STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

S 287 (1)

Kansverdelingen van quotiënten van stochastische grootheden

door

W.R.van Zwet

Juni 1961

Gevraagd wordt in het algemeen iets te zeggen over de verdeling van

$$\underline{z} = \underline{y}/\underline{x} \, ,$$

indien de simultane verdeling van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ bekend is.

A. Indien verwachting en variantie van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ worden voorgesteld door μ_x, σ_x^2, resp. μ_y, σ_y^2 en de correlatiecoëfficiënt van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ door ρ, kunnen de volgende benaderende uitdrukkingen voor verwachting en variantie van $\underline{z}$ worden gevonden:

$$\mathcal{E}\,\underline{z} = \mathcal{E}\,\underline{y}/\underline{x} \approx \frac{\mu_y}{\mu_x}\left\{1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2 - \rho \cdot \frac{\sigma_x}{\mu_x} \cdot \frac{\sigma_y}{\mu_y}\right\}$$

$$\mathrm{var}\,\underline{z} = \mathrm{var}\,\underline{y}/\underline{x} \approx \left(\frac{\mu_y}{\mu_x}\right)^2 \left\{\left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2 - 2\rho\,\frac{\sigma_x}{\mu_x} \cdot \frac{\sigma_y}{\mu_y} + \left(\frac{\sigma_y}{\mu_y}\right)^2\right\}.$$

Deze uitdrukkingen vormen een bijzonder geval van het ondermeer door WALLIN [1] beschreven resultaat. Om de benadering te kunnen gebruiken moet evenwel aan de volgende voorwaarden zijn voldaan:

1°. Verwachting en variantie van $\underline{z}$ moeten eindig zijn. Hiervoor is in de eerste plaats noodzakelijk, dat de verdelingsdichtheid van $\underline{x}$ in $x=0$ nul is.

2°. De variatie-coëfficiënt $\frac{\sigma_x}{\mu_x}$ van $\underline{x}$ moet klein zijn.

B. De verdeling van het quotiënt van twee normaal verdeelde stochastische variabelen is uitvoerig onderzocht door GEARY [2] en FIELLER [3]. Voor kleine waarden van $\frac{\sigma_x}{\mu_x}$ (bijv. $\leq 1/3$) is

$$\frac{\mu_x\,\underline{z} - \mu_y}{\sqrt{\sigma_y^2 - 2\rho \cdot \sigma_x \sigma_y \cdot \underline{z} + \sigma_x^2 \underline{z}^2}}$$

bij benadering normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie 1.

C. De verdeling van het quotiënt van een homogeen resp. driehoekig verdeelde variabele en een daarmee onafhankelijke, normaal verdeelde variabele is onderzocht door BROADBENT [4]. De door hem berekende tabellen zijn hierbij gevoegd.

[1] J.F.E. WALLIN: Mean and variance of a function of two random variables.
Statistica Neerlandica 13 (1959) p.31.

[2] R.C. GEARY: The frequency distribution of the quotient of two normal variates.
Journal of the Royal Statistical Society 93 (1930) p.442.

[3] E.C. I The distribution of the index in a normal bivariate population.
Biometrika 24 (1932) p.428.

[4] S.R. BROADBENT: The quotient of a rectangular or triangular and a general variate.
Biometrika 41 (1954) p.330.

The quotient of a rectangular or triangular and a general variate (Biometrika 41 (1954) p.336)

Table 1. Percentage points of the quotient of a rectangular and an independent normal variate. If y is rectangular with range $(1-\alpha, 1+\alpha)$, and x is normal with mean 1 and variance β^2, the table gives percentage points of (y/x)

1% Points

100β \ 100α	0	2	4	6	8	10
0	1.000	0.980	0.961	0.941	0.922	0.902
1	.977	.967	.951	.933	.915	.896
2	.956	.949	.935	.919	.903	.885
3	.935	.930	.919	.904	.889	.873
4	.915	.911	.902	.889	.875	.859
5	.896	.893	.885	.873	.860	.846

5% Points

100β \ 100α	0	2	4	6	8	10
0	1.000	.982	.964	.946	.928	.910
1	.984	.975	.960	.944	.927	.909
2	.968	.963	.951	.937	.921	.905
3	.953	.950	.940	.928	.914	.898
4	.938	.936	.928	.917	.905	.891
5	.924	.922	.916	.906	.895	.882

95% Points

100β \ 100α	0	2	4	6	8	10
0	1.000	1.018	1.036	1.054	1.072	1.090
1	1.017	1.025	1.040	1.057	1.074	1.091
2	1.034	1.039	1.051	1.066	1.081	1.098
3	1.052	1.055	1.065	1.078	1.092	1.107
4	1.070	1.073	1.080	1.091	1.105	1.119
5	1.090	1.092	1.098	1.108	1.119	1.133

99% Points

100β \ 100α	0	2	4	6	8	10
0	1.000	1.020	1.039	1.059	1.078	1.098
1	1.024	1.034	1.051	1.069	1.087	1.106
2	1.049	1.055	1.070	1.086	1.104	1.122
3	1.075	1.080	1.092	1.107	1.123	1.140
4	1.103	1.106	1.116	1.130	1.145	1.162
5	1.132	1.135	1.143	1.155	1.169	1.185

Table 2. Percentage points of the quotient of a triangular and an independent normal variate. If y is triangular with range $(1-2\alpha, 1+2\alpha)$, and x is normal with mean 1 and variance β^2, the table gives percentage points of (y/x)

1% Points

100β \ 100α	0	1	2	3	4	5
0	1.000	0.983	0.966	0.948	0.931	0.914
1	.977	.971	.958	.943	.927	.911
2	.956	.952	.943	.931	.917	.902
3	.935	.932	.925	.916	.904	.891
4	.915	.913	.908	.899	.889	.878
5	.896	.894	.890	.883	.874	.864

5% Points

100β \ 100α	0	1	2	3	4	5
0	1.000	0.986	0.973	0.959	0.945	0.932
1	.984	.979	.969	.956	.943	.930
2	.968	.965	.959	.949	.938	.926
3	.953	.951	.946	.939	.929	.919
4	.938	.937	.933	.927	.919	.910
5	.924	.922	.919	.915	.908	.900

95% Points

100β \ 100α	0	1	2	3	4	5
0	1.000	1.014	1.027	1.041	1.055	1.068
1	1.017	1.021	1.032	1.044	1.057	1.070
2	1.034	1.037	1.043	1.053	1.064	1.076
3	1.052	1.054	1.059	1.066	1.076	1.086
4	1.070	1.072	1.075	1.082	1.090	1.099
5	1.090	1.091	1.094	1.099	1.106	1.114

99% Points

100β \ 100α	0	1	2	3	4	5
0	1.000	1.017	1.034	1.052	1.069	1.086
1	1.024	1.030	1.043	1.058	1.074	1.090
2	1.049	1.052	1.062	1.074	1.088	1.103
3	1.075	1.078	1.085	1.094	1.106	1.120
4	1.103	1.105	1.110	1.118	1.129	1.140
5	1.132	1.134	1.138	1.145	1.154	1.164