STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

LEIDING: PROF. DR D. VAN DANTZIG
ADVISEUR VOOR STATISTISCHE CONSULTATIE: PROF. DR J. HEMELRIJK

Rapport S 236

Een limietverdeling

door

J.Th. Runnenburg en F.W. Steutel

april 1958.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Probleem

Naar aanleiding van een vraag van Dr B.H. de Jongh wordt in dit rapport het volgende probleem behandeld: als $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{x}_n \leqslant x\}$ [1)2)] een verdelingsfunctie voorstelt, waarvan de verdelingsdichtheid $f_n(x) = F_n'(x)$ gegeven wordt door

$$(1) \qquad f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n \, n! \sqrt{\pi}} \, e^{-x^2} \{H_n(x)\}^2 ,$$

waarin $H_n(x)$ het n^{de} Hermite-polynoom voorstelt, dat gedefiniëerd wordt door

$$(2) \qquad H_n(x) \overset{\text{def}}{=} (-1)^n \, e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} ,$$

wordt gevraagd naar de verdeling van

$$\underline{y} = \lim_{n\to\infty} c_n \, \underline{x}_n ,$$

waarbij c_n een geschikt gekozen normeringsconstante voorstelt.

Methode van oplossing

Bij de oplossing van dit probleem gaan we als volgt te werk: we berekenen eerst de karakteristieke functie $\varphi_n(\tau)$ van $F_n(x)$ en vervolgens, omdat $\mathcal{E}\,\underline{x}_n = 0$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_n^2 = n+\frac{1}{2}$, hetgeen tot een ontaarde limietverdeling zou leiden, de karakteristieke functie $\psi_n(\tau)$ van de verdelingsfunctie $G_n(x)$ van $\underline{y}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_n}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$ en laten daarna zien, dat $\psi_n(\tau)$ convergeert naar een karakteristieke functie $\psi(\tau)$, die continu is in $\tau = 0$. Dan geldt op grond van de continuïteitsstelling voor karakteristieke functies (zie [2], blz. 96), dat $G_n(x)$ convergeert naar een verdelingsfunctie $G(x)$, waarvan $\psi(\tau)$ de karakteristieke functie is. Tenslotte wordt uit $\psi(\tau)$ $G(x)$ bepaald.

---

1) Als A een gebeurtenis voorstelt, wordt met $P\{A\}$ de kans aangeduid dat A optreedt.

2) Stochastische variabelen, d.w.z. variabelen die een kansverdeling bezitten, worden door onderstreping onderscheiden van "gewone" variabelen, bijv. de waarden die ze bij een experiment aannemen.

Oplossing

We beschouwen de karakteristieke functie $\varphi_n(\tau)$ van $F_n(x)$

$$\varphi_n(\tau) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} f_n(x)\, dx \tag{3}$$

en vervolgens de voortbrengende functie der $\varphi_n(\tau)$:

$$\varphi(\tau,t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau)\, t^n \quad , \quad |t|<1 . \tag{4}$$

Daar (zie [3], blz. 78)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\, e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2}{2^n\, n!\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\pi}} \exp\left(-\frac{x^2(1-t)}{1+t}\right) \quad , \quad |t|<1 ,$$

krijgt men met (1), (3) en (4)

$$\varphi(\tau,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau x}\, e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2}{2^n\, n!\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x - \frac{x^2(1-t)}{1+t}}\, dx,$$

waarbij de verwisseling van som- en integraalteken wordt gerechtvaardigd door de absolute convergentie van de som in het tweede lid:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| t^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau x}\, e^{-x^2}\{H_n(x)\}^2}{2^n\, n!\sqrt{\pi}}\, dx \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |t^n| < \infty \quad \text{als } |t|<1 \text{ en } \tau \text{ reëel.}$$

Op grond van de bekende relatie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau x - \frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}}\, dx = \sigma\, e^{-\frac{\tau^2\sigma^2}{4}}$$

vinden we na substitutie van $\sigma^2 = \frac{1+t}{1-t}$, dat

$$\varphi(\tau,t) = \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\sqrt{1-t^2}} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4}\frac{1+t}{1-t}} = e^{-\frac{\tau^2}{4}} \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}\cdot\frac{t}{1-t}}}{1-t} .$$

Daar nu (zie [1], blz. 79)

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!}\, t^n \qquad (|t|<1) ,$$

waarin $L_n(x)$ het n^{de} polynoom van Laguerre voorstelt, met de eigenschap

(5) $$\frac{L_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

heeft men

$$\varphi(\tau,t) = e^{-\frac{\tau^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(\frac{\tau^2}{2})}{n!} t^n ,$$

zodat met (4) en (5)

(6) $$\varphi_n(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{4}} \frac{L_n(\frac{\tau^2}{2})}{n!} = (1-\frac{\tau^2}{4}+\ldots)(1-\frac{n\tau^2}{2}+\ldots) = 1-(n+\tfrac{1}{2})\frac{\tau^2}{2}+\ldots \quad .$$

Hieruit volgt wegens (3)

(7) $$\mathcal{E}\,\underline{x}_n = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{E}\,\underline{x}_n^2 = n+\tfrac{1}{2} \; .$$

Daar blijkens (7) $\mathcal{E}\,\underline{x}_n^2 \to \infty$, als $n \to \infty$, voeren we de normeringsfactor $\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$ in en definiëren

$$\underline{y}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_n}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

$$G_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\underline{y}_n \leq x\}$$

$$g_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} G_n'(x)$$

$$\psi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}\, e^{i\tau \underline{y}_n} = \mathcal{E}\, e^{i\tau \frac{\underline{x}_n}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}} = \varphi_n\left(\frac{\tau}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right),$$

zodat wegens (6)

$$\psi_n(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{4n+2}} \frac{L_n(\frac{\tau^2}{2n+1})}{n!}$$

verkregen wordt.

(8) $$\frac{L_n(\frac{\tau^2}{2n+1})}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \cdot \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} \qquad \text{(zie (5))}.$$

Daar

$$\left|(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k}\right| \leq \left|\frac{\tau^{2k}}{2^k(k!)^2}\right|$$

en

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} \right| \leqslant e^{\frac{|\tau|^2}{2}} < \infty ,$$

terwijl bovendien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} = \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} , \tag{9}$$

kan men bij vaste τ en $\varepsilon > 0$ een N vinden, zodat voor $n \geqslant N$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} \left| \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} - \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} \right| + 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|\tau|^{2k}}{2^k (k!)^2} < \varepsilon$$

Hierbij wordt eerst m zo gekozen, dat

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|\tau|^{2k}}{2^k (k!)^2} < \frac{\varepsilon}{4}$$

en vervolgens bij deze m, op grond van (9), een $N > m$ bepaald , zodat voor $n \geq N$

$$\sum_{k=0}^{m} \left| \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} - \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Hiermee is dus bewezen, dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{\tau^{2k}}{(2n+1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\tau^{2k}}{2^k (k!)^2} = J_0(\tau\sqrt{2}) ;$$

zodat dus

$$\psi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n(\tau) = J_0(\tau\sqrt{2})^{1)} .$$

Daar $J_0(\tau\sqrt{2})$ continu is in $\tau = 0$, geldt op grond van de eerder genoemde continuïteitsstelling, [2], blz. 96, dat $\psi(\tau)$ de karakteristieke functie van een verdelingsfunctie

$$G(x) = P\{\underline{y} \leq x\} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} G_n(x)$$

---

1) $J_0(z)$ is de Besselfunctie van de eerste soort van de orde nul, zie bijv. [4], pag. 357.

is. Bovendien volgt uit (9), dat de momenten van $\underline{y}_n$ convergeren naar die van $\underline{y}$, dus dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\, \underline{y}_n^{\,m} = \mathcal{E}\, \underline{y}^m = \begin{cases} 0 & \text{voor } m=2k+1 \\ \binom{2k}{k} 2^{-k} & \text{voor } m=2k \end{cases}$$

voor k=0,1,2,... .

In het volgende stelt $\iota(x)$ de iotafunctie voor, die wordt gedefiniëerd door

$$\iota(x) \underset{=}{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Volgens [3], blz. 178 is

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \iota(1-x^2)dx = 2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\, u^{-\nu} J_{\nu}(u) ,$$

zodat, daar $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ is, met $\nu = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} \left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \iota\left(1-\frac{x^2}{2}\right) dx = \pi\sqrt{2}\, J_0(\tau\sqrt{2}) ,$$

waaruit volgt, dat

$$(10) \qquad G(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{x} \left(1-\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} du \quad \iota(2-x^2) .$$

Door substitutie van

$$v = \frac{u+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

gaat (10) over in

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv \quad \iota(2-x^2) .$$

Definiëren we verder nog

$$\underline{z} \underset{=}{\text{def}} \frac{\underline{y}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

dan is dus

$$P\{\underline{z} \leq z\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{z} v^{-\frac{1}{2}} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv \quad \iota(z-z^2) ,$$

zodat $\underline{z} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\underline{x}_n + \sqrt{2n+1}}{2\sqrt{2n+1}}$ een bêta-verdeling $B_{\underline{z}}(p,q)$ met parameters $p=q=\frac{1}{2}$ bezit.

Literatuur

[1] Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (1931)
[2] Cramér, Mathematical Methods of Statistics (1946)
[3] Titchmarsh, Theory of Fourier Integrals (1937)
[4] Whittaker-Watson, Modern Analysis (1952)