8599 NC

WA

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 292

Voordracht over Wachttijden

door

J.Th. Runnenburg en F.W. Steutel

17 november 1961

1. Inleiding

In dit rapport bespreken we een type wachttijdproblemen dat met betrekkelijk elementaire middelen kan worden opgelost. Hoewel we ons dus tot een speciaal soort problemen beperken (geboorte- en sterfteprocessen), is er toch zoals uit de verscheidenheid der voorbeelden zal blijken, een breed toepassingsgebied.

Eenvoudigheidshalve zullen we het model beschrijven in termen van klanten, die voor één of meer loketten in de rij gaan staan om bediend te worden. Deze "klanten" kunnen echter patiënten, machines, bacteriën of andere individuen zijn.

De gegeven voorbeelden vormen een kleine fractie van de bekende literatuur. In de literatuurlijst aan het eind van dit rapport worden enige boeken van het niveau van dit rapport genoemd, waarin tal van facetten die hier onbesproken blijven, behandeld worden, zoals: niet-stationaire oplossingen, niet met één parameter (de n van dit rapport) te beschrijven toestanden, ingewikkelder aankomst- en/of bedieningstijdverdelingen, de invloed van prioriteiten enz.

2. Het algemene model

De hier beschouwde processen kunnen als volgt beschreven worden:

Als op tijdstip $t (\geq 0)$ precies n klanten ter bediening aanwezig zijn (hetzij wachtend, hetzij reeds onder behandeling), dan treedt met kans[1] $\mu_n dt + o(dt)$ in het tijdinterval $(t, t+dt)$ één vertrek (van een geholpen klant) op en met kans $o(dt)$ twee of méér vertrekken. Onafhankelijk daarvan treedt met kans $\lambda_n dt + o(dt)$ in $(t, t+dt)$ één aankomst op (van een klant die in de rij gaat staan om geholpen te worden) en met kans $o(dt)$ twee of méér aankomsten. Hierbij zijn μ_n en λ_n niet-negatieve constanten.

We veronderstellen dat $\lambda_N = 0$ is, d.w.z. dat er nooit meer dan N klanten aanwezig kunnen zijn (maar N mag ook oneindig zijn!) en dat $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ allen positief zijn. Met $P_n^*(t)$ geven we de kans aan, dat op tijdstip t precies n klanten aanwezig zijn.

1) We schrijven $f(dt) = o(dt)$ als $\lim_{dt \to 0} \frac{f(dt)}{dt} = 0$ is.

Dan geldt[1] voor n=0,1,...,N met $\lambda_{-1}=\mu_0=\lambda_N=\mu_{N+1}=0$

$$
\begin{aligned}
(2.1)\quad P_n(t+dt) = {} & P_n(t)P\left\{\text{vertrek noch aankomst in } (t,t+dt) \mid n \text{ klanten aanwezig op } t\right\} + \\
& +P_{n+1}(t)P\left\{\begin{array}{l}\text{één vertrek in } (t,t+dt)\\ \text{en geen aankomst}\end{array} \mid n+1 \text{ klanten aanwezig op } t\right\} + \\
& +P_{n-1}(t)P\left\{\begin{array}{l}\text{één aankomst in } (t,t+dt)\\ \text{en geen vertrek}\end{array} \mid n-1 \text{ klanten aanwezig op } t\right\} + \\
& +P\left\{\text{minstens twéé variaties in } n \text{ gedurende } (t,t+dt)\right\} = \\
& =P_n(t)\left\{1-\mu_n dt+o(dt)\right\}\left\{1-\lambda_n dt+o(dt)\right\} + \\
& +P_{n+1}(t)\left\{\mu_{n+1}dt+o(dt)\right\}\left\{1-\lambda_{n+1}dt+o(dt)\right\} + \\
& +P_{n-1}(t)\left\{\lambda_{n-1}dt+o(dt)\right\}\left\{1-\mu_{n-1}dt+o(dt)\right\} + o(dt) = \\
& =\left\{1-(\lambda_n+\mu_n)dt\right\}P_n(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+o(dt).
\end{aligned}
$$

Hieruit vindt men na deling door dt en limietovergang ($dt \rightarrow 0$)

$$(2.2)\quad P_n'(t) = -(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t) \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N.$$

Een oplossing van (2.1) is alleen dan een kansverdeling, als tevens voldaan is aan

$$(2.3)\qquad P_n(t) \geq 0 \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N$$

en

$$(2.4)\qquad \sum_{n=0}^{N} P_n(t) = 1.$$

Voor een volledige beschrijving van een systeem dat voldoet aan (2.2), (2.3) en (2.4) dienen we bovendien de $P_n(0)$ te geven.

3. Oplossing van het stelsel (2.2)

We kunnen het stelsel vergelijkingen (2.2) niet algemeen oplossen. We beperken ons daarom in dit rapport verder uitsluitend tot stationaire processen, d.w.z. tot die gevallen waarin $P_n(t)=p_n$ is, onafhankelijk van t, zodat $P_n'(t)=0$ is (en $p_n \geq 0$ met $\sum_{n=0}^{N} p_n=1$). Men kan bewijzen, dat voor het interval $(t,t+\tau)$ (met t willekeurig en τ voldoende groot) $p_n\tau$ bij goede benadering de fractié van de tijd aangeeft gedurende welke n klanten aanwezig zijn.

---

1) $P\{A \mid B\}$ = kans, dat gebeurtenis A optreedt, onder de voorwaarde dat gebeurtenis B heeft plaatsgevonden.

Bovengenoemde oplossing heeft de volgende praktische betekenis. In vele gevallen[1] voldoet de algemene oplossing van het stelsel (2.2) aan $\lim_{t\to\infty} P_n'(t)=0$, terwijl $p_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$ bestaat, onafhankelijk is van de voor $P_n(0)$ gegeven waarden en voldoet aan $p_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{N} p_n=1$. De stationaire oplossing is dan dus de oplossing(dat er hoogstens één is zal nog blijken) die naarmate t groeit, dichter benaderd wordt. In de praktijk blijkt de stationaire oplossing snel benaderd te worden, hetgeen de betekenis van de stationaire oplossing nog verhoogt.

De p_n voldoen aan (neem $P_n(t)=p_n$ en $P_n'(t)=0$ in stelsel (2.2))

(3.1) $$(\lambda_n+\mu_n)p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1}+\mu_{n+1}p_{n+1} \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N.$$

Inplaats van (3.1) kunnen we schrijven

(3.2) $$\lambda_n p_n - \mu_{n+1}p_{n+1} = \lambda_{n-1}p_{n-1} - \mu_n p_n \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N,$$

waaruit door invullen van n=0 volgt

(3.3) $$\mu_{n+1}p_{n+1} = \lambda_n p_n \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N,$$

zodat

(3.4) $$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\, p_0 \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N$$

is. Met de voorwaarde $\sum_{n=0}^{N} p_n=1$ volgt voor p_0

(3.5) $$p_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}.$$

De aangegeven oplossing kan alleen dan gevonden worden als $p_0 > 0$ is. In geval N oneindig is, moet daarom $S < \infty$ zijn, waarbij

(3.6) $$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}.$$

In het speciale geval $\lambda_n=\lambda$ en $\mu_{n+1}=\mu$ voor $n=0,1,\ldots$ is $S<\infty$ equivalent met

(3.7) $$\frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

----

1) We zullen de grenzen niet precies aangeven: grofweg geldt dat $\frac{\lambda_n}{n}$ en $\frac{\mu_n}{n}$ begrensde functies van n moeten zijn en $S<\infty$ (zie (3.6)).

4. Inhoud van de veronderstellingen

Om te zien wat de veronderstellingen die we in § 2 gemaakt hebben inhouden, beschouwen we een interval $(t, t+\tau)$, aan het begin waarvan precies n klanten aanwezig zijn. We voeren in

(4.1) $\quad \pi_n(\tau) = P\{$het aantal aanwezigen blijft n gedurende de tijd $\tau\}$.

Voor $\pi_n(\tau)$ geldt

(4.2) $$\pi_n(\tau+d\tau) = \pi_n(\tau)\{1-(\lambda_n+\mu_n)d\tau + o(d\tau)\} ,$$

zodat

(4.3) $$\pi_n'(\tau) = -(\lambda_n+\mu_n)\,\pi_n(\tau)$$

is, d.w.z.

(4.4) $$\pi_n(\tau) = c e^{-(\lambda_n+\mu_n)\tau}$$

voor een constante c en alle $\tau \geqslant 0$. Daar $\pi_n(0) = 1$ is, moet $c=1$ zijn, zodat

(4.5) $$\pi_n(\tau) = e^{-(\lambda_n+\mu_n)\tau} \qquad \text{voor } \tau \geqslant 0 \text{ en } n=0,1,\ldots,N.$$

Deze relatie houdt in, dat de tijd $\underline{x}_n$ gedurende welke het aantal aanwezigen aan n gelijk blijft, een exponentiëel verdeelde stochastische variabele is met parameter $\lambda_n+\mu_n$, d.w.z. gemiddelde $(\lambda_n+\mu_n)^{-1}$. We kunnen $\underline{x}_n$ óók interpreteren als het minimum van twee onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{y}_n^*$ en $\underline{s}_n^*$:

Veronderstel dat er n aanwezigen zijn op tijdstip t en we géén nieuwe klanten toelaten vóór de eerste van deze n aanwezigen vertrokken is. Voor de kans dat de eerste van de n na tijdstip $t+\tau$ vertrekt, vinden we met een berekening analoog aan de zojuist gegevene

(4.6) $$e^{-\mu_n\tau} \qquad \text{voor } \tau \geqslant 0.$$

Laten we vanaf tijdstip t niemand meer vertrokken vóór de eerste aankomst na t plaatsgevonden heeft, dan vinden we voor de kans dat deze aankomst na tijdstip $t+\tau$ valt, opnieuw met dezelfde redenering,

(4.7) $$e^{-\lambda_n\tau} \qquad \text{voor } \tau \geqslant 0.$$

Aankomsten en vertrekken vinden onafhankelijk van elkaar plaats vanaf tijdstip t tot de eerstvolgende verandering van n (met +1 of -1) optreedt. We wachten dus vanaf t op het minimum van twee onafhankelijke exponentiëel verdeelde stochastische variabelen $\underline{y}_n^*$ en $\underline{s}_n^*$ met

$$(4.8)\qquad \begin{cases} P\{\underline{y}_n^* > \tau\} = e^{-\lambda_n \tau} & \text{voor } \tau \geqslant 0, \\ P\{\underline{s}_n^* > \tau\} = e^{-\mu_n \tau} & \text{voor } \tau \geqslant 0, \end{cases}$$

zodat voor $\underline{x}_n = \min(\underline{y}_n^*, \underline{s}_n^*)$ volgt

$$(4.9)\qquad P\{\underline{x}_n > \tau\} = e^{-(\lambda_n + \mu_n)\tau} \qquad \text{voor } \tau \geqslant 0,$$

zoals we reeds afgeleid hebben.

5. Toelichting bij de voorbeelden

In de te behandelen voorbeelden zullen we de volgende situatie ontmoeten. Klanten komen binnen volgens een stationair Poisson-proces met parameter λ, d.w.z. het aankomstinterval (dit is het tijdinterval tussen twee opeenvolgende aankomsten) is exponentiëel verdeeld met parameter λ (de gemiddelde lengte van dit interval is dan λ^{-1}). De bedieningstijd van elke klant heeft een exponentiële verdeling met parameter μ (de gemiddelde bedieningsduur is λ^{-1}). Alle aankomstintervallen en bedieningstijden zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen. Alleen voorbeelden 2 en 8 maken op deze regels een uitzondering, die ter plaatse wordt besproken.

Op tijdstip t kunnen n klanten aanwezig zijn, waarbij voor de k^{de} klant van deze n geldt, dat een deel b_k van zijn bedieningstijd reeds voorbij is op tijdstip t, terwijl de laatste aankomst vóór t op t-a plaatsvond. Dan geldt voor de resterende bedieningstijden $\underline{s}_1 - b_1$, $\underline{s}_2 - b_2, \ldots, \underline{s}_n - b_n$ en de tijd $\underline{y} - a$, die zal verlopen vóór de volgende aankomst optreedt

$$(5.1)\qquad P\{\underline{s}_1 - b_1 > s_1, \underline{s}_2 - b_2 > s_2, \ldots, \underline{s}_n - b_n > s_n \text{ en } \underline{y} - a > y \mid \underline{s}_1 > b_1, \underline{s}_2 > b_2, \ldots, \underline{s}_n > b_n \text{ en } \underline{y} > a\} =$$

$$= \frac{P\{\underline{s}_1 > b_1 + s_1, \underline{s}_2 > b_2 + s_2 \ldots, s_n > b_n + s_n \text{ en } \underline{y} > a + y\}}{P\{\underline{s}_1 > b_1, \underline{s}_2 > b_2, \ldots, \underline{s}_n > b_n \text{ en } \underline{y} > a\}} =$$

$$= e^{-\mu s_1} e^{-\mu s_2} \ldots e^{-\mu s_n} e^{-\mu y}.$$

D.w.z. vanaf tijdstip t ontwikkelt het proces zich, alsof de

$\underline{s}_1'=\underline{s}_1-b_1$, $\underline{s}_2'=\underline{s}_2-b_2,\ldots,\underline{s}_n'=\underline{s}_n-b_n$ en $\underline{y}'=\underline{y}-a$ onderling onafhankelijke exponentiëel verdeelde stochastische variabelen zijn (de $\underline{s}'$ met parameter μ en $\underline{y}'$ met parameter λ). We veronderstellen niet, dat alle op tijdstip t aanwezige klanten simultaan bediend worden, d.w.z. $b_k=0$ voor bepaalde k's. Als er op tijdstip t precies m klanten bediend worden, dan zal in het interval (t,t+dt) met kans

$$P\{\min(\underline{s}_1',\underline{s}_2',\ldots,\underline{s}_m')\leq dt\} = m\mu\ dt + o(dt) \tag{5.2}$$

één vertrek optreden en met kans o(dt) méér dan één vertrek. Eveneens treedt (onafhankelijk van het al dan niet vertrekken van klanten in (t,t+dt)) met kans

$$P\{\underline{y}'\leq dt\} = \lambda dt + o(dt) \tag{5.3}$$

één aankomst op en met kans o(dt) méér dan één aankomst. We kunnen dus het model van § 2 toepassen op deze situatie, als we nog geven hoe m van n afhangt.

Bij elk wachttijdproces kunnen we twee wachttijden onderscheiden:

a) $\underline{v}$, de virtuele wachttijd, dit is de tijd die verloopt vanaf het gekozen tijdstip t tot het moment dat een op tijdstip t in de rij gezette waarnemer aan de beurt komt, als géén nieuwe klanten na tijdstip t worden toegelaten (voor het door ons beschouwde stationaire proces geldt dat $\underline{v}$ onafhankelijk is van t),

b) $\underline{w}$, de wachttijd van een klant, dit is de tijd die verloopt vanaf het moment van aankomst van deze klant tot het moment dat het zijn beurt is om bediend te worden ($\underline{w}$ heeft voor alle klanten dezelfde verdeling).

De variabelen $\underline{v}$ en $\underline{w}$ zijn alleen dan ondubbelzinnig gedefiniëerd, wanneer we aangeven in welke volgorde de bediening der klanten plaatsvindt. Beschouwt men slechts het aantal aanwezige klanten, dan is een uitspraak over de volgorde overbodig. Waar nodig veronderstellen we bij de voorbeelden: behandeling in volgorde van aankomst.

6. Voorbeelden

We bespreken nu een aantal praktische situaties voor welke de behandelde theorie van toepassing is. We volstaan daarbij met het aangeven van de p_n, tenzij voor $P\{\underline{v} \leq v\}$, $P\{\underline{w} \leq w\}$, $\mathcal{E}\,\underline{v}$ of $\mathcal{E}\,\underline{w}$ een eenvoudige uitdrukking gegeven kan worden. Niet in alle gevallen is er sprake van wachttijden, zodat soms om die reden niet over $\underline{v}$ en $\underline{w}$ gesproken wordt.

1) Telefoonverkeer over een onbeperkt aantal lijnen. Voor elke abonnee die opbelt is een lijn beschikbaar. De beschrijving van § 5 is van toepassing. Deze situatie wordt in de praktijk benaderd in die gevallen, waarbij vrijwel nooit op een aansluiting behoeft te worden gewacht. Wachttijden treden hier niet op, $S < \infty$ is altijd vervuld.

In dit geval is

$$\begin{cases} N \text{ oneindig}, \\ \lambda_n = \lambda \text{ voor } n=0,1,\ldots, \\ \mu_n = n\mu \text{ voor } n=0,1,\ldots, \end{cases}$$

zodat met (3) en (4) volgt

$$p_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\, e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots .$$

2) N lassers betrekken onafhankelijk van elkaar met tussenpozen stroom van één bron.

De tijden gedurende welke een lasser geen stroom gebruikt, zijn exponentiëel verdeeld met parameter λ (gemiddelde λ^{-1}), terwijl de tijden gedurende welke hij wel stroom verbruikt, exponentiëel verdeeld zijn met parameter μ (gemiddelde μ^{-1}). De diverse tijdintervallen zijn stochastisch onafhankelijk. Van wachttijden is hier geen sprake.

Hier is

$$\begin{cases} N \text{ eindig}, \\ \lambda_n = (N-n)\lambda \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N, \\ \mu_n = n\mu \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N, \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-n} \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N.$$

3) Bediening aan N loketten zonder wachtgelegenheid. De klanten komen aan en worden geholpen volgens de beschrijving in § 5, met de volgende extra bepaling: vindt een klant één of meer van de loketten vrij, dan wordt hij direct geholpen; zijn alle loketten bezet, dan verdwijnt hij onverrichterzake. Dit model is bijvoorbeeld van toepassing voor parkeerterreinen en benzinepompen. Van wachttijden is hier geen sprake.

Hier is

$$\begin{cases} N \text{ eindig}, \\ \lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{voor } n=0,1,\ldots,N-1, \\ 0 & \text{voor } n=N, \end{cases} \\ \mu_n = n\mu \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N, \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right\}^{-1} \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N.$$

De fractie der klanten die niet geholpen wordt is hier gelijk aan de fractie van de tijd dat geen nieuwe klanten geaccepteerd worden, dus de fractie van de tijd dat er N aanwezigen zijn. Deze laatste fractie is gelijk aan p_N (zie § 3).

4) Bediening aan M loketten met onbeperkte wachtgelegenheid. De klanten komen aan en worden geholpen volgens de beschrijving in § 5. De klanten, die alle M loketten bezet hebben gevonden, staan in volgorde van aankomst in één rij te wachten tot er een loket vrijkomt.

Hier is

$$\begin{cases} N \text{ oneindig}, \\ \lambda_n = \lambda \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,n \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } n=0,1,\ldots,M, \\ M\mu & \text{voor } n=M+1,M+2,\ldots, \end{cases} \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \left\{ \displaystyle\sum_{n=0}^{M} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=0,1,\ldots,M, \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \left\{ \displaystyle\sum_{n=0}^{M} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=M+1,M+2,\ldots. \end{cases}$$

De voorwaarde $S < \infty$ is equivalent met

$$\frac{\lambda}{\mu M} < 1.$$

De verdeling van de virtuele wachttijd $\underline{v}$ wordt gegeven door

$$P\{\underline{v} \leq v\} = \sum_{n=0}^{M-1} p_n + \sum_{n=M}^{\infty} p_n \int_0^v e^{-M\mu x} \frac{(M\mu)^{n-M+1} x^{n-M}}{(n-M)!} dx \quad \text{voor } v \geq 0.$$

Omdat (zie § 7) in dit geval $p_n = q_n$ is voor $n=0,1,\ldots,$ geldt tevens

$$P\{\underline{w} \leq w\} = \sum_{n=0}^{M-1} p_n + \sum_{n=M}^{\infty} p_n \int_0^w e^{-M\mu x} \frac{(M\mu)^{n-M+1} x^{n-M}}{(n-M)!} \quad \text{voor } w \geq 0.$$

5) <u>Bediening aan M loketten met beperkte wachtgelegenheid</u>. De hier beschouwde situatie is een tussenvorm van die in de voorbeelden 3 en 4. We veronderstellen hier, dat slechts N-M klanten kunnen wachten (waarbij $N \geq M$ is), terwijl verder de klanten aankomen en geholpen worden volgens de beschrijving in § 5. Deze situatie treffen we bijvoorbeeld aan in restaurants.

Hier is

$$\begin{cases} N \text{ eindig} \\ \lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{voor } n=0,1,\ldots,N-1, \\ 0 & \text{voor } n=N, \end{cases} \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } n=0,1,\ldots,M, \\ M\mu & \text{voor } n=M+1,M+2,\ldots,N, \end{cases} \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \left\{ \sum\limits_{n=0}^{M} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum\limits_{n=M+1}^{N} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=0,1,\ldots,M, \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \left\{ \sum\limits_{n=0}^{M} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \sum\limits_{n=M+1}^{N} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{M!M^{n-M}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=M+1,M+2,\ldots,N. \end{cases}$$

De fractie der klanten die niet geholpen wordt, is p_N.

6) <u>Ongeduldige klanten</u>. We beschouwen de bediening aan één loket, waarbij de kans dat een aankomende klant achter een rij van lengte n aansluit $e^{-\alpha n}$ is (met α een niet-negatieve constante), terwijl verder de beschrijving in § 5 van toepassing is.

Hier is

$$\begin{cases} N \text{ oneindig} \\ \lambda_n = \lambda e^{-\alpha n} & \text{voor } n=0,1,\ldots, \\ \mu_n = \begin{cases} 0 & \text{voor } n=0, \\ \mu & \text{voor } n=1,2,\ldots, \end{cases} \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\alpha n(n-1)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\alpha n(n-1)} \right\}^{-1} \quad \text{voor } n=0,1,\ldots .$$

De voorwaarde $S < \infty$ is altijd vervuld voor $\alpha > 0$; voor $\alpha = 0$ is $S < \infty$ equivalent met $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

7) Bediening in fasen. We beschouwen de bediening van klanten aan één loket. De klanten komen aan en worden geholpen volgens de beschrijving in § 5, met de volgende wijziging: de bedieningstijden zijn niet exponentiëel verdeeld maar hebben dezelfde verdeling als de som van k onderling onafhankelijke exponentiëel verdeelde stochastische variabelen, elk met parameter $k\mu$. D.w.z. voor een bedieningstijd $\underline{s}$ geldt

$$P\{\underline{s} \leq s\} = \int_0^s e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^k x^{k-1}}{(k-1)!} dx \quad \text{voor } s \geq 0,$$

terwijl $\mathcal{E}\underline{s} = k \cdot \frac{1}{k\mu} = \frac{1}{\mu}$ is.

We zeggen dat er nog n fasen bediend moeten worden (n fasen aanwezig zijn) op tijdstip t, als de virtuele wachttijd op dat moment de som van n onderling onafhankelijke exponentiëel verdeelde variabelen is, elk met parameter $k\mu$. Door het aantal aanwezige fasen inplaats van het aantal aanwezigen te beschouwen, kunnen we dit model in de algemene theorie inpassen. Laat p_n^* de kans zijn, dat er op tijdstip t (t willekeurig) precies n fasen aanwezig zijn en q_n^* de kans, dat er bij een aankomst precies n fasen aanwezig zijn. Het algemene model kunnen we niet ongewijzigd toepassen: als er op tijdstip t precies n fasen aanwezig zijn, dan neemt het aantal fasen in $(t,t+dt)$ met kans $\lambda dt+O(dt)$ met r toe (inplaats van met 1). Analoog aan de behandelde theorie volgt in dit speciale geval

$$\begin{cases} \lambda p_0^* = k\mu \; p_1^* & \text{voor } n=0, \\ (\lambda+k\mu)p_n^* = \lambda p_{n-k}^* + k\mu \, p_{n+1}^* & \text{voor } n=1,2,\ldots, \end{cases}$$

waarbij $p_n^* = 0$ is voor $n < 0$. Hieruit volgt met $\theta = \frac{\lambda}{k\mu}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n^* z^n = \frac{1-z}{1-(1+\theta)z+\theta z^{k+1}} \; p_0^* \quad \text{voor } |z| < 1,$$

zodat

$$p_o^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu} .$$

Ook in dit geval is $p_n^* = q_n^*$ voor $n=0,1,\ldots,$ zodat

$$P\{\underline{v} \leq v\} = p_o^* + \sum_{n=1}^{\infty} p_n^* \int_0^v e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx \quad \text{voor } v \geq 0$$

$$P\{\underline{w} \leq w\} = p_o^* + \sum_{n=1}^{\infty} p_n^* \int_0^w e^{-k\mu x} \frac{(k\mu)^n x^{n-1}}{(n-1)!} dx \quad \text{voor } w \geq 0.$$

Dan is dus

$$\mathcal{E}\underline{v} = \mathcal{E}\underline{w} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^* \frac{n}{k\mu} = \frac{1}{k\mu} \sum_{n=1}^{\infty} np_n^* = \frac{k+1}{2k} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{1}{\mu} .$$

Voor $k=1$ is $\mathcal{E}\underline{w}$ dus 2 x zo groot als voor $k \to \infty$. Voor $k=1$ is de verdeling van de bedieningstijd exponentiëel met parameter of gemiddelde $\frac{1}{\mu}$. Voor $k \to \infty$ ontaardt de verdeling van de bedieningstijd, deze krijgt de <u>constante</u> waarde $\frac{1}{\mu}$.

De voorwaarde $S < \infty$ is wederom equivalent met $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.

8) Onderhoud van machines. N machines worden door R monteurs (met $R \leq N$) onderhouden. Voor elke machine geldt: de looptijden zijn exponentiëel verdeeld met parameter λ en de reparatietijden zijn eveneens exponentiëel verdeeld met parameter μ. Alle looptijden en reparatietijden zijn onderling onafhankelijk. De reparaties worden in de volgorde van stukgaan uitgevoerd.

Hier is

$$N \text{ eindig},$$
$$\lambda_n = (N-n)\lambda \quad \text{voor } n=0,1,\ldots,N,$$
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{voor } n=0,1,\ldots,R, \\ R\mu & \text{voor } n=R+1,R+2,\ldots,N, \end{cases}$$

zodat

$$p_n = \begin{cases} \binom{N}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \Big/ \left\{ \sum_{n=0}^{R} \binom{N}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=R+1}^{N} \frac{N!}{(N-n)!R!R^{n-R}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\} & \text{voor } n=0,1,\ldots,R, \\ \frac{N!}{(N-n)!R!R^{n-R}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \Big/ \left\{ \sum_{n=0}^{R} \binom{N}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=R+1}^{N} \frac{N!}{(N-n)!R!R^{n-R}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right\} & \text{voor } n=R+1,R+2,\ldots,N. \end{cases}$$

Voor de virtuele wachttijd geldt

$$P\{\underline{v} \leq v\} = \sum_{n=0}^{R-1} p_n + \sum_{n=R}^{N} p_n \int_0^v e^{-R\mu x} \frac{(R\mu)^{n-R+1} x^{n-R}}{(n-R)!} dx$$

voor $v \geq 0$.

Hier is $q_n \neq p_n$, zoals op grond van § 7 verwacht mocht worden. Er geldt

$$q_n = \begin{cases} \binom{N-1}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left\{ \sum_{n=0}^{R} \binom{N-1}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=R+1}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-n-1)!R!R^{n-R}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=0,1,\ldots,R, \\ \frac{(N-1)!}{(N-n-1)!R!R^{n-R}} \left\{ \sum_{n=0}^{R} \binom{N-1}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=R+1}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-n-1)!R!R^{n-R}} \right\}^{-1} & \text{voor } n=R+1,R+2,\ldots,N-1. \end{cases}$$

Voor de wachttijd geldt

$$P\{\underline{w} \leq w\} = \sum_{n=0}^{R-1} q_n + \sum_{n=R}^{N-1} q_n \int_0^w e^{-R\mu x} \frac{(R\mu)^{n-R+1} x^{n-R}}{(n-R)!} dx$$

voor $w \geq 0$.

In de tabellen van Peck en Hazelwood (zie literatuurlijst) zijn de grootheden $F = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+\lambda\mu\,\mathcal{E}\underline{v}}$ (de "efficiency factor") en $D = \sum_{n=R}^{N} p_n$ (de kans dat een defecte machine moet wachten op reparatie) getabelleerd als functie van N,R (daar aangeduid met M) en $X = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ (daar worden U en T voor resp. $\frac{1}{\lambda}$ en $\frac{1}{\mu}$ gebruikt). Uit de door ons gegeven formules blijkt

$$\underline{v}(N,R) \cong \underline{w}(N+1,R),$$

d.w.z. de <u>wachttijd</u> bij een systeem met N+1 machines en R reparateurs heeft dezelfde verdeling als de <u>virtuele wachttijd</u> bij een systeem met N machines en R reparateurs. Tevens geldt

$$\mathcal{E}\underline{v}(N,R) = \frac{1}{R\mu} \sum_{n=R}^{N} (n-R+1)p_n,$$

hetgeen niet bevredigend te vereenvoudigen is.

7. Vergelijking van p_n en q_n

In deze paragraaf vergelijken we p_n en q_n, teneinde na te gaan in hoeverre deze grootheden met elkaar overeenstemmen.

We definiëerden reeds voor het stationaire proces bij het algemene model

(7.1) $\quad p_n = P\{$ er zijn n klanten aanwezig op een willekeurig tijdstip t $\}$

en

(7.2) $\quad q_n = P\{$ er zijn reeds n klanten aanwezig bij de aankomst van een klant $\}$.

Voor de p_n gelden de vergelijkingen (zie (3.1))

(7.3) $$(\lambda_n+\mu_n)p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1}+\mu_{n+1}p_{n+1} \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N$$

met $\lambda_{-1} = \mu_o = \lambda_N = \mu_{N+1} = 0$.

Om de q_n te bepalen voeren we in

(7.4) $\quad q_{ik} = P\{$ bij een aankomst zijn k klanten aanwezig/ bij de vorige aankomst waren er i $\}$.

Het aantal aanwezigen neemt dus eerst af van i+1 aanwezigen direct na de eerste aankomst tot k aanwezigen vlak voor de tweede aankomst en dan weer toe tot k+1 aankomsten direct na de tweede aankomst. Uit § 4 volgt voor de kans, dat het aantal aanwezigen van j naar j-1 overgaat $\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}$ en voor de kans dat het aantal aanwezigen van j naar j+1 overgaat $\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}$, zodat

(7.5) $$q_{ik} = \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}} \, \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} \cdots \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}+\mu_{k+1}} \, \frac{\lambda_k}{\lambda_k+\mu_k}$$

voor $i \geqslant k-1$.

Voor het stationaire proces is q_n voor alle klanten gelijk en geldt

(7.6) $$q_k = \sum_{i=k-1}^{N} q_i q_{ik} \qquad \text{met } q_{-1}=q_{-1k} = 0 \text{ en } k=0,1,\ldots,N.$$

Uit (7.5) en (7.6) volgt

(7.7) $$q_n = \sum_{i=n-1}^{N} q_i \frac{\mu_{i+1}\cdots\mu_{n+1}\mu_n}{(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1})\cdots(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1})(\lambda_n+\mu_n)}$$

voor $n=0,1,\ldots,N$.

Maar dan is

$$(7.8) \qquad q_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n} q_{n-1} = \sum_{i=n}^{N} q_i \frac{\mu_{i+1}\cdots\mu_{n+1}\,\lambda_n}{(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1})\cdots(\lambda_{n+1}+\mu_{n+1})(\lambda_n+\mu_n)} = \frac{\lambda_n\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}(\lambda_n+\mu_n)} q_{n+1},$$

waaruit volgt

$$(7.9) \qquad (\lambda_n+\mu_n)q_n = \lambda_n q_{n-1} + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \mu_{n+1} q_{n+1}$$

voor $n=0,1,\ldots,N-1$.

Ook dit stelsel is oplosbaar, evenals (7.3). We vinden als oplossing

$$(7.10) \qquad q_n = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} q_o \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N,$$

terwijl voor p_n geldt (zie (3.4))

$$(7.11) \qquad p_n = \frac{\lambda_o\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} p_o \qquad \text{voor } n=0,1,\ldots,N.$$

We concluderen dus: $p_n = q_n$ voor $n=0,1,\ldots,N$ is dan en slechts dan juist als $\lambda_o = \lambda_n$ is voor $n=0,1,\ldots,N$, d.w.z. $\lambda_n = \lambda$ onafhankelijk van $n=0,1,\ldots,N$.

Analoog kan voor voorbeeld 7 aangetoond worden: $p_n = q_n$ voor $n=0,1,\ldots$.

Literatuur

Cox, D.R. en Smith, W.L., Queues, Methuen's monographs on applied probability and statistics, London 1961.

Feller, W., Probability theory and its applications, Wiley, New York, eerste editie 1950, tweede editie 1957.

Morse, P.M., Queues, inventories and maintenance, Wiley, New York 1958.

Peck, L.G. en Hazelwood, R.N., Finite queuing tables, Wiley, New York 1958.