

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 239 (Ov 5)

Overzicht van een aantal artikelen over
"Operations Research"

II

door
J. Kriens

juli 1958

Het hier volgende overzicht pretendeert niet volledig te zijn. Sommige voor de Operations Research belangrijke onderwerpen zijn in het geheel niet vertegenwoordigd, terwijl ook de keuze uit de bestaande literatuur der behandelde onderwerpen vrij willekeurig is.

Het overzicht is gegroeid tijdens de voorbereiding van een cursus over bepaalde voor de Operations Research belangrijke technieken.

Lineaire programmering

- 1) Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming G.B. DANTZIG, *Econometrica* 23 (1955) 174-183.

De simplexmethode kan met succes worden gebruikt bij lineaire programmeringsproblemen, waarin het aantal voorwaarden niet meer dan honderd bedraagt. Voor grotere problemen moet men veelal gebruik maken van bijzondere eigenschappen van de coëfficiëntenmatrix der voorwaarden. In dit artikel worden drie gevallen besproken: 1) de variabelen moeten niet alleen ≥ 0 , doch bovendien \leq een gegeven waarde zijn, 2) de coëfficiëntenmatrix bevat blokken van elementen welke alle nul zijn, 3) het geval waarin de voorwaarden uiteenvallen in een groep waarvan de grenzen vrijwel alle effectief zijn en een groep waarin slechts enkele grenzen effectief zijn. De behandelde oplossingsmethoden zijn niet in de vorm van direct toepasbare recepten gegoten.

- 2) A comparison of the original and revised simplex methods H.M. WAGNER, *Operations Research* 5 (1957) 361-369.

Na de ontwikkeling van de simplexmethode zijn er verschillende variaties gevonden die de rekenprocedure bekorten. Eén ervan, die bekend staat onder de naam "revised simplex method" wordt in dit artikel nog eens uitvoerig beschreven en vervolgens vergeleken met de klassieke simplexmethode. Wanneer het aantal variabelen (inclusief de zogenaamde "slack" of verschilvariabelen) meer dan driemaal het aantal voorwaarden bedraagt, vergt de "revised simplex method" in ieder geval minder berekeningen, doch ook wanneer deze verhouding anders ligt, kan men de superioriteit van de nieuwe methode verdedigen. Het artikel is duidelijk geschreven en vereist weinig wiskundige kennis.

- 3) On the solution of discrete programming problems, H.M. MARKOWITZ and A.S. MANNE, *Econometrica* 25 (1957) 84-110.

De gebruikelijke methoden om lineaire programmeringsproblemen op te lossen, gaan er van uit dat de variabelen bepaalde intervallen kunnen doorlopen. Er zijn echter tal van voorbeelden o.a. bij produktie- en vervoersproblemen, waarin het alternatief bestaat uit iets wel (en dan volledig) of iets niet uitvoeren. In

de wiskundige formulering komt dit er op neer dat de corresponderende variabele hetzij de waarde nul, hetzij de waarde één aanneemt. Een dergelijk probleem is dus in één of meer variabelen discreet. De schrijvers geven voor dit type van problemen een methode aan om de oplossing te bereiken; het is geen automatisch toepasbare methode, zoals de simplex-algorithme. Verder tonen zij aan dat sommige problemen met een niet lineaire waardefunctie gelijkwaardig zijn met discrete lineaire programmeringsproblemen, zodat ook daar de aangegeven methode van nut kan zijn.

- 4) Nonlinear power of adjacent extreme point methods in linear programming, A. CHARNES and W.W. COOPER, *Econometrica* 25 (1957) 132-153.

Na een uitvoerig en duidelijk overzicht van de simplex-methode, onderzoeken de schrijvers in hoeverre deze methode ook toegepast kan worden bij de bepaling van het extremum van een niet lineaire functie onder lineaire bijvoorwaarden. Twee gevallen worden nader onderzocht, te weten dat waarbij men hoofdzakelijk geïnteresseerd is in een vergelijking van de functiewaarden in bepaalde punten en dat waarin een bepaalde graad van benadering vereist is. De methoden worden geïllustreerd aan de hand van een voorbeeld, waarin men wil bepalen hoeveel van een artikel men zelf moet produceren en hoeveel men moet inkopen onder de geldende produktie- en inkoopvoorwaarden.

- 5) Linear programming isn't always the answer, D.E. DEBEAU, *Operations Research* 5 (1957) 429-433.

De schrijver waarschuwt voor het toepassen van lineaire programmering bij mengproblemen in hoogovens. De grootste moeilijkheid is de niet homogene samenstelling van schroot, waardoor steekproeven tot onjuiste schattingen kunnen leiden van de percentages fosfor, zwavel, silicaten e.d. in het gebruikte schroot. Op welke wijze men dit probleem wellicht kan oplossen en wanneer men gunstige resultaten mag verwachten wordt eveneens aangegeven.

- 6) The travelling salesman problem, M.M. FLOOD, Operations Research 4 (1956) 61-75 en hoofdstuk XIX in Operations Research for Management, deel II onder redactie van J.F.McCLOSKEY en J.M.COPPINGER.

Dit artikel bevat een historisch overzicht van de ontwikkeling van het reizigersprobleem en het verband van dit probleem met het transportprobleem (vgl.4)) en het personeeltoewijzingsprobleem (vgl. 2)). Terwijl het tweede en derde probleem vrij eenvoudig opgelost kunnen worden, is er voor het eerste geen directe oplossingsmethode bekend. Eén van de weinige algemeen geldende stellingen luidt dat de kortste route zichzelf niet kruist. De auteur bespreekt enige oplossingswijzen (o.a. die genoemd in 29)) en illustreert deze aan de hand van eenvoudige voorbeelden.

Voorraad- en produktieproblemen

- 7) The inventory problem, A. DVORETZKY, J. KIEFER and J. WOLFOWITZ

I Case of known distributions of demand, Econometrica 20 (1952)
187-222

II Case of unknown distributions of demand, Econometrica 20
(1952) 450-466

Deze artikelen bevatten een zeer algemeen gestelde formulering van voorraadproblemen, waarbij men op discrete, steeds op gelijke afstand gelegen tijdstippen goederen kan bestellen, terwijl het niet mogelijk is bestelde goederen terug te zenden. In het eerste artikel wordt aangenomen dat de kansverdeling van de vraag per periode bekend is, in het tweede wordt deze onderstelling niet gemaakt. De modellen zijn zowel van toepassing als de vraag waaraan niet direct kan worden voldaan later nog bevredigd kan worden, als voor het geval waarin deze vraag verloren gaat. De aanvoertijd van de goederen kan stochastisch zijn. Het probleem wordt afzonderlijk onderzocht voor het geval van één periode, van eindig veel perioden en oneindig veel perioden. In het laatste geval volgt het optimale bestelschema wanneer de verdeling van de vraag in de opeenvolgende perioden onderling onafhankelijk en stationair is, uit een integraalvergelijking die men in principe door iteratie kan oplossen. De gegeven rekenvoorbeelden hebben alleen betrekking op een sterk vereenvoudigd model, waarin de voorraadkosten evenredig zijn aan de omvang van de voorraad in het begin

van de periode, de neenverkoopkosten onafhankelijk zijn van de mate van neenverkoop en de inkoopkosten onafhankelijk zijn van de ingekochte hoeveelheid. Door de zeer algemene formulering heeft men namelijk snel met rekentechnische moeilijkheden te kampen. De schrijvers laten zien dat de zogenaamde (s,S) -politiek, waarbij men aan het begin van de periode niet bestelt indien men s of meer in voorraad heeft en anders de voorraad aanvult tot een vast bedrag S , niet optimaal behoeft te zijn.

In het tweede artikel wordt een begrippenapparaat ingevoerd, ontleend aan de theorie van de beslissingsfuncties; de afgeleide stellingen zijn theoretisch interessant, doch voor de praktijk van minder belang.

Beide artikelen zijn zeer belangwekkend, maar stellen in wiskundig opzicht vrij hoge eisen aan de lezer.

8) Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function, H.A. SIMON, *Econometrica* 24 (1956) 74-81.

In een produktieproces zullen de optimale produktieniveau's $P(1), \dots, P(N)$ van N achtereenvolgende perioden afhangen van de te verwachten verkopen $S(t)$ ($t=1,2,\dots$). De gegevens omtrent de verkopen kunnen de volgende vorm aannemen:

- a) de toekomstige waarden kunnen gegeven zijn,
- b) de onvoorwaardelijke verwachtingen van de toekomstige verkopen kunnen gegeven zijn,
- c) de simultane kansverdeling van de toekomstige verkopen kan gegeven zijn.

De eerste beslissing die genomen moet worden betreft het produktieniveau in de eerste periode. Na deze periode beschikt men over meer informatie en men kan dan opnieuw optimaliseren voor de tweede periode, enz. Een beslissing is optimaal indien de verwachting van alle toekomstige kosten minimaal is. Wanneer men nu c) kent, dan kan men b) berekenen en vervolgens handelen alsof de verwachte waarden gelijkwaardig zijn aan a); bij deze werkwijze, de "certainty-equivalent method", heeft men dus niet c), doch alleen b) nodig. Kent men c) dan zal geen enkele methode een lagere verwachting van de totale kosten geven dan de methode waarbij de volledige kansverdeling wordt gebruikt. De schrijver toont nu aan, dat de "certainty-equivalent method" tot dezelfde resul-

taten leidt als de methode waarbij men de volledige kansverdeling gebruikt, indien de kostenfunctie bestaat uit kwadratische en lineaire functies in de variabelen $P(1), \dots, P(N)$ en $S(t)$. Bij kwadratische kostenfuncties kan men dus de optimale oplossing reeds vinden, wanneer men van de toekomstige verkopen alleen de verwachtingen kent.

- 9) A linear decision rule for production and employment scheduling
C.C. HOLT, F. MODIGLIANI and H.A. SIMON, Management Science 2
(1955) 1-30.

In een fabriek wordt aan het begin van iedere maand beslist hoe groot de produktie zal zijn en hoeveel arbeiders er aan het produktieproces zullen deelnemen. Fluctuaties in de vraag kan men opvangen door het aantal arbeiders te wijzigen, de arbeiders overwerk te laten verrichten en met behulp van buffervoorraden. De eerste methode brengt reorganisatiekosten met zich mee, de tweede extra kosten voor overwerk en de derde voorraadkosten. Een produktieschema dat dus wordt vastgelegd door het aantal werknemers W_t en het produktieniveau P_t in de opeenvolgende maanden is optimaal wanneer de som van de drie genoemde typen kosten en de gewone loonkosten minimaal is. Alvorens men de optimale waarden van W_t en P_t kan berekenen moet men voor de verschillende kosten functies aanpassen. De auteurs kiezen hiervoor kwadratische functies omdat hiermee een redelijke aanpassing is te bereiken, terwijl ze tot eenvoudige lineaire beslisregels leiden. Uiteindelijk vindt men twee beslisregels voor W_t respectievelijk P_t , waarin deze grootheden worden uitgedrukt als functie van de aanwezige voorraad, het aantal arbeiders dat in dienst is en de verwachtingen van de verkopen in de toekomstige perioden. Gezien de vele gemaakte onderstellingen is het niet vanzelfsprekend dat de afgeleide regels goede resultaten leveren. Men heeft de regels daarom achteraf toegepast voor de periode 1949-1954. Hierbij bleken ze tot een besparing van omstreeks 5% op de totale produktiekosten te leiden. Bovendien was zowel de produktie als de voorraad minder aan schommelingen onderhevig.

- 10) Derivation of a linear decision rule for production and employment, C.C. HOLT, F. MODIGLIANI and J.F. MUTH, *Management Science* 2 (1956) 159-177.

Dit artikel bevat een nadere uitwerking van de onder 9) besproken publicatie. De nadruk wordt gelegd op een derde voordeel van kwadratische kostenfuncties, waarvoor wij verwijzen naar uittreksel 8). Verder geven de auteurs een uitvoerige beschrijving van de wijze waarop de oplossing gevonden kan worden en illustreren dit met numerieke voorbeelden.

- 11) Mathematical programming and employment scheduling, W. KARUSH and A. VAZSONYI, *Naval Research Logistics Quarterly* 4 (1957) 297-320.

Gegeven zij dat voor de produktie van een artikel in N opeenvolgende perioden nodig zijn r_1, \dots, r_N werkuren. De variaties in deze aantallen kan men opvangen door het aantrekken en ontslaan van arbeiders en door overwerk te laten verrichten. Het aantrekken van een arbeider kost α , het ontslaan β , terwijl voor overwerk extra moet worden betaald. De schrijvers geven een oplossingsmethode voor de bepaling van het optimale aantal arbeiders voor alle perioden. De methode is zeer algemeen toepasbaar, b.v. ook indien de prestaties niet evenredig zijn aan het aantal werkuren. Verder kan het model uitgebreid worden tot het geval waarin men verschillende produkten moet maken, waarvoor alle arbeiders geschikt zijn, doch waarvoor niet steeds hetzelfde loon wordt ontvangen. De eigenlijke afleiding is geformuleerd in de vorm van algemene stellingen.

- 12) Economic-lot-size formulas in manufacturing, A. VAZSONYI, *Operations Research* 5 (1957) 28-44.

Bij de gebruikelijke formule voor de optimale seriegrootte wordt rekening gehouden met een constante, continu verlopende vraag per periode, met opzet- en met voorraadkosten. In de meeste gevallen fabriceert men echter meer dan één produkt, terwijl deze bovendien op verschillende machines bewerkt moeten worden. Hierdoor is het mogelijk dat de optimale seriegrootte voor de diverse perioden en artikelen niet steeds uitvoerbaar zijn vanwege de

beperkte capaciteit van het machinepark, terwijl er in andere perioden te weinig te doen is. De schrijver onderzoekt op welke wijze men in deze situatie een uitvoerbaar produktieprogramma kan opstellen, zodanig dat aan de bekende vraag kan worden voldaan, terwijl de kosten minimaal zijn. Het wiskundige model leidt tot een niet lineair programmeringsprobleem, waarvoor geen algemeen toepasbare oplossingsmethode bekend is. Er wordt een uitvoerbare oplossing geconstrueerd die aan de eisen voldoet, doch welke niet noodzakelijk de goedkoopste behoeft te zijn. De aangegeven methode kan op een rekenmachine worden geprogrammeerd.

Diverse onderwerpen

- 13) On the construction of a multi-stage, multi-person business game
R. BELLMAN e.a., Operations Research 5 (1957) 469-503.

De "American Management Association" wil in de toekomst aanstaande industriële leiders trainen met behulp van een zogenaamd "business-game". De deelnemers worden hierbij ingedeeld in groepen. Iedere groep vertegenwoordigt één van de vijf maatschappijen die op een groeiende markt een bepaald artikel verkopen. Alle groepen beginnen in dezelfde situatie wat betreft de beschikbare geldmiddelen, de voorraden, de produktiecapaciteit en de prijs van het artikel. Het spel wordt een aantal malen achter elkaar gespeeld. In ieder spel moet men beslissen hoeveel geld er in de komende periode besteed zal worden aan produktie, advertenties, spourwerk en investeringen; verder kan men ook informatie verkrijgen, respectievelijk kopen over hetgeen de concurrenten in de afgelopen periode hebben gedaan. De consequenties van de genomen beslissingen worden berekend met enkele opgestelde formules die de spelers niet bekend zijn. Vervolgens krijgen de deelnemers de resultaten ter beschikking, op grond waarvan zij beslissingen moeten nemen voor de volgende periode, enz.

De auteurs geven een verbale beschrijving van dit spel, de moeilijkheden die zij bij het opstellen hebben ontmoet en de problemen die er door gesteld worden aan de wiskundige, de econoom, de psycholoog en de organisatiedeskundige. Enkele voorlopige resultaten worden in een aantal grafieken weergegeven.

- 14) An operations-research study of sales response to advertising
M.L. VIDALE and H.B. WOLFE, Operations Research 5 (1957)
370-381.

Op de basis van een reeks proeven met verschillende artikelen en uiteenlopende verkoopmedia bouwen de auteurs een wiskundig model voor de verkoop van een artikel op met behulp van de volgende drie parameters.

a) De parameter welke het exponentiële verloop van de verkoop bepaalt, wanneer er geen verkoopsbevordering plaatsvindt.

b) Het verzadigingsniveau van het artikel.

c) De verkoop welke per dollar adverteren ontstaat, wanneer het artikel nog niet werd verkocht.

Uit het model kan men afleiden hoeveel de verkoop zal toenemen wanneer men gedurende T achtereenvolgende tijdseenheden A dollar per tijdseenheid uitgeeft aan advertenties voor het betreffende artikel. Verder onderzoeken de schrijvers op welke wijze men een reclame-budget moet verdelen over de verschillende artikelen, indien het gegeven model een voldoende nauwkeurige beschrijving van de situatie geeft.

- 15) A discussion of random methods for seeking maxima, S.H. BROOKS
Operations Research 6 (1958) 244-251.

Indien een resultaat afhankelijk is van een aantal factoren, vraagt men zich af, bij welke niveau's van deze factoren het resultaat optimaal is. Hiervoor bestaan verschillende methoden, zoals de factoriële methode, waarbij men steeds één van de factoren systematisch wijzigt en de methode van de sterkste stijging of daling. Bij een derde methode gaat men op aselechte wijze te werk. Men zoekt van n aselechte gekozen combinaties de beste. De schrijver noemt een factorcombinatie goed, wanneer slechts een bepaalde fractie a van alle mogelijke combinaties beter is. Het aantal experimenten wordt nu vastgelegd door a en door de a priori gekozen kans δ , dat van de n proeven er minstens één goed is. Deze methode is vooral geschikt wanneer sequente methoden niet in aanmerking komen en het aantal factoren vrij groot is.