STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 263 (OV 7)

Niet lineaire programmering

door

S.C. van Westrhenen

December 1959

Inhoud.

I. Stellingen van Kuhm en Tucker.[1)]

1. Definities en notaties.

1.1. Als $f(x)$ en $g_k(x)$ $(k = 1,\ldots,m)$ willekeurige differentieerbare functies, gedefinieerd over een n-dimensionale Euclidische ruimte zijn, dan worden de volgende grootheden gedefinieerd:

$$\phi(x,y) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot g_k(x) \ldots\ldots \quad y = (y_1, \ldots\ldots, y_m)$$

$$\partial_x \bar{\phi} = \left(\left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x_1}\right)_{\bar{x},\bar{y}}, \ldots\ldots\ldots, \left(\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x_n}\right)_{\bar{x},\bar{y}} \right)$$

$\partial_y \bar{\phi}$ analoog.

$$\partial_x \bar{f} = \left(\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}}, \ldots\ldots\ldots, \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)_{\bar{x}} \right)$$

$\partial_x \bar{g}_k$ $(K = 1, \ldots\ldots, m)$ analoog.

1.2. $\psi(x,y)$ heeft een zadelpunt $(\bar{x},\bar{y})$ als geldt, voor willekeurige x en y,

$$\psi(x,\bar{y}) \leq \psi(\bar{x},\bar{y}) \leq \psi(\bar{x},y).$$

1.3. De problemen K I en K II worden als volgt gedefinieerd:

K I Maximaliseer $f(x)$ onder de nevenvoorwaarden $g_k(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ $(k=1,\ldots,m)$.

K II Bepaal het zadelpunt $(\bar{x},\bar{y})$ van $\phi(x,y)$ in het gebied $(x,y) \geqslant 0$.

1.4. Als u en v beide n-vectoren zijn, dan stelt

$u.v = \sum_{k=1}^{n} u_k.v_k$ het inwendig product voor.

2. Inleiding.

Probleem K I kan als een generalisatie van het lineaire programmeringsprobleem beschouwd worden.

Kuhn en Tucker [15] bewijzen, dat, onder bepaalde voor-

----

1) De bedoeling van dit memorandum is slechts een overzicht te geven van een aantal stellingen betreffende niet lineaire en kwadratische programmering. De bewijzen zijn in het algemeen geschematiseerd.

waarden, dit probleem aequivalent is met de bepaling van een zadelpunt $(\bar{x},\bar{y})$ van de functie $\emptyset(x,y)$ (zie def.).

Als de voorwaarden $\bar{x} \geqslant 0$ $\bar{y} \geqslant 0$ van K II vervallen en de nevenvoorwaarden alle door "nevengelijkheden" vervangen worden, dan stelt $\emptyset(x,y)$ de Lagrange functie voor uit de analyse (multiplicatorenmethode).

Zie voor andere generalisaties [10], [17] en [20] , voor meer analytische aanpak [13].

3. Lemmata.

3.1. Voor iedere differentieerbare concave functie geldt:

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \partial_x \bar{f}.(x - \bar{x})$$

Voor convexe functies, onder dezelfde voorwaarden

$$g(x) \geqslant g(\bar{x}) + \partial_x \bar{g}.(x - \bar{x}).$$

Voor bewijs zie bijv. [10] en [15].

3.2. Lemma van Farkas. Indien iedere $x \geqslant 0$, waarvoor geldt $bx \geqslant 0$, ook voldoet aan $Ax \geqslant 0$, b, x en A resp. n-kolom vectoren en m x n-matrix, dan bestaat er een niet negatieve m-kolomvector u, zodanig dat geldt $b = u'A$.

Zie voor bewijs o.a. [8] en [14] .

3.3. Als $\partial_x \psi$ en $\partial_y \psi$ bestaan en continue zijn in $(\bar{x},\bar{y}) \geqslant 0$, dan zijn (1) en (2) noodzakelijke voorwaarden opdat $(\bar{x},\bar{y})$ een zadelpunt is van $\psi(x,y)$ in het gebied $(x,y) \geqslant 0$.

(1) $\quad \partial_x \bar{\psi} \leq 0 \qquad \partial_x \bar{\psi} . \bar{x} = 0$

(2) $\quad \partial_y \bar{\psi} \geqslant 0 \qquad \partial_y \bar{\psi} . \bar{y} = 0.$

(1) en (2) noemt men ook wel de voorwaarden van Kuhn en Tucker.

$\partial_x \bar{\psi}$ etc. zijn analoog gedefinieerd als $\partial_x \bar{\emptyset}$ etc. Het bewijs volgt uit de Taylorontwikkeling van ψ in x en y afzonderlijk en het feit dat ψ maximaal in x en minimaal is in y voor $(\bar{x},\bar{y})$.

3.4. Als $\psi(x,y)$ concaaf is in x en convex in y en $\partial_x\psi$ en $d_y\psi$ bestaan en continu zijn in $(\bar{x},\bar{y})\geqslant 0$, dan is de geldigheid van de voorwaarden van Kuhn en Tucker in $(\bar{x},\bar{y})$ noodzakelijk en voldoende opdat $\emptyset(\bar{x},\bar{y})$ een zadelpunt van $\psi(x,y)$ is.

Noodzakelijkheid zie Lemma 3.3.

$$\begin{aligned} \psi(x,\bar{y}) &\leq \psi(\bar{x},\bar{y})+\partial_x\bar{\psi}.(x-\bar{x}) && \text{(L 3.1.)}\\ &\leq \psi(\bar{x},\bar{y}) && \text{(L 3.3. en } x\geqslant 0)\\ &\leq \psi(\bar{x},y)-\partial_y\bar{\psi}-(y-\bar{y}) && \text{(L 3.1.)}\\ &\leq \psi(\bar{x},y) && \text{(L 3.3. en } y\geqslant 0); \end{aligned}$$

dus ook voldoende.

3.5. Opdat $\bar{x}\geqslant 0$, $g_k(\bar{x})\geqslant 0$ $k=1,\ldots,m$, een oplossing is van **K** I, is het voldoende, dat er een $\bar{y}\geqslant 0$ bestaat zodat $(\bar{x},\bar{y})$ een oplossing is van K II waarin $\emptyset(x,y)$ concaaf is in x voor $(x,y)\geqslant 0$ terwijl $\partial_x\psi$ en $\partial_y\psi$ bestaan en continu zijn in $(\bar{x},\bar{y})$.

4. Aequivalentie K I en K II.

Stelling 4.1.

Als f(x) en $g_k(x)$ $k=1,\ldots,m)$ continu differentieerbaar zijn voor $x\geqslant 0$, f(x) maximaal is voor $x=\bar{x}$ en $g_k(\bar{x})\geqslant 0$, $\bar{x}\geqslant 0$ $(k=1,\ldots,m)$, dan bestaat er een m-vector $\bar{y}\geqslant 0$, zodanig dat $\emptyset(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$ aan de voorwaarden van Kuhn en Tucker voldoet.

Voor $k\in\Lambda$ en $j\in\Gamma$ geldt $g_k(\bar{x})=0$ resp. $\bar{x}_j=0$. Λ en Γ zijn deelverzamelingen van resp. $\{1,\ldots,m\}$ en $\{1,\ldots,n\}$.

a) Stel $\Lambda=T=\emptyset$. Voor $\bar{y}=0$ wordt aan de voorwaarden van K en T voldaan. ($\emptyset$ is de nulverzameling)

b) Stel (één van) beide (is) zijn niet gelijk aan de nulverzameling. $f(\bar{x})$ is maximaal dus: $-\partial_x f dx\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \partial_x\bar{g}_k dx &\geqslant 0 \qquad k\in\Lambda\\ \partial x_j &\geqslant 0 \qquad j\in\Gamma \end{aligned}$$

$\bar{x}+dx$ is een vector waarvoor geldt $g_k(\bar{x}+dx)\geqslant 0$

$k=1,\ldots,m;$

of, anders geschreven

$$-\partial_x \bar{f} \cdot dx \geqslant 0$$
$$\partial_x \bar{g}_k dx \geqslant 0 \quad k \in \Lambda$$
$$e_j \, dx \geqslant 0 \quad j \in \Gamma$$

$\left\{ \begin{array}{l} e_j \text{ is een vector waarvan de } j^{de} \\ \text{component 1 is en de overige nul zijn.} \end{array} \right.$

Pas nu Lemma 3.2. toe

(1) $-\partial_x \bar{f} = \sum_{k \in \Lambda} \partial_x \bar{g}_k \cdot u_k + \sum_{j \in \Gamma} e_j \cdot w_j$

(u_k en w_j zijn niet negatieve scalairen)

Definieer nu $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ en $\bar{w} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)$ met

$\underline{\bar{y}_k} = u_k$ voor $K \in \Lambda$ $\quad\quad \bar{w}_j = w_j$ voor $j \in \Gamma$

$\underline{\bar{y}_k} = 0$ voor $K \notin \Lambda$ $\quad\quad w_j = 0$ voor $j \notin \Gamma$.

Met behulp hiervan kan (1) als volgt beschreven worden

$$\partial_x \bar{f} + \sum_{k=1}^{m} \partial_x \bar{g}_k \bar{y}_k + \bar{w} = 0 \qquad (\bar{y} \geqslant 0, \bar{w} \geqslant 0)$$

(2) $\partial_x \bar{\phi} = \partial_x \bar{f} + \sum_{k=1}^{m} \partial_x \bar{g}_k \bar{y}_k \leq \partial_x \bar{f} + \sum_{k=1}^{m} \partial_x \bar{g}_k \cdot \bar{y}_k + \bar{w} = 0$

(3) $\bar{w} . \bar{x} = 0$ want $\bar{w}_j = 0$ voor $\bar{x}_j \neq 0$ (zie def. $\bar{w}$)

Uit (2) en (3) volgt:

$$\partial_x \bar{\phi} . \bar{x} = \partial_x \bar{f} . \bar{x} + \sum_{k=1}^{m} (\partial_x \bar{g}_k \cdot \bar{y}_k) \bar{x} = \partial_x \bar{f} . \bar{x} + \sum_{k=1}^{m} (\partial_x \bar{g}_k \cdot \bar{y}_k) \bar{x} + \bar{w} . \bar{x} = 0$$

(4) $\partial_y \bar{\phi} = (g_1(\bar{x}), \ldots, g_m(\bar{x})) \geqslant 0$ (zie voorwaarden stelling)

(5) $\partial_y \bar{\phi}, \bar{y} = 0$ want $\bar{y}_j = 0$ als $g_j(\bar{x}) \neq 0$. (zie def.)

Uit de formules (1),...,(5) volgt dat aan de voorwaarden van K en T voldaan is.

<u>Stelling 4.2.</u>

Als de functies $f(x)$ en $g_k(x)$ $(k=1,\ldots,m)$ concaaf en continu differentieerbaar zijn in het gebied $x \geqslant 0$, dan zijn de problemen K I en K II aequivalent.

Stel K I heeft een oplossing $\bar{x} \geqslant 0$. Volgens stelling 4.1. bestaat er een $\bar{y} \geqslant 0$, zodat $\phi(x,y)$ in $(\bar{x},\bar{y})$ aan de voorwaarden van K en T voldoet, m.a.w. K II heeft een oplossing volgens Lemma 3.4. Als K II een oplossing $(\bar{x},\bar{y}) \geqslant 0$ heeft, dan wordt aan de voorwaarde van K en T voldaan (Lemma 3.3.); m.a.w. $\bar{x}$ is een oplossing van K I volgens Lemma 3.5.

5. Toepassing op lineaire programmering.

Voor het lineaire programmeringsprobleem luiden K I en K II als volgt:

K I Maximaliseer $f(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

onder de nevenvoorwaarden: $g_k(x) \equiv b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geqslant 0$ $(k=1,\dots,m)$

$x_j \geqslant 0$ $(j=1,\dots,n,\ 0 \leq m \leq n)$

of met vectoren (zie [6]):

K'I Maximaliseer c.x.

onder de nevenvoorwaarden: $P_1 x_1 + \dots + P_n x_n = P_0$ $(P_0 \neq 0)$

$x_j \geqslant 0$ $(j=1,\dots,n)$

P_r is een m-vector. $(r=0,1,2,\dots,n;\ 0 < m \leq n)$

K II Bepaal het zadelpunt $(\bar{x},\bar{y})$ van:

$$\phi(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{m} b_k y_k - \sum_{k,j}^{m,n} a_{kj} x_j y_k$$

in het gebied $(x,y) \geqslant 0$. $(0 < m \leq n)$.

K'II Analoog aan K'I.

Uit de concaviteit en differentieerbaarheid van f(x) en $g_k(x)$, $(k=1,\dots,m)$ in bovenstaande K I en K II volgt (zie stelling 4.2.), dat K I en K II voor het lineaire programmeringsprobleem aequivalent zijn.

Uit de aequivalentie van K I en K II volgt dat onderstaande problemen dezelfde optimale waarde hebben, en beide opgelost worden door het zadelpunt van $\phi(x,y)$ (zie boven).

Maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Maximaliseer $-\sum_{k=1}^{m} b_k y_k$
onder $\sum_{jk=1}^{n} a_{kj} x_j \leq b_k$	onder $\sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k \geqslant c_j$
$x_j \geqslant 0$	$y_k \geqslant 0$
$j=1,\dots,n$ $k=1,\dots,m$	$j=1,\dots,n$ $k=1,\dots,m$.

Het is eenvoudig in te zien, dat voor de Lagrange functies van beide problemen resp. $P_1(x,y)$ en $\phi_2(y,x)$ geldt:

$$\phi_1(x,y) = \phi(x,y) \text{ en } \phi_2(y,x) = -\phi(x,y).$$

en

Hierui̇t volgt het gestelde.

Literatuur.

[1] Bibliographie - "Linear programming and associated techniques", Riley V. en Gass S.I. Maryland, mei 1958.

[2] Arrow K.J. en Hurwicz L. - "A gradient method for approximating saddle points and constrained maxima". Rand report P 223 (juni 1951). 3rd Berkely Symposion on mathematical statistics and probability.

[3] Arrow J.K., Hurwicz L. en Uzawa H. - "Studies in linear and non-linear programming". Stanford, California, 1958.

[4] Barankin E.W. en Dorfman R. - "Toward Quadratic programming". O.N.R. Logistics projects at Columbia University and U.C.L.A., University of California at Berkeley (1958).

[5] Beale E.M.L. - "On minimizing a convex function subject to linear inequalities". Journal of the Royal Stat. Soc. (series B) 17 (1955), pp. 173-184.

[6] Chames A., Cooper W. en Henderson A. - "An introduction to linear programming". New York, London, 1953.

[7] Debreu G. - "Definite and semidefinite Quadratic forms". Econometrica 20 (1952), pp. 295-300.

[8] Farkas J. - "Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen". Journal für reine und angewandte Mathematik 124 (1901), pp. 1-27.

[9] Frank M. en Wolfe Ph. - "An algorithm for quadratic programming". Naval research Logistics Quaterly 3 (1956), pp. 95-110.

[10] Fenchel W. - "Convex cones, sets and functions", Princeton 1953.

[11] Gass S.I. - "Linear programming". New York 1958.

[12] Hildreth C.G. - "A quadratic programming procedure". Naval research logistics Quaterly 4 (1957) pp. 79-85.

[13] John F. - "Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions". Studies and eassays.

[14] Koopmans Tj. e.a. - "Activity analysis of production and allocation". New York 1951.

[15] Kuhn H. en Tucker A.W. - "Non linear programming". Proceedings of the 2nd Symposion of Math. Stat. and probability. 1951, pp. 481-492.

[16] Mann H.B. - "Quadratic forms with linear constraints". Americ. Math. Monthly 58 (1943), pp. 430-433.

[17] Manne A.S. - "Concave programming for gasoline blends". Rand-report P-383 (april 1953).

[18] Markowitz H. - "The optimization of a quadratic function subject to linear constraints". Naval research logistics quaterly 3 (1956) pp. 111-133 (zie ook rand corporation report R.M. 1438 (januari 1955) en P 637.

[19] Phipps C.G. - "Maxima and minima under restraints". Americ. Math. Monthly 59 (1952), pp. 230-235.

[20] Slater M. - "Lagrange multiplier revisited". Rand report R.M. 676 (augustus 1951).

[21] Vajda S. - "An outline of linear programming". Journal of the Royal Stat. Soc. (series B) 17 (1955), pp. 165-172.

[22] Wolfe P. - "The simplex methods for quadratic programming". Rand report P 1205 (october 1957, herzien april 1959).