dubbel-exponentiële verdeling ieder uitgezet punt een kans $\frac{1}{2}$ heeft om boven of onder de theoretische kromme te liggen.

Deze methode van uitzetten wordt uitvoerig beschreven in [1] en werd ook toegepast in de figuren 2.8.1, 2.8.2 en 2.10.1.

De jaarmaxima liggen, zoals uit fig. 2.4.1 blijkt, inderdaad bij goede benadering op een rechte lijn.

Daar recht boven ieder punt y van de lineaire horizontale schaal het punt $e^{-e^{-y}}$ op de niet lineaire horizontale schaal staat, wordt het lineaire verband der uitgezette punten gegeven door

$$y = \beta(h - \gamma) .$$

Voor grote y (d.w.z. voor grote h, daar $\beta > 0$) bestaat er vrijwel geen verschil tussen

$$e^{-e^{-y}} = 1 - e^{-y} + \frac{e^{-2y}}{2!} - \cdots \quad \text{en} \quad 1 - e^{-y}$$

zoals uit tabel A 2.8.1 blijkt:

Tabel A 2.8.1

y	$1 - e^{-y}$	$e^{-e^{-y}}$
0	0,000000	0,367879
1	0,632121	0,692201
2	0,864665	0,873423
3	0,950213	0,951432
4	0,981684	0,981851
5	0,993262	0,993285
6	0,997521	0,997524
7	0,999088	0,999089

Dit betekent, dat voor grote h de kans op overschrijding van het peil h in één jaar door $1 - e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \approx e^{-\beta(h-\gamma)}$ gegeven wordt, zodat de op het Gumbelpapier gevonden helling β moet overeenstemmen met de helling α van n(h) op halflogarithmisch papier (d.i. voor grote h eveneens de kans op overschrijding van het peil h in één jaar).

Uit het bovenstaande staatje blijkt, dat we voor $y \geq 4$ het Gumbelpapier als halflogarithmisch papier kunnen beschouwen. De in fig. 2.7.1 en 2.8.2 getrokken lijnen kunnen voor $y \geq 4$ dus zonder meer overgenomen worden op het Gumbelpapier, door twee punten over te nemen en hun hellingen vergeleken worden met de helling van de Gumbellijn. Hierbij blijkt duidelijk (zie fig. 2.7.2. en 2.8.3), dat de helling van de lijn uit fig. 2.7.1 slecht en die van de lijn uit fig. 2.8.2. heel goed bij die van de op het Gumbelpapier getekende punten past.

A 2.9 Toelichting figuren

In deze paragraaf wordt nogmaals van alle figuren van deze Bijdrage II 2 een opsomming gegeven en aangegeven, hoe zij verkregen zijn.

fig. 2.3.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956. Uitgezet zijn de punten (h_i; i/m), waarbij i het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen h_i voorstelt en m het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus m=69. De waarnemingen h_i zijn naar beneden in even aantallen cm afgerond. De horizontale schaal der h_i is arithmetisch, de vertikale schaal logarithmisch. Voor lage waarden van h kunnen de punten niet afzonderlijk getekend worden, zij zijn daarom tot streepjes samengevoegd. Tabel Bijlage II - 2.0.1 bevat de waarnemingen $\geq 1,20$ m. De data, die bij de standen $\geq 2,20$ m behoren, zijn opgenomen in Tabel Bijlage II - 2.0.3.

fig. 2.4.1 De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956. Uitgezet zijn de punten ($(i-0,3)/(m+0,4)$; h_{m-i+1}), waarin i het rangnummer van de naar afdalende grootte gerangschikte jaarmaxima h_i voorstelt en m het aantal jaren. Hier is dus m=69. De (bovenste) horizontale schaal der $(i-0,3)/(m+0,4)$ is dubbel-logarithmisch verdeeld, de vertikale schaal arithmetisch. Tabel Bijlage II-2.0.2 geeft de jaarmaxima met data.

fig. 2.7.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.3.1, behoudens dat de lijn

$$19,7\, e^{-\frac{h-1,50}{0,236}} \qquad \text{voor } h \geq 1,50$$

is toegevoegd.

fig. 2.7.2 De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.4.1, behoudens dat de lijn uit fig. 2.7.1 op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

fig. 2.7.3 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen. Uitgezet zijn de punten (h_i; i/m), zoals in fig. 2.3.1, waarbij de onderste (linker) figuur de waarnemingen uit de maanden januari, november en december bevat en de bovenste (rechter) figuur de overige waarnemingen. Het aantal jaren is ook nu m=69. De hoogste stand (3,84 m) is bij de winterwaarnemingen uitgezet. Tabel Bijlage II - 2.0.1 bevat de waarnemingen $\geq$ 1,20 m. De data, die bij de standen $\geqslant$ 2,20 m behoren, zijn opgenomen in Tabel Bijlage II - 2.0.3.

fig. 2.8.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/89 tot en met 1938/39 en 1945/46 tot en met 1956/57. Uitgezet zijn de punten (h_i; (i-0,3)/m), waarbij i het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen h_i voorstelt en m het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus m=63. De h_i zijn de hoogste hoogwaterstanden van naar hun baan geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december van de aangegeven 63 winters. De horizontale schaal der h_i is arithmetisch, de vertikale schaal logarithmisch. De waarnemingen zijn in cm nauwkeurig gebruikt en als Tabel Bijlage II - 2.0.4 aan deze Bijdrage toegevoegd. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters 39/40 tot en met 44/45 toe te passen. De stand 3,85 m van 1 februari 1953 is als in de beschouwde perioden vallend gerekend.

fig. 2.8.2 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/89 tot en met 1938/39 en 1945/46 tot en met 1956/57, met een daaraan aangepaste rechte. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.8.1, behoudens dat de lijn

$$2,63\ e^{-\frac{h-1,70}{0,337}} \qquad \text{voor } h \geq 1,70$$

is toegevoegd.

fig. 2.8.3 De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.4.1, behoudens dat de lijn uit fig. 2.8.2 op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

fig. 2.10.1 De baanselectielijn bij verschillende beginpunten. Getekend zijn de lijnen

$$\hat{n}(b)e^{-\frac{h-b}{\hat{a}_e}} \qquad \text{voor } h \geq b$$

voor de waarden

b	$\hat{a}_e$	$\hat{n}(b)$
1,5	0,383	4,08
1,6	0,354	3,37
1,7	0,337	2,64
1,8	0,321	2,05
1,9	0,325	1,49
2,0	0,315	1,13
2,1	0,304	0,841
2,2	0,364	0,524
2,3	0,387	0,381
2,4	0,394	0,286
2,5	0,315	0,270
2,6	0,304	0,206

fig. 2.11.1 De baanselectielijn met beginpunt 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01. Getekend zijn de baanselectielijn met beginpunt 1,70 m

$$2{,}63\ e^{-\frac{h-1{,}70}{0{,}337}} \qquad \text{voor } h \geq 1{,}70$$

en de bovengrenzen met onbetrouwbaarheid 0,05

$$2{,}63\ e^{-\frac{h-1{,}70}{0{,}385}} \qquad \text{voor } h \geq 1{,}70$$

en met onbetrouwbaarheid 0,01

$$2{,}63\ e^{-\frac{h-1{,}70}{0{,}407}} \qquad \text{voor } h \geq 1{,}70\ .$$

fig. A 2.2.1 Vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logarithmisch normale verdeling. Getekend zijn de rechte lijn

$$e^{-3h} \qquad \text{voor } h \geqslant 0 \text{ ,}$$

aangegeven met $a = \infty$ en de drie krommen

$$\int_{\log \frac{\mu(h+a)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \Big/ \int_{\log \frac{\mu a}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv \qquad \text{voor } h \geqslant 0$$

voor a=1, 10 en 100, $\mu = e^3 . a^{-1}$ en $\sigma = a^{-\frac{1}{2}}$, aangegeven resp. met a=1, a=10 en a=100. De horizontale schaal is arithmetisch, de vertikale schaal logarithmisch.

fig. A 2.6.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de theoretische kromme vanaf 2,00 m. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.8.1, behoudens dat vanaf 2,00 m de trapfunctie, gegeven door

$$5{,}27\ (\frac{i}{n} + 0{,}0584) \qquad \text{voor } h_{i+1} < h \leqslant h_i$$

is toegevoegd.

fig. A 2.6.2 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf 2,45 m. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.8.1, behoudens dat nu de waarnemingen bij (h_i; i/m) uitgezet zijn, en toegevoegd zijn de lijnen

$$2{,}63\ e^{-2{,}92(h-1{,}70)} \qquad \text{voor } h \geqslant 1{,}70$$

en

$$0{,}270\ e^{-2{,}92(h-2{,}45)} \qquad \text{voor } h \geqslant 2{,}45$$

die schattingen voor de theoretische baanselectiekromme vanaf 1,70 m (resp. 2,45 m) vormen en een 10% bovengrens voor de trapfunctie rechts van 2,45 m, die door

$$z(h) = 0{,}270\ (e^{-2{,}92(h-2{,}45)} + 0{,}250) \qquad \text{voor } h \geqslant 2{,}45$$

gegeven wordt.

fig. A 2.6.3 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h, afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearson kromme en buigpuntraaklijn. Deze figuur is gelijk aan fig. 2.8.1, behoudens dat de Pearson kromme

$$5{,}27 \int_{0}^{\frac{14{,}5}{h-0{,}523}} \frac{z^{11{,}74} \cdot e^{-z}}{(11{,}74)!} \, dz \qquad \text{voor } h \geq 0{,}523$$

en de lijn (buigpuntraaklijn aan de Pearson kromme)

$$5{,}27 \; e^{-3{,}20\, h \,+\, 4{,}87}$$

toegevoegd zijn.

Literatuur

[1] Benard A. en Bos-Levenbach E.C. — Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier, Statistica 7(1953) 163-173.

[2] Dantzig D. van — Het ekonomisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van ons land tegen stormvloeden, Rapport S 222 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

[3] Deemer W.L. Jr. and Votaw D.F. Jr. — Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions, Annals of Math. Stat. 26 (1955) 498-504.

[4] Elderton W.P. — Frequency curves and correlation , Harren Press, Washington D.C., fourth edition, 1953.

[5] Fisher R.A. and Tippett L.H.C. — Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample, Proc. Camb. Phil. Soc. 23 (1928) 912.

[6] Fréchet M. — Sur la probabilité de l'écart maximum, Ann.Soc.Polon.Math. 6 (1928) 93-116.

[7] Gumbel E.J. — Les valeurs extrêmes des distributions statistiques, Ann.Inst.H.Poincaré 4 (1935) 115-158.

[8] Gumbel E.J. — Simplified plotting of statistical observations, Transactions Amer.Geophys. Union 26 I (1945) 70-82.

[9] Miller L.H. — Table of percentage points of Kolmogorov statistics, J.Amer.Stat.Ass. 51 (1956) 111-121.

[10] Wemelsfelder P.J. — Wetmatigheden in het optreden van stormvloeden, "De Ingenieur" no.9, Bouw- en Waterkunde 3.

Bijlage II-2.0.1

Aantal overschrijdingen van het aangegeven peil in de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) en de splitsing daarvan in overschrijdingen in de wintermaanden (januari, november en december) en de overige maanden van het jaar

H.W. in m	aantal overschrijdingen hele jaar	aantal overschrijdingen winter-maanden	aantal overschrijdingen overige maanden	H.W. in m	aantal overschrijdingen hele jaar	aantal overschrijdingen winter-maanden	aantal overschrijdingen overige maanden
3,84	1	1	0	1,98	181	119	62
3,28	2	2	0	1,96	196	130	66
3,00	4	4	0	1,94	215	141	74
2,96	7	6	1	1,92	226	147	79
2,76	8	6	2	1,90	250	158	92
2,74	9	7	2	1,88	272	171	101
2,70	11	8	3	1,86	287	179	108
2,68	14	10	4	1,84	316	198	118
2,66	16	12	4	1,82	343	214	129
2,64	18	13	5	1,80	377	234	143
2,62	21	16	5	1,78	406	247	159
2,56	22	16	6	1,76	442	268	174
2,54	23	17	6	1,74	483	288	195
2,52	27	20	7	1,72	525	306	219
2,50	28	21	7	1,70	580	340	240
2,48	28	21	7	1,68	630	371	259
2,46	29	22	7	1,66	676	401	275
2,44	30	23	7	1,64	737	428	309
2,42	31	23	8	1,62	803	459	344
2,40	34	24	10	1,60	877	507	370
2,38	37	26	11	1,58	952	552	400
2,36	40	28	12	1,56	1034	594	440
2,34	40	28	12	1,54	1129	635	494
2,32	46	32	14	1,52	1233	690	543
2,30	49	33	16	1,50	1362	751	611
2,28	53	34	19	1,48	1487	802	685
2,26	54	35	19	1,46	1600	857	743
2,24	59	40	19	1,44	1749	926	823
2,22	64	44	20	1,42	1894	997	897
2,20	70	48	22	1,40	2109	1088	1021
2,18	76	54	22	1,38	2281	1156	1125
2,16	82	57	25	1,36	2449	1232	1217
2,14	92	64	28	1,34	2706	1338	1368
2,12	103	74	29	1,32	2936	1424	1512
2,10	114	82	32	1,30	3255	1541	1714
2,08	126	89	37	1,28	3550	1659	1891
2,06	132	92	40	1,26	3854	1766	2088
2,04	146	97	49	1,24	4295	1932	2363
2,02	155	103	52	1,22	4715	2069	2646
2,00	169	114	55	1,20	5267	2239	3028

De aangegeven waterpeilen klimmen met 0,02 m; van 1,20 m tot 2,56 m zijn zij alle aangegeven, daarboven alleen de hoogste peilen, die een bepaald aantal keren werden overschreden. Het jaarpeil blijkt hier 2,20 m te zijn en het grenspeil 2,40 m. Uit de nauwkeuriger Bijlage II-2.0.3 blijkt dit laatste 2,39 m te zijn.

Bijlage II-2.0.2

Jaarmaxima der hoogwaterstanden van de jaren 1888 t/m 1956 (69 jaar)

datum	H.W. in m	datum	H.W. in m
21-11-88	184	6-12-22	225
9- 2-89	276	19-12-23	210
2-10-90	212	6- 2 24	195
10-12-91	190	28-11-25	209
3- 1-92	196	10-10-26	240
23-11-93	198	12- 9-27	169
22-12-94	328	26-11-28	296
7-12-95	268	12-12-29	222
16- 1-96	212	23-11-30	253
29-11-97	268	17- 1-31	233
3- 2-98	228	28-11-32	233
13- 1-99	226	26-10-33	198
22-12-00	185	15-10-34	187
28- 1-01	221	25- 1-35	212
26- 1-02	238	1-12-36	274
22-11-03	237	15- 3-37	179
30-12-04	296	29- 1-38	236
7- 1-05	250	27-11-39	208
12- 3-06	297	6-12-40	265
21- 2-07	228	7-12-41	210
23-11-08	266	29-12-42	220
5- 2-09	210	7- 4-43	268
1-11-10	194	26- 1-44	267
30- 9-11	241	19- 1-45	246
11-11-12	262	23- 2-46	256
4-12-13	191	26-11-47	218
11-11-14	214	23-10-48	210
16- 1-15	212	1- 3-49	270
13- 1-16	300	13-11-50	212
2-12-17	254	29-11-51	228
23-12-18	202	7-11-52	212
19-12-19	239	1- 2-53	385
4-12-20	220	23-12-54	300
6-11-21	263	13- 1-55	210
		18- 1-56	215

Bijlage II-2.0.3

Hoogwaterstanden groter dan 2,20 m van de jaren 1888 t/m 1956 met data (69 jaar)

Datum	stand	Datum	stand
88	geen	3- 1-22	220
9- 2-89	276	6-12-22	225
22-12-94	328	10-10-26	240
23- 1-95	262	26-11-28	296
6-12-95	230 § 1)	12-12-29	222
6-12-95	240 §	23-11-30	253
7-12-95	268	23-11-30	232 §
19- 6-97	252	17- 1-31	233
29-11-97	268	18-10-32	223
3- 2-98	228	28-11-32	233
13- 1-99	226	18-10-36	242
28- 1-01	221	28-10-36	237
26- 1-02	224 §	1-12-36	253 §
26- 1-02	238	1-12-36	274
10-10-03	228	4-12-36	224
22-11-03	237	29- 1-38	236
30-12-04	296	3- 4-38	221
7- 1-05	250	6-12-40	265
12- 3-06	297	29-12-42	220
13- 3-06	230 §	7- 4-43	268
21- 2-07	228	8- 4-43	220 §
23-11-08	266	26- 1-44	267
30- 9-11	241	4- 2-44	238
9- 4-12	232	13- 3-44	230
11-11-12	262	19- 1-45	246
13- 1-16	300	20- 2-46	232
25-11-17	232 §	23- 2-46	256
26-11-17	244	1- 3-49	270
2-12-17	224 §	26-10-49	223 ƒ 2)
2-12-17	254	29-11-51	228 ƒ
19-12-19	239	1- 2-53	385
4-12-20	220	1- 2-53	265
18- 1-21	225	22-12-54	252
1-11-21	222	23-12-54	300
6-11-21	263	24-12-54	270 § of ƒ
31-12-21	222	55	geen
		56	geen

1) § wil zeggen, dat waterstand niet de hoogste uit de bijbehorende depressie is.

2) ƒ wil zeggen, dat de depressiebaan niet in V.d.Ham's vak ligt, zie pag. II 2.24.

Bijlage II-2.0.4

Hoogste H.W.'s uit naar banen geselecteerde depressies uit de wintermaanden (januari, november en december) van de winters 1888/89 t/m 1938/39 en 1945/46 t/m 1956/57 (63 jaar)

H.W.in m	aantal overschrijdingen	H.W.in m	aantal overschrijdingen	H.W.in m	aantal overschrijdingen
3,85	1	1,99	73	1,58	222
3,28	2	1,98	74	1,57	223
3,00	4	1,97	76	1,56	230
2,96	6	1,96	78	1,55	233
2,74	7	1,95	85	1,54	238
2,68	9	1,94	86	1,53	244
2,66	10	1,93	88	1,52	248
2,63	11	1,92	89	1,51	251
2,62	13	1,91	91	1,50	257
2,54	14	1,90	94	1,49	259
2,53	15	1,89	96	1,48	265
2,52	16	1,88	100	1,47	268
2,50	17	1,87	101	1,46	271
2,44	18	1,86	104	1,45	274
2,39	19	1,85	108	1,44	277
2,38	20	1,84	111	1,43	287
2,37	21	1,83	113	1,42	289
2,36	22	1,82	117	1,41	291
2,33	24	1,81	121	1,40	293
2,26	25	1,80	129	1,39	297
2,25	27	1,79	130	1,38	298
2,24	28	1,78	136	1,37	302
2,22	31	1,77	137	1,36	303
2,21	32	1,76	144	1,35	306
2,20	33	1,75	145	1,34	307
2,18	36	1,74	148	1,33	309
2,16	38	1,73	151	1,32	312
2,15	40	1,72	156	1,30	313
2,14	41	1,71	157	1,28	314
2,13	42	1,70	166	1,27	315
2,12	50	1,69	172	1,24	319
2,11	51	1,68	180	1,23	320
2,10	53	1,67	182	1,22	321
2,09	56	1,66	185	1,21	322
2,08	59	1,65	189	1,20	323
2,07	61	1,64	196	1,18	324
2,05	62	1,63	200	1,12	327
2,04	64	1,62	204	1,09	328
2,02	66	1,61	209	1,06	330
2,01	70	1,60	212	1,03	331
2,00	71	1,59	216	0,97	332

De standen zijn opgegeven in 0,01 m nauwkeurig. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters van 1939/40 tot en met 1944/45 toe te passen.

Belangrijkste symbolen

h	=	waterstand in meter boven N.A.P.
$n(h)$	=	verwacht aantal overschrijdingen per jaar van het peil h
$g(h)$	=	kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming
$p(h)$	=	kans op overschrijding van het peil h in een jaar
$f(h)$	=	gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van het peil h
a_k	=	hoogteverschil, waardoor het gemiddeld aantal overschrijdingen h maal zo klein wordt, in meter
N	=	totaal aantal waargenomen hoogwaterstanden per jaar
h_k	=	hoogwaterstand, die gemiddeld N/k maal per jaar wordt overschreden, in meter
m	=	aantal jaren, waarover de beschouwde waarnemingsperiode zich uitstrekt
α	=	a_e^{-1}
$\hat{n}(h)$	=	schatting van $n(h)$
$\hat{a}_e$	=	schatting van a_e
$\hat{\alpha}$	=	schatting van α

INHOUD

Bijdrage II 2

Aanhangsel II 2

Bijlagen II 2

Figuren

2.7.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn

2.7.2 De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen

2.7.3 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen

2.8.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/89 tot en met 1938/39 en 1945/46 tot en met 1956/57

2.8.2 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/89 tot en met 1938/39 en 1945/46 tot en met 1956/57, met een daaraan aangepaste rechte

2.8.3 De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen

2.10.1 De baanselectielijn bij verschillende beginpunten

2.11.1 De baanselectielijn met beginpunt 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01

A 2.2.1 De vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logarithmisch normale verdeling

A 2.6.1 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de theoretische kromme vanaf 2,00 m.

A 2.6.2 Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen met een 10% bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf 2,45 m

Tabellen II 2 (in de tekst)

Tabellen II 2 (buiten de tekst)

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.