Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Dr.J.Th. Runnenburg

Handleiding bij dit colloquium zal zijn het boek:
Hans Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer 1956.

Doel colloquium: stevige basis, waarop in toekomst met speciale onderwerpen verder gebouwd kan worden.

De basis van de moderne whr [1] is de moderne abstracte maat- en integraaltheorie. Hier spreken we dus eerst over:

1.1. Algebra van verzamelingen

Gegeven is één vaste verzameling Ω van onderscheidbare elementen ω en deelverzamelingen Λ (notatie Doob i.p.v. Richter!). Notaties: $\omega \in \Lambda$, $\omega \notin \Lambda$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \Lambda_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, 0 (lege vz [1]). Ω heet eindig of aftelbaar als het aantal elementen ω eindig of aftelbaar is, notatie: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, dan wel: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Deelverzamelingen worden vaak als volgt genoteerd:

$$\Lambda = \{\omega \mid f(\omega) < 0\},$$

d.w.z. Λ bevat al die ω, waarvoor de reële functie $f(\omega)$ een negatieve waarde aanneemt. Korter is: $\{f(\omega) < 0\}$. Nog enige bekende begrippen en notaties:

- complement $\bar{\Lambda} = \{\omega \mid \omega \notin \Lambda\}$ (altijd $\omega \in \Omega$),
- vereniging of som $\Lambda = \bigcup_{t \in T} \Lambda_t$ (T = index-verzameling),
- doorsnede $\Lambda = \bigcap_{t \in T} \Lambda_t$,
- disjuncte Λ_1, Λ_2, als $\Lambda_1 \Lambda_2$ $(\overset{\text{afk}}{=} \Lambda_1 \cap \Lambda_2) = 0$,
- disjuncte Λ_t, $t \in T$, als $\Lambda_{t_1} \Lambda_{t_2} = 0$ voor alle $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in T$,
- verschil $\Lambda_1 - \Lambda_2 = \{\omega \mid \omega \in \Lambda_1, \omega \notin \Lambda_2\}$,
- symmetrisch verschil $\Lambda_1 \Delta \Lambda_2 = (\Lambda_1 - \Lambda_2) \cup (\Lambda_2 - \Lambda_1)$.

---

1) whr = waarschijnlijkheidsrekening, vz(n) = verzameling(en).

Allerlei eenvoudige relaties tussen verzamelingen veronderstellen we bekend. Een voorbeeld:

$$\overline{\bigcup_{t\in T} \Lambda_t} = \bigcap_{t\in T} \bar{\Lambda}_t.$$

Bewijstechniek: uit $\omega \in \overline{\bigcup_{t\in T} \Lambda_t}$ volgt $\omega \notin \bigcup_{t\in T} \Lambda_t$, dus $\omega \notin \Lambda_t$ voor elke $t \in T$, zodat $\omega \in \bar{\Lambda}_t$ voor elke $t \in T$, dus ook $\omega \in \bigcap_{t\in T} \bar{\Lambda}_t$. Ook het omgekeerde is juist, waarmee het bewijs gegeven is.

Een <u>disjuncte som</u> is een vereniging van disjuncte verzamelingen. Een aftelbare som kunnen we in een aftelbare disjuncte som omzetten:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=1}^{n-1} \bar{\Lambda}_m \right) \Lambda_n \quad (\text{met } \bigcap_{m=1}^{0} \bar{\Lambda}_m = \Omega).$$

Een verzameling van deelverzamelingen van Ω heet een <u>klasse</u> (van deelvzn van Ω) en wordt aangegeven met een sier-hoofdletter ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$).

<u>1.2 (Boole)algebra en σ-(Boole)algebra</u>

Ω is gegeven met elementen ω (ook wel: <u>punten</u> ω van <u>ruimte</u> Ω).
$\mathcal{G}$ is een klasse van deelverzamelingen van Ω, b.v. <u>alle</u> deelvzn van Ω.

<u>Def. 1.2.1.</u> $\mathcal{G}$ heet (Boole)algebra, als $\mathcal{G}$ <u>niet leeg</u> is en

1) $\Lambda \in \mathcal{G} \Rightarrow \bar{\Lambda} \in \mathcal{G}$,
2) $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{G}$.

Voor een algebra $\mathcal{G}$ geldt: $0 \in \mathcal{G}$; $\Omega \in \mathcal{G}$; als $\Lambda_i \in \mathcal{G}$ voor $1 \leq i \leq n$, dan $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \mathcal{G}$ en $\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \mathcal{G}$. We krijgen een equivalente definitie van het begrip (Boole)algebra, als we 2) vervangen door 2^*)
$\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathcal{G}$.

<u>Def.1.2.2.</u> $\Lambda \in \mathcal{G}$ heet een <u>atoom</u> van $\mathcal{G}$ als

1) $\Lambda \neq 0$
2) $\Lambda^* \in \mathcal{G} \Rightarrow \Lambda\Lambda^* = \Lambda$ óf $\Lambda\Lambda^* = 0$.

$\mathcal{G}$ heet een <u>atomaire</u> algebra, als <u>elk</u> element van $\mathcal{G}$ een vereniging van atomen is.

Vbld. Ω = vz der reële getallen, $\mathcal{G}$ = klasse der eindige sommen van <u>alle</u> (open of gesloten, eindige of oneindige, ontaarde of niet ontaarde) intervallen. Hier is $\mathcal{G}$ een algebra, die elke verzameling met slechts één reëel getal erin bevat (en wel een atomaire algebra). De verzameling der rationale getallen is aftelbaar, maar behoort niet tot $\mathcal{G}$. Aftelbaar vaak de operaties der algebra toepassen kan uit $\mathcal{G}$ voeren.

Def.1.2.3. $\mathcal{G}$ heet σ-(Boole)algebra, als $\mathcal{G}$ een algebra is met

$$\Lambda_n \in \mathcal{G}\ (n=1,2,\dots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}.$$

Als $\mathcal{G}$ een σ-algebra is, dan volgt uit $\Lambda_n \in \mathcal{G}(n=1,2,\dots)$, dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Lambda}_n} \in \mathcal{G}$; als uit $\Lambda_n \in \mathcal{G}\,(n=1,2,\dots)$ en $\mathcal{G}$ is een algebra, volgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}$, dan is $\mathcal{G}$ een σ-algebra.

Een algebra $\mathcal{G}$, die een klasse met eindig veel verzamelingen is, is altijd een σ-algebra. Voor een eindige vz Ω is elke algebra een eindige klasse en dus een σ-algebra.

Als G een willekeurige niet lege klasse van deelverzamelingen van Ω is, kunnen we $^{K}\mathcal{G}$, de klasse van alle vzn van de vorm

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} \bigcap_{\mu=1}^{m_\nu} \Lambda_{\mu,\nu} \quad (\text{óf } \Lambda_{\mu,\nu} \in \mathcal{G},\ \text{óf } \bar{\Lambda}_{\mu,\nu} \in \mathcal{G} \quad \text{óf beide})$$

beschouwen (equivalent hiermee kunnen we alle vzn van de vorm $\cap \cup$ beschouwen).

St.1.2.1. $^{K}\mathcal{G}$ is de kleinste algebra, die $\mathcal{G}$ omvat.

Bewijs: a) genoemde klasse is een algebra (bevat complement en som van twee),

b) elke algebra die $\mathcal{G}$ omvat moet $^{K}\mathcal{G}$ omvatten.

Een algebra $^{K}\mathcal{G}$ is niet noodzakelijk een σ-algebra. Als $\mathcal{G}$ bestaat uit alle eindige deelvzn van $\Omega = \{\omega \mid 0 < \omega < 1\}$ en hun complementen, dan hebben we een algebra verkregen, die géén aftelbaar oneindige deelverz. bevat.

Def.1.2.4. $\mathcal{G}_\Omega$ is de klasse van alle deelvzn van Ω.

Klasse $\mathcal{G}_\Omega$ is een σ-algebra met als atomen de één-punts vzn van Ω. Elke willekeurige klasse $\mathcal{G}$ is een deelvz van $\mathcal{G}_\Omega$. Beschouw de doorsnede van alle σ-algebra's, die $\mathcal{G}$ omvatten en noem die $^{B}\mathcal{G}$. Uit $\Lambda_n \in {}^{B}\mathcal{G}$ volgt $\Lambda_n \in \mathcal{G}^*$ voor elke σ-algebra $\mathcal{G}^*$, die $\mathcal{G}$ omvat. Dus, als N= $\{1,2,\dots\}$, dan geldt

1) $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G} \Rightarrow \forall_{\mathcal{G}^*} \Lambda \in \mathcal{G}^* \Rightarrow \forall_{\mathcal{G}^*} \bar{\Lambda} \in \mathcal{G}^* \Rightarrow \bar{\Lambda} \in {}^{B}\mathcal{G}$,

2) $\forall_n^N \Lambda_n \in {}^{B}\mathcal{G} \Rightarrow \forall_{\mathcal{G}^*} \forall_n^N \Lambda_n \in \mathcal{G}^* \Rightarrow \forall_{\mathcal{G}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}^* \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in {}^{B}\mathcal{G}$.

St.1.2.2. ${}^{B}\mathcal{G}$ is de kleinste $\mathcal{G}$ omvattende σ-algebra.[1)]
Def.1.2.5. ${}^{B}\mathcal{G}$ heet de Borel-uitbreiding van $\mathcal{G}$.

Een constructieve beschrijving van ${}^{B}\mathcal{G}$ bij $\mathcal{G}$ analoog aan die van ${}^{K}\mathcal{G}$ bij $\mathcal{G}$ berust op transfiniete inductie en laten we achterwege.

Voorbeeld in R^n

R^n = n-dimensionale reële vectorruimte met punten $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,
$\mathcal{G}$ = klasse van alle n-dimensionale halfopen intervallen
$I_{a,b} = \{x \mid a < x \leq b\}$, met $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ en $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$.
We schrijven $a < x$ voor: $a_i < x_i$ voor $1 \leq i \leq n$, enz. De x_i zijn reëel, de a_i en b_i reëel, dan wel $-\infty$ of $+\infty$. Als één $a_i=+\infty$, of één $b_j=-\infty$ is, dan is $I_{a,b}=0$. Ook 0 is dus een element van $\mathcal{G}$. Hier is n eindig.

St.1.2.3. Als $\mathcal{G}$ bestaat uit alle halfopen intervallen van R^n, dan bestaat ${}^{K}\mathcal{G}$ uit alle eindige sommen $J = \sum_{i=1}^{k} I_{a^{(i)},b^{(i)}}$ van halfopen intervallen.
Bewijs: als bij St.1.2.1.

Op grond van St.1.2.2 weten we dat ${}^{B}\mathcal{G}$ bestaat. Voor de hier beschouwde $\mathcal{G}$ en R^n met n eindig, geldt de volgende bepaling.
Def.1.2.6. ${}^{B}\mathcal{G}$ heet de klasse der Borelverzamelingen van R^n.

${}^{B}\mathcal{G}$ is niet eenvoudig te karakteriseren. De volgende typen verzamelingen zijn in elk geval Borelverzamelingen:

1) alle $I_{a,b}$ en alle eindige of aftelbare sommen van halfopen intervallen,
2) alle $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid a_1 < x_1 \leq b_1 - \frac{1}{n},\ a_\nu < x_\nu \leq b_\nu \text{ voor } 2 \leq \nu \leq n\} =$
$= \{x \mid a_1 < x_1 < b_1,\ a_\nu < x_\nu \leq b_\nu \text{ voor } 2 \leq \nu \leq n\}$,
3) alle $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \mid a_1 - \frac{1}{n} < x_1 \leq b_1,\ a_\nu < x_\nu \leq b_\nu \text{ voor } 2 \leq \nu \leq n\} =$
$= \{x \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ a_\nu < x_\nu \leq b_\nu \text{ voor } 2 \leq \nu \leq n\}$

(we mogen dus bij elk interval naar believen één of meer randen toevoegen of weglaten. Met doorsnede nemen vinden we $\{x \mid x_1=a_1, a_\nu < x_\nu \leq b_\nu \text{ voor } 2 \leq \nu \leq n\} \in {}^{B}\mathcal{G}$, dus ook $\{x \mid x_k=a_k \text{ voor } 1 \leq k \leq n\} \in {}^{B}\mathcal{G}$. Ook de vzn, die slechts één punt bevatten, behoren dus tot ${}^{B}\mathcal{G}$!),

4) alle open verzamelingen van R^n (want beschouw open vz A. Deze wordt gekenmerkt door: als $a \in A$, dan bestaat $\varepsilon > 0$ (afh. van a) met $\{x \mid \|x-a\| < \varepsilon\} \subset A$. Hierbij is $\|x-a\|$ de lengte van vector x-a, dus $\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\}^{\frac{1}{2}}$. Laat $I^*_{a,b}$ een willekeurig half-

---
1) Kleinste, want doorsnede van alle.

open interval zijn, met a_i en b_i rationaal en eindig. Deze verzameling is aftelbaar: $I_1^*, I_2^*, \ldots$. Voer in $V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{I_\lambda^* \subset A} I_\lambda^*$. Bij elke $a \in A$ bestaat een open bol, de vz $\{x \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$, die in A ligt. Deze bol bevat een I_λ^*, die a bevat en zelf voldoet aan $I_\lambda^* \subset A$. Dus geldt $a \in A \Rightarrow a \in V$, met $V \subset A$. Maar dan is $A = V \in {}^B\mathcal{G}$),

5) alle gesloten verzamelingen van R^n (een gesloten verzameling is het complement van een open verzameling),

6) alle vzn van de gedaante $\{x \mid f_m(x) > 0 \text{ voor } m=1,2,\ldots\}$ ($>$ mag ook $=$ of $<$ of $\geq$ of $\leq$ zijn), waarbij elke $f_m(x)$ een continue functie van x is (want beschouwd wordt een aftelbare doorsnede van verzamelingen, die open ($>,<$), gesloten ($\geq,\leq$) of het verschil van een gesloten en een open ($=$) verzameling zijn).

Opm. Niet alle deelverzamelingen van R^n behoren tot ${}^B\mathcal{G}$.

St.1.2.4. De σ-algebra der Borelverzamelingen van R^n bevat alle open en gesloten vzn uit R^n. De open verzamelingen kunnen als aftelbare disjuncte som van halfopen intervallen geschreven worden, de gesloten verzamelingen als doorsnede van eindige intervalsommen.
Bewijs: met de constructie van 4) vinden we voor een open verzameling een aftelbare som van halfopen intervallen. Met de constructie van blz.2 bovenaan wordt dit een aftelbare disjuncte som. Elke term uit deze som is een som van disjuncte halfopen intervallen. Een gesloten vz B is het complement van een open vz $A = \overline{B}$, met $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, I_k = halfopen interval, $I_k I_j = O$ voor $k \neq j$. Dus is $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{I}_k$, waarbij $\overline{I}_k$ een eindige som van halfopen intervallen is.

Voor een rij Λ_n ($n=1,2,\ldots$) met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$, een σ-algebra op Ω, definiëren we

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \{\omega \mid \omega \in \Lambda_n \text{ voor } \infty\text{-veel } n\}$$

en

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \{\omega \mid \omega \in \Lambda_n \text{ vanaf zekere } n\}.$$

Voor elke σ-algebra bestaan $\limsup_{n\to\infty} \Lambda_n$ en $\liminf_{n\to\infty} \Lambda_n$ altijd. Eveneens geldt altijd

$$\liminf_{n\to\infty} \Lambda_n \subset \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n .$$

We zeggen: "$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n$ bestaat" als $\limsup_{n\to\infty} \Lambda_n = \liminf_{n\to\infty} \Lambda_n$. In dat geval is $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n$.

Iedere monotone rij is convergent: uit $\Lambda_n \uparrow$, d.w.z. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$, volgt $\bigcap_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \Lambda_n$ en $\bigcup_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Lambda_m$, dus $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$; uit $\Lambda_n \downarrow$, d.w.z. $\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \ldots$, volgt $\bigcup_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \Lambda_n$ en $\bigcap_{m=n}^{\infty} \Lambda_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Lambda_m$, dus $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$.

Direct product van algebra's

Voordat we over onafhankelijke stochastische variabelen kunnen spreken, dienen we het begrip direct product te kennen.

Als er k vzn $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ gegeven zijn, met punten $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_k \in \Omega_k$, dan kan daaruit één vz Ω gemaakt worden, met als punten de geordende k-tallen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$, waarbij $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_k \in \Omega_k$ is. Notatie: $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k)$, naam: Ω is het cartesisch product van $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Speciaal: R^n met $\Omega_i = R$, k=n en R de vz der reële getallen. Van $x \in R^n$ met $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zijn de x_i de cartesische coördinaten. Als $\Omega_i = \Omega_1$ voor $1 \leq i \leq k$, dan schrijven we $\Omega = \Omega_1^k$. Het cartesisch product is associatief door identificatie

$$((\Omega_1, \Omega_2), \Omega_3) = (\Omega_1, (\Omega_2, \Omega_3)) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3).$$

Laat $\mathcal{G}_i$ een algebra op Ω_i zijn, met elementen Λ_i (dus $\Lambda_i \in \mathcal{G}_i$, $\Lambda_i \subset \Omega_i$). Onder een "interval" Λ verstaan we, als $\Lambda_i \in \mathcal{G}_i$ voor $1 \leq i \leq k$,

$$\Lambda \overset{afk}{=} (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k) \overset{def}{=} \{\omega \mid \omega_i \in \Lambda_i \text{ voor } 1 \leq i \leq k\}.$$

Ook O, de lege vz, is een "interval". Uit $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$ zijn 2^k "intervallen" te vormen, door naast Λ_i ook $\bar{\Lambda}_i$ toe te laten. Deze "intervallen" zijn twee aan twee disjunct, vullen tezamen de hele Ω. Bij Λ is $\bar{\Lambda}$ (t.o.v. Ω als verzameling!) dus de disjuncte som van 2^k-1 "intervallen". De doorsnede van Λ' en Λ'' is weer een Λ, want als $\Lambda' = (\Lambda_1', \Lambda_2', \ldots, \Lambda_k')$ en $\Lambda'' = (\Lambda_1'', \Lambda_2'', \ldots, \Lambda_k'')$, dan is $\Lambda'\Lambda'' = (\Lambda_1'\Lambda_1'', \Lambda_2'\Lambda_2'', \ldots, \Lambda_k'\Lambda_k'')$.

St.1.2.5. ${}^k\mathcal{G}$, de kleinste algebra die alle Λ's omvat, is de klasse der eindige sommen van Λ's.

Bewijs: als bij St.1.2.1.

We schrijven $^k\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_k$ en spreken van het <u>directe product</u> der algebra's $\mathcal{G}_i$ (voor $1 \leq i \leq k$). Het directe product is <u>associatief</u>: $(\mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_i) \times (\mathcal{G}_{i+1} \times \ldots \times \mathcal{G}_k) = \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_k$ voor $1 \leq i \leq k-1$, want linker- en rechterlid bevatten dezelfde verzamelingen: eindige sommen van "intervallen" Λ.

Als de $\mathcal{G}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ σ-algebra's zijn, is het directe product $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_k$ niet noodzakelijk een σ-algebra. Vbld.: $k=2$, $\Omega_1=\mathcal{R}_1$, $\Omega_2=\mathcal{R}_2$ (met $\mathcal{R}_1=\mathcal{R}_2$=vz der reële getallen), $\Omega=(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ en $\mathcal{G}_i$ de klasse der Borelvzn van $\mathcal{R}_i$. Nu is $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ gedefiniëerd, maar bevat <u>niet</u> $\mathcal{A} = \{x \mid x_1+x_2=0\}$, hoewel dit een <u>Borelvz van R^2</u> (type 6 van blz.5) is.

Wel is $^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_k)$ een σ-algebra. Hiervoor geldt b.v.

$$^B(^B\mathcal{G}_1 \times {^B\mathcal{G}_2} \times \ldots \times {^B\mathcal{G}_k}) = {^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_k)}.$$

We bewijzen aanstonds

$$(*) \qquad ^B(^B\mathcal{G}_1 \times {^B\mathcal{G}_2}) = {^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)}.$$

Omdat $^B\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ voldoet aan $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \subset {^B\mathcal{G}_1} \times \mathcal{G}_2 \subset {^B\mathcal{G}_1} \times {^B\mathcal{G}_2}$, is dan ook

$$^B(^B\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) = {^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)}.$$

Tevens geldt b.v.

$$^B(^B\mathcal{G}_1 \times {^B\mathcal{G}_2} \times {^B\mathcal{G}_3}) = {^B(^B\mathcal{G}_1 \times (^B\mathcal{G}_2 \times {^B\mathcal{G}_3}))} = {^B(^B\mathcal{G}_1 \times {^B(^B\mathcal{G}_2 \times {^B\mathcal{G}_3})})} =$$

$$= {^B(^B\mathcal{G}_1 \times {^B(\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3)})} = {^B(\mathcal{G}_1 \times (\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3))} = {^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3)}.$$

Als we ter afkorting schrijven

$$(^B\mathcal{G}_1, \Omega_2) \overset{\text{afk}}{=} \{(\Lambda_1, \Omega_2) \mid \Lambda_1 \in {^B\mathcal{G}_1}\},$$

$$^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) \overset{\text{afk}}{=} {^B\{(\Lambda_1^*, \Omega_2) \mid \Lambda_1^* \in \mathcal{G}_1\}},$$

dan is

$$^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) = (^B\mathcal{G}_1, \Omega_2).$$

Want $(^B\mathcal{G}_1, \Omega_2)$ is een σ-algebra, die $(\mathcal{G}_1, \Omega_2)$ omvat, terwijl $^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2)$ de kleinste σ-algebra is, die dit doet. Hieruit volgt

1) $^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) \subset (^B\mathcal{G}_1, \Omega_2)$,

2) $^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) = {^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2)} \cap (^B\mathcal{G}_1, \Omega_2) = (\mathcal{H}_1, \Omega_2)$,

waarbij $\mathcal{H}_1 \subset {}^B\mathcal{G}_1$ is. Uit $(\mathcal{H}_1, \Omega_2)$ is een σ-algebra (volgens 2)), volgt $\mathcal{H}_1$ is een σ-algebra. Daar $\mathcal{H}_1$ tenminste $\mathcal{G}_1$ omvat en een σ-algebra is, is ${}^B\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{H}_1$. Dus is ${}^B\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_1$ en volgens 2) ${}^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) = ({}^B\mathcal{G}_1, \Omega_2)$.

Bewijs van (*):

1) $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \subset {}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2 \Rightarrow {}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \subset {}^B({}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2)$.

We zullen aantonen:

2) ${}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2 \subset {}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$.

Dan is het bewijs voltooid, daar ${}^B({}^B\mathcal{G}) = {}^B\mathcal{G}$ is.

Voor een σ-algebra $\mathcal{G}$ met $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$ geldt $(\Lambda_1, \Omega_2) \in \mathcal{G}$ voor alle $\Lambda_1 \in {}^B\mathcal{G}_1$, want ${}^B(\mathcal{G}_1, \Omega_2) \subset \mathcal{G}$, dus $({}^B\mathcal{G}_1, \Omega_2) \subset \mathcal{G}$ (volgens de voorafgaande opmerking). Evenzo geldt $(\Omega_1, \Lambda_2) \in \mathcal{G}$ voor alle $\Lambda_2 \in {}^B\mathcal{G}_2$. Voor een willekeurige $\Lambda \in {}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2$ geldt $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} (\Lambda_{1i}, \Lambda_{2i})$ met $\Lambda_{1i} \in {}^B\mathcal{G}_1$ en $\Lambda_{2i} \in {}^B\mathcal{G}_2$ voor $1 \leq i \leq n$. Dus

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} (\Lambda_{1i}, \Lambda_{2i}) = \bigcup_{i=1}^{n} (\Lambda_{1i}, \Omega_2)(\Omega_1, \Lambda_{2i}) \in \mathcal{G},$$

voor elke σ-algebra $\mathcal{G}$, die $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ omvat. Hieruit volgt 2).

Conclusie: bij het vormen van de kleinste σ-algebra, die een direct product van algebra's omvat, is het resultaat onafhankelijk van het al dan niet vóóraf overgaan op de Borel-uitbreiding van één of meer der factoren $\mathcal{G}_i$. We kiezen de $\mathcal{G}_i$'s dus bij voorkeur zo eenvoudig mogelijk: de Borelvzn van R^n krijgen we als ${}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots \times \mathcal{G}_n)$ door voor $\mathcal{G}_i$ (algebra op R_i = i^{de} factorruimte = vz der reële getallen) de algebra der eindige sommen van rationale halfopen intervallen op R_i te nemen (dus van halfopen intervallen met rationale eindpunten, waarbij $-\infty$ en $+\infty$ inbegrepen zijn).

Tot nu hebben we ons tot <u>k eindig</u> beperkt. Laat $\mathcal{K}$ een index-verzameling zijn met elementen κ. Stel, dat we over verzamelingen Ω_κ met daarbij algebra's $\mathcal{G}_\kappa$ beschikken voor elke $\kappa \in \mathcal{K}$. Algebra $\mathcal{G}_\kappa$ heeft elementen Λ_κ met $\Lambda_\kappa \subset \Omega_\kappa$. Onder een punt ω uit het cartesisch (<u>komma</u>-)product $\Omega = \prod'_{\kappa \in \mathcal{K}} \Omega_\kappa$ verstaan we een vz $\{\omega_\kappa \mid \kappa \in \mathcal{K}\}$, die voor elke $\kappa \in \mathcal{K}$ precies één punt $\omega_\kappa \in \Omega_\kappa$ bevat. Bij een aftelbare index-vz schrijven we $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ voor een punt $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots)$. Als alle Ω_κ identiek zijn, b.v. $\Omega_\kappa = \Omega_0$, schrijven we $\Omega = \Omega_0^{\mathcal{K}}$.

Speciale gevallen (met R= vz der reële getallen):

R^n punt is hier: n-dim. reële vector (één punt geven is identiek met een geordend n-tal reële getallen geven), <u>afwij-</u>

kende notatie!,

R^R punt is hier: reële functie op de reële getallen (één punt geven is identiek met voor elk reëel getal één reëel getal geven),

$R^{(R^R)}$ punt is hier: reële functionaal (één punt geven is identiek met voor elke reële functie op de reële getallen één reëel getal geven),

$(R^R)^R$ punt is hier: vz reële functies, die van één reële parameter afhangen (één punt geven is identiek met voor elk reëel getal (= parameter) één reële functie op de reële getallen geven).

Neem uit $\mathcal{K}$ eindig veel indices $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ en bij elke κ_i een $\Lambda_{\kappa_i} \in \mathcal{G}_{\kappa_i}$.

Def.1.2.7. $\mathcal{Z} \overset{afk}{=} \mathcal{Z}(\Lambda_{\kappa_1}, \Lambda_{\kappa_2}, \ldots, \Lambda_{\kappa_r}) \overset{def}{=} \{\omega | \omega_{\kappa_1} \in \Lambda_{\kappa_1}, \omega_{\kappa_2} \in \Lambda_{\kappa_2}, \ldots, \omega_{\kappa_r} \in \Lambda_{\kappa_r}\}$

heet een cylinderverzameling van Ω.

Bij een cylindervz zijn dus bepaalde coördinaten aan restricties onderhevig en de overige volkomen vrij. $(\Lambda_{\kappa_1}, \Lambda_{\kappa_2}, \ldots, \Lambda_{\kappa_r})$ heet de basis van $\mathcal{Z}$ en ligt in het cartesisch product $(\Omega_{\kappa_1}, \Omega_{\kappa_2}, \ldots, \Omega_{\kappa_r})$. De volgorde, waarin de restricties der coördinaten gegeven worden, is niet van belang, slechts welke coördinaten aan welke beperkingen onderhevig zijn. De basis mag volgens onze definitie ook een eindig aantal der Ω_κ bevatten. De doorsnede van twee cylindervzn is een cylinderverzameling. Het complement van een cylindervz is een som van 2^r-1 cylindervzn.

St.1.2.6. De kleinste algebra ${}^{\kappa}\mathcal{G}$, die alle cylindervzn omvat, is de klasse der eindige sommen van cylindervzn.

Bewijs: als bij St.1.2.1.

We schrijven ${}^{\kappa}\mathcal{G} = \prod^{\times}_{\kappa \in \mathcal{K}} \mathcal{G}_\kappa$ en spreken van het directe product der algebra's $\mathcal{G}_\kappa$ (voor $\kappa \in \mathcal{K}$). In het aftelbare geval schrijven we $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \ldots$.

Met een eindige index-vz $\mathcal{K}$ is zowel het cartesische als het directe product associatief en de Borel-uitbreiding aan de conclusie van blz. 8 onderhevig. Dit is óók juist voor algemene $\mathcal{K}$, voor "eindig" associatief: neem $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, waarbij $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 = 0$, dan geldt (identificatie!)

$$\prod_{\kappa\in\mathcal{K}}{}' \Omega_\kappa = \left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}_1}{}' \Omega_\kappa, \prod_{\kappa\in\mathcal{K}_2}{}' \Omega_\kappa\right)$$

en (hier is beperking "eindig" nodig: we kunnen analoog $\mathcal{K}$ in eindig veel disjuncte vzn splitsen!)

$$\prod_{\kappa\in\mathcal{K}}^{\times} \mathcal{G}_\kappa = \left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}_1}^{\times} \mathcal{G}_\kappa\right) \times \left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}_2}^{\times} \mathcal{G}_\kappa\right),$$

terwijl (reeds bewezen!)

$$^{\mathcal{B}}\left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}}^{\times} \mathcal{G}_\kappa\right) \overset{\mathcal{B}}{=} {}^{\mathcal{B}}\left({}^{\mathcal{B}}\left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}_1}^{\times} \mathcal{G}_\kappa\right) \times {}^{\mathcal{B}}\left(\prod_{\kappa\in\mathcal{K}_2}^{\times} \mathcal{G}_\kappa\right)\right).$$

1.3. Puntfuncties en verzamelingsfuncties

Algemeen

Laten twee vzn Ω en X gegeven zijn en een voorschrift, dat bij elke $\omega\in\Omega$ een $x=f(\omega)$ met $x\in X$ aangeeft. Dan heet $x=f(\omega)$ een puntfunctie. Vaak zal $X=R^n$ zijn voor een vaste n. Als n=1 is, heet $f(\omega)$ een reële puntfunctie.

Een deelvz Λ van Ω wordt door f op een deelvz $\mathcal{A} \overset{\text{afk}}{=} f(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \{f(\omega) \mid \omega\in\Lambda\}$ van X afgebeeld. Als $\Lambda'\subset\Omega$, $\Lambda''\subset\Omega$ en $\Lambda'\Lambda''=0$, terwijl $\mathcal{A}'=f(\Lambda')$ en $\mathcal{A}''=f(\Lambda'')$, is niet noodzakelijk $\mathcal{A}'\mathcal{A}''=0$ (neem b.v. $f(\omega) = a$ voor alle $\omega\in\Omega$). Wel is $f(\Lambda'\cup\Lambda'')=f(\Lambda')\cup f(\Lambda'')$.

Voor elke $\mathcal{A}$, deelvz van X, is $\varphi(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \mid f(\omega)\in\mathcal{A}\}$ een deelvz van Ω. De functie φ is een puntfunctie op de vz $\mathcal{G}_X$, de klasse van alle deelvzn van X, met waarden in de vz $\mathcal{G}_\Omega$, de klasse van alle deelvzn van Ω. Als $\varphi(\mathcal{A})$ leeg is, behoeft $\mathcal{A}$ niet leeg te zijn (neem b.v. $f(\omega) = a$ voor alle $\omega\in\Omega$ en $\mathcal{A} = X - \{a\}$).

Een functie φ, die vzn van één ruimte (Ω) toevoegt aan vzn van een andere ruimte (X), noemen we een homomorfe afbeelding, als voldaan is aan

a) $\varphi(X) = \Omega$,

b) $\varphi(0) = 0$,

c) $\varphi(\bar{\mathcal{A}}) = \overline{\varphi(\mathcal{A})}$ voor elke $\mathcal{A}\subset X$,

d) $\varphi(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2) = \varphi(\mathcal{A}_1)\,\varphi(\mathcal{A}_2)$ voor elke $\mathcal{A}_1\subset X$ en $\mathcal{A}_2\subset X$.

Als c) geldt zeggen we: afbeelding φ is operatiegetrouw voor het complement, als d) geldt: afbeelding φ is operatiegetrouw voor de doorsnede. De eerder met behulp van $f(\omega)$ gedefiniëerde φ is een homomorfe afbeelding.

Soms is de homomorfe afbeelding $\varphi(\mathcal{A})$ slechts gedefiniëerd voor $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, waarbij $\mathcal{K}$ een speciale klasse van deelvzn van X is, b.v. een algebra of een σ-algebra. Als $\mathcal{G} = \{\varphi(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}$, dan is $\mathcal{G}$ een algebra, als $\mathcal{K}$ een algebra is. Daar uit complement en doorsnede de overige operaties, die op vzn toegepast worden, kunnen worden opgebouwd, zijn alle operaties (eindig vaak toegepast) operatiegetrouw. Uit complement en vereniging kunnen deze operaties óók opgebouwd worden. $\mathcal{G}$ is dan ook eveneens een algebra, als $\mathcal{K}$ een algebra is en complement en (eindige) vereniging operatiegetrouw zijn (en a) en b) geldig!). Als $\mathcal{K}$ een σ-algebra is, dan is $\mathcal{G}$ een σ-algebra, als d) ook voor de doorsnede van aftelbaar veel vzn geldt. In dat geval heet φ σ-homomorf. Voldoende voor σ-homomorfie is: a), b), c) en $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi(\mathcal{A}_n)$ voor alle $\mathcal{A}_n \in \mathcal{K}$, n=1,2,... .
Een φ gedefiniëerd m.b.v. een functie $f(\omega)$, dus $\varphi(\mathcal{A}) = \{\omega \mid f(\omega) \in \mathcal{A}\}$, is altijd σ-homomorf.
Voor overaftelbare doorsnede of vereniging wordt operatiegetrouwheid niet beschouwd. We merken op dat $\varphi(\{x\})$ niet gedefiniëerd behoeft te zijn.

Vooruitlopend op de interpretatie der te behandelen stof, merken we op:

1) Verzameling Ω zal voorstellen de bij een experiment mogelijke optredende resultaten,

2) een meting of waarneming geeft een reëel getal of reële vector als resultaat van het experiment, d.w.z. als $\omega \in \Omega$ optreedt, wordt $f(\omega) \in R^n$ waargenomen,

3) een uitspraak betreffende de waarnemingen zal praktisch altijd in termen van Borelvzn van R^n zijn. Die uitspraak dienen we door homomorfe afbeelding van de R^n op Ω in termen van vzn van mogelijke optredende resultaten om te zetten.

Naast puntfuncties beschouwen we verzamelingsfuncties. Een reële verzamelingsfunctie wordt gedefiniëerd op een klasse van deelvzn van Ω (= de definitieklasse) en voegt aan elke Λ uit de klasse een reëel getal $m(\Lambda)$ toe. Alleen definitieklassen, die algebra's zijn, worden beschouwd, tenzij anders wordt aangegeven.

Def.1.3.1. Een reële vzsfunctie $m(\Lambda)$, gedefiniëerd op een algebra $\mathcal{G}$, heet additief, als $m(0)=0$, $m(\Lambda_1)+m(\Lambda_2)=m(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ voor $\Lambda_1 \in \mathcal{G}, \Lambda_2 \in \mathcal{G}$ en $\Lambda_1 \Lambda_2 = 0$.

Def.1.3.2. Een additieve reële vzsfunctie $m(\Lambda)$, gedefiniëerd op een algebra $\mathcal{G}$, heet σ-additief (of absoluut additief), als voor alle aftelbare disjuncte sommen met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\dots)$ en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}$, voldaan is aan $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n)$. Hierbij is de waarde $+\infty$ voor $m(\Lambda)$ toegestaan, de waarde $-\infty$ niet.

Als voor een σ-additieve reële vzsfunctie voldaan is aan $\Lambda_n \in \mathcal{G}(n=1,2,\dots)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}$ (disjuncte som) en $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) < \infty$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n)$ absoluut convergent, daar de som niet afhangt van de volgorde van sommeren.

Def.1.3.3. Een niet-negatieve additieve vzsfunctie $m(\Lambda)$, gedefiniëerd op een algebra $\mathcal{G}$, heet een inhoud. Als $m(\Lambda)$ σ-additief is, spreken we van een σ-additieve inhoud.

Def.1.3.4. Een σ-additieve inhoud, gedefiniëerd op een σ-algebra $\mathcal{G}$, heet een maat. We schrijven $\mu(\Lambda)$ i.p.v. $m(\Lambda)$ in dit geval. Elke $\Lambda \in \mathcal{G}$ heet nu μ-meetbare deelvz van Ω.

St.1.3.1. Als $m(\Lambda)$ een inhoud is, geldt voor alle $\Lambda_1 \in \mathcal{G}$, $\Lambda_2 \in \mathcal{G}$:

1) $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Rightarrow m(\Lambda_1) \leq m(\Lambda_2)$,

2) $m(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \leq m(\Lambda_1)+m(\Lambda_2)$.

Bewijs: 1) $m(\Lambda_2) = m(\Lambda_1 \cup \bar{\Lambda}_1 \Lambda_2) = m(\Lambda_1)+m(\bar{\Lambda}_1 \Lambda_2) \geq m(\Lambda_1)$,

2) $m(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = m(\Lambda_1 \cup \bar{\Lambda}_1 \Lambda_2) = m(\Lambda_1)+m(\bar{\Lambda}_1 \Lambda_2) \leq m(\Lambda_1)+$ $+ m(\Lambda_2)$ volgens 1).

St.1.3.2. De inhoud $m(\Lambda)$ is d.e.s.d. σ-additief, als voor elke $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ (disjuncte som) met $\Lambda \in \mathcal{G}$ en $\Lambda_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\dots)$ voldaan is aan $m(\Lambda) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n)$.

Bewijs: "slechts dan". Nu is $m(\Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} m(\Lambda_n)$, dus geldt zeker het $\leq$ teken. "dan". Omdat uit St.1.3.1 punt 1) volgt $m(\Lambda) \geq m(\bigcup_{n=1}^{r} \Lambda_n)$ en uit de additiviteit dat $m(\bigcup_{n=1}^{r} \Lambda_n) = \sum_{n=1}^{r} m(\Lambda_n)$, is $m(\Lambda) \geq \sum_{n=1}^{r} m(\Lambda_n)$ voor elk natuurlijk getal r.

Uit $m(\Lambda) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n)$ tezamen met het gegeven volgt het gestelde.

St.1.3.3. Als $m_\rho(\Lambda)$ $(\rho=1,2,\dots)$ een rij van inhouden is, allen gedefiniëerd op één en dezelfde algebra $\mathcal{G}$, dan is ook $m(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\rho=1}^{\infty} m_\rho(\Lambda)$ een inhoud op $\mathcal{G}$. Zijn alle $m_\rho(\Lambda)$ σ-additief, dan is ook $m(\Lambda)$ σ-additief. Voor een rij maten $\mu_\rho(\Lambda)$ geldt dus, dat $\mu(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_\rho \mu_\rho(\Lambda)$ een maat is.

Bewijs: uit $\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$ (voor eindige of aftelbaar oneindige disjuncte som) met $\Lambda \in \mathcal{G}$ en $\Lambda_n \in \mathcal{G}$ (voor alle n) volgt

$$m(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} m_\rho(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_n m_\rho(\Lambda_n) = \sum_n \sum_{\rho=1}^{\infty} m_\rho(\Lambda_n) = \sum_n m(\Lambda_n),$$

daar voor niet-negatieve getallen verwisseling van sommatievolgorde altijd is toegestaan (er kan $\infty = \infty$ staan!).

Vbldn. 1) Uit Ω kiezen we aftelbaar veel punten: $\omega_1, \omega_2, \dots$ (allen verschillend). Laat de rij a_n uit niet-negatieve reële getallen bestaan en definiëer $m(\Lambda) = \sum_{\omega_n \in \Lambda} a_n$ voor elke $\Lambda \subset \Omega$.

2) Neem $\Omega = \{\omega \mid 0 < \omega \leq 1\}$. Neem $\mathcal{G}$ = klasse der eindige sommen van halfopen intervallen uit Ω (links open, rechts gesloten). Definiëer $m(\Lambda) = \sum_{k=1}^{n} m(\Lambda_k)$ voor $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k \in \mathcal{G}$ (disjuncte som van halfopen intervallen), waar $m(\Lambda_k) = b-a$ als $\Lambda_k = \{\omega \mid a < \omega \leq b\}$ is.

3) Neem $\Omega = R$, de vz der reële getallen. Volg verder voorbeeld 2). Hier is $m(\Omega) = \infty$, dus $+\infty$ moeten we wel toestaan als waarde voor $m(\Lambda)$. Met $\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_n$ en $\Omega_n = \{\omega \mid n < \omega \leq n+1\}$ is een disjuncte splitsing van Ω verkregen, met $m(\Omega_n)=1$ (dus eindig). Voor elke $\Lambda \in \mathcal{G}$ geldt nu $m(\Lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(\Lambda \Omega_n)$.

In de toepassingen blijken alleen die $m(\Lambda)$ en $\mu(\Lambda)$ van belang, waarbij een splitsing als in voorbeeld 3) gevonden kan worden.

Def.1.3.5. Een inhoud $m(\Lambda)$ heet normaal, als er minstens één disjuncte som $\Omega = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} \Omega_\rho$, $\Omega_\rho \in \mathcal{G}$ (de definitieklasse van m) bestaat, met $m(\Omega_\rho) < \infty$ $(\rho = 1,2,\dots)$ en $m(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} m(\Lambda \Omega_\rho)$ voor iedere $\Lambda \in \mathcal{G}$.

Nemen we voor Ω de vz der natuurlijke getallen, voor $\mathcal{G}$ de algebra der vzn met hetzij zelf eindig veel, hetzij in het complement eindig veel punten, voor $m(\Lambda)$ bij een eindige vz

Λ, die slechts de getallen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bevat, de waarde $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$ en voor $m(\Lambda)$ bij een oneindige vz Λ, waaraan de getallen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ontbreken, de waarde $2-\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$. Dan is $\Omega = \sum_{\rho=1}^{\infty} \Omega_\rho$ met $\Omega_1 = \Omega$ en $\Omega_\rho = 0$ voor $\rho > 1$ een normale splitsing. Maar $\Omega = \sum_{\rho=1}^{\infty} \Omega_\rho^*$ met $\Omega_\rho^* = \{\rho\}$ is het <u>niet</u>. Voor een <u>niet</u> σ-additieve inhoud volgt uit het bestaan van één normale splitsing dus niet dat voor elke splitsing van Ω in disjuncte $\Omega_\rho^* \in \mathcal{G}$ met $m(\Omega_\rho^*) < \infty$ geldt, dat elke $\Lambda \in \mathcal{G}$ voldoet aan $m(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} m(\Lambda\Omega_\rho^*)$. Voor een σ-additieve inhoud is dit triviaal <u>wel</u> het geval.

<u>Def.1.3.6.</u> Een maat $\mu(\Lambda)$ heet <u>σ-finiet</u>, als er een disjuncte som $\Omega = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} \Omega_\rho$ bestaat met $\Omega_\rho \in \mathcal{G}$ (= σ-algebra, definitieklasse van μ) en $\mu(\Omega_\rho) < \infty$ ($\rho = 1, 2, \ldots$).

In het bijzonder is $m(\Lambda)$ normaal, als $m(\Omega) < \infty$ is. In de whr is $m(\Omega) = 1$ geen uitzondering! Bovengenoemde splitsing heet een <u>normale</u> resp. <u>σ-finiete</u> <u>splitsing</u> van Ω. Voortaan worden slechts normale $m(\Lambda)$ resp. σ-finiete $\mu(\Lambda)$ beschouwd, tenzij anders wordt aangegeven.

Om de σ-additiviteit van een inhoud te bewijzen, gebruiken we de volgende stellingen.

<u>St.1.3.4.</u> Als $m(\Lambda)$ σ-additief is, geldt voor elke rij $\Lambda_n \uparrow, \Lambda_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in G$, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$. Dan is ook $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n$.

Bewijs: neem $\Lambda_1^* = \Lambda_1$, $\Lambda_n^* = \Lambda_n - \Lambda_{n-1}$ voor $n = 2, 3, \ldots$. Dan is $\Lambda_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k^*$ en $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^*$ (laatste som is disjunct!). Uit de σ-additiviteit van $m(\Lambda)$ volgt nu $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^*) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n^*) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(\Lambda_k^*) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k^*) = \lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n).$$

Zie ook blz.6.

<u>St.1.3.5.</u> Als voor elke rij $\Lambda_n \uparrow, \Lambda_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda \in \mathcal{G}$ geldt, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$ is, dan geldt voor elke rij $\Lambda_n' \downarrow, \Lambda_n' \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n' \in \mathcal{G}$ en $m(\Lambda_1') < \infty$, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n') = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n')$ is. Tevens is dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n' = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n'$.

Bewijs: neem $\Lambda_n^* = \Lambda_1' - \Lambda_n'$ voor $n = 1, 2, \ldots$, dan volgt met St.1.3.4 $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n^*) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^*)$ of $m(\Lambda_1') - \lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n') = m(\Lambda_1') - m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n')$, dus $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n') = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n')$, daar $m(\Lambda_1') < \infty$ is.

Zie ook blz.6. Conditie $m(\Lambda'_1) < \infty$ is nodig, want met $\Omega = R$, de vz der reële getallen, $\Lambda'_n = \{\omega \mid \omega \geq n\}$ en $m(\Lambda'_n)$ = lengte interval, dus $m(\Lambda'_n) = \infty$ voor $n=1,2,\ldots$, volgt $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda'_n) = \infty$, terwijl $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda'_n = 0$, dus $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda'_n) = 0$ is.

St.1.3.6. Als voor elke rij $\Lambda'_n \downarrow$, $\Lambda'_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda'_n \in \mathcal{G}$ en $m(\Lambda'_1) < \infty$ geldt, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda'_n) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda'_n)$ is, dan geldt voor elke rij $\Lambda''_n \downarrow$, $\Lambda''_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda''_n = 0$ en $m(\Lambda''_1) < \infty$, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda''_n) = 0$ is.

Bewijs: speciaal geval van gegeven.

St.1.3.7. Als voor elke rij $\Lambda''_n \downarrow$, $\Lambda''_n \in \mathcal{G}$ $(n=1,2,\ldots)$ met $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda''_n = 0$ en $m(\Lambda''_1) < \infty$ geldt, dat $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda''_n) = 0$ is, terwijl $m(\Lambda)$ een normale inhoud is, dan is $m(\Lambda)$ σ-additief.

Bewijs: beschouw een rij Λ_n van disjuncte vzn, met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$ voor $n=1,2,\ldots$ en $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}$. Laat $\Omega = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} \Omega_\rho$ een normale splitsing van Ω zijn. De rij $\Lambda_{\rho,n} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_\rho \cap \bigcup_{k=n}^{\infty} \Lambda_k$ voldoet aan $\Lambda_{\rho,1} \supset \Lambda_{\rho,2} \supset \ldots$ en $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\rho,n} = 0$ voor elke vaste ρ. Verder is $m(\Lambda_{\rho,1}) \leq m(\Omega_\rho) < \infty$, zodat $\lim m(\Lambda_{\rho,n}) = 0$ is voor elke vaste ρ. Ook is $\Omega_\rho \Lambda = \Omega_\rho \Lambda_1 \cup \Omega_\rho \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Omega_\rho \Lambda_n \cup \Lambda_{\rho,n+1}$ (disjuncte som), zodat uit de additiviteit van $m(\Lambda)$ volgt: $m(\Omega_\rho \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} m(\Omega_\rho \Lambda_k) + m(\Lambda_{\rho,n+1})$. Hieruit volgt $m(\Omega_\rho \Lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Omega_\rho \Lambda_k)$, dus $m_\rho(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} m(\Omega_\rho \Lambda)$ is een σ-additieve inhoud. Volgens de definitie van normaliteit (def. 1.3.5) is $m(\Lambda) = \sum_{\rho=1}^{\infty} m_\rho(\Lambda)$ voor elke $\Lambda \in \mathcal{G}$, zodat met St. 1.3.4 de bewering volgt.

Laat $\mu(\Lambda)$ een maat zijn met de σ-algebra $\mathcal{G}$ als definitieklasse (op de ruimte Ω). De vzn $\Lambda_0 \in \mathcal{G}$ met $\mu(\Lambda_0) = 0$ heten de nulvzn van $\mathcal{G}$ bij μ. Als $\Lambda^* \subset \Lambda_0$ en $\Lambda^* \in \mathcal{G}$, dan is $\mu(\Lambda^*) \leq \mu(\Lambda_0)$, dus $\mu(\Lambda^*) = 0$. Elke deelvz van een nulvz, die tot $\mathcal{G}$ behoort, is dus eveneens een nulvz.

Als uit $\Lambda^* \subset \Lambda_0$, $\Lambda_0 \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_0) = 0$ volgt, dat $\Lambda^* \in \mathcal{G}$ is, heet de maat μ volledig. Niet elke maat is volledig. Wel kan elke maat volledig gemaakt worden.

St.1.3.8. Als $\mu(\Lambda)$ een maat is op de σ-algebra $\mathcal{G}$ op Ω, dan vormen de vzn Λ' van de gedaante $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda^*$, waarbij $\Lambda \in \mathcal{G}$ en $\Lambda^* \subset \Lambda_o$ is, met $\Lambda_o \in \mathcal{G}$ en $\mu(\Lambda_o) = 0$, een σ-algebra $\mathcal{G}'$, die $\mathcal{G}$ omvat. Definiëren we $\mu'(\Lambda') = \mu(\Lambda)$, dan is μ' een ondubbelzinnig gedefiniëerde, volledige maat op $\mathcal{G}'$, die op $\mathcal{G}$ met μ overeenstemt. De nulvzn van $\mathcal{G}'$ bij μ' zijn de deelvzn van de nulvzn van $\mathcal{G}$ bij μ.

Opm.: $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda^* = \Lambda \cup \Lambda^* \bar{\Lambda}$, waarbij $\Lambda \cap \Lambda^* \bar{\Lambda} = 0$ is. We krijgen dus dezelfde $\mathcal{G}'$ als we aan de boven gestelde eisen toevoegen $\Lambda \Lambda^* = 0$.

Bewijs: 1) $\mathcal{G}'$ is een σ-algebra.

Uit $\Lambda' \in \mathcal{G}'$, dus $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda^*$ met $\Lambda \in \mathcal{G}$, $\Lambda^* \subset \Lambda_o \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_o) = 0$, volgt $\bar{\Lambda}' = \bar{\Lambda} \bar{\Lambda}^* = \bar{\Lambda} \bar{\Lambda}_o \cup \bar{\Lambda} \bar{\Lambda}^* \Lambda_o$ met $\bar{\Lambda} \bar{\Lambda}_o \in \mathcal{G}$, $\bar{\Lambda} \bar{\Lambda}^* \Lambda_o \subset \Lambda_o \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_o) = 0$. D.w.z. uit $\Lambda' \in \mathcal{G}'$ volgt $\bar{\Lambda}' \in \mathcal{G}'$.

Uit $\Lambda_n' \in \mathcal{G}'$, dus $\Lambda_n' = \Lambda_n \cup \Lambda_n^*$ met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$, $\Lambda_n^* \subset \Lambda_{on} \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_{on}) = 0$, voor $n=1,2,\dots$, volgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^*$, met $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{G}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on} \in \mathcal{G}$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on}) = 0$. D.w.z. uit $\Lambda_n' \in \mathcal{G}'$ voor $n=1,2,\dots$ volgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n' \in \mathcal{G}'$. (De conclusie $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on}) = 0$ volgt uit $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Lambda_{on}) = 0$.)

2) $\mu'(\Lambda')$ is ondubbelzinnig gedefiniëerd.

Als $\Lambda' = \Lambda_1 \cup \Lambda_1^* = \Lambda_2 \cup \Lambda_2^*$ met $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{G}$, $\Lambda_1^* \subset \Lambda_{01} \in \mathcal{G}$, $\Lambda_2^* \subset \Lambda_{o2} \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_{o1}) = \mu(\Lambda_{o2}) = 0$, dan geldt, omdat $\mu(\Lambda_2) = \mu(\Lambda_2 \cup \Lambda_{2o})$ en $\Lambda_1 \subset \Lambda' \subset \Lambda_2 \cup \Lambda_{2o}$, dat $\mu(\Lambda_1) \leq \mu(\Lambda_2)$ is. Evenzo is $\mu(\Lambda_2) \leq \mu(\Lambda_1)$, zodat $\mu'(\Lambda') = \mu(\Lambda_1)$ een ondubbelzinnige definitie is.

3) $\mu'(\Lambda')$ is een maat op $\mathcal{G}'$.

Voor een disjuncte som $\Lambda' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n'$ geldt $\Lambda_n' = \Lambda_n \cup \Lambda_n^*$ met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$, $\Lambda_n^* \subset \Lambda_{on} \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_{on}) = 0$ voor $n=1,2,\dots$. D.w.z. $\Lambda' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^*$ met $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on}$ met $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{on}) = 0$ (vgl.2)), zodat $\mu'(\Lambda') = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n)$. Maar dan is $\mu'(\Lambda') = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(\Lambda_n')$.

4) μ' is een volledige maat.

Uit $\Lambda^{*\prime} \subset \Lambda' \in \mathcal{G}'$ met $\mu'(\Lambda') = 0$, volgt $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda^*$ met $\Lambda \in \mathcal{G}$, $\Lambda^* \subset \Lambda_o \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_o) = 0$ en $\mu(\Lambda) = \mu'(\Lambda') = 0$, zodat $\Lambda^{*\prime} \subset \Lambda \cup \Lambda_o \in \mathcal{G}$ met $\mu(\Lambda \cup \Lambda_o) = 0$, dus $\Lambda^{*\prime} = O \cup \Lambda^{*\prime}$ is van het tot $\mathcal{G}'$ behorende type vz of $\Lambda^{*\prime} \in \mathcal{G}'$.

5) μ' stemt op $\mathcal{G}$ met μ overeen.

Als $\Lambda' \in \mathcal{G}'$ en tevens $\Lambda' \in \mathcal{G}$, dan is $\Lambda' = \Lambda' \cup 0$, zodat $\mu'(\Lambda') = \mu(\Lambda')$ is.

6) Een nulvz van $\mathcal{G}'$ is een deelvz van een nulvz van $\mathcal{G}$.

Uit $\Lambda' \in \mathcal{G}'$ met $\mu'(\Lambda') = 0$, volgt $\Lambda' = \Lambda \cup \Lambda^*$ met $\Lambda \in \mathcal{G}, \Lambda^* \subset \Lambda_o \in \mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_o) = 0$ en $\mu(\Lambda) = \mu'(\Lambda') = 0$. Dus is $\Lambda' \subset \Lambda \cup \Lambda_o \in \mathcal{G}$ met $\mu(\Lambda \cup \Lambda_o) = 0$.

Bijzonder geval: de meetkundige inhoud

De algebra $\mathcal{G}$ van alle eindige sommen $\mathcal{J}$ van n-dimensionale halfopen intervallen, aangegeven met $\mathcal{I}_\alpha$ of $\mathcal{I}_{a,b} = \{x \mid a < x \leq b\} \subset \mathcal{R}^n$, werd reeds op blz.4 geïntroduceerd. De meetkundige inhoud van $\mathcal{I}_{a,b}$ (met $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eindig) is $m(\mathcal{I}_{a,b}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Voor $\mathcal{J} = \bigcup_\alpha \mathcal{I}_\alpha$ (disjuncte som) nemen we $m(\mathcal{J}) \overset{\text{def}}{=} \sum_\alpha m(\mathcal{I}_\alpha)$. Voor de meetkundige inhoud geldt de volgende stelling, die niet bewezen zal worden (het is een bijzonder geval van St.1.5.3, die wel bewezen wordt).

St.1.3.9. De op de klasse van alle halfopen intervallen $\mathcal{I}_{a,b}$ (met eindige a en b) gedefiniëerde niet-negatieve vzsfunctie $m(\mathcal{I}_{a,b}) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ is éénduidig uit te breiden tot een σ-additieve inhoud op de algebra $\mathcal{G}$ van alle eindige (disjuncte) sommen van halfopen intervallen.

Zodra deze stelling gevonden is, rijst de vraag of op ${}^B\mathcal{G}$, de kleinste σ-algebra die $\mathcal{G}$ omvat, een maat μ gedefinieerd kan worden, met $\mu(\mathcal{J}) = m(\mathcal{J})$ voor elke $\mathcal{J} \in \mathcal{G}$. Dit probleem kan het best aan de hand van de algemene theorie besproken worden.

1.4. Constructie van een maat uit een inhoud

Gegeven is een ruimte Ω , een algebra $\mathcal{G}$ op Ω , een inhoud m op $\mathcal{G}$. We vragen ons af of het mogelijk is een maat μ op ${}^{B}\mathcal{G}$ te construeren die op $\mathcal{G}$ met m overeenstemt. Uiteraard moet m een σ-additieve inhoud zijn. Is m bovendien normaal dan zullen we zien dat er één en slechts één μ is die voldoet. Is m niet normaal dan is het mogelijk een μ te definiëren die voldoet.

$\Omega = \bigcup_\rho \Omega_\rho$ (disjuncte som) met $m(\Omega_\rho) < \infty$, want m is normaal. We beschouwen $\mathcal{G}_\rho \overset{\text{def}}{=} \{\Gamma\Omega_\rho \mid \Gamma \in \mathcal{G}\}$. $\mathcal{G}_\rho$ is een algebra op de ruimte Ω_ρ , want het complement van $\Gamma\Omega_\rho$ t.o.v. Ω_ρ is $\bar{\Gamma}\Omega_\rho$ (de streep geeft het complement t.o.v. Ω aan) en $\Gamma\Omega_\rho \cup \Gamma^*\Omega_\rho = (\Gamma \cup \Gamma^*)\Omega_\rho$. Verder is $m(\Gamma\Omega_\rho)$ een normale σ-additieve inhoud op $\mathcal{G}_\rho$.

$\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \{\bigcup_\rho \Lambda_\rho \mid \Lambda_\rho \in {}^{B}\mathcal{G}_\rho \ , \rho = 1,2,\ldots\}$. Dan geldt:

a) $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$;

b) $\mathcal{H} \subset {}^{B}\mathcal{G}$;

c) $\mathcal{H}$ is een σ-algebra (het complement van $\bigcup_\rho \Lambda_\rho$ is $\bigcup_\rho (\Omega_\rho - \Lambda_\rho)$; $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_\rho \Lambda_{\rho,n}) = \bigcup_\rho (\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\rho,n})$).

Uit a), b) en c) volgt: $\mathcal{H} = {}^{B}\mathcal{G}$.

Stel nu dat elke inhoud m_ρ op $\mathcal{G}_\rho$ zich laat uitbreiden tot een maat μ_ρ op ${}^{B}\mathcal{G}_\rho$. Voor $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G} = \mathcal{H}$ is $\Lambda = \bigcup_\rho \Lambda_\rho$ (disjunct, $\Lambda_\rho \in {}^{B}\mathcal{G}_\rho$); het is direct duidelijk dat $\mu(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_\rho \mu_\rho(\Lambda_\rho)$ ons een maat μ op ${}^{B}\mathcal{G}$ levert. Is $\tilde{\mu}(\Lambda)$ een (andere) maat op ${}^{B}\mathcal{G}$, dan is $\tilde{\mu}_\rho(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\mu}(\Lambda)$, alleen gedefiniëerd voor $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G}_\rho$, een maat op ${}^{B}\mathcal{G}_\rho$. Als het probleem voor elke eenduidig is opgelost is $\forall_\rho \tilde{\mu}_\rho = \mu_\rho$, dus ook $\tilde{\mu} = \sum_\rho \tilde{\mu}_\rho = \sum_\rho \mu_\rho = \mu$.

Het vraagstuk is dus reduceerbaar tot Ω_ρ , $\mathcal{G}_\rho$ en m_ρ . De operatie "elk element snijden met Ω_ρ " voerde ons van de algebra $\mathcal{G}$ naar de algebra $\mathcal{G}_\rho$. Deze operatie kunnen we op elke klasse $\mathcal{K}$ van vzn toepassen; we noteren het resultaat als $\mathcal{K}_\rho$.

In het bizonder is dan ${}^{B}(\mathcal{G}_\rho) = ({}^{B}\mathcal{G})_\rho$ (het linkerlid werd tot dusverre als ${}^{B}\mathcal{G}_\rho$ genoteerd). Immers we weten al dat

$${}^{B}\mathcal{G} = \mathcal{H} = \{\Phi \mid \Phi = \bigcup_\sigma \Lambda_\sigma, \Lambda_\sigma \in {}^{B}(\mathcal{G}_\sigma)\}.$$

Volgens de definitie van de ρ-operatie is dus

$$({}^{B}\mathcal{G})_\rho = \{\Phi\Omega_\rho \mid \Phi = \bigcup_\sigma \Lambda_\sigma, \Lambda_\sigma \in {}^{B}(\mathcal{G}_\sigma)\} =$$
$$= \{\bigcup_\sigma \Lambda_\sigma \Omega_\rho \mid \Lambda_\sigma \in {}^{B}(\mathcal{G}_\sigma)\} = {}^{B}(\mathcal{G}_\rho),$$

want $\Lambda_\rho\Omega_\rho = 0$ als $\sigma \neq \rho$ en $\Lambda_\rho\Omega_\rho = \Lambda_\rho$: elk element van ${}^{B}(\mathcal{G}_\sigma)$ ligt geheel binnen Ω_σ, en de Ω_σ zijn disjunct.

We zullen nu het probleem oplossen voor $\Omega_\rho, \mathcal{G}_\rho$ en m_ρ, met $m_\rho(\Omega_\rho) < \infty$. Als $m_\rho(\Omega_\rho) = 0$, is $\mu(\Lambda) = 0$ voor elke $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G}$ (triviaal). Als $0 < m_\rho(\Omega_\rho) < \infty$ definiëren we $m^*_\rho(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} \frac{m_\rho(\Gamma)}{m_\rho(\Omega_\rho)}$ voor elke $\Gamma \in \mathcal{G}$, zodat $m^*_\rho(\Omega_\rho) = 1$. Aan een geconstrueerde maat μ^* bij m^*_ρ beantwoordt nu één-éénduidig een maat μ bij m_ρ. We mogen ons nu verder beperken tot (in vereenvoudigde notatie) een ruimte Ω, een algebra $\mathcal{G}$, een σ-additieve inhoud m op $\mathcal{G}$ met $m(\Omega) = 1$.

We spreken af dat de letter Γ steeds een element van de algebra $\mathcal{G}$ zal aangeven, en de letter Ψ een aftelbare som $\bigcup_\nu \Gamma_\nu$, $\Gamma_\nu \in \mathcal{G}$. De klasse van alle vzn van type Ψ is niet noodzakelijk een algebra, omdat het complement van een Ψ niet noodzakelijk van het Ψ-type is. Tegenvoorbeeld, gebaseerd op het discontinuüm van Cantor: $\Omega = (0,1]$; $\mathcal{G} = \{$eindige sommen van halfopen intervallen$\}$; $\Gamma_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\Gamma_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$, $\Gamma_3 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$, $\Gamma_4 = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}], \ldots$; $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu$; nu bevat Ψ geen enkel interval.

Wel zijn een eindig product en een aftelbare som van Ψ's steeds weer van type Ψ : $\Psi^{(1)}\Psi^{(2)} = (\bigcup_\nu \Gamma_\nu^{(1)})(\bigcup_\nu \Gamma_\nu^{(2)}) = \bigcup_{\nu,\lambda} \Gamma_\nu^{(1)}\Gamma_\lambda^{(2)}$ en $\bigcup_n \Psi^{(n)} = \bigcup_n (\bigcup_\nu \Gamma_\nu^{(n)}) = \bigcup_{n,\nu} \Gamma_\nu^{(n)}$.

Zoals al behandeld is valt, door te definiëren $\Gamma_\nu^* = \bar{\Gamma}_1\bar{\Gamma}_2\ldots\bar{\Gamma}_{\nu-1}\Gamma_\nu$, $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu$ te schrijven als disjuncte som $\bigcup_\nu \Gamma_\nu^*$. Het ligt nu voor de hand de inhoud m op $\mathcal{G}$ als volgt tot de Ψ-vzn uit te breiden:

<u>Def.1.4.1.</u> $m(\Psi) = \sum_\nu m(\Gamma_\nu^*)$, als $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu^*$ (disjunct).

Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van de voorstelling van Ψ als disjuncte som: als $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu^* = \bigcup_\lambda \Gamma_\lambda^{**}$, beide sommen disjunct, dan is ook $\Psi = \bigcup_{\nu,\lambda} \Gamma_\nu^*\Gamma_\lambda^{**}$; omdat m σ-additief is op $\mathcal{G}$, is $m(\Gamma_\nu^*) = \sum_\lambda m(\Gamma_\nu^*\Gamma_\lambda^{**})$ voor elke ν, en hieruit volgt dat

$$\sum_\nu m(\Gamma_\nu^*) = \sum_{\nu,\lambda} m(\Gamma_\nu^* \Gamma_\lambda^{**}) = \sum_\lambda m(\Gamma_\lambda^{**}).$$

Wanneer reeds $\Psi \in \mathcal{G}$, is Ψ de disjuncte som van één term, zodat def. 1.4.1 inderdaad een uitbreiding van de inhoud m tot de klasse van alle Ψ 's bewerkstelligt.

Als $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu$ (niet-disjunct) $= \bigcup_\nu \Gamma_\nu^*$ (disjunct, gedefinieerd als boven), dan is $\Gamma_\nu^* \subset \Gamma_\nu$, dus $m(\Psi) = \sum_\nu m(\Gamma_\nu^*) \leq \sum_\nu m(\Gamma_\nu)$.

Als $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ uit disjuncte vzn bestaat, is $m(\bigcup_n \Psi_n) = \sum_n m(\Psi_n)$. Immers disjuncte splitsing van elke Ψ_n in $\Gamma_\nu^{(n)}$ levert een disjuncte splitsing van hun som, en alle $m(\Gamma_\nu^{(n)})$ zijn niet-negatief en eindig. Bij niet-disjuncte Ψ_n (n=1,2,...) met $\Psi_n = \bigcup_\nu \Gamma_\nu^{(n)}$ (disjunct) is $\bigcup_n \Psi_n = \bigcup_{n,\nu} \Gamma_\nu^{(n)}$ (niet-disjunct), dus is

$$m(\bigcup_n \Psi_n) \leq \sum_{n,\nu} m(\Gamma_\nu^{(n)}) = \sum_n m(\Psi_n).$$

Als $\Psi' \subset \Psi''$ is $m(\Psi') \leq m(\Psi'')$, ook als $\Psi'' - \Psi'$ geen Ψ is. Want als in disjuncte sommen $\Psi' = \bigcup_\nu \Gamma_\nu'$ en $\Psi'' = \bigcup_\lambda \Gamma_\lambda''$ is, dan is $\Gamma_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu \leq n} \Gamma_\nu' \subset \Psi' \subset \Psi''$, dus $\Gamma_n = \bigcup_\lambda \Gamma_n \Gamma_\lambda''$, en $m(\Gamma_n) = \sum_\lambda m(\Gamma_n \Gamma'') \leq \sum_\lambda m(\Gamma_\lambda'') = m(\Psi'')$. Dit geldt voor elke n, dus is $m(\Psi') \leq m(\Psi'')$.

<u>Def.1.4.2.</u> $\mu^*(\Phi) \overset{\text{def}}{=} \inf_{\Psi \supset \Phi} m(\Psi)$ heet de <u>uitwendige maat</u> van een willekeurige vz $\Phi \subset \Omega$.

$\Phi \subset \Phi'$ impliceert $\mu^*(\Phi) \leq \mu^*(\Phi')$ wegens gebiedsverkleining onder het inf. De uitwendige maat is dus monotoon.

Voor elke vz van het type Ψ geldt: $\mu^*(\Psi_0) = m(\Psi_0)$. Immers $\mu^*(\Psi_0) \overset{\text{def}}{=} \inf_{\Psi \supset \Psi_0} m(\Psi)$. Wegens $\Psi \supset \Psi_0$ is $m(\Psi) \geq m(\Psi_0)$, dus ook hun inf, $\mu^*(\Psi_0) \geq m(\Psi_0)$. Verder is, wegens $\Psi_0 \supset \Psi_0$, $\mu^*(\Psi_0)$ het inf van een vz waartoe $m(\Psi_0)$ behoort, dus $\mu^*(\Psi_0) \leq m(\Psi_0)$.

Verder geldt: $\mu^*(\bigcup_n \Phi_n) \leq \sum_n \mu^*(\Phi_n)$. Om dit te bewijzen kiezen we $\varepsilon > 0$. Op grond van def.1.4.2 is er bij elke Φ_n een $\Psi_n \supset \Phi_n$ met $m(\Psi_n) \leq \mu^*(\Phi_n) + \varepsilon . 2^{-n}$. Omdat $\bigcup_n \Phi_n \subset \Psi \overset{\text{def}}{=} \bigcup_n \Psi_n$ is, geldt

$$\mu^*(\bigcup_n \Phi_n) \leq m(\Psi) \leq \sum_n m(\Psi_n) \leq \sum_n \mu^*(\Phi_n) + \varepsilon .$$

Omdat dit voor elke ε geldt is het gestelde bewezen.

We willen nu vzn $\Lambda \subset \Omega$ zoeken die "erg veel op een $\Gamma \in \mathcal{G}$ lijken", d.w.z. waarbij het symmetrisch verschil $\Lambda \Delta \Gamma$ klein is. Dit verschil meten we met μ^*:

Def.1.4.3. Een verzameling $\Lambda \subset \Omega$ heet Γ-approximeerbaar, als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\Gamma \in \mathcal{G}$ is met $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma) < \varepsilon$. De klasse van alle Γ-approximeerbare vzn heet $\mathcal{F}$.

St.1.4.1. $\mathcal{F}$ is een σ-algebra die $\mathcal{G}$ omvat.

Bewijs: a) Voor $\Gamma \in \mathcal{G}$ $\mu^*(\Gamma \Delta \Gamma) = \mu^*(0) = 0$, dus $\Gamma \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$.

b) $\Lambda \Delta \Gamma = \bar{\Lambda} \Delta \bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma} \in \mathcal{G}$, dus $\Lambda \in \mathcal{F}$ impliceert $\bar{\Lambda} \in \mathcal{F}$.

c) Stel $\Lambda_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\ldots)$. Kies $\varepsilon > 0$. Wegens def. 1.4.2 en 1.4.3 bestaan bij elke Λ_n een Γ_n en een Ψ_n, zo dat $\Lambda_n \Delta \Gamma_n \subset \Psi_n$ en $m(\Psi_n) < \varepsilon . 2^{-n}$. Nu is

(1) $$(\bigcup_n \Lambda_n) \Delta (\bigcup_n \Gamma_n) \subset \bigcup_n (\Lambda_n \Delta \Gamma_n) \subset \bigcup_n \Psi_n.$$

We schrijven $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^*$ (disjuncte som); omdat $m(\Omega)=1$ convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} m(\Gamma_n^*)$, dus we kunnen $N(\varepsilon)$ zo kiezen dat $m(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} \Gamma_n^*) = \sum_{n=N+1}^{\infty} m(\Gamma_n^*) < \varepsilon$ is. Als afkortingen voeren we in $\Psi^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=N+1}^{\infty} \Gamma_n^*$ en $\Gamma^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{N} \Gamma_n^*$. Γ^* en Ψ^* zijn disjunct, dus $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^* = \Gamma^* \cup \Psi^* = \Gamma^* \Delta \Psi^*$. We kunnen (1) dus schrijven als:

(2) $$(\bigcup_n \Lambda_n) \Delta (\Gamma^* \Delta \Psi^*) \subset \bigcup_n \Psi_n.$$

De bewerking Δ is associatief, zoals men gemakkelijk nagaat. Op grond hiervan schrijven we voor (2):

(3) $$[(\bigcup_n \Lambda_n) \Delta \Gamma^*] \Delta \Psi^* \subset \bigcup_n \Psi_n,$$

waaruit wegens de definitie van Δ volgt:

(4) $$(\bigcup_n \Lambda_n) \Delta \Gamma^* \subset \bigcup_n \Psi_n \cup \Psi^*.$$

$$\mu^*[(\bigcup_n \Lambda_n) \Delta \Gamma^*] \leq \sum_n m(\Psi_n) + m(\Psi^*) < 2\varepsilon .$$

Dus $\bigcup_n \Lambda_n \in \mathcal{F}$: $\mathcal{F}$ is een σ-algebra. Hiermee is st.1.4.1 bewezen.

Laat $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_1) < \varepsilon$ en $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_2) < \varepsilon$ zijn.

$$\Gamma_1 \Delta \Gamma_2 = \Gamma_1 \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_1 \Gamma_2 = \Gamma_1 \bar{\Gamma}_2 \bar{\Lambda} \cup \Gamma_1 \bar{\Gamma}_2 \Lambda \cup \bar{\Gamma}_1 \Gamma_2 \bar{\Lambda} \cup \bar{\Gamma}_1 \Gamma_2 \Lambda \subset$$
$$\subset \Gamma_1 \bar{\Lambda} \cup \bar{\Gamma}_2 \Lambda \cup \Gamma_2 \bar{\Lambda} \cup \bar{\Gamma}_1 \Lambda = (\Lambda \Delta \Gamma_1) \cup (\Lambda \Delta \Gamma_2).$$

μ^* is monotoon, dus $\mu^*(\Gamma_1 \Delta \Gamma_2) \leq \mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_1) + \mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_2) < 2\varepsilon$.
Verder geldt voor $\nu = 1,2$: $\Gamma_1 \Gamma_2 \subset \Gamma_\nu \subset \Gamma_1 \Gamma_2 \cup (\Gamma_1 \Delta \Gamma_2)$.
Dus geldt: $m(\Gamma_1 \Gamma_2) \leq m(\Gamma_\nu) \leq m(\Gamma_1 \Gamma_2) + m(\Gamma_1 \Delta \Gamma_2) < m(\Gamma_1 \Gamma_2) + 2\varepsilon$.
Afschatting voor $\nu = 1$ naar boven, voor $\nu = 2$ naar beneden levert:

$$m(\Gamma_1) - m(\Gamma_2) \leq m(\Gamma_1 \Gamma_2) + 2\varepsilon - m(\Gamma_1 \Gamma_2) = 2\varepsilon .$$

Voor $m(\Gamma_2) - m(\Gamma_1)$ geldt hetzelfde. Dus is bewezen:

(5) uit $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_1) < \varepsilon$ en $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_2) < \varepsilon$ volgt, dat $|m(\Gamma_1) - m(\Gamma_2)| < \varepsilon$ is.

Zodra we nu een rij $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ met $\lim_{n \to \infty} \mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_n) = 0$ hebben, zegt het criterium van Cauchy dat de rij getallen $m(\Gamma_n)$ naar een zeker getal convergeert. Dit getal hangt niet af van de keuze van de rij Γ_n, maar uitsluitend van Λ, zoals volgt uit (5).

St.1.4.2. Voor elke $\Lambda \in \mathcal{F}$ is éénduidig een vzsfunctie $\mu(\Lambda)$ vastgelegd door $\mu(\Lambda) = \lim m(\Gamma_n)$, voor een willekeurige rij $\{\Gamma_n\}$ met $\lim_{n \to \infty} \mu^*(\Lambda \Delta \Gamma_n) = 0$.

Bij $\Psi = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu^*$ (disjunct) voldoet de rij $\{\Gamma_n = \bigcup_{\nu \leq n} \Gamma_\nu^*\}$ aan de eis $\lim_{n \to \infty} \mu^*(\Psi \Delta \Gamma_n) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(\bigcup_{\nu > n}^{\infty} \Gamma^*) = 0$. Dus is $\mu(\Psi) = \lim_{n \to \infty} m(\Gamma_n) = m(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu^*) = m(\Psi)$. Voor alle Ψ-vzn, en a fortiori voor alle $\Gamma \in \mathcal{G}$, stemmen μ en m overeen.

Wegens $\Lambda \Delta \Gamma_n = \bar{\Lambda} \Delta \bar{\Gamma}_n$ en $m(\Gamma_n) + m(\bar{\Gamma}_n) = m(\Omega) = 1$, concluderen we uit st.1.4.2 dat

$$\mu(\Lambda) + \mu(\bar{\Lambda}) = 1 \text{ is voor elke } \Lambda \in \mathcal{F}.$$

Bij een gegeven $\Lambda \in \mathcal{F}$ bestaan bij elke $\varepsilon > 0$ van Γ en Ψ met $\Lambda \Delta \Gamma \subset \Psi$, $|\mu(\Lambda) - m(\Gamma)| < \varepsilon$ en $m(\Psi) < \varepsilon$. Nu geldt $\Psi \cup \Gamma \supset \Lambda$, dus $\mu^*(\Lambda) \leq m(\Psi \cup \Gamma) \leq m(\Psi) + m(\Gamma) < \varepsilon + \mu(\Lambda) + \varepsilon$. Dit is juist voor elke $\varepsilon > 0$, dus is $\mu^*(\Lambda) \leq \mu(\Lambda)$.

Stel dat voor zekere $\Lambda \in \mathcal{F}$ $\mu^*(\Lambda) < \mu(\Lambda)$ was. Voor $\bar{\Lambda}$ geldt, dat $\mu^*(\bar{\Lambda}) \leq \mu(\bar{\Lambda})$ is, dus is

$$\mu^*(\Lambda) + \mu^*(\bar{\Lambda}) < \mu(\Lambda) + \mu(\bar{\Lambda}) = 1 = \mu^*(\Omega) = \mu^*(\Lambda \cup \bar{\Lambda}).$$

We hebben echter voor de uitwendige maat afgeleid, dat $\mu^*(\bigcup_n \Phi_n) \leq \sum_n \mu^*(\Phi_n)$ is, dus is hier $\mu^*(\Lambda \cup \bar{\Lambda}) \leq \mu^*(\Lambda) + \mu^*(\bar{\Lambda})$, en zo is een tegenspraak bereikt.

Conclusie: $\mu^*(\Lambda) = \mu(\Lambda)$ voor elke $\Lambda \in \mathcal{F}$. De sub-additiviteit van μ^* geldt dus ook voor μ :

(6) $$\mu(\bigcup_n \Lambda_n) \leq \sum_n \mu(\Lambda_n), \text{ mits } \Lambda_n \in \mathcal{F} \ (n=1,2,\ldots).$$

De vzsfunctie $\mu(\Lambda)$, gedefinieerd op de σ-algebra $\mathcal{F}$ volgens st.1.4.2, is uiteraard niet-negatief. We zullen nu bewijzen dat μ ook additief is; m.a.w. dat μ een inhoud is. Kies $\Lambda_1 \in \mathcal{F}$, $\Lambda_2 \in \mathcal{F}$, $\Lambda_1\Lambda_2 = O$. Voor $\nu = 1,2$ en $\varepsilon > 0$ bestaan Γ_ν en Ψ_ν met $\Lambda_\nu \Delta \Gamma_\nu \subset \Psi_\nu$, $m(\Psi_\nu) < \varepsilon$. Dan geldt $\Gamma_\nu \subset \Psi_\nu \cup \Lambda_\nu$, en

$$\Gamma_1\Gamma_2 \subset \Psi_1\Psi_2 \cup \Psi_1\Lambda_2 \cup \Psi_2\Lambda_1 \cup \Lambda_1\Lambda_2 \subset \Psi_1 \cup \Psi_2,$$

wegens $\Lambda_1\Lambda_2 = O$. Als $\Gamma_2^* \overset{\text{def}}{=} \Gamma_2 - \Gamma_1\Gamma_2$ is, dan geldt

$$\Lambda_2 \Delta \Gamma_2^* \Delta \Gamma_1\Gamma_2 = \Lambda_2 \Delta (\Gamma_2^* \cup \Gamma_1\Gamma_2) = \Lambda_2 \Delta \Gamma_2 \subset \Psi_2.$$

Daarom is $\Lambda_2 \Delta \Gamma_2^* \subset \Psi_2 \cup \Gamma_1\Gamma_2 \subset \Psi_1 \cup \Psi_2$, terwijl $m(\Psi_1 \cup \Psi_2) < 2\varepsilon$ is. Combineer dit met $\Lambda_1 \Delta \Gamma_1 \subset \Psi_1$, $m(\Psi_1) < \varepsilon$, dan volgt hieruit dat

$$(\Lambda_1 \cup \Lambda_1) \Delta (\Gamma_1 \cup \Gamma_2^*) \subset (\Lambda_1 \Delta \Gamma_1) \cup (\Lambda_2 \Delta \Gamma_2) \subset \Psi_1 \cup \Psi_2,$$

en dus is $\mu(\Lambda_1) + \mu(\Lambda_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} m(\Gamma_1) + \lim_{\varepsilon \to 0} m(\Gamma_2^*) = \lim_{\varepsilon \to 0} m(\Gamma_1 \cup \Gamma_2^*) = \mu(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$. Door volledige inductie valt uit deze stap de (eindige) additiviteit van m verder te bewijzen.

Nu is μ een inhoud waarvoor (6) geldt, dus (st.1.3.2) een σ-additieve inhoud; omdat de definitieklasse $\mathcal{F}$ volgens st.1.4.1 een σ-algebra is, is μ een maat. We resumeren onze resultaten in de volgende stelling:

St.1.4.3. De in st.1.4.2 gedefinieerde functie μ is een maat op $\mathcal{F}$. Voor elke ψ-vz geldt $\mu(\Psi) = m(\Psi)$, dus in het bizonder is $\mu(\Gamma) = m(\Gamma)$ voor elke $\Gamma \in \mathcal{G}$. Voor elke $\Lambda \in \mathcal{F}$ geldt $\mu(\Lambda) = \mu^*(\Lambda)$.

We hebben een maat μ geconstrueerd op $\mathcal{F}$ die op $\mathcal{G}$ met m overeenstemt. $\mathcal{F}$ is een σ-algebra die ${}^{B}\mathcal{G}$ omvat, dus $\mathcal{F} \supset {}^{B}\mathcal{G}$: μ is dus tevens een maat op ${}^{B}\mathcal{G}$. Stel nu dat ook μ' een maat op ${}^{B}\mathcal{G}$ is, die op $\mathcal{G}$ met m overeenstemt; we moeten dan nog bewijzen dat voor iedere $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G}$ $\mu'(\Lambda) = \mu(\Lambda)$ geldt:

St.1.4.4. De in st.1.4.2. ingevoerde μ is de enige op $\mathcal{G}$ met m overeenstemmende maat op ${}^{B}\mathcal{G}$.

Bewijs: Kies $\varepsilon > 0$. Als $\Lambda \in {}^{B}\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ bestaan Γ en Ψ met $\Lambda \Delta \Gamma \subset \Psi$, $|\mu(\Lambda) - m(\Gamma)| < \varepsilon$, $m(\Psi) < \varepsilon$. Omdat μ' een maat is (dus σ-additief) en op $\mathcal{G}$ met m overeenstemt, is $\mu'(\Psi \cup \Gamma) = m(\Psi \cup \Gamma) = \mu(\Psi \cup \Gamma)$. Wegens $\Lambda \subset \Psi \cup \Gamma$ geldt nu:

$$\mu'(\Lambda) \leq \mu'(\Psi \cup \Gamma) = \mu(\Psi \cup \Gamma) \leq \mu(\Psi) + \mu(\Gamma) < \mu(\Lambda) + 2\varepsilon,$$

waaruit volgt $\mu'(\Lambda) \leq \mu(\Lambda)$. Evenzo is $\mu'(\bar{\Lambda}) \leq \mu(\bar{\Lambda})$; dit impliceert $\mu'(\Lambda) \geq \mu(\Lambda)$. Dus μ en μ' stemmen op ${}^{B}\mathcal{G}$ overeen (buiten ${}^{B}\mathcal{G}$ behoeft μ' niet gedefinieerd te zijn). Hiermee is het gestelde probleem opgelost: er is een unieke uitbreiding aangegeven van een σ-additieve inhoud m op een algebra $\mathcal{G}$ tot een maat μ op ${}^{B}\mathcal{G}$.

De langs deze weg geconstrueerde maat μ is volledig op $\mathcal{F}$:

St.1.4.5. Elke verzameling $\Lambda_1 \cup \Lambda^*$, waarbij $\Lambda_1 \in {}^{B}\mathcal{G}$, $\Lambda^* \subset \Lambda_0 \in \mathcal{F}$, $\mu(\Lambda_0) = 0$, behoort tot $\mathcal{F}$. Omgekeerd is elke $\Lambda \in \mathcal{F}$ te schrijven als $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda^*$, waarbij $\Lambda_1 \in {}^{B}\mathcal{G}$ en nu zelfs $\Lambda^* \subset \Lambda_0 \in {}^{B}\mathcal{G}$, $\mu(\Lambda_0) = 0$; voor de $\Lambda_1 \in {}^{B}\mathcal{G}$ kan men hierbij een verzameling $\bigcup_n \bigcap_\nu \Gamma_{n,\nu}$ kiezen met $\Gamma_{n,\nu} \in \mathcal{G}$.

Bewijs: als $\Lambda_1 \in {}^{B}\mathcal{G}$, $\Lambda^* \subset \Lambda_0$, en Λ_0 een nulverzameling van $\mathcal{F}$ is, dan merken we op dat $\mu^*(\Lambda^* \Delta O) = \mu^*(\Lambda^*) \leq \mu^*(\Lambda_0) = 0$; d.w.z. Λ^* is Γ-approximeerbaar door O. Nu geldt dat $\Lambda^* \in \mathcal{F}$ en $\mu(\Lambda^*) = 0$ is; omdat ${}^{B}\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ is, concluderen we dat $\Lambda_1 \cup \Lambda^* \in \mathcal{F}$ is.

Bij een gegeven $\Lambda \in \mathcal{F}$ kiezen we bij elke n van Γ_n en Ψ_n, zodanig dat $|\mu(\Lambda) - \mu(\Gamma_n)| < \frac{1}{n}$, $\Lambda \Delta \Gamma_n \subset \Psi_n$ en $\mu(\Psi_n) < \frac{1}{n}$ is. Nu is $\Psi_n \overset{\text{def}}{=} \Gamma_n \cup \Psi_n \supset \Lambda$, en ook is

$\Lambda_1' \overset{def}{=} \bigcap_n \Psi_n' \supset \Lambda$; hierbij geldt $\mu(\Psi_n') < \mu(\Lambda) + \frac{2}{n}$, dus $\mu(\Lambda_1') \leq \mu(\Lambda)$. Verder is $\overline{\Lambda} \Delta \overline{\Gamma}_n = \Lambda \Delta \Gamma_n \subset \Psi_n$, waaruit volgt $\Psi_n'' \overset{def}{=} \overline{\Gamma}_n \cup \Psi_n \supset \overline{\Lambda}$ en ook $\overline{\Lambda_1''} \overset{def}{=} \bigcap_n \Psi_n'' \supset \overline{\Lambda}$; hierbij is $\mu(\Psi_n'') < \mu(\overline{\Lambda}) + \frac{2}{n}$, dus $\mu(\overline{\Lambda_1''}) \leq \mu(\overline{\Lambda})$.

We hebben dus $\Lambda_1' \in {}^B\mathcal{G}$ en $\Lambda_1'' \in {}^B\mathcal{G}$ gevonden, waarbij geldt dat $\Lambda_1'' \subset \Lambda \subset \Lambda_1'$; nu is

$$\mu(\Lambda_1'') \leq \mu(\Lambda_1') \leq \mu(\Lambda) \leq \mu(\Lambda_1''),$$

zodat overal het gelijkteken moet staan. Dus mogen we schrijven $\Lambda = \Lambda_1'' \cup (\Lambda - \Lambda_1'')$, waarbij $\Lambda_1'' \in {}^B\mathcal{G}$, $\Lambda - \Lambda_1'' \subset \Lambda_1' - \Lambda_1''$, en $\Lambda_1' - \Lambda_1''$ een nulverzameling uit ${}^B\mathcal{G}$ is.

We hadden gesteld $\bigcap_n \Psi_n'' = \overline{\Lambda_1''}$; als $\Psi_n'' = \bigcup_\nu \Gamma_{n,\nu}''$ is, en we stellen $\Gamma_{n,\nu} = \overline{\Gamma_{n,\nu}''}$, dan geldt $\Lambda_1'' = \bigcup_n \bigcap_\nu \Gamma_{n,\nu}$; hiermee is het bewijs van st.1.4.5 voltooid.

Opmerking 1: Uit deze stelling kan men eenvoudig contoleren, dat $\mathcal{F}$ de kleinste σ-algebra is, die ${}^B\mathcal{G}$ omvat en van elke nulverzameling van ${}^B\mathcal{G}$ ook alle deelverzamelingen omvat. De maat μ is volledig op $\mathcal{F}$, en μ is ook op $\mathcal{F}$ de enige maat die op $\mathcal{G}$ met de gegeven inhoud m overeenstemt.

Opmerking 2: Als $\mu(\Lambda_0) = 0$ is, dan bestaat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\Psi \supset \Lambda_0$ met $\mu(\Psi) < \varepsilon$. Dit volgt uit $\mu^*(\Lambda_0) = 0$.

Opmerking 3: Passen we de hier behandelde uitbreidingsprocedure toe op $\Omega = R^n$, $\mathcal{G} = \{$eindige verenigingen van halfopen intervallen$\}$, m = de geometrische inhoud, dan ontstaat als maat μ de Lebesgue-maat of L-maat. De verzamelingen uit $\mathcal{F}$ heten L-meetbaar. Men kan in dit geval bewijzen dat met echte inclusie-tekens geldt: $\mathcal{G} \subset {}^B\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}_{R^n}$. We beschouwen alleen n=1.

a) $\mathcal{G} \subset {}^B\mathcal{G}$, want een verzameling, die slechts één punt bevat, is wel in ${}^B\mathcal{G}$ maar niet in $\mathcal{G}$ bevat.

b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_{R^1}$, want: laat R_r de verzameling der rationale getallen zijn. Dan vormen de $K_x = \{x+r \mid r \in R_r\}$ bij vaste $x \in R^1$ een restklassensysteem, d.w.z. als $K_x \cap K_y$ niet leeg is, dan is $K_x = K_y$, terwijl $\bigcup_x K_x = R^1$. Volgens het keuzeaxioma kan uit alle verschillende K_x één representant, die bovendien in $(0,1)$ ligt, gekozen worden. Laat V een verzameling van dergelijke representanten zijn. Dan is $V \subset (0,1)$. Laat $V(r)=\{x|x-r \in V\}$ zijn, met r een rationaal getal. V is niet meetbaar. Bewijs: stel V is wel meetbaar. Tel de rationale getallen uit $(-1,1)$ af: $r_1, r_2, \ldots$. Dan is $W = V(r_1) \cup V(r_2) \cup \ldots$ een disjuncte som. Daar $V(r_i)$ meetbaar is, als V meetbaar is, is ook W meetbaar (bij translatie gaan L-meetbare verzamelingen in L-meetbare verzamelingen met dezelfde maat over).

Uit $x \in W$ volgt $x \in V(r_i)$ voor zekere i, dus $x=v-r_i$ voor een $v \in V$, met $0<v<1$ en $-1<r_i<1$, dus $x \in (-1,2)$; uit $x \in (0,1)$ volgt, dat een $v \in V$ bestaat met $x-v=r$, een rationaal getal, waarbij $0<x<1$ en $0<v<1$, dus $-1<r<1$, zodat $r=r_j$ voor zekere j of $x \in V(r_j)$. Dus geldt $(0,1) \subset W \subset (-1,2)$, zodat $1 \leq \mu(W) \leq 3$. Uit $\mu(V)>0$ volgt $\mu(W)=\infty$, uit $\mu(V)=0$ volgt $\mu(W)=0$. Hiermee is een tegenspraak gevonden, dus V is niet meetbaar en de klasse der L-meetbare verzamelingen is dus een echte deelverzameling van de klasse $\mathcal{G}_{R^1}$ van alle deelverzamelingen van R^1.

c) Beschouw in R^2 (het platte vlak) de punten (a,c) en (b,d) met $a<b$, $c<d$ en $\frac{d-c}{b-a} = \theta_1$. Kies een reëel getal θ met $0<\theta<\theta_1$. Verbind (a,c) door een lijnstuk met (b,d). De zo verkregen functie heet $\varphi_1(x;\theta;a,b;c,d)$. Stel, dat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ reeds gedefinieerd zijn. Dan wordt $\varphi_{n+1}(x;\theta;a,b;c,d)$ als volgt verkregen: beschouw één der lijnstukken, waaruit $\varphi_n(x;\theta;a,b;c,d)$ is opgebouwd en wel het lijnstuk $(x_1,y_1;x_2,y_2)$, dat (x_1,y_1) met (x_2,y_2) verbindt, waarbij $x_1<x_2$ en $y_1<y_2$ is. Dit lijnstuk heeft de helling $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Nu is φ_k opgebouwd uit $2^{k-1}-1$ lijnstukken met helling θ en 2^{k-1} lijnstukken met helling $\theta_k>\theta$ voor $1 \leq k \leq n$. Elk lijnstuk $(x_1,y_1;x_2,y_2)$ van φ_n met helling θ_n vervangen we door drie lijnstukken en wel de lijnstukken, die achtereenvolgens de punten (x_1,y_1), $(x_1+\frac{1}{3}(x_2-x_1),\ -\frac{1}{6}\theta(x_2-x_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1))$,

$(x_1+\frac{2}{3}(x_2-x_1), \frac{1}{6}\,\theta\,(x_2-x_1)+\frac{1}{2}(y_2-y_1))$ en (x_2,y_2) verbinden. Het middelste lijnstuk gaat door het punt $(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2))$ en heeft helling θ. Het eerste lijnstuk heeft (evenals het derde) de helling:

$$\theta_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(y_2-y_1)\ -\frac{1}{6}(x_2-x_1)}{\frac{1}{3}\,(x_2-x_1)} = \frac{3}{2}\,\theta\ -\frac{1}{2}\theta > \theta_n.$$ (Hieruit volgt, dat

$\theta_n = (\frac{3}{2})^{n-1}\ (\theta_1-\theta)+\theta$ is voor $n\geq 1$, dus dat $\lim_{n\to\infty}\theta_n=\infty$ is). De door de hier geschetste vervanging verkregen kromme heet $\varphi_{n+1}(x;\ \theta;\ a,b;\ c,d)$.

Elke interval, waarin een lijnstuk $(x_1,y_1;x_2,y_2)$ van φ_n helling θ_n heeft, heeft lengte $x_2-x_1=3^{-n+1}(b-a)$, terwijl $y_2-y_1=\theta_n(x_2-x_1)$ is. Het maximum van $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$ wordt binnen $[x_1,x_2]$ aangenomen in $x_1+\frac{1}{3}\,(x_2-x_1)$ en is

$$-\frac{1}{6}\,\theta(x_2-x_1)+\frac{1}{6}(y_2-y_1)=\frac{1}{6}(\theta_n-\theta)3^{-n+1}(b-a)=\frac{1}{3}\,\frac{\theta_1-\theta}{2^n}\,(b-a),$$

het minimum wordt aangenomen in $x_1+\frac{2}{3}(x_2-x_1)$ en is $-\frac{1}{3}\,\frac{\theta_1-\theta}{2^n}(b-a)$.

Er geldt dus $|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leq\frac{1}{3}\,\frac{\theta_1-\theta}{2^n}\,(b-a)$, zodat de rij $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ op $[a,b]$ <u>uniform</u> convergent is. Daar $\varphi_n(x)$ continu is, is dan ook $\varphi(x;\ \theta;\ a,b;\ c,d)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x;\ \theta;\ a,b;\ c,d)$ <u>continu.</u> Op de open verzameling

$(a+\frac{1}{3}(b-a),a+\frac{2}{3}(b-a))\cup(a+\frac{1}{9}(b-a),a+\frac{2}{9}(b-a))\cup(a+\frac{7}{9}(b-a),a+\frac{8}{9}(b-a))\cup\ldots$

met L-maat

$(b-a)\left\{\frac{1}{3}+2.\frac{1}{9}+4.\frac{1}{27}+\ldots\right\}=\frac{b-a}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n=b-a$ is $\varphi'(x)=\theta$.

Daar uit $x_2>x_1$ volgt $\varphi_n(x_2)-\varphi_n(x_1)\geq\theta(x_2-x_1)>0$, is $\varphi(x)$

<u>monotoon stijgend.</u>

Met behulp van $\varphi(x;\ \theta;\ a,b;\ c,d)$ construeren we een nieuwe rij functies $\psi_n(x)$. Kies $\psi_1(x) = \varphi(x;\ \theta;\ 0,1;\ 0,1)$. Dan is $\theta_1 = 1$. Vervang van $\psi_1(x)$ elk lijnstuk $(x_1,y_1;x_2,y_2)$ met helling θ door $\varphi(x;\ \theta^2;\ x_1,x_2;\ y_1,y_2)$. Hierdoor ontstaat $\psi_2(x)$. Vervang van $\psi_2(x)$ elk lijnstuk $(x_1,y_1;x_2,y_2)$ met helling θ^2 door $\varphi(x;\ \theta^3;x_1,x_2;y_1,y_2)$. Hierdoor ontstaat $\psi_3(x)$. Construeer zo een rij $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... van op $[0,1]$ gedefinieerde functies. Dan is $\psi_n(x)$ <u>continu</u> en <u>monotoon stijgend</u>, want uit $x_2 > x_1$ volgt $\psi_n(x_2) - \psi_n(x_1) \geq \theta^n(x_2 - x_1) > 0$.

Uit $|\varphi(x;\ \theta;a,b;c,d) - \varphi_1(x;\ \theta;a,b;c,d)| \leq \frac{1}{6}(\theta_1 - \theta)(b-a)$ volgt

$|\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{6}(1-\theta)\left(\frac{\theta}{3}\right)^n$, zodat de rij $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$,

<u>uniform</u> <u>convergeert</u> naar een <u>continue</u> limietfunctie $\psi(x)$, die <u>monotoon niet-dalend</u> is. Zelfs is $\psi(x)$ monotoon <u>stijgend</u>, want kies x_1 en x_2 met $x_1 < x_2$. Daar het grootste open interval van $\psi_n(x)$ met $\psi_n'(x) = \theta^n$ de lengte $\frac{1}{3^n}$ heeft, ligt voor voldoende grote n_o een open interval (a_{n_o}, b_{n_o}) van $\psi_{n_o}(x)$ met $\psi_{n_o}'(x) = \theta^{n_o}$ in (x_1, x_2). Omdat voor $m \geq n_o$ geldt

$\psi_m(x_1) \leq \psi_m(a_{n_o}) = \psi_{n_o}(a_{n_o}) < \psi_{n_o}(b_{n_o}) = \psi_m(b_{n_o}) \leq \psi_m(x_2)$, is

$\psi(x_1) < \psi(x_2)$.

Beschouw de open verzameling $B_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \cup \ldots$

van punten x, waarvoor $\psi_1'(x) = \theta$ is. Als $B_1^* = \{\psi_1(x) \mid x \in B_1\}$, dan is ook B_1^* een open verzameling met L-maat

$\theta\left\{\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{9} + 4.\frac{1}{27} + \ldots\right\} = \theta$. Binnen B_1 ligt de open verzameling B_2 met

$B_2=\left((\frac{4}{9},\frac{5}{9})\cup(\frac{10}{27},\frac{11}{27})\cup(\frac{16}{27},\frac{17}{27})\cup\ldots\right)\cup\left((\frac{4}{27},\frac{5}{27})\cup(\frac{10}{81},\frac{11}{81})\cup(\frac{16}{81},\frac{17}{81})\cup\ldots\right)\cup\ldots,$ vereniging van open intervallen van punten x, waarvoor $\psi_2'(x)=\theta^2$, met $\mu_L(B_2)=1$. Voor $B_2^* = \{\psi_2(x) \mid x \in B_2\}$ geldt, dat $\mu_L(B_2^*)=\theta^2$ is. Laat B_n de open verzameling zijn, die de vereniging is van alle open intervallen van punten x met $\psi_n'(x)=\theta^n$ en $B_n^* = \{\psi_n(x) \mid x \in B_n\}$, dan is $B_n \subset B_{n-1}$ en $B_n^* \subset B_{n-1}^*$, terwijl $\mu_L(B_n)=1$ is en $\mu_L(B_n^*)=\theta^n$ voor $n \geq 1$.

Neem $B = \bigcap_1^\infty B_n$, dan is $\mu_L(B)=\lim_{n\to\infty} \mu_L(B_n) =1$. Neem $B^*=\{\psi(x) \mid x \in B\}$. Dan is voor elke $x_0 \in B$ $\psi(x_0) \in B^*$, terwijl $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0)= \psi(x_0)$ is. Nu is $x_0 \in B_m$, dus $\psi_m(x_0) \in (\alpha_m, \beta_m)$, waarbij (α_m, β_m) één der open intervallen van B_m^* is. Dan geldt $\alpha_m < \psi_n(x_0) < \beta_m$ voor elke $n \geq m$, zodat $\alpha_m \leq \psi(x_0) \leq \beta_m$ is. D.w.z. als B_m^{**} de vereniging van alle <u>gesloten</u> intervallen $[\alpha_m, \beta_m]$ is, waarbij (α_m, β_m) een <u>open</u> interval van B_m^* is, dan is $B^* \subset B_m^{**}$ en $\mu_L(B_m^{**})=\theta^m$, daar B_m^{**} slechts aftelbaar veel punten van B_m^* verschilt. Omdat $B^* \subset \bigcap_1^\infty B_m^{**}$ en $\mu_L(\bigcap_1^\infty B_m^{**})=0$ is, is ook B^* L-meetbaar met $\mu_L(B^*)=0$. Als verder $A = \{x \mid 0<x\leq 1 \text{ en } x \notin B\}$ en $A^* = \{x \mid 0<x\leq 1 \text{ en } x \notin B^*\}$ is, dan is $\mu_L(A)=0$ en $\mu_L(A^*)=1$. De functie $\psi(x)$, die continu en monotoon stijgend is en $(0,1]$ op $(0,1]$ afbeeldt, beeldt dus een verzameling A met L-maat 0 af op een verzameling A^* met L-maat 1 en een verzameling B met L-maat 1 op een verzameling B^* met L-maat 0.

Laat W de onmeetbare deelverzameling van voorbeeld b) zijn. Dan is $W = AW \cup BW$ (disjunct) met AW L-meetbaar, daar $\mu_L(A)=0$ is. Maar dan is $C = BW$ onmeetbaar, omdat anders W L-meetbaar is. Nu is $C^* = \{\psi(x) \mid x \in C\}$ een deelverzameling van B^*, zodat C^* L-meetbaar is met $\mu_L(C^*)=0$. Daar tevens $C = \{x \mid \psi(x) \in C^*\}$ is, vanwege de ééneénduidigheid van $\psi(x)$, kan C^* géén Borelverzameling zijn. Want als dit wel het geval was, dan was ook C (zie onder) een Borelverzameling, omdat $\psi(x)$ continu is. Dit laatste leidt tot een tegenspraak, want C is <u>niet</u> L-meetbaar.

We bewijzen nu nog: als $A = \{x \mid f(x) \in B\}$ is, waarbij B een Borelverzameling is, deelverzameling van de reële getallen en f(x) een reële continue functie op de reële getallen, dan is A een Borelverzameling. Laat $K_y = \{x \mid f(x) \leq y\} = \{x \mid f(x) \in (-\infty, y]\}$ zijn, dan is K_y een Borelverzameling voor elke reële y (zie blz.). Laat $\mathcal{K}$ de kleinste σ-algebra zijn, die alle K_y omvat, zodat $\mathcal{K}$ een <u>deelverzameling</u> der klasse der Borelverzamelingen is. Als B <u>alle</u> deelverzamelingen der reële getallen doorloopt, dan doorloopt A een σ-algebra van verzamelingen met de eigenschap: als $x_0 \in A$, dan is $\{x \mid f(x) = f(x_0)\} \subset A$. Daar $\mathcal{K}$ slechts een deel van de verzamelingen van deze σ-algebra bevat, is $B = \{f(x) \mid x \in K\}$ met $K \in \mathcal{K}$ altijd zó, dat ook $K = \{x \mid f(x) \in B\}$ is. D.w.z. als $\varphi(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ is, dan bestaat bij elke $K \in \mathcal{K}$ een B met $K = \varphi(B)$. Beschouw nu $\mathcal{B} = \{B \mid \varphi(B) \in \mathcal{K}\}$. Uit $B \in \mathcal{B}$ volgt $\varphi(B) \in \mathcal{K}$, zodat $\{x \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{K}$ is, dus ook $\{x \mid f(x) \in \overline{B}\} \in \mathcal{K}$ of $\varphi(\overline{B}) \in \mathcal{K}$ of $\overline{B} \in \mathcal{B}$. Uit $\forall_n\, B_n \in \mathcal{B}$ volgt $\forall_n\, \varphi(B_n) \in \mathcal{K}$, zodat $\forall_n \{x \mid f(x) \in B_n\} \in \mathcal{K}$ is, dus ook $\{x \mid f(x) \in \bigcup_1^\infty B_n\} \in \mathcal{K}$ of $\varphi(\bigcup_1^\infty B_n) \in \mathcal{K}$ of $\bigcup_1^\infty B_n \in \mathcal{B}$, D.w.z. $\mathcal{B}$ is een σ-algebra, die alle verzamelingen van het type $(-\infty, y]$ (y reëel) omvat, dus óók alle Borelverzamelingen. Als B dus een Borelverzameling is, dan is ook $A = \{f(x) \mid x \in B\}$ een Borelverzameling.

Gaan we nu weer terug naar het oorspronkelijke geval van een ruimte Ω, een algebra $\mathcal{G}$ en een σ-additieve normale inhoud m, dan is $\Omega = \bigcup_\varrho \Omega_\varrho$ (disjunct), $\Omega_\varrho \in \mathcal{G}$, $m(\Omega_\varrho) < \infty$. Bij elke Ω_ϱ hebben we uit de algebra $\mathcal{G}_\varrho$ de klasse $\mathcal{F}_\varrho$ der Γ_ϱ-approximeerbare verzamelingen in de ruimte Ω_ϱ geconstrueerd ($\Gamma_\varrho \in \mathcal{G}_\varrho$). We definiëren nu:

$$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{\Lambda \mid \Lambda\,\Omega_\varrho \in \mathcal{F}_\varrho,\ \varrho = 1, 2, \ldots\} .$$

Zoals al eerder behandeld is, is $\mathcal{F}$ een σ-algebra, waarop $\mu(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_\varrho \mu(\Lambda\,\Omega_\varrho)$ een maat is. De verzamelingen uit $\mathcal{F}$ heten <u>meetbaar</u>. Niet elke meetbare verzameling is Γ-approxmeerbaar ($\Gamma \in \mathcal{G}$): als $\Lambda \in \mathcal{F}$, bestaat bij elke $\Lambda\,\Omega_\rho$ een $\Gamma_\rho \in \mathcal{G}_\rho$ met $\mu^*(\Lambda\Omega_\rho \Delta \Gamma_\rho) < \varepsilon.2^{-\rho}$, zodat $\mu^*(\Lambda \Delta (\bigcup_\rho \Gamma_\rho)) < \varepsilon$ is, maar het is niet zeker dat $\bigcup_\rho \Gamma_\rho \in \mathcal{G}$ is; als $\sum_\rho m_\rho(\Gamma_\rho) = \infty$ is, is het ook niet mogelijk de oneindige som door een eindige te benaderen.

Voorbeeld: Ω = de gehele niet-negatieve getallen; $\mathcal{G}$ bevat de lege verzameling en alle eindige verzamelingen, met hun complementen; $m(\Gamma)$ = het aantal elementen van Γ als Γ eindig is, anders is $m(\Gamma) = \infty$. $\Lambda_n = \{2n\}$ is Γ-approximeerbaar, nl. $\mu^*(\Lambda_n \Delta \{2n\}) = \mu^*(O) = 0$ omdat $\{2n\} \in \mathcal{G}$ is. $\Lambda = \bigcup_n \Lambda_n$ is de verzameling der even getallen, deze is niet Γ-approximeerbaar want $\Lambda \Delta \Gamma$ bevat voor elke $\Gamma \in \mathcal{G}$ oneindig veel punten zodat steeds $\mu^*(\Lambda \Delta \Gamma) = \infty$ is.

Een andere definitie van meetbare verzameling, die eveneens uitgaat van een uitwendige maat μ^*, is afkomstig van Carathéodory:

Def.1.4.4. Een verzameling $\Lambda \subset \Omega$ heet meetbaar als voor elke $\Phi \subset \Omega$ geldt:

$$\mu^*(\Phi) = \mu^*(\Phi\Lambda) + \mu^*(\Phi\bar{\Lambda}).$$

Als we de klasse van de volgens Caratheodory meetbare verzamelingen aanduiden met $\mathcal{F}_c$, dan kan men achtereenvolgens bewijzen:

a) $O \in \mathcal{F}_c$, $\Omega \in \mathcal{F}_c$;

b) als $\Lambda \in \mathcal{F}_c$, dan $\bar{\Lambda} \in \mathcal{F}_c$;

c) als $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_c$, dan $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathcal{F}_c$;

d) $\mathcal{F}_c$ is een algebra;

e) voor een willekeurige verzameling $\Phi \subset \Omega$ en disjuncte verzamelingen $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{F}_c$ geldt:

$$\mu^*(\Phi(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)) = \mu^*(\Phi\Lambda_1) + \mu^*(\Phi\Lambda_2);$$

f) als $\Lambda_n \in \mathcal{F}_c$ $(n=1, 2, \ldots)$ en de verzamelingen Λ_n zijn disjunct, dan geldt:

$$\mu^*(\Phi \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(\Phi\Lambda_n) \text{ en } \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \in \mathcal{F}_c;$$

g) $\mathcal{F}_c$ is een σ-algebra, waarop μ^* een maat is;

h) als $\Phi \subset \Omega$ en $\mu^*(\Phi)=0$, dan geldt dat $\Phi \in \mathcal{F}_c$;

i) $\mathcal{F}_c \supset \mathcal{G}$, als de uitwendige maat μ^* met behulp van de algebra $\mathcal{G}$ gedefinieerd is.

St.1.4.6. Als de uitwendige maat μ^* uit een normale σ-additieve inhoud op een algebra $\mathcal{G}$ geconstrueerd is, vallen de klassen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_c$ samen.

Bewijs: A) We bepalen ons eerst tot de deelruimte Ω_ϱ met $m(\Omega_\varrho) < \infty$, de deelalgebra $\mathcal{G}_\varrho$ en de deelklasse $\mathcal{F}_\varrho$ van Γ_ϱ-approximeerbare verzamelingen. Alleen in dit gedeelte A) geeft de streep het complement t.o.v. Ω_ϱ aan.
Kies $\Lambda \in \mathcal{F}_\varrho$, $\Phi \subset \Omega_\varrho$ willekeurig. Wegens de subadditiviteit van μ^* geldt zeker dat $\mu^*(\Phi) \leq \mu^*(\Phi\Lambda) + \mu^*(\Phi\overline{\Lambda})$.
Kies nu $\varepsilon > 0$, dan bestaan $\Gamma \in \mathcal{G}_\varrho$ en $\Psi_1 = \bigcup_\nu \Gamma_\nu$, $\Gamma_\nu \in \mathcal{G}_\varrho$, zo dat

$$\Lambda \triangle \Gamma \subset \Psi_1 \text{ en } m(\Psi_1) < \varepsilon .$$

Dus $\Lambda \subset \Gamma \cup \Psi_1$ en $\overline{\Lambda} \subset \overline{\Gamma} \cup \Psi_1$. Verder kiezen we $\Psi_2 = \bigcup_\lambda \Gamma_\lambda$, $\Gamma_\lambda \in \mathcal{G}_\varrho$, zo dat $\Phi \subset \Psi_2$, $m(\Psi_2) < \mu^*(\Phi) + \varepsilon$.
Nu geldt:

$$\Phi\Lambda \subset \Psi_2\Lambda \subset \Psi_2\Gamma \cup \Psi_2\,\Psi_1, \text{ dus } \mu^*(\Phi\Lambda) < m(\Psi_2\Gamma) + \varepsilon;$$

$$\Phi\overline{\Lambda} \subset \Psi_2\overline{\Lambda} \subset \Psi_2\overline{\Gamma} \cup \Psi_2\,\Psi_1, \text{ dus } \mu^*(\Phi\overline{\Lambda}) < m(\Psi_2\overline{\Gamma}) + \varepsilon .$$

Dus is $\mu^*(\Phi) > m(\Psi_2) - \varepsilon = m(\Psi_2\Gamma) + m(\Psi_2\overline{\Gamma}) - \varepsilon >$

$$> \mu^*(\Phi\Lambda) + \mu^*(\Phi\overline{\Lambda}) - 3\varepsilon .$$

Conclusie van A): $\mu^*(\Phi) = \mu^*(\Phi\Lambda) + \mu^*(\Phi\overline{\Lambda})$, als $\Phi \subset \Omega_\varrho$, $\Lambda \in \mathcal{F}_\varrho$, en de streep het complement t.o.v. Ω_ϱ aangeeft.

B) We keren nu terug tot de hele ruimte Ω. Kies $\Phi' \subset \Omega$ willekeurig, en laat weer $\Lambda \in \mathcal{F}_\varrho$ zijn.

Omdat $\Omega_\varrho \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_c$, geldt

$$\mu^*(\Phi') = \mu^*(\Phi'\Omega_\varrho) + \mu^*(\Phi'\overline{\Omega}_\varrho).$$

Omdat $\Phi'\Omega_\varsigma \subset \Omega_\varsigma$, zegt de conclusie van A), dat

$$\mu^*(\Phi'\Omega_\varsigma) = \mu^*(\Phi'\Lambda) + \mu^*(\Phi'(\Omega_\varsigma - \Lambda)).$$

Dus $\mu^*(\Phi') = \mu^*(\Phi'\Lambda) + \mu^*(\Phi'(\Omega_\varsigma - \Lambda_\varsigma)) + \mu^*(\Phi'(\bigcup_{\sigma\neq\varsigma}\Omega_\sigma)) \geq$

$$\geq \mu^*(\Phi'\Lambda) + \mu^*(\Phi'\bar{\Lambda}).$$

Wegens de subadditiviteit van μ^* geldt ook dat $\mu^*(\Phi') \leq \mu^*(\Phi'\Lambda) + \mu^*(\Phi'\bar{\Lambda})$, dus is bewezen dat $\Lambda \in \mathcal{F}_c$.
Omdat $\mathcal{F}_c$ een σ-algebra is, geldt "uit $\Lambda \in \mathcal{F}$ volgt $\Lambda \in \mathcal{F}_c$" niet alleen voor elke $\Lambda \in \mathcal{F}_\varsigma$, maar ook voor elke $\Lambda \in \mathcal{F}$.

C) Kies nu $\Lambda \in \mathcal{F}_c$. Wegens $\Omega_\varsigma \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_c$ is ook $\Lambda\Omega_\varsigma \in \mathcal{F}_c$. Bij een gekozen $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\Psi = \bigcup_\nu \Gamma_\nu$ ($\Gamma_\nu \in \mathcal{G}_\varsigma$, disjunct), zo dat $m(\Psi) < \mu^*(\Lambda\Omega_\varsigma) + \frac{\varepsilon}{2}$. Nu is $\mu^*(\Lambda\Omega_\varsigma) \leq m(\Omega_\varsigma) < \infty$, en μ^* is een maat op $\mathcal{F}_c$, terwijl $\Psi \in \mathcal{F}_c$ en $\Lambda\Omega_\varsigma \in \mathcal{F}_c$; daarom mogen we concluderen dat $\mu^*(\Lambda\Omega_\varsigma \Delta \Psi) = \mu^*(\Psi - \Lambda\Omega_\varsigma) < \frac{\varepsilon}{2}$ is.
Omdat $\sum_{\nu=1}^{\infty} m(\Gamma_\nu) = m(\Psi) < \mu^*(\Lambda\Omega_\varsigma) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty$ is, kunnen we N zo groot kiezen dat $m(\Psi - \bigcup_{\nu=1}^{N}\Gamma_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ wordt.
Voor $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\nu=1}^{N}\Gamma_\nu \in \mathcal{G}_\varsigma$ geldt dan dat

$$\Lambda\Omega_\varsigma \Delta \Gamma \subset (\Lambda\Omega_\varsigma \Delta \Psi) \cup (\Psi \Delta \Gamma), \text{ dus } \mu^*(\Lambda\Omega_\varsigma \Delta \Gamma) < \varepsilon.$$

Dus elke $\Lambda\Omega_\varsigma \in \mathcal{F}_\varsigma$, waaruit volgt $\Lambda \in \mathcal{F}$. Hiermee is st.1.4.6 bewezen.

Wanneer de inhoud waarvan we uitgaan niet normaal is, dus de maat die ontstaat niet σ-finiet, is het niet mogelijk de meetbare verzamelingen te definieren met behulp van het begrip Γ-approximeerbaar. Ook het criterium dat uitwendige en inwendige maat overeenstemmen (hier niet behandeld) blijft tot het σ-finiete geval beperkt. De definitie van Carathéodory geldt voor alle gevallen. Onze definitie via Γ-approximeerbaar ligt echter meer voor de hand; van niet σ-finiete maten zullen wij trouwens geen gebruik kunnen maken, omdat deze bij het vormen van een produktmaat tot pathologische situaties aanleiding geven.

<u>Voorbeeld</u>: $\Omega_1 = R^1$, $\mathcal{G}_1 = \{O$, cellen $(a,b]$ met $b > a$, hun complementen en sommen$\}$, $m_1 =$ de geometrische inhoud; $\Omega_2 = R^1$, $\mathcal{G}_2$ bevat alle deelvzn van Ω_2, $m_2(O)=0$ en $m_2(\Gamma_2)=\infty$ als $\Gamma_2 \neq O$, $\Gamma_2 \in \mathcal{G}_2$. Deze laatste inhoud is niet normaal. We kunnen nu eerst elk tripel $\Omega_i, \mathcal{G}_i, m_i$ uitbreiden tot $\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i$, waarin $\mathcal{F}_i$ de vzn zijn die meetbaar zijn met de maat μ_i; μ_1 wordt juist de Lebesgue-maat.
Vervolgens vormen we de product - ruimte $\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \bar{\mu}$; het product van maten is hier niet precies behandeld maar we bedoelen aan elke $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ een maat $\bar{\mu}(\Lambda) = \mu_1(\Lambda_1) \cdot \mu_2(\Lambda_2)$ toe te kennen. Het is ook mogelijk een andere weg te kiezen, n.l. eerst $\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, \bar{m}$ te vormen, waarbij $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ een algebra is. Voor het geval van een normale inhoud is er nu een stelling die zegt dat $\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \bar{\mu}$ en $\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, \bar{m}$ bij uitbreiding dezelfde maat opleveren op dezelfde klasse $\mathcal{F}$ van meetbare deelvzn van $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dit geldt niet voor ons voorbeeld omdat m_2 hier niet normaal is: neem $\Lambda = \{(x,y)\} = \{x\} \times \{y\}$ (éénpuntsvzn). $\mu_1(\{x\})=0$ (L-maat) en $\mu_2(\{y\}) = \infty$, dus $\mu(\Lambda) = 0 \cdot \infty = 0$. Bij overdekking van $\{(x,y)\}$ met een vz $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ uit $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ kunnen we hoogstens $\Gamma_2 = \{y\}$ kiezen en $\Gamma_2 = (a,b]$ met $\mu_1((a,b]) = b-a < \varepsilon$; omdat daarbij $\bar{m}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \varepsilon \cdot \infty = \infty$ is, geldt $\mu^*(\Lambda) = \infty \neq \bar{\mu}(\Lambda)$.

Om soortgelijke redenen zijn in het geval van een niet-normale inhoud ook de volgende stellingen onjuist:

A) Als $\Lambda \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ een meetbare vz is, dan is voor bijna alle $w_1 \in \Omega_1$ de vz $\Omega_{w_1} \stackrel{\text{def}}{=} \{w_2 \mid (w_1, w_2) \in \Lambda\}$ een μ_2-meetbare vz; is bovendien gegeven $\mu(\Lambda)=0$ dan is bijna steeds $\mu_2(\Lambda_{w_1})=0$. Hier betekent "bijna alle" en "bijna steeds", dat de uitzonderingsvz de μ_1-maat nul heeft.

B) Als $\Lambda \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ een meetbare vz is, en bijna overal is $\mu_2(\Lambda_{w_1})=0$, dan is $\mu(\Lambda)=0$.

C) De stelling van Fubini over het verwisselen van de integratievolgorde bij dubbelintegralen. Bij het bewijs hiervan worden n.l. A) en B) gebruikt.

D) De associativiteit van het Cartesisch product van meer dan twee tripels $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$.

Op grond van het bovenstaande zullen wij ons tot normale inhouden en σ-finiete maten beperken.

1.5 Intervalmaat en verdelingsfuncties.

In de R^n spelen de intervallen een bijzondere rol. We zullen dan ook in het bijzonder die maten in de R^n, die door uitbreiding van een inhoud op de algebra van alle eindige sommen van halfopen intervallen ontstaan, bestuderen. Deze algebra zullen we voor de duur van deze paragraaf aanduiden met $\mathcal{G}_n$.

Def. 1.5.1 Onder een intervalmaat μ in R^n verstaan we een maat die ontstaat door uitbreiding van een σ-additieve inhoud m op $\mathcal{G}_n$, met de eigenschap dat m eindig is op ieder eindig interval.

Zij $\mathcal{K}(\mu)$ de klasse van de μ-meetbare verzamelingen.

Dan geldt:

$^B\mathcal{G}_n \subset \mathcal{K}(\mu)$ (volgens st. 1.4.1)

Bij iedere $K \in \mathcal{K}(\mu)$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een open $K_o (\in {}^B\mathcal{G}_n$ dus) waarvoor:

$K_o \supset K$ en $\mu(K_o - K) < \varepsilon$ en een gesloten K_g (ook $\in {}^B\mathcal{G}_n$) waarvoor:

$K \supset K_g$ en $\mu(K - K_g) < \varepsilon$.

Bewijs:

Volgens st. 1.4.5 geldt voor iedere $K \in \mathcal{K}(\mu)$:

$K = N \cup \bigcup_r \bigcap_s J_{r,s}$ met

$N \subset N_o \in {}^B\mathcal{G}_n$ en $\mu(N_o) = 0$; $J_{r,s} \in \mathcal{G}_n$.

Dan zijn er dus aftelbaar veel (niet noodzakelijk half-open) disjuncte intervallen I_k, zodat:

$K = N \cup \bigcup_k I_k$.

Dan kan K overdekt worden door een aftelbare verzameling open intervallen:

1° N_o is nulverzameling $\in {}^B\mathcal{G}_n$, dus bij elke $\varepsilon > 0$ is er volgens opm. 2 op blz. 25 een rij $\{J_k\}$ met $J_k \in \mathcal{G}_n$ en

$\mu(\bigcup_1^\infty J_k) < \varepsilon$, en $\bigcup_1^\infty J_k \supset N_o$.

2° Kies open intervallen $O'_k \supset I_k$ met

$$\mu(O'_k - I_k) < \frac{\varepsilon}{2.2.^k} \Rightarrow \cup O'_k \supset \cup I_k \text{ en}$$

$$\mu(\cup O'_k - \cup I_k) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dus, met

$K_o = \cup O_k \cup \cup O'_k$,

waarin de O_k uit de J_k verkregen worden op dezelfde manier als de O'_k uit de I_k, geldt:

K_o open; $K_o \supset K$ en $\mu(K_o - K) < \varepsilon$.

Het bewijs van de tweede bewering gaat eenvoudig door over te gaan op de complementen.

Een intervalmaat is altijd normaal, zoals onmiddellijk blijkt uit de splitsing:

$$\Omega = R^n = \bigcup_\rho W_\rho ,$$

waarin $\{W_\rho\}$ ($\rho = 1,2,\dots$) een aftelling van de halfopen eenheidskuben (waarvan de hoekpunten gehele coördinaten hebben) is. Met behulp hiervan kunnen we een intervalmaat schrijven als een lineaire combinatie van eindige maten[1]:

$$\mu = \sum_\rho{}^* p_\rho \mu_\rho$$

met: $\mu_\rho(K) = \frac{\mu(KW_\rho)}{p_\rho}$; $p_\rho = \mu(W_\rho)$

zodat dus: $\mu_\rho(R^n) = 1$.

We zullen dus eerst intervalmaten μ onderzoeken waarvoor $\mu(R^n) = 1$.

Voor we verder gaan zullen we een aantal notaties in R^n invoeren, waardoor het mogelijk wordt de theorie in R^n zoveel mogelijk parallel te doen lopen met die in R':

----

[1] De sommatie $\sum_\rho{}^*$ wordt slechts over de ρ met $\mu(W_\rho) > 0$ uitgestrekt.

Def. 1.5.2. voor $x=(x_1,x_2, \ldots , x_n)$ en $y=(y_1,y_2,\ldots, y_n)$ beide $\in R^n$ definiëren we:

a $x \leqq y \Leftrightarrow \forall_k^{\{1, \ldots,n\}}\ x_k \leqq y_k$.

b $x < y \Leftrightarrow \forall_k^{\{1, \ldots,n\}}\ x_k < y_k$.

c $I_{x,y}=(x,y]=\{z \mid x < z \leqq y\}$; (x,y), $[x,y)$ en $[x,y]$ analoog.

d $\infty =(\infty ,\infty , \ldots, \infty)$; $-\infty =(-\infty ,-\infty , \ldots,-\infty)$.

We zullen nu het gedrag onderzoeken van de door μ gedefinieerde functie:

Def. 1.5.3. $F(x)= \mu(I_{-\infty ,x})$ voor $x < \infty$ $(\mu(R^n) = 1)$.

Functies die op deze manier gevormd worden noemen we verdelingsfuncties:

Def. 1.5.4. Een functie $F(x)$ gedefinieerd op R^n is een verdelingsfunctie, als er een intervalmaat μ met $\mu(R^n)=1$ bestaat waarvoor

$$F(x) = \mu(I_{-\infty ,x}).$$

In de rest van deze paragraaf zullen we de relatie tussen μ en F nader onderzoeken. In het bijzonder, achtereenvolgens:

1° de één-eenduidigheid van de toevoeging van F aan μ.

2° monotonie- en continuïteitseigenschappen van verdelingsfuncties.

3° voldoende voorwaarden, opdat F een verdelingsfunctie is.

De één-eenduidigheid van de toevoeging van F aan μ.

Als de waarden van μ op alle intervallen door een verdelingsfunctie F bepaald zijn, dan is de toevoeging van F aan μ één-eenduidig.

Om aan te tonen dat dit inderdaad zo is, voeren we de k^e differenties van een op R^n gedefinieerde functie in:

Def. 1.5.5.

$$\Delta_{a_i}^{b_i} F(x)=F(x_1,\ldots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-F(x_1,\ldots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$\Delta_{a_{i_1}\ldots a_{i_k}}^{b_{i_1}\ldots b_{i_k}} F(x)= \Delta_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\Delta_{a_{i_2}\ldots a_{i_k}}^{b_{i_2}\ldots b_{i_k}} F(x)\right) \text{ voor } (i_1,i_2,\ldots,i_k)\neq$$

en als afkorting: $\Delta_a^b f(x) = \Delta_{a_1\ldots a_n}^{b_1\ldots b_n} F(x)$,

waarvan de volgende eigenschappen eenvoudig bewezen kunnen worden:

$\underline{\Delta 1}$ $\Delta_{a^1_{i_1}\ldots a^1_{i_k}}^{a^2_{i_1}\ldots a^2_{i_k}} F(x) =$

$$= \sum_{\varepsilon_1=1}^{2}\ldots\sum_{\varepsilon_k=1}^{2}(-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_k}F(x_1,\ldots x_{i_1-1},a^{\varepsilon_1}_{i_1},x_{i_1+1},\ldots,a^{\varepsilon_k}_{i_k},\ldots,x_n).$$

Bewijs door de sommatie over ε_1 uit te voeren en dan de recursieve definitie toe te passen, dan met inductie.

Op grond van deze eigenschap is de Δ-operatie commutatief en associatief.

$\underline{\Delta 2}$ Als $F(x)$ een verdelingsfunctie is, is:

$$\Delta_{a_{i_1}\ldots a_{i_{j-1}}\,-\infty\,a_{i_{j+1}}\ldots a_n}^{b_{i_1}\ldots b_{i_{j-1}}\,x_{i_j}\,b_{i_{j+1}}\ldots b_n} F(\xi) =$$

$$= \Delta_{a_{i_1}\ldots a_{i_{j-1}}\,a_{i_{j+1}}\ldots a_n}^{b_{i_1}\ldots b_{i_{j-1}}\,b_{i_{j+1}}\ldots b_n} F(\xi_1,\ldots,\xi_{i_{j-1}},x_{i_j},\ldots,\xi_n)$$

$\underline{\Delta 3}$ als er een j is waarvoor:

$a_{i_j} = b_{i_j}$, dan is:

$$\Delta_{a_{i_1}\ldots a_{i_k}}^{b_{i_1}\ldots b_{i_k}} F(x) = 0.$$

$\underline{\Delta 4}$ $\Delta_a^b F(x) = 0$ voor alle eindige a en b met $a \leq b$ dan en slechts dan als:

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x) ,$$

waarin $h_\nu(x)$ een willekeurige functie is, die niet van x_ν afhangt.

Bewijs:

Als $\Delta_a^b F(x) = 0$ voor alle eindige a en b met $a \leqq b$, dan is

$\Delta_a^b F(x) = 0$ voor alle eindige a en b, omdat $\Delta_a^b F(x)$ slechts van teken verandert als een b_i en een a_i van plaats verwisselen. Dan is bij vaste (eindige) a, voor alle eindige x:

$$\Delta_a^x F(\xi) = 0.$$

Uit Δ 1 volgt dan direct de bewering "slechts dan" (de n-voudige som in het rechterlid bevat dan nl. maar één term die van alle x_ν afhangt). In de andere richting volgt de bewering direct uit het feit dat alle n^e differenties van de h_ν 0 zijn.

Met behulp van het bovenstaande bewijzen we nu:

St. 1.5.1. Als μ een intervalmaat is[1], $p \in R^n$ en

$$F(x) \overset{df}{=} (-1)^k \mu(I_{p',x'}),$$

met

k= aantal indices i, waarvoor $x_i < p_i$,

$p_i' = \min\{x_i, p_i\}$; $x_i' = \max\{x_i, p_i\}$, dan is

$$\mu(I_{a,b}) = \Delta_a^b F(x)$$

voor alle eindige a en b met $a \leqq b$.

Is in het bijzonder $\mu(R^n) < \infty$, dan is de bewering ook juist voor $p = -\infty$ en niet noodzakelijk eindige a en b met $a \leqq b$.

Bewijs:

We bewijzen de iets algemenere bewering (zonder $a \leqq b$):

---

1) Hier behoeft niet de beperking $\mu(R^n) = 1$ gemaakt te worden!

(1) $\quad \Delta_a^b F(x) = (-1)^{k^*} \mu(I_{a',b'})$

waarin k^*, a' en b' gedefinieerd zijn (als functies van a en b) analoog met k, p' en x' (als functies van p en x) in de stelling. Als $a = p$ kan de bewering direct geverifieerd worden:

$F(x)=0$, zodra een $x_i=p_i$ (volgt uit def. van $F(x)$), dus, met Δ 1:

$$\Delta_a^b F(x) = \Delta_p^b F(x) = F(b) = (-1)^{k^*} \mu(I_{a',b'}).$$

We passen nu inductie toe naar het aantal l van indices i, waarvoor $a_i \neq p_i$. Veronderstel dat de bewering bewezen is voor $l < l_o$. Zij nu $a = (a_1, \dots, a_{l_o}, p_{l_o+1}, \dots, p_n)$ (we geven het bewijs gemakshalve alléén voor dit geval); $b=(b_1,\dots,b_n)$; $a_i \neq p_i$ voor $i=1,\dots,l_o$. Dan is:

$$\Delta_a^b F(x) = \Delta_{a_1 \dots a_{l_o-1}\, p_{l_o} \dots p_n}^{b_1 \dots b_{l_o} \dots b_n} F(x) +$$

$$- \Delta_{a_1 \dots a_{l_o-1}\, p_{l_o} \dots \dots p_n}^{b_1 \dots b_{l_o-1}\, a_{l_o}\, b_{l_o+1} \dots b_n} F(x).$$

Op beide termen rechts kan de inductieveronderstelling worden toegepast. Stel daartoe:

$a^1 = (a_1, \dots, a_{l_o-1}, p_{l_o}, \dots, p_n)$; $b^1 = (b_1, \dots, b_{l_o-1}, a_{l_o}, b_{l_o+1}, \dots, b_n)$.

k^* = aantal i's waarvoor $a_i > b_i$

k' = aantal i's waarvoor $a_i^1 > b_i$

k'' = aantal i's waarvoor $a_i^1 > b_i^1$

$'a_i = \min\{a_i^1, b_i\}$; $'b_i = \max\{a_i^1, b_i\}$

$''a_i = \min\{a_i^1, b_i^1\}$; $''b_i = \max\{a_i^1, b_i^1\}$

$a_i' = \min\{a_i, b_i\}$; $b_i' = \max\{a_i, b_i\}$.

Men verifieert direct:

$a_i' = {'a_i} = {''a_i}$ en $b_i' = {'b_i} = {''b_i}$ voor alle $i \neq l_o$.

Toepassing van de inductie-veronderstelling geeft nu:

$\Delta_a^b F(x)=(-1)^{k'}\mu(I_{'a,'b})-(-1)^{k''}\mu(I_{''a,''b})$ en men kan nu voor ieder van de zes mogelijke ordeningen van a_{1_o}, p_{1_o} en b_{1_o} bewijzen, dat $\Delta_a^b F(x)=(-1)^{k^*}\mu(I_{a',b'})$ is. (gebruikmakend van het feit dat van de drie intervallen $I_{'a,'b}, I_{''a,''b}$ en $I_{a',b'}$, steeds een de disjuncte som van de overige twee is: b.v. als $a_{1_o} < p_{1_o} < b_{1_o}$ is: $I_{a',b'}=I_{'a,'b} \cup I_{''a,''b}$ en: $k'=k^*$; $k''=k^*+1$)

Gevolgen:

1) als $p=-\infty$; $a \leq b$ en $\mu(R^n) < \infty$, is $k=0$, dus:

$$\Delta_a^b F(x)=\mu(I_{a,b}).$$

Hieruit volgt dus, dat in dit geval alle n^e differenties van $F(x)$ met $a \leq b$ positief moeten zijn. Voor een verdelingsfunctie geldt dan bovendien nog dat ook alle k^e differenties ($1 \leq k \leq n$) positief moeten zijn, omdat we volgens $\Delta 2$ een k^e differentie van een verdelingsfunctie kunnen schrijven als een n^e, door in de ondergrens een aantal componenten $-\infty$ toe te voegen.

$\underline{\Delta 5}$ 2) voor $a \leq b$, $c \geq 0$, F een verdelingsfunctie geldt:

$$\Delta_a^b F(x) \leq F(b)-F(a)$$

$$\Delta_a^{b+c} F(x) - \Delta_a^b F(x) \leq F(b+c)-F(b)$$

$$\Delta_a^b F(x) - \Delta_{a+c}^b F(x) \leq F(a+c)-F(a).$$

Bewijs van de tweede bewering:

$$\Delta_a^{b+c}F(x) - \Delta_a^b F(x) = \mu(\{z \mid a < z \leq b+c\}) - \mu(\{z \mid a < z \leq b\}) \leq$$

$$\leq \mu(\{z \mid b < z \leq b+c\}) = F(b+c)-F(b).$$

$\underline{\Delta 6}$ Algemeen geldt voor rechtscontinue functies $F(x)$, dat:

$$\Delta_{a_{i_1}\dots a_{i_k}}^{b_{i_1}\dots b_{i_k}} F(x_1,\dots,x_n)$$

als functie van a_{i_j} en als functie van b_{i_j} continu van rechts is.

Bewijs: volgt direct uit bv. Δ 1.

<u>De monotonie en continuïteit van verdelingsfuncties</u>.

<u>VF1</u> Een verdelingsfunctie is monotoon niet-dalend: uit $x \leq y$ volgt: $\{z|z \leq x\} \subset \{z|z \leq y\} \Rightarrow \mu(\{z|z \leq x\}) \leq \mu(\{z|z \leq y\}) \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

In het bijzonder is dus $F(x)$ monotoon niet dalend in ieder van zijn variabelen apart.

<u>VF2</u> Als $F(x)$ een verdelingsfunctie is, is ook

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\ldots,x_{i_k-1},x_{i_k+1},\ldots,x_n) \stackrel{df}{=}$$

$$F(x_1,\ldots,x_{i_1-1},+\infty,x_{i_1+1},\ldots,x_{i_k-1},+\infty,x_{i_k+1},\ldots,x_n)$$

voor $0 \leq k < n$ een verdelingsfunctie.

Bewijs:

door $\mu_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(I_{a,b}) = \mu(I_{a',b'})$

met $a=(a_1,\ldots,a_{i_1-1},a_{i_1+1},\ldots,a_{i_k-1},a_{i_k+1},\ldots,a_n) \in R^{n-k}$;

$b \in R^{n-k}$ en $a'=(a_1,\ldots,a_{i_1-1},-\infty,a_{i_1+1},\ldots,a_{i_k-1},-\infty,a_{i_k+1},\ldots,a_n)$,

$b'=(b_1,\ldots,b_{i_1-1},+\infty,b_{i_1+1},\ldots,b_{i_k-1},+\infty,b_{i_k+1},\ldots,b_n)$, wordt

in R^{n-k} op $\mathcal{G}_{n-k}$ een σ-additieve inhoud gedefinieerd.
Dit bewijst men eerst voor $k=1$, daarna met inductie, door uitschrijven en toepassen van Δ 2.

Opm. Een eenvoudiger bewijs wordt verkregen door VF2 nà st.1.5.4 te bewijzen.

<u>VF3</u> $F(x)=0$ als een van de componenten van x $-\infty$ is, want $I_{-\infty,x}$ is dan leeg.

$$F(+\infty) \stackrel{df}{=} \mu(R^n)=1.$$

<u>VF4</u> $F(x)$ is

a) continu van rechts voor alle eindige x

b) " " " voor $x \geq -\infty$

c) continu van links voor $x = +\infty$.

Bewijs:

a) $-\infty < x < +\infty$. Zij ε_k een rij tot 0 naderende vectoren met $\varepsilon_k \geqq 0$ voor alle k. Dan is:

$$F(x+\varepsilon_k)-F(x)=\mu(\{z \mid z \leq x+\varepsilon_k;\ z \nleq x\}) \stackrel{afk}{=\!=} \mu(A_k) \ .$$

Nu is de rij van A_k convergent naar de lege vz, $\mu(A_k) \to 0$ voor $k \to \infty$, dus

$$F(x+\varepsilon_k)-F(x) \longrightarrow 0 \quad \text{voor } k \to \infty \ .$$

b) en c) op analoge wijze.

(Opmerking: de conclusie dat uit $\lim A_k = \emptyset$ volgt $\lim \mu(A_k)=0$, volgt uit st.1.3.4 en 1.3.5 , omdat uit $\lim A_k = \emptyset$ volgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \emptyset$ en deze laatste rij is een <u>inkrimpende</u> (dus convergente) rij, waarvoor st.1.3.5 geldt. Uit $\mu(A_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k)$ volgt dan de bewering)

Gevolg:

1) F(x) is continu van rechts in ieder van zijn variabelen apart

2) bij gegeven a en b met $a \leqq b$ en $\varepsilon > 0$ ($\in R^1$) zijn er vectoren δ_1 en δ_2 met $\delta_1 \geqq 0$, $\delta_2 \geqq 0$, $\delta_2 \geqq 0$ en:

$$\Delta_a^b F - \varepsilon < \Delta_{a+\delta_1}^b F \leqq \Delta_a^b F \qquad \text{en}$$

$$\Delta_a^b F + \varepsilon > \Delta_a^{b+\delta_2} F \geqq \Delta_a^b F$$

(uit Δ5 en VF4).

<u>VF5</u> Over de continuïteit van links kunnen we nu de volgende stelling bewijzen:

<u>St.1.5.2.</u> De discontinuïteitspunten van F(x) liggen in aftelbaar veel hypervlakken $x_i = \xi_i^k$ ($i=1,\ldots,n$; $k \in N$).

Bewijs:

<u>a</u> Als x^o een punt is met

$$\forall_i \ \mu(\{z \mid z_i = x_i^o\})=0,$$

dan is F(x) continu in x^o. We zullen eerst aantonen dat we ons kunnen beperken tot het bewijzen van de continuïteit van links: Voor een willekeurige ε definiëren we de <u>vector</u> $\langle\varepsilon\rangle$ door:

$$\langle\varepsilon\rangle_i = |\varepsilon_i| \ .$$

Dan geldt:

$$-<\varepsilon> \leq \varepsilon \leq <\varepsilon>$$

en dus, op grond van de monotonie van $F(x)$:

$$F(x^0 - <\varepsilon>) \leq F(x^0 + \varepsilon) \leq F(x^0 + <\varepsilon>),$$

waaruit volgt

$$F(x^0 - <\varepsilon>) - F(x^0) \leq F(x^0 + \varepsilon) - F(x^0) \leq F(x^0 + <\varepsilon>) - F(x^0).$$

Als ε tot nul nadert, nadert ook $<\varepsilon>$ tot 0 (want iedere component van ε gaat naar 0), dus het rechterlid van deze ongelijkheid nadert tot 0, wegens VF4.

We hoeven dus alleen nog maar aan te tonen dat, voor iedere tot 0 naderende rij van vectoren ε_k met $\varepsilon_k \geq 0$ $F(x^0) - F(x^0 - \varepsilon_k)$ tot 0 nadert voor $k \to \infty$.

Nu geldt:

$$F(x^0) - F(x^0 - \varepsilon_k) = \mu(\{z \mid z \leq x^0;\ z \nleq x^0 - \varepsilon_k\}) =$$

$$= \mu(\{z \mid z < x^0; z \nleq x^0 - \varepsilon_k\}) + \mu(\{z \mid z \leq x^0;\ z \nleq x^0 - \varepsilon_k;\ \exists_i - z_i = x_i^0\}).$$

$\{z \mid z < x^0;\ z \nleq x^0 - \varepsilon_k\}$ is weer een naar $\emptyset$ convergente rij en $\{z \mid z \leq x^0;\ z \nleq x^0 - \varepsilon_k;\ \exists_i z_i = x_i^0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \mid z_i = x_i^0\}$ is dus een deelvz. van een nulvz. Dus

$$F(x^0) - F(x^0 - \varepsilon_k) \to 0 \quad \text{voor } k \to \infty.$$

Hiermee is bewezen dat $F(x)$ slechts discontinu kan zijn in die punten x^k, waarvan voor tenminste een coordinaat geldt:

$$\mu(\{z \mid z_i = x_i^k\}) > 0.$$

b De aftelbaarheid van de getallen x_i^k volgt nu uit $\mu(R^n) = 1$. Neem eerst alle hypervlakken x_1=constant, waarvan de maat groter dan $\frac{1}{2}$ is, dat is er hoogstens 1, dan alle met $\frac{1}{3} < \mu \leq \frac{1}{2}$ etc, doe dan hetzelfde met de hypervlakken x_2=constant etc.

In R^1 kan $F(x)$ dan nog op eenvoudige wijze gesplitst worden in een continu en een discreet deel: Zij x_ν een aftelling van de sprongpunten van $F(x)$ met sprongHoogte:

$$p_\nu = F(x_\nu) - F(x_\nu - 0).$$

Dan is

$$F_d(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu\, \iota(x-x_\nu)\ , \text{ waarin:}$$

Def 1.5.6. $\iota(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x \geq 0 \\ 0 \text{ als } x < 0 \end{cases}$

een zuivere sprongfunctie, continu van rechts en

$$F_c(x) = F(x) - F_d(x)$$

overal continu.

Bewijs:

$F_d(x+\varepsilon)-F_d(x)= \sum\limits_{x < x_\nu \leq x_\nu+\varepsilon} p_\nu \to 0$ voor $\varepsilon \downarrow 0$, want als x geen verdichtingspunt van de sprongpunten is, is de som leeg voor voldoend kleine ε. Als x wel verdichtingspunt van de sprongpunten is, volgt het uit de convergentie van $\sum p_\nu$: zij $\nu(\varepsilon)$ de kleinste index, waarvoor nog $x < x_\nu \leq x+\varepsilon$ geldt. Dan geldt:

$$\nu(\varepsilon) \to \infty, \text{ als } \varepsilon \to 0,$$

omdat er anders een index ν_0 zou zijn, zodat voor alle $\varepsilon > 0$:

$$x < x_{\nu_0} \leq x+\varepsilon\ .$$

De continuiteit van F_c volgt enerzijds uit de continuïteit van rechts van F en F_d, anderzijds uit:

$$F_c(x)-F_c(x-0)= \{F(x)-F(x-0)\} - \{F_d(x)-F_d(x-0)\} =$$

$$=\mu(\{x\})-\mu(\{x\})=0.$$

<u>Voldoende voorwaarden, opdat F een verdelingsfunctie is.</u>

Voor willekeurige intervalmaten is def.1.5.3 niet bruikbaar omdat $\mu(I_{-\infty,x})$ niet eindig hoeft te zijn. We kunnen wel bij iedere intervalmaat μ een klasse van functies invoeren, zodat iedere functie uit die klasse μ vastlegt, zoals in st.1.5.1:

Def.1.5.7. Een functie F(x), die continu van rechts is en eindig voor eindige x, heet <u>maatdefiniërende functie</u> als er een intervalmaat μ bestaat zodat voor alle eindige intervallen $I_{a,b}$ geldt:

$$\mu(I_{a,b})= \Delta_a^b F(x).$$

Opmerking:

Om te bewijzen dat een functie een maatdefiniërende functie is, bedenken we dat het voldoende is om aan te tonen dat $\Delta_a^b F(x)$ op $\mathcal{G}_n$ een σ-add. inhoud m vastlegt (volgens st.1.4.2). De waarden op $\mathcal{G}_n$ kunnen echter, wegens de σ-additiviteit (die geëist wordt wegens de σ-additiviteit van μ) en wegens Def. 1.5.7 alleen als volgt gedefinieerd worden:

a $m(I_{a,b}) = \Delta_a^b F(x)$ als $-\infty < a \leqq b < +\infty$

b $m(I) = \sum\limits_{\rho} m(I\, W_\rho)$ als I een halfopen interval is

c $m(J) = \sum\limits_{k=1}^{l} m(I_k)$ als $J = \bigcup\limits_1^l I_k$; I_k disjuncte intervallen.

Dan moet echter ook m_ρ, met

$$m_\rho(J) = m(J\, W_\rho)$$

een σ-additieve inhoud zijn, en volgens st.1.3.3 kunnen we ons bij het bewijs dat de zo op $\mathcal{G}_n$ geconstrueerde functie m een σ-additieve inhoud is, beperken tot het bewijs dat m_ρ een σ-additieve inhoud is.

We kunnen nu de volgende karakterisering van maatdefiniërende functies geven:

<u>St.1.5.3</u>. Een functie $F(x)$; $x \in R^n$ is dan en slechts dan een maatdefiniërende functie als voldaan is aan:

a $F(x)$ continu van rechts en eindig voor eindige x

b $\Delta_a^b F(x) \geqq 0$ voor alle eindige $a \leqq b$.

Bewijs:

Dat de voorwaarden nodig zijn, is een direct gevolg van Def. 1.5.7. Om te bewijzen dat de voorwaarden voldoende zijn, hoeven we volgens de opmerking na Def. 1.5.7 alleen nog maar te bewijzen dat de op $\mathcal{G}_n$ gedefinieerde functie

$$m_\rho(J) = m(J\, W_\rho),$$

waarin m gedefinieerd is als in bovengenoemde opmerking, een σ-additieve inhoud is. Dat m_ρ niet-negatief is, is triviaal. Blijft nog de σ-additiviteit.

Als $I=(a,b]$ is $I\,W_\rho = (a',b']$ met:

$$a_i' = \max\{a_i;A_i\} \text{ en } b_i' = \min\{b_i,A_i+1\} \text{ als}$$

$$W_\rho = (A,A+e] \text{ met } A = (A_1,A_2,\ldots,A_n);\ e=(1,1,\ldots,1).$$

We bewijzen nu eerst de eindige additiviteit: als een interval $I = (a,b]$, door een hypervlak $x_i = \xi_i$ in twee delen I_1 en I_2 verdeeld wordt, geldt:

$m_\rho(I_1)+m_\rho(I_2)= m_\rho(I)$, want, met:

$W_\rho I_1=((a_1',a_2',\ldots,a_n'),(b_1',b_2',\ldots,b_{i-1}',\xi_i,b_{i+1}',\ldots,b_n')]$ en

$W_\rho I_2=((a_1',a_2',\ldots,a_{i-1}',\xi_i,a_{i+1}',\ldots,a_n'),(b_1',\ldots,b_n')]$ als

$a_i' \leq \xi_i \leq b_i'$ (anders is een van I_1W_ρ, I_2W_ρ leeg en is de bewering triviaal), geldt:

$$m_\rho(I_1)+m_\rho(I_2)= \Delta_{a_1'\ldots a_i'\ldots a_n'}^{b_1'\ldots \xi_i\ldots b_n'} F+\Delta_{a_1'\ldots \xi_i\ldots a_n'}^{b_1'\ldots b_i'\ldots b_n'} F =$$

$$=\left(\Delta_{a_i'}^{\xi_i} + \Delta_{\xi_i}^{b_i'}\right)\Delta_{a_1'\ldots a_{i-1}'a_{i+1}'\ldots a_n'}^{b_1'\ldots b_{i-1}'b_{i+1}'\ldots b_n'} F = \Delta_{a'}^{b'} F = m_\rho(I).$$

Men kan nu met inductie naar k aantonen dat, als I door k hypervlakken $x_{i_1} = \xi_{i_1},\ldots,x_{i_k} = \xi_{i_k}$ in intervallen $I_1,\ldots,I_m$ verdeeld wordt, dan

$$m_\rho(I) = m_\rho(I_1)+ \ldots + m_\rho(I_k).$$

en dan algemeen:

als $J=\bigcup_{k=1}^{R} I_k = \bigcup_{k=1}^{R'} I_k'$ (I_k disjuncte intervallen; I_k' disjuncte intervallen)

dan is:

$$m_\rho(J) = \sum_1^R m_\rho(I_k) = \sum_1^{R'} m_\rho(I_k').$$

Dit laatste bewijst men door te bedenken dat $J=\bigcup_{k=1}^{R}\bigcup_{l=1}^{R'} I_kI_l'$ en dan te laten zien, met behulp van het bovenstaande:

$$\sum_1^R m_\rho(I_k)=\sum_{k=1}^{R}\sum_{l=1}^{R'} m_\rho(I_kI_l')=\sum_{l=1}^{R'}\sum_{k=1}^{R} m_\rho(I_kI_l')=\sum_{l=1}^{R'} m_\rho(I_l').$$

In het bijzonder volgt hieruit de eindige sub-additiviteit:

$$\bigcup_{k=1}^{R} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{R'} I'_k \quad ; \; I_k \text{ disjunct} \Rightarrow \sum_{k=1}^{R} m_\rho(I_k) \leq \sum_{1}^{R'} m_\rho(I'_k).$$

Zij nu $I_1, I_2, \ldots$ een rij disjuncte intervallen met

$$J = \bigcup_{1}^{\infty} I_k = \bigcup_{1}^{R} I'_k \quad ; \; I'_k \text{ disjuncte intervallen.}$$

Stel $I'_k \; W_\rho = (a_k, b_k]$ en $I_k \; W_\rho = (c_k, d_k]$ en verder:

$$A' = \bigcup_{1}^{\infty} (c_k, d_k + \delta_k] \qquad \delta_k \geqq 0$$

$$A = \bigcup_{1}^{\infty} (c_k, d_k + \delta_k)$$

$$J' = \bigcup_{1}^{R} (a_k + \varepsilon_k, b_k] \qquad \varepsilon_k \geqq 0$$

$$J'' = \bigcup_{1}^{R} [a_k + \varepsilon_k, b_k] .$$

Dan geldt:

$$A' \supset A \supset JW_\rho \supset J'' \supset J'$$

en A is open, J" is gesloten en begrensd (want $\subset W_\rho$). A is dus een open overdekking van een compacte J", dus met Heine-Borel: er is een R' met

$$\bigcup_{1}^{R'} (c_k, d_k + \delta_k) \supset J'' \supset J' \; .$$

Dus ook

$$J' \subset \bigcup_{1}^{R'} (c_k, d_k + \delta_k] \; ,$$

dus

(1) $$m_\rho(J') \leq \sum_{1}^{R'} m_\rho((c_k, d_k + \delta_k]) \leq \sum_{1}^{\infty} m_\rho((c_k, d_k + \delta_k]).$$

Nu kiezen we de ε_k zo, dat

$$\Delta_{a_k}^{b_k} F - \Delta_{a_k + \varepsilon_k}^{b_k} F < \frac{\varepsilon}{2R}$$

(rechts continuïteit van $F(x)$ en $\Delta 6$),
dan is

$$m_\rho((a_k, b_k]) - m_\rho((a_k + \varepsilon_k, b_k]) = \Delta_{a_k}^{b_k} F - \Delta_{a_k + \varepsilon_k}^{b_k} F < \frac{\varepsilon}{2R} .$$

Dan is dus:

(2) $$m_\rho(J) - m_\rho(J') < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Kies dan (op grond van dezelfde eigenschappen) de δ_k zo dat

$$m_\rho((c_k,d_k+\delta_k]) - m_\rho((c_k,d_k]) < \frac{\varepsilon}{2.2^k} .$$

Dan is

(3) $\quad \sum m_\rho((c_k,d_k+\delta_k]) - m_\rho((c_k,\delta_k]) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Uit (1), (2) en (3) volgt nu voor alle $\varepsilon > 0$:

$$m_\rho(J) < m_\rho(J') + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_1^\infty m_\rho((c_k,d_k+\delta_k]) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_1^\infty m_\rho(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dus:

(4) $\quad m_\rho(J) \leq \sum_1^\infty m_\rho(I_k)$.

Op grond van st.1.3.2 volgt nu de σ-additiviteit van m_ρ. Daaruit volgt dat m een σ-additieve inhoud op $\mathcal{G}_n$ is en daaruit dat F een maatdefinierende functie is.

Opmerking:

Om bij een gegeven intervalmaat μ een bijbehorende maatdefinierende functie te vinden bedenken we dat, in de eerste plaats, twee maatdefiniërende functies F en G dezelfde maat voortbrengen dan en slechts dan als,

$$F-G = \sum h_\nu(x) ,$$

waarin de $h_\nu(x)$ rechtscontinue functies zijn, die niet van x_ν afhangen (Δ 4). Dus, in het bijzonder is met F(x) ook

$$G(x) = \Delta_a^x F(\xi) \qquad \text{(volgens } \Delta 1)$$

voor iedere $a \in R^n$ een maatdefiniërende functie, die gekarakteriseerd is door

$$\exists_i \; x_i = a_i \Rightarrow G(x)=0.$$

Anderzijds is heel eenvoudig na te gaan dat, als F een maatdefiniërende functie is, dan geldt

$$\Delta_a^x F(\xi) = (-1)^k \mu(I_{a',x'}) ,$$

waarin: $a_i' = \min\{a_i,x_i\}$; $x_i' = \max\{a_i,x_i\}$; k=het aantal indices i waarvoor $x_i < a_i$.

Want dan is $a' \leq x'$ en dus

$$\mu(I_{a',x'}) = \Delta_{a'}^{x'} F(\xi).$$

Maar door verwisseling van een boven en een onder index verandert ΔF alleen van teken, zodat de bewering direct volgt. Het ligt dus voor de hand te onderzoeken of

$$G(x) = (-1)^k \; \mu(I_{a',x'})$$

een maatdefiniërende functie is, die μ voortbrengt.
(Dit is niet met het bovenstaande bewezen, want we hebben de niet bewezen veronderstelling van de existentie van een maatdefiniërende functie F' gebruikt).
We onderzoeken eerst of $G(x)$ continu van rechts is:

1 als $x_i > a_i$, dan is

$$G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+0,x_{i+1},\dots,x_n) - G(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-1)^k \mu(I_{(a'_1,\dots,a'_{i-1},x_i,a'_{i+1},\dots,a'_n),(x'_1,\dots,x'_{i-1},x_i+\varepsilon,x'_{i+1},\dots,x'_n)}) = 0.$$

2 als $x_i < a_i$, dan is

$$G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+0,x_{i+1},\dots,x_n) - G(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-1)^k [\mu(I_{(a'_1,\dots,a'_{i-1},x_i+\varepsilon,a'_{i+1},\dots,a'_n),(x'_1,\dots,x'_{i-1},a_i,x'_{i+1},\dots,x'_n)}) +$$

$$-\mu(I_{(a'_1,\dots a'_{i-1},x_i,a'_{i+1},\dots,a'_n),(x'_1,\dots x'_{i-1},a_i,x'_{i+1},\dots,x'_n)})] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-1)^{k-1} \mu(I_{(a'_1,\dots,a'_{i-1},x_i,a'_{i+1},\dots,a'_n),(x'_1,\dots,x'_{i-1},x_i+\varepsilon,x'_{i+1},\dots,x'_n)}) = 0.$$

3 als $x_i = a_i$, dan is

$$G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+0,x_{i+1},\dots,x_n) - G(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-1)^k [\mu(I_{(a'_1,\dots,a'_{i-1},a_i,a'_{i+1},\dots,a'_n),(x'_1,\dots,x'_{i-1},a_i+\varepsilon,x'_{i+1},\dots,x'_n)}) - 0] = 0.$$

De rest van de bewering volgt uit $\Delta_a^b G(x)=\mu(I_{a,b})$ voor $-\infty < a \leq b < +\infty$ en is zelf een gevolg van st.1.5.1.
Gevolg: voor de meetkundige inhoud is dus de functie:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)$$

een maatdefinierende functie (hiermee is dus in het bijzonder st. 1.3.9 bewezen).

St.1.5.4. Een maatdefinierende functie F, waarvoor

a $0 \leq F \leq 1$

b alle differenties van F zijn niet negatief

c $\mu(R^n)=1$

is een verdelingsfunctie.

Bewijs:

1) F is monotoon niet dalend in ieder van zijn variabelen (volgt uit $\Delta_{a_i}^{b_i} F \geq 0$)

2) $\Delta_{a_1 \,..\, a_k}^{b_1 \,..\, b_k} F$ is monotoon niet dalend in $x_{k+1}, .., x_n$ (omdat $\Delta_{x_j'}^{x_j} \left(\Delta_{a_1 \ldots a_k}^{b_1 \ldots b_k} F \right) = \Delta_{a_1 \ldots a_k x_j'}^{b_1 \ldots b_k x_j} F \geq 0$)

3) $\operatorname{Sup} \{ \Delta_a^b F \mid -\infty < a \leq b < +\infty \} = \mu(R^n) \leq \sup F$,

want:

$0 \leq \Delta_{a_i}^{b_i} F \leq \sup F - \inf F \leq \sup F$

en dan weer met inductie:

$$0 \leq \Delta_{a_{i_1} \ldots a_{i_k}}^{b_{i_1} \ldots b_{i_k}} F \leq \sup F.$$

Dus, in het bijzonder

(1) $\quad 0 \leq \Delta_a^b F \leq \sup F \quad$ voor alle a en b

met $-\infty < a \leq b < +\infty$, maar

$$\mu(R^n) = \sup\{\mu(I_{a,b}) \mid -\infty < a \leqq b < +\infty\} =$$

$$= \sup\{\Delta_a^b F \mid -\infty < a \leqq b < +\infty\}.$$

Dan volgt uit (1) bewering 3)

Voor het bewijs van 1), 2) en 3) zijn alleen de gegevens a en b nodig.

Beschouw nu:

$$I_M = \{x \mid \forall_\nu \ -M < x_\nu \leqq +M\} \text{ en } \varepsilon_M = 1 - \mu(I_M).$$

I_M is een uitdijende convergente rij, met limiet R^n dus $\varepsilon_M \to 0$ voor $M \to \infty$.

Nu is

$G(x_2,\ldots,x_n) = F(M,x_2,\ldots,x_n) - F(-M,x_2,\ldots,x_n)$

een maatdefiniërende functie op R^{n-1}, zoals door toepassing van st.1.5.3 direct is in te zien, die bovendien aan a en b voldoet, zodat ook voor G de beweringen 1), 2) en 3) gelden.

Voor de bijbehorende maat μ' op R^{n-1} geldt:

$$\mu'(R^{n-1}) = \sup\{\Delta_{a_2\ldots a_n}^{b_2\ldots b_n} G \mid \forall_k \ 2 \leqq k \leqq n \ -\infty < a_k \leqq b_k < +\infty\} =$$

$$= \sup\{\Delta_a^b F \mid \forall_k \ 2 \leqq k \leqq n; -\infty < a_k \leqq b_k < +\infty; a_1 = -M; b_1 = +M\} =$$

$$= \mu(\{x \mid -M < x_1 \leqq +M\}) \geqq \mu(I_M) = 1 - \varepsilon_M.$$

Dus, volgens 3):

$$\sup G \geqq \mu'(R^{n-1}) \geqq 1 - \varepsilon_M.$$

G is monotoon niet dalend (bew.1) dus, voor voldoend grote M':

$$(1-\varepsilon_M) - \varepsilon_M \leqq G(M',M',\ldots,M') = F(M,M',\ldots,M') - F(-M,M',\ldots,M')$$

$$\Rightarrow F(-M,M',\ldots,M') \leqq F(M,M',\ldots,M') - 1 + 2\varepsilon_M \leqq 2\varepsilon_M.$$

Dit geldt voor alle voldoend grote M', dus omdat F monotoon niet dalend is, voor alle $x_2,\ldots,x_n$:

$$F(-M,x_2,\ldots,x_n) \leqq 2\varepsilon_M.$$

Dus, tenslotte, wegens $F \geqq 0$:

$$\lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 .$$

Hiermee is de continuïteit van rechts van F voor $x_i = -\infty$ bewezen. Het is nu eenvoudig om de laatste stap:

$$F(x) = \mu(I_{-\infty, x})$$

te bewijzen: voor eindige x en voldoend grote M is

$$\mu(I_{-\infty,x} \cdot I_M) = \Delta_{-M \;\ldots\ldots\; -M}^{x_1 \ldots\ldots x_n} F(x) = F(x) + \sum_{\nu} F(x^{\nu})$$

waarin x^{ν} punten zijn, met tenminste een coordinaat = -M. Dus, voor voldoend grote M is

$$\mu(I_{-\infty,x} \cdot I_M) - F(x) \leq (2^n - 1)\, \varepsilon_M \cdot 2 \quad \text{en}$$

$$\mu(I_{-\infty,x} \cdot \bar{I}_M) \leq \mu(\bar{I}_M) = \varepsilon_M .$$

Dus:

$$|\mu(I_{-\infty,x}) - F(x)| = |\mu(I_{-\infty,x}, I_M) - F(x) + \mu(I_{\infty,x} \cdot \bar{I}_M)| \leq \varepsilon_M + 2(2^n - 1)\varepsilon_M .$$

Dus volgens $\varepsilon_M \to 0$:

$$F(x) = \mu(I_{-\infty,x}).$$

Opmerkingen:

1) De eis b) dat alle differenties niet negatief moeten zijn, is essentiëel, zoals blijkt uit het voorbeeld van de maatdefiniërende functie in R^2;

$$F(x_1, x_2) = (1 - \iota(x_1)(1 - \iota(x_2)).$$

Zoals men gemakkelijk kan verifiëren (bv. met behulp van Δ 4) heeft deze functie dezelfde tweede differenties als de verdelingsfunctie

$$\iota(x_1)\ \iota(x_2)$$

en deze differenties zijn dus alle positief. Ook aan eis a van st.1.5.3. is voldaan. De eerste differenties van F zijn echter allemaal ≤ 0.

2) Uit het bewijs volgt, dat we uit de veronderstelling:

(A) $\forall_i\ \forall_{x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n} \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$

kunnen afleiden:

$$F(x)=\mu(I_{-\infty,\ x}),$$

zodat een maatdefiniërende functie waarvan (A) geldt en

(B) $$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x)=1\ ,$$

een verdelingsfunctie is.

Hoofdstuk 1[a] [1)]

1 Boole-algebra's

In het voorgaande hebben we kennis gemaakt met het begrip Boole-algebra. De elementen van de toen beschouwde Boole-algebra's waren steeds deelvzn van een gegeven vz. In dit hoofdstuk zullen we Boole-algebra's beschouwen met abstracte elementen. Aan de hand van het college Waarschijnlijkheidsrekening, zoals dat in de cursus 1957-1958 door Prof. van Dantzig is gegeven, zullen we een overzicht geven van een opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening op abstracte Boole-algebra's.

Boole-algebra's worden steeds aangeduid met sierhoofdletters $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., hun elementen met gewone hoofdletters A,B,... . Operaties in Boole-algebra's worden aangegeven met de daarmee overeenkomende verzamelingstheoretische symbolen.

Def.1 Een Boole-algebra $\mathcal{A}$ (verder kortweg algebra genoemd) is een niet lege vz van elementen A,B,..., waarop twee operaties $\cap$ (conjunctie) en $^{-}$ (negatie) en een gelijkheidsrelatie (equivalentierelatie) = zijn gedefinieerd met de volgende eigenschappen:

a) Als $A,B \in \mathcal{A}$, dan zijn $A \cap B$ en $\overline{A}$ eenduidig bepaalde elementen van $\mathcal{A}$.

b) $A=A$.
Als $A=B$, dan $B=A$.
Als $A=B$ en $B=C$, dan $A=C$.

c) Als $A,B,C \in \mathcal{A}$ en $A=B$, dan is $A \cap C=B \cap C$ en $\overline{A}=\overline{B}$.

---

1) De in dit hoofdstuk behandelde stof is formeel onafhankelijk van die in de andere hoofdstukken. De nummering van definities en stellingen is daarom onafhankelijk van die in de andere hoofdstukken.

(d) Als $A,B \in \mathcal{A}$, dan is $A \cap B = B \cap A$.

(e) Als $A,B,C \in \mathcal{A}$, dan is $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(f) Als $A,B,C \in \mathcal{A}$ en $A \cap \overline{B} = C \cap \overline{C}$, dan is $A \cap B = A$.

(f')Als $A,B,C \in \mathcal{A}$ en $A \cap B = A$, dan is $A \cap \overline{B} = C \cap \overline{C}$.

St.1 $A \cap A = A$ en $A \cap \overline{A} = B \cap \overline{B}$ voor alle $A,B \in \mathcal{A}$.

<u>Bewijs</u>: Vul in Def.1 (f) voor B en C beide A in en vervolgens in (f') A voor B en B voor C.

Op grond van St.1 kunnen we eenduidig een nulelement 0 en een eenheidselement I definieren door

Def.2 $$0 = A \cap \overline{A}$$
$$I = \overline{0}$$

Uit Def.2 volgt direct, dat voor alle $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $0 \cap A = 0$ is en $I \cap A = A$.
Het nulelement en het eenheidselement zijn analoga van de lege vz en de hele ruimte in de verzamelingsleer.
Analoog aan de inclusierelatie definiëren we nu een orde relatie.

Def.3 $$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$
$$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A .$$

Men gaat gemakkelijk na, dat een algebra door Def.3 partiëel geordend wordt, d.w.z. dat voldaan is aan

1. $A \subset A$
2. $A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$
3. $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$.

Van de volgende stellingen, die voor verzamelingsalgebra's triviaal zijn, zullen we alleen de lastigste geheel bewijzen, van de overige geven we het bewijs kort aan.

St.2 $$A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = 0.$$

Bewijs: zie Def.1 (f) en (f') en Def.3.

St.3 $A \subset B \Leftrightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$

Bewijs: St.2, (f) en Def.3

St.4 $A \cap B \subset A$

Bewijs: $(A \cap B) \cap A = A \cap B \Rightarrow A \cap B \subset A$ (Def.3).

St.5 $0 \subset A$ voor alle $A \in \mathcal{A}$

Bewijs: $0 \cap A = 0$.

St.6 $\bar{\bar{A}} = A$

Bewijs: eenvoudigheidshalve schrijven we A' voor $\bar{A}$. Nu is $A'' \cap A' = 0$, dus (St.2) $A'' \subset A$. Evenzo is $A''' \subset A'$, terwijl volgens St.3 uit $A'' \subset A$ volgt, dat $A''' \supset A'$, dus $A''' = A'$, zodat $A \cap A''' = A \cap A' = 0$. Op grond van St.2 is nu $A \subset A''$, dus $A = A'' = \bar{\bar{A}}$.

Analoog aan het begrip vereniging definiëren we nu de conjunctie van twee elementen.

Def.4 $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$.

Voor de conjunctie gelden de volgende eigenschappen

St.7 $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

Bewijs: Uit Def.4 volgt $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, dus met Def.1 (c) $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

St.8 $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bewijs: $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \Leftrightarrow \bar{B} \cap \bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow B \cup A = B$.

St.9 $A \cup B = B \cup A$

Bewijs: zie Def.4 en Def.1 (d)

St.10 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Bewijs: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \Rightarrow \overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \bar{C}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}$ of $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

St.11 $A \cup A = A$ en $A \cup \bar{A} = I$

Bewijs: uit $\bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}$ en $\bar{A} \cap A = 0$.

Uit Def.4 en de stellingen 7 tot en met 11 volgt nu, dat we een algebra ook kunnen definieren met behulp van disjunctie en negatie. Als we in Def.1 overal $\cap$ door $\cup$ vervangen kunnen we uit het zo verkregen definitie-stelsel de eigenschappen van de conjunctie afleiden, als we $A \cap B$ definiëren als $\overline{\overline{A}\ \overline{B}}$. Uit de definitie van O,I en de orde relatie volgt nu

<u>Het Dualiteits principe</u>: Als men in een geldige uitspraak over de symbolen $\cap$, $\cup$, $^{-}$, O, I, $\subset$, $\supset$ en = overal $\cap$ met $\cup$, O met I en $\subset$ met $\supset$ verwisselt, ontstaat weer een geldige uitspraak, de duale uitspraak.

Op grond van het dualiteits principe volgt uit St.4

St.12 $\qquad A \cup B \supset A$

Uit St.5 volgt evenzo

St.13 $\qquad$ Voor alle $A \in \mathcal{A}$ is $A \subset I$.

St.14 $\qquad$ Als $A \subset C$ en $B \subset C$, dan $A \cup B \subset C$

Bewijs: $A \cup C = C$, $B \cup C = C \Rightarrow A \cup B \cup C = C \Rightarrow A \cup B \subset C$ (St.8).

St.15 $\qquad A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

Bewijs: $A \cup (A \cap B) \supset A$. Anderzijds $A \subset A$ en $A \cap B \subset A$, dus $A \cup (A \cap B) \subset A$ (St.14). Het tweede deel van de stelling is duaal t.o.v. het eerste.

St.16 $\qquad$ Als $A \subset B$, dan is $A \cap C \subset B \cap C$ en $A \cup C \subset B \cup C$

Bewijs: $A \cap B = A \Rightarrow (A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C = A \cap C$, dus $A \cap C \subset B \cap C$. Daar $\overline{A} \supset \overline{B}$, is $\overline{B} \cap \overline{C} \subset \overline{A} \cap \overline{C}$ of $B \cup C \supset A \cup C$.

St.17 $\qquad A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$.

Bewijs: $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap (\overline{A \cap \overline{B}})$, dus $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) = 0$, zodat wegens Def.1 (f) $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap B)$ (St.15).

St.18 $\qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Bewijs: $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$ en $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$ (St.16), dus (St.14) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. Anderzijds is

$A \cap (B \cup C) \cap \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = A \cap (B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) =$
$(B \cup C) \cap A\overline{B} \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (B \cup C) \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} = \overline{B} \cap C \cap A \cap \overline{C} = 0$, dus
$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (herhaalde toepassing van St. 16).

St. 19 $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bewijs: $\quad$ duale van St. 18

Resumerend formuleren we nog enkele veel gebruikte eigenschappen in

St. 20

$$A \cap 0 = 0$$
$$A \cup 0 = A$$
$$A \cap I = A$$
$$A \cup I = I$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \text{ voor alle } A, B \in \mathcal{A}.$$

In het volgende zullen we $A \cap B$ meestal afkorten tot AB.

Def. 5 $\quad A \vartriangle B = A\overline{B} \cup \overline{A}B$ heet het symmetrische verschil van A en B.

Voor het symmetrische verschil geldt, zoals men gemakkelijk verifieert:

St. 21

(a)
$$A \vartriangle B = B \vartriangle A$$
$$A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$$
$$A \vartriangle A = 0$$
$$A \vartriangle 0 = A$$

(b)
$$A(B \vartriangle C) = AB \vartriangle AC$$
$$\overline{A} \vartriangle \overline{B} = A \vartriangle B$$
$$\overline{A \vartriangle B} = \overline{A} \vartriangle B = A \vartriangle \overline{B}$$
$$A \vartriangle \overline{A} = I$$
$$A \vartriangle I = \overline{A}$$
Als $AB = 0$, dan $A \cup B = A \vartriangle B$.

Op grond van de eigenschappen (a) is een algebra t.o.v. de $\vartriangle$-operatie een commutatieve groep van de orde 2 ($A \vartriangle A = 0$).
We kunnen dus

een algebra met de operaties Δ en $\cap$ opvatten als een commutatieve, idempotente ($AA=A$) <u>ring</u> met eenheidselement en commutatieve groep van de orde 2.
Men noemt zo'n ring een Boole-ring met eenheidselement. Omgekeerd kan men een Boole-ring met eenheidselement opvatten als een Boole-algebra, als men definieert $\overline{A}=I \Delta A$.

Voor de Δ-operatie geldt de volgende stelling:

St.22 $\qquad A \Delta X = B \Leftrightarrow X = A \Delta B$.

Bewijs: $\qquad A\Delta(A\Delta X)=X = A\Delta B$ en $A\Delta X=A\Delta A\Delta B=B$.

Voor $B=0$ vinden we dus $A \Delta X=0 \Leftrightarrow X=A$.

Def.6 Een element $E \neq 0$ van $\mathcal{A}$ heet een <u>atoom</u>, als voor elke $A \in \mathcal{A}$ met $A \neq 0$ en $A \subset E$ geldt, dat $A=E$.

Def.7 Een algebra $\mathcal{A}$ heet <u>atomair</u>, als bij elke $A \in \mathcal{A}$ een atoom E bestaat met $E \subset A$.

St.23 Zij $\mathcal{A}$ een algebra en $\mathcal{E}$ de vz van alle atomen van $\mathcal{A}$, dan is de afbeelding $h(A)=\{E \mid E \in \mathcal{E},\ E \subset A\}$ een homomorfie. Als A atomair is, is h een isomorfie.

Bewijs: a) $h(A\ B)=\{E \mid E \subset A\ B\} = \{E \mid E \subset A, E \subset B\} =$

$$=\{E \mid E \subset A\}\ \{E \mid E \subset B\} = h(A)h(B).$$

Daar voor elk atoom E geldt, dat óf $AE=E$ óf $AE=0$, is óf $E \subset A$ óf $E \subset \overline{A}$. Hieruit volgt

$$\text{b) } h(\overline{A}) = \{E \mid E \subset \overline{A}\} = \overline{\{E \mid E \subset A\}} = \overline{h(A)}.$$

Uit a) en b) volgt, dat h een homomorfie is. Is nu $\mathcal{A}$ atomair en $A \neq B$, dan is er een atoom $E \subset A \Delta B$, dus $h(A\Delta B)=h(A)\Delta h(B)\neq 0$, dus $h(A) \neq h(B)$. De afbeelding is nu één eenduidig, dus h is een isomorfie.

<u>Opmerking</u>: Een atomaire algebra is dus isomorf met een algebra van vzn. Een algebra, die bovendien eindig is, is isomorf met de vz van <u>alle</u> deelvzn van $\mathcal{E}$, daar de homomorfie in dat

geval alle deelvzn van $\mathcal{E}$ voortbrengt.

St.24 Iedere <u>eindige</u> algebra $\mathcal{A}$ is atomair en het aantal elementen is 2^n, als het aantal atomen van $\mathcal{A}$ n is.

Bewijs: Stel dat $\mathcal{A}$ niet atomair is, dan is er een $A \in \mathcal{A}$, $A \neq 0$, terwijl A geen atoom bevat. Daar A dus geen atoom kan zijn, is er een element $A_1 \subset A$, $A_1 \neq A$, $A_1 \neq 0$, dat ook geen atoom bevat. We kunnen dus weer een element A_2 vinden, dat aan de zelfde voorwaarden voldoet. Zo voortgaande komen we in strijd met de eindigheid van $\mathcal{A}$, dus $\mathcal{A}$ is atomair. Nu is $\mathcal{A}$ dus isomorf met de vz van alle deelvzn van $\mathcal{E}$, het aantal elementen van $\mathcal{A}$ is dus 2^n, als $\mathcal{E}$ n elementen bevat.

Opmerking: Uit het voorgaande volgt nu, dat in een <u>eindige</u> algebra ieder element A kan worden opgevat als de disjunctie van alle atomen $\subset$ A.

Om wat meer inzicht te geven in de structuur van algebra's voeren we de volgende begrippen in:

Def.8 Een deelvz $\mathcal{V}$ van een algebra heet een <u>deelalgebra</u> als $\mathcal{V}$ een algebra is.

Def.9 Is $\mathcal{V}$ een deelvz van een algebra dan heet de kleinste algebra die $\mathcal{V}$ omvat (d.i. de doorsnede van alle algebra's die $\mathcal{V}$ omvatten) de <u>door $\mathcal{V}$ voortgebrachte deelalgebra</u>.

St.25 Een eindige (aftelbare) deelvz $\mathcal{V}$ van een algebra $\mathcal{A}$, brengt een deelalgebra $\mathcal{B}$ voort, die eveneens eindig (aftelbaar) is.

Bewijs: Zij $\mathcal{V} = \{A_1, A_2 \ldots\}$, $\mathcal{V}_1 = \{A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, \ldots\} = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Zij $\mathcal{V}_2$ de vz van alle eindige conjuncties van elementen van $\mathcal{V}_1$, dan is $\mathcal{V}_2$ eindig (aftelbaar), $\mathcal{V}_2 = \{C_1, C_2, \ldots\}$, en $\mathcal{V}_3$ de vz van alle eindige disjuncties van $\mathcal{V}_2$. Ook $\mathcal{V}_3$ is eindig (aftelbaar), $\mathcal{V}_3 = \{D_1, D_2, \ldots\}$. Nu blijkt, dat $\mathcal{V}_3$ al een algebra is, immers

$$D_1D_2=\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_{1i}\right)\left(\bigcup_{j=1}^{n} C_{2j}\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} C_{1i}C_{2j} = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} C^*_{ij},$$

waarbij $C^*_{ij}\in\mathcal{V}_2$, dus $D_1D_2\in\mathcal{V}_3$. Verder is $\overline{D}=\bigcap_{i=1}^{m} C_i=$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j_i=1}^{n_i} B_{ij_i}=\bigcap_{i=1}^{m}\bigcup_{j_i=1}^{n_i}\overline{B}_{ij_i}=\bigcup_{j_1=1}^{n_1}\dots\bigcup_{j_m=1}^{n_m}\overline{B}_{1j_1}\dots\overline{B}_{mj_m}\in\mathcal{V}_3.$$

Nu is $\mathcal{V}_3$ dus een algebra, die $\mathcal{V}$ omvat, dus $\mathcal{V}\supset\mathcal{B}$. Anderzijds moet $\mathcal{B}$ alle elementen van $\mathcal{V}_3$ bevatten, wil $\mathcal{B}$ een algebra zijn, dus ook $\mathcal{B}\supset\mathcal{V}_3$ en dus $\mathcal{B}=\mathcal{V}_3$.

2. Idealen en coïdealen

Def. 10 Een deelvz α van een algebra $\mathcal{A}$ heet een ideaal, als

1. $\forall^{\alpha}_{A}\forall^{\mathcal{A}}_{X}\quad AX\in\alpha$
2. $\forall^{\alpha}_{A,B}\quad A\cup B\in\alpha$

Men krijgt een equivalente definitie, als men 2 vervangt door

2'. $\forall^{\alpha}_{A,B}\quad A\Delta B\in\alpha$.

Def. 11 Een deelvz $\bar{\alpha}$ van $\mathcal{A}$ heet een coïdeaal als

1. $\forall^{\bar{\alpha}}_{A}\ \forall^{\mathcal{A}}_{X}\quad A\cup X\in\bar{\alpha}$
2. $\forall^{\bar{\alpha}}_{A,B}\quad AB\in\bar{\alpha}$

De eigenschappen van ideaal en coïdeaal zijn duaal t.o.v. elkaar. Als α een ideaal is, dan is $\{A|\overline{A}\in\alpha\}$ een coïdeaal. Evenzo is $\{A|\overline{A}\in\bar{\alpha}\}$ een ideaal.

Def. 12 Een ideaal (coïdeaal) heet echt, als het niet de hele algebra omvat. Een ideaal α is echt als $I\notin\alpha$ en coïdeaal $\bar{\alpha}$ is echt als $O\notin\bar{\alpha}$.

Def. 13 A en B heten equivalent t.o.v. α , als $A\Delta B\in\alpha$. We schrijven $A\sim B$.
Men controleert gemakkelijk, dat aan de eisen voor

een equivalentie relatie is voldaan, n.l.

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Def. 14 De vz $X \Delta \alpha = \{X \Delta A \mid A \in \alpha\} = \{Y \mid Y \sim X\}$ heet de restklasse bij X t.o.v. α .

De restklasse $O \Delta \alpha$ is het ideaal α , de restklasse $I \Delta \alpha$ is het coïdeaal $\bar{\alpha}$.

De vz der restklassen $X' = X \Delta \alpha$ wordt een algebra (geen algebra van vzn!),als we definiëren $X'Y' = (XY)'$ en $\overline{X'} = (\overline{X})'$, zodat ook $X' \cup Y' = (X \cup Y)'$ en $X' \Delta Y' = (X \Delta Y)'$. Deze algebra, die we aangeven met $\mathcal{A}/\alpha$ ($\mathcal{A}$ over α) heet de restklassenalgebra van $\mathcal{A}$ bij α . De algebra $\mathcal{A}/\alpha$ is per definitie homomorf met $\mathcal{A}$. Alle elementen in dezelfde restklassen hebben (per definitie) het zelfde beeld. Daar $X'\overline{X}' = (X\overline{X})' = O'$, is het nulelement (nulklasse) van $\mathcal{A}/\alpha$ juist het ideaal α .

Omgekeerd hebben we

St. 26 Bij iedere homomorfe afbeelding h van $\mathcal{A}$ op $\mathcal{A}'$ vormen de elementen, die op O' worden afgebeeld een ideaal α . Nu is $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/\alpha$.

Bewijs: Als $h(A) = h(B) = O'$, dan is $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B) = O'$ en voor $X \in \mathcal{A}$ is $h(AX) = h(A)h(X) = O'h(X) = O'$. Twee elementen in de zelfde restklasse hebben het zelfde beeld, immers als $Y \sim X$, dus $Y \Delta X \in \alpha$, dan is $h(X) \Delta h(Y) = h(X \Delta Y) = O'$, dus $h(X) = h(Y)$. Anderzijds behoren twee elementen, die het zelfde beeld hebben tot de zelfde restklasse: uit $h(X) = h(Y)$ volgt $h(X \Delta Y) = O'$, dus $X \Delta Y \in \alpha$ of $X \sim Y$.

Def. 15 De vz $\{X \mid AB \subset X \subset A \cup B\}$ heet het segment $\langle A, B \rangle$.

Def. 16 Een vz $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ heet convex als uit $A, B \in \mathcal{V}$ volgt, dat

$\langle A,B \rangle \subset \vartheta$

St.27 Iedere restklasse is convex.

Bewijs: Zij $B \sim A$ en $Z \in \langle A,B \rangle$. Nu is $Z \subset A \cup B$, dus $Z = Z \cap (A \cup B) = Z \cap (A \vartriangle B \vartriangle AB) = Z(A \vartriangle B) \vartriangle AB$, daar $Z \supset AB$, dus $ZAB = AB$. Omdat $A \vartriangle B \in \alpha$ en $A \vartriangle AB = A\overline{B} \in \alpha$ is ook $A \vartriangle Z = A \vartriangle AB \vartriangle Z(A \vartriangle B) \in \alpha$, dus $Z \sim A$.

Def.17 Het ideaal <u>voortgebracht</u> door de vz $\vartheta \subset \mathcal{A}$ (d.i. is het kleinste ideaal dat ϑ omvat) is de vz $\{A \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \vartheta,\ n < \infty\}$. We geven dit ideaal aan met (ϑ). ϑ heet de <u>basis</u> van (ϑ).

Def.18 Een <u>hoofdideaal</u> is een ideaal, dat voortgebracht wordt door één element A. Een hoofdideaal wordt aangeduid met (A).

St.28 Ieder ideaal met <u>eindige</u> basis is hoofdideaal.

Bewijs: Het ideaal voortgebracht door $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ is dit hoofdideaal $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Def.19 Een <u>echt</u> ideaal (coïdeaal) het <u>maximaal</u> als het in geen ander echt ideaal (coïdeaal) bevat is.

Voorbeelden van maximale idealen zijn het hoofdideaal $(\overline{E})$, waarbij E een atoom is en de vz van alle vzn van de maat nul in een maatruimte met een twee waardige maat. Alle vzn met maat ongelijk nul vormen in dat geval een maximaal coïdeaal.

St.29 Als α een maximaal ideaal is een $X \notin \alpha$, dan is $\overline{X} \in \alpha$. Geldt voor een echt ideaal voor iedere $X \in \mathcal{A}$ met $X \notin \alpha$, dat $\overline{X} \in \alpha$ dan is α maximaal. Het zelfde geldt voor coïdealen.

Bewijs: Beschouw het ideaal β voortgebracht door de vz $\{\alpha, X\}$. Nu is $\beta = \mathcal{A}$, dus $I \in \beta$. Het element I is dus van de vorm $I = A \cup ZX$ met $A \in \alpha$ en $Z \in \mathcal{A}$. Nu is dus $O = \overline{A}(\overline{Z} \cup \overline{X})$, dus $\overline{A}\overline{X} = O$ of $\overline{X} = A\overline{X} \in \alpha$. Is omgekeerd voor iedere $X \notin \alpha$ wel $\overline{X} \in \alpha$, dan bevat ieder ideaal $\beta \supset \alpha$,

$\beta \neq \alpha$ een element Y waarvoor ook $\overline{Y} \in \beta$, dus $I \in \beta$.

Def.20 Een ideaal α heet priem, als uit $AB \in \alpha$ en $A \in \alpha$ volgt, dat $B \in \alpha$. Analoog voor coïdealen.

St.33 Ieder echt priem-ideaal is maximaal en omgekeerd. Voor coïdealen geldt het zelfde.

Bewijs: Zij α priem en $X \notin \alpha$. Nu is $O = X\,\overline{X} \in \alpha$, dus $\overline{X} \in \alpha$ d.w.z. α is maximaal. Is omgekeerd α maximaal en is $AB \in \alpha$, $A \notin \alpha$ dan is $\overline{A} \in \alpha$ en dus $\overline{A}B \in \alpha$, zodat ook $AB \cup \overline{A}B = B \in \alpha$.

In verband met de belangrijke representatiestelling van Stone hebben we het volgende equivalent van het keuze-axioma nodig:

Lemma van Zorn: Als in een partieel geordende vz ϑ iedere geordende deelvz een (kleinste) bovengrens heeft, dan bezit ϑ een maximaal element, d.w.z. een element, dat in geen ander element van ϑ bevat is.

St.34 Ieder element $A \in \mathcal{A}$, $A \neq O$ is in minstens één maximaal coïdeaal bevat.

Bewijs: Zij $A \neq O$ en $\vartheta = \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \neq \mathcal{A},\ A \in \bar{\alpha}\}$. Nu is ϑ een niet lege (het coïdeaal $\{X \mid X \supset A\}$ is een element van ϑ), partieel geordende vz. Is nu S een geordende deelvz van ϑ, dan is $\bar{\beta} = \bigcup \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \in S\}$ een echt coïdeaal, immers: Als $X \in \bar{\beta}$ en $Y \in \mathcal{A}$, dan is $X \in \bar{\alpha}$, dus $X \cup Y \in \bar{\alpha}$ voor zekere $\bar{\alpha} \in S$, dus $X \cup Y \in \bar{\beta}$. Is $X \in \bar{\beta}$ en $Y \in \bar{\beta}$, dan is $X \in \bar{\alpha}_1 \in S$ en $Y \in \bar{\alpha}_2 \in S$, terwijl (bijv.) $\bar{\alpha}_1 > \bar{\alpha}_2$ (S is geordend), dan is $X \in \bar{\alpha}_1$ en $Y \in \bar{\alpha}_1$, dus $XY \in \bar{\alpha}_1 \subset \bar{\beta}$. Daar $O \notin \bar{\alpha}$ voor alle $\bar{\alpha} \in S$, is ook $O \notin \bar{\beta}$, dus $\bar{\beta}$ is een echt coïdeaal, dat A bevat. Het is duidelijk, dat voor alle $\bar{\alpha} \in S$ geldt, dat $\bar{\alpha} \subset \bar{\beta}$, dus $\bar{\beta}$ is een bovengrens van S. Volgens het lemma van Zorn bevat ϑ nu een maximaal element $\bar{\mu}$, d.w.z. als $\bar{\nu} > \bar{\mu}$ en $\bar{\nu} \neq \bar{\mu}$, dan $\bar{\nu} \notin \vartheta$, dus of $A \notin \bar{\nu}$ of $\bar{\nu} = \mathcal{A}$. Daar $A \in \bar{\mu} \subset \bar{\nu}$ is dus $\bar{\nu} = \mathcal{A}$, dus $\bar{\mu}$ is maximaal.

St. 35 (Stelling van Stone). Iedere algebra $\mathcal{A}$ is isomorf met een algebra van deelvzn van een vz ϑ.

Bewijs: Zij ϑ de vz der maximale coïdealen van $\mathcal{A}$ en beschouw de afbeelding $h(A) = \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \in \vartheta\ ,\ A \in \bar{\alpha}\}$. We zullen aantonen, dat h een isomorfie is, dus a) operatiegetrouw en b) één-eenduidig.

a) $h(AB) = \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \in \vartheta,\ AB \in \bar{\alpha}\} = \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \in \vartheta, A \in \bar{\alpha}\ , \bar{B} \in \bar{\alpha}\} =$ $h(A)h(B)$ (definitie coïdeaal).
$h(\bar{A}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \vartheta,\ \bar{A} \in \alpha\} = \{\bar{\alpha} \mid \bar{\alpha} \in \vartheta,\ A \notin \alpha\} = \overline{h(A)}$ (stelling 29).

b) Als $A \neq B$, dus $A \vartriangle B \neq 0$, dan is er volgens st.34 een $\bar{\alpha} \in \vartheta$ met $A \vartriangle B \in \bar{\alpha}$, dus $h(A) \vartriangle h(B) =$ $= h(A \vartriangle B) \neq 0$, dus $h(A) \neq h(B)$.

Opmerking 1: De stelling van Stone houdt in, dat we iedere algebra, voor zover het <u>eindige</u> operaties betreft, mogen beschouwen als een algebra van deelvzn. Wat de oneïndige operaties betreft, is dit niet steeds het geval.

Opmerking 2: Een tweewaardige quasi-waarschijnlijkheid , is een functie, gedefinieerd op A met de eigenschappen: φ neemt slechts de waarden 0 en 1 aan, $\varphi(I)=1$ en $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, als $AB=0$ is. Nu is de vz $\{A \mid \varphi(A)=1\}$ een maximaal coïdeaal. Omgekeerd kan men van elk maximaal coïdeaal éénduidig een tweewaardige quasi-waarschijnlijkheid toevoegen door de definitie $\varphi(A)=1$ als $A \in \bar{\alpha}$ en $\varphi(A)=0$ als $A \notin \bar{\alpha}$. Men kan nu de stelling van Stone ook formuleren in termen van tweewaardige quasi-waarschijnlijkheden.

3. <u>σ-algebra's</u>

Def.21 Een algebra $\mathcal{A}$ heet een σ-algebra, als iedere monotoon niet dalende rij een kleinste bovengrens heeft, of (equivalent) als iedere monotoon niet stijgende rij een grootste ondergrens heeft. De kleinste bovengrens en de grootste ondergrens van een rij $\{X_n\}$ geven we aan met resp. $\sup X_n$ en $\inf X_n$.

St.36 Voor iedere rij $\{X_n\}$ in een σ-algebra bestaat $\sup\limits_n X_n$ en $\inf\limits_n X_n$.

Bewijs: de rij $S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$ is monotoon niet dalend, dus $S = \sup S_n$ bestaat. Het blijkt nu, dat $S = \sup X_n$, immers $X_n \subset S$ voor alle n en, als $X_n \subset S'$ voor alle n, dan is ook $S_n \subset S'$ voor alle n, dus $S \subset S'$. Het bestaan van $\inf\limits_n X_n$ bewijst men analoog door $P_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k$ te beschouwen.

Def.22 Is $\mathcal{A}$ een σ-algebra en is $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\ldots)$,dan definieert men $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sup A_n$ en $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \inf A_n$.

Opmerking: Op grond van de definitie van sup en inf zijn de aftelbare disjunctie en aftelbare conjunctie eenduidig gedefinieerd en onafhankelijk van de volgorde der A_n. Men gaat gemakkelijk na, dat men ook de disjunctie en conjunctie van eindig veel elementen $A_1,\ldots,A_N$ kan definiëren als resp. $\sup A_n$ en $\inf A_n$.

Uit de volgende stelling blijkt, dat ook voor de aftelbare disjunctie en conjunctie de associativiteit geldt en dat de operaties weer duaal t.o.v. elkaar zijn:

St.37 a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$

b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n B_n = (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$

c) $\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$

Bewijs: a) Zij $A=\sup A_n$, $B=\sup B_n$ en $C=\sup(A_n \quad B_n)$. Nu is $A \supset A_n$, $B \supset B_n$ en dus $A \cup B \supset A_n \cup B_n$ en dus $A \cup B \supset C$. Anderzijds is $C \supset A_n \cup B_n$, dus $C \supset A_n$ en $C \supset B_n$ en dus $C \supset A$ en $C \supset B$, zodat $C \supset A \cup B$.

b) geheel analoog aan a)

c) zij $A=\inf A_n$ en $B=\sup \overline{A}_n$. Nu is $A \subset A_n$, dus $\overline{A} \supset \overline{A}_n$, dus $\overline{A} \supset B$. Anderzijds is $B \supset \overline{A}_n$, dus $\overline{B} \subset A_n$, dus $\overline{B} \subset A$ of $B \supset \overline{A}$, zodat $B=\overline{A}$.

De distributiviteit geldt i.h.a. niet, zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: zij $\mathcal{A}$ de σ-algebra der Borelvzn op $[-1,1]$ en zij $A_{2n-1} = (-1,0]$ $(n=1,2,\ldots)$, $A_{2n} = (0,1]_{\infty}$ $(n=1,2,\ldots)$, $B_{2n-1} = (0,1]$ en $B_{2n} = (-1,0]$. Nu is $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_nB_n = 0$, terwijl $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = (-1,1]$.

Wel geldt

St.38 a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_nB_n) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) \supset (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$

Bewijs: a) Zij $A=\sup A_n$, $B=\sup B_n$ en $C=\sup A_nB_n$, dan is $A \supset A_n$, $B \supset B_n$, dus $AB \supset A_nB_n$, dus $AB \supset C$.

b) duale van a).

St.39 Als $\{A_n\}$ en $\{B_n\}$ monotoon niet dalend zijn, dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_nB_n) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$. Als $\{A_n\}$ en $\{B_n\}$ monotoon niet stijgend zijn, dan is $\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$.

Bewijs: In de notatie van St.41 geldt $A_nB_n \subset C$, voor alle n, echter ook $A_mB_n \subset C$ voor alle m en n, daar $A_mB_n \subset A_MB_M$ met $M=\max(m,n)$. Nu is ook $AB_n \subset C$ voor alle n en dus $AB \subset C$. Met St.41 volgt nu, dat $AB=C$. Het tweede deel van de stelling is duaal t.o.v. het eerste.

Def.23 $\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_n \sup_k X_{n+k}$

$\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_n \inf_k X_{n+k}$.

St.40 $\limsup_{n\to\infty} X_n \supset \liminf_{n\to\infty} X_n$

Bewijs: Zij $A_n=\sup X_{n+\nu}$ en $B_n=\inf_{\nu} X_{n+\nu}$, dan is $A_n \supset B_n$ voor alle n, terwijl A_n monotoon niet stijgend is en B_n monotoon niet dalend, zodat voor alle m en n $A_m \supset B_n$, dus voor alle n $\limsup_{m\to\infty} X_m = \inf_m A_m \supset B_n$ en dus $\limsup_{n\to\infty} X_n \supset \sup_n B_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$.

Opmerking: het is soms handig, om gebruik te maken van de gemakkelijk verifiëerbare relaties

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \cup \{ X \mid X \subset X_n \text{ voor } \infty \text{ veel } n \}$$

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \cup \{ X \mid X \subset X_n \text{ voor alle } n \text{ uitgezonderd eindig veel} \} .$$

Def.24 Als $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n = X$, dan heet de rij $\{X_n\}$ sterk convergent (algebraïsch convergent) met de sterke (algebraïsche) limiet X; dit in tegenstelling tot het later te definiëren begrip zwakke convergentie. We schrijven $\lim_{n\to\infty} X_n = X$.

St.41 Als $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ en $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$, dan is

1) $\lim_{n\to\infty} X_n Y_n = XY$
2) $\lim_{n\to\infty} (X_n \cup Y_n) = X \cup Y$
3) $\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \overline{X}$.

Bewijs: 1) $\limsup_{n\to\infty} X_n Y_n = \inf_n \sup_k X_{n+k} Y_{n+k} \subset \inf_n (\sup_k X_{n+k}) (\sup_k Y_{n+k}) =$

$= (\inf_n \sup_k X_{n+k})(\inf_n \sup_k X_{n+k}) = XY$

(zie St.38 en St.37). Anderzijds is $\liminf_{n\to\infty} X_n Y_n =$

$= \sup_n \inf_k X_{n+k} Y_{n+k} = \sup_n (\inf_k X_{n+k})(\inf_k Y_{n+k}) =$

$= (\sup_n \inf_k X_{n+k}) \sup_n \inf_k Y_{n+k}) = XY$, daar

$\inf_n X_{n+k}$ montoon niet dalend is (zie St.39). We hebben nu dus $\liminf_{n\to\infty} X_n Y_n = XY \supset \limsup_{n\to\infty} X_n Y_n$, dus $\lim_{n\to\infty} X_n Y_n = XY$ (St.40).

3) $\liminf\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n = \overline{\limsup\limits_{n\to\infty} X_n} = \overline{X}$ en $\limsup\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n =$
$= \overline{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n} = \overline{X}$ (zie St.37 c)).

2) $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n \quad Y_n = \overline{\limsup\limits_{n\to\infty} \overline{X}_n \overline{Y}_n} = X \quad Y$ en
$\limsup\limits_{n\to\infty} X_n \quad Y_n = \overline{\liminf\limits_{n \quad \infty} \overline{X}_n \overline{Y}_n} = X \quad Y.$

4. Metrische ruimten

Def.25. Een semi-metrische ruimte (-vz) ϑ is een vz, waarbij aan elk tweetal elementen $A,B \in \vartheta$ een reëel getal (semi-afstand) $\rho(A,B)$ is toegevoegd met de eigenschappen

a) $\rho(A,A) = 0$

b) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$

c) $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$

Uit a), b) en c) volgt, dat $\rho(A,B) \geq 0$ is. Geldt bovendien

d) $\rho(A,B) > 0$, als $A \neq B$,

dan noemt men ρ een afstand en ϑ een metrische ruimte.

Uit Def.21 volgt verder $|\rho(A,B) - \rho(A,C)| \leq \rho(B,C)$.
Met behulp van het afstandsbegrip voeren we nu het volgende limietbegrip in:

Def.26 $\rho\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(X,X_n) = 0.$

Men noemt de rij $\{X_n\}$ (zwak) convergent met de (zwakke) limiet X.

St.42 Een convergente rij heeft slechts één limiet.

Bewijs: Zij $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(X,X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(Y,X_n) = 0$, dan is
$0 \leq \rho(X,Y) \leq \rho(X,X_n) + \rho(Y,X_n) < \varepsilon$ voor voldoende grote n, dus $\rho(X,Y) = 0$ of $X=Y$.

Def.27 De rij $\{x_n\}$ heet fundamentaalrij (Cauchy convergente rij), als $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(x_m,x_n)=0$.

Iedere convergente rij is een fundamentaalrij; het omgekeerde geldt niet.

Def.28 Twee fundamentaalrijen $\{x_n\}$ en $\{y_n\}$ heten <u>concurrent</u>, als $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)=0$.
Men gaat gemakkelijk na, dat de concurrentierelatie een equivalentierelatie is, die (dus) een indeling in klassen definieert.

Def.29 Een metrische ruimte ϑ heet volledig, als iedere fundamentaalrij in ϑ convergent is.

Def.30 Twee metrische vzn ϑ en ϑ' met afstanden resp. ρ en ρ' heten <u>isometrisch</u>, als er een één-eenduidige afbeelding h bestaat van ϑ op ϑ' met de eigenschap $\rho'(h(x),h(y))=\rho(x,y)$.

We zullen nu laten zien, dat iedere (niet volledige) metrische ruimte isometrisch kan worden ingebed in een volledige metrische ruimte door een proces, dat we completering noemen. Hiertoe voeren we de volgende begrippen in:

Def.31 Een deelvz ϑ_0 van een metrische vz ϑ heet <u>overal dicht</u> in ϑ, als $\forall_x^{\vartheta} \exists_{x_n}^{\vartheta_0} \rho\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ of (equivalent), als $\forall_x^{\vartheta} \forall_{\varepsilon>0} \exists_y^{\vartheta_0} \rho(x,y)<\varepsilon$.

Def.32 Een vz ϑ' heet een completering van de metrische vz ϑ, als voldaan is aan

a) ϑ' is een volledige metrische vz

b) Er is een vz $\vartheta'_0 \subset \vartheta'$ isometrisch met ϑ en overal dicht in ϑ'

St. 43 Zij ϑ een metrische vz en ϑ' de vz. van alle klassen van onderling concurrente fundamentaalrijen in ϑ, dan is ϑ' een completering van ϑ.

Bewijs We definieren op ϑ' een afstand, door de definitie $\rho'(x',y')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$, waarbij $\{x_n\}$ en $\{y_n\}$ willekeurige representanten van X' en Y' zijn. We moeten nu bewijzen

a) $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$ bestaat

b) deze limiet is onafhankelijk van de keuze der representanten

c) ρ' is een afstand

d) er is een met ϑ isometrische vz $\vartheta'_0\subset\vartheta'$, die overal dicht is in ϑ'

e) ϑ' is volledig.

a) $|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)|\leq|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_m,y_n)|+$ $|\rho(x_m,y_n)-\rho(x_n,y_n)|\leq\rho(y_m,y_n)+\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$ voor voldoende grote m en n.
De rij $\{\rho(x_n,y_n)\}$ is dus een fundamentaalrij van reële getallen en heeft dus een limiet.

b) Zijn $\{X_n\}$ en $\{X_n^*\}$ twee representanten van X' en $\{Y_n\}$ en $\{Y_n^*\}$ twee representanten van Y', dan is $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,X_n^*)=0$, dus
$\rho(X_n^*,Y_n)\leq\rho(X_n^*,X_n)+\rho(X_n,Y_n)\leq\rho(X_n,Y_n)+\varepsilon$ voor voldoende grote n, zodat $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n^*,Y_n)\leq\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,Y_n)$.
Evenzo is $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,Y_n)\leq\lim_{n\to\infty}\rho(X_n^*,Y_n)$, dus $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n^*,Y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,Y_n)$. Hieruit volgt direct, dat ook $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n^*,Y_n^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,Y_n)$

c) De eisen a), b) en c) van Def.21 zijn triviaal vervuld. Als $A'\neq B'$, dan is $\rho'(A',B')=\lim_{n\to\infty}\rho(A_n,B_n)\neq 0$, daar anders (per definitie) A'=B' zou zijn.

d) Zij ϑ'_0 de vz van alle constante rijen. Een constante rij X,X,... geven we aan met $[X]$. Het is duidelijk, dat ϑ'_0 isometrisch is met ϑ. Dat ϑ_0 overal dicht is in ϑ blijkt als volgt: kies $A' \varepsilon \vartheta'$ en $\varepsilon > 0$ en zij $\{A_n\}$ een representant van A'_n. De rij $\{A_n\}$ is een fundamentaalrij, dus $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N(\varepsilon)} \forall_{m>N(\varepsilon)} \rho(A_m, A_{N(\varepsilon)}) < \varepsilon$. Is nu $B' = [A_{N(\varepsilon)}]$ (constante rij), dan is ook $\rho'(A',B') = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_m, A_{N(\varepsilon)}) < \varepsilon$, terwijl $B' \varepsilon \vartheta'_0$.

e) Zij $\{X'_m\}$ een fundamentaalrij in ϑ'. Nu geldt $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{M(\varepsilon)} \forall_{K>0} \rho'(X'_{M(\varepsilon)}, X'_{M(\varepsilon)+K}) < \varepsilon/2$. Vervolgens kunnen we bij <u>vaste</u> m (wegens d)) A_m vinden met $\rho'(X'_m, [A_m]) < m^{-1}$. Nu is de rij $\{A_m\}$ een fundamentaalrij in ϑ, immers
$\rho(A_m, A_{m+K}) = \rho'([A_m],[A_{m+K}]) \leq \rho'(X'_m,[A_m]) +$
$\rho'(X'_m, X'_{m+K}) + \rho'(X'_{m+K},[A_{m+K}]) < 2^{-m} + \varepsilon/2 + 2^{-m-k} \leq \varepsilon$ voor voldoende grote $m > M(\varepsilon)$. De rij $\{A_m\}$ bepaalt dus een element $A' \varepsilon \vartheta'$, We zullen laten zien, dat $A' = \lim\limits_{m\to\infty} X'_m$ is.
$\rho'(A',X'_m) \leq \rho'(A',[A_m]) + \rho'([A_m],X'_m) \leq \rho'(A',[A_m]) +$
$m^{-1} < \varepsilon$, voor voldoende grote m, daar
$\rho'(A',[A_m]) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_n, A_m) = \delta_m < \varepsilon/2$ voor voldoende grote m.

Def.33 Een algebra $\mathcal{A}$ heet semi-metrisch (metrisch), als $\mathcal{A}$ een semi-metrische (metrische) ruimte is, waarin <u>bovendien</u> geldt $\rho(A \triangle X, B \triangle X) = \rho(A \triangle B)$ voor alle $A,B,X \varepsilon \mathcal{A}$.

Def.34 Een algebra $\mathcal{A}$ heet een waarschijnlijkheidsalgebra (wh-algebra), als $\mathcal{A}$ semi-metrisch is en voor de semi-afstand ρ bovendien geldt, dat $\rho(X \cup Y, 0) = \rho(X,0) + \rho(Y,0)$, als $XY=0$ is. Een functie ρ met deze eigenschap noemt men additief.

St. 44 In een wh-algebra zijn de voorwaarden

a) $XY=0 \Rightarrow \rho(X \cup Y,0)= \rho(X,0)+ \rho(Y,0)$ en

b) $X \in \langle A,B \rangle \Rightarrow \rho(A,X)+ \rho(B,X)= \rho(A,B)$

equivalent.

Bewijs $a \Rightarrow b$: als $X \in \langle A,B \rangle$, dan is $AB\overline{X}=0$ en $\overline{A}\overline{B}X=0$, dus
$(A\Delta X)(B\Delta X)=(A\overline{X}\cup\overline{A}X)(B\overline{X}\cup\overline{B}X)=AB\overline{X} \cup \overline{A}\overline{B}X=0$, dus
$\rho(A,X)+ \rho(B,X)= \rho(A\Delta X,0)+ \rho(B\Delta X)=\rho((A\Delta X)\cup(B\Delta X),0) =$
$\rho(A\Delta X) \Delta (B\Delta X),0) = \rho(A \Delta X,B \Delta X)= \rho(A,B)$
$b \Rightarrow a$: $\rho(X\cup Y,0)= \rho(X\Delta Y,0)= \rho(X,Y)=\rho(X,X\Delta Y)+\rho(Y,X\Delta Y)=$
$= \rho(Y,0)+ \rho(X,0)$, daar $X\Delta Y \in \langle X,Y \rangle$

Opmerking: In een wh-algebra geldt , dat $\rho(X,0)\leq \rho(Y,0)$ is,
als $X \subset Y$ is.

We beschouwen nu een wh-algebra $\mathcal{A}$ (zie Def. 34). We kunnen nu van $\mathcal{A}$ over gaan op de restklassen-algebra $\mathcal{A}'= \mathcal{A}/\alpha$, waarbij $\alpha = \{ X \mid \rho(X,0)=0\}$. Men ziet gemakkelijk in, dat α een ideaal is, dat dus een homomorfe afbeelding definieert van $\mathcal{A}$ op $\mathcal{A}'$. Door de definitie $\rho'(X',Y')= \rho(X,Y)$, waarbij X en Y elementen zijn van de restklassen X' resp. Y', wordt A' een metrische ruimte. Dat $\rho'(X',Y')$ onafhankelijk is van de keuze van X en Y blijkt als volgt:
Zij $X_1 \sim X$ en $Y_1 \sim Y$, dan is $\rho(X_1,Y_1)= \rho(X_1 \Delta Y_1,0)=$
$\rho(X_1\Delta Y_1\Delta X \Delta Y,X \Delta Y)= \rho(X \Delta Y,A)$, met $A \in \alpha$, dus
$\rho(X_1,Y_1)= \rho(X \Delta Y A,0)+ \rho((X \Delta Y)\overline{A},0)= \rho((X \Delta Y)(\overline{X \Delta Y \Delta X_1 \Delta Y_1}),0)=$
$= \rho((X \Delta Y)(X_1 \Delta Y_1),0)= \rho(X,Y)$ o.g.v. de symmetrie. Dat ρ' een afstand is (het is triviaal een pseudo-afstand) volgt uit: $\rho'(X',Y')=0 \Rightarrow \rho'(X' \Delta Y',0')= \rho(X \Delta Y,0)=0$, dus $X \Delta Y \in \alpha$ of $X' \Delta Y'=0'$, dus $X'=Y'$.
Gaan we vervolgens van $\mathcal{A}'$ over op de completering $\mathcal{A}''$ van $\mathcal{A}'$, (zie St. 43) dan is $\mathcal{A}''$ een volledige metrische wh-algebra. We hebben echter meer:

St. 45 Een volledige metrische wh-algebra $\mathcal{A}$ is een σ-algebra, terwijl bovendien de afstand σ-additief is, dwz. $\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$, als $A_iA_j=0$ voor $i\neq j$.

Bewijs: Zij $\{X_n\}$ monotoon niet dalend, dan is de rij $\{\rho(X_n,0)\}$ monotoon niet dalend en begrensd (door $\rho(I,0)$) en heeft dus een limiet. We hebben dus zeker $\lim_{n\to\infty}\{\rho(X_{n+m},0)-\rho(X_n,0)\}=\lim_{n\to\infty}\rho(X_{n+m}\overline{X}_n,0)=$ $=\lim_{n\to\infty}\rho(X_{n+m},X_n)=0$. De rij $\{X_n\}$ is dus een fundamentaalrij, die o.g.v. de volledigheid van $\mathcal{A}$ een limiet X heeft. Daar $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n\overline{X},0)\leq\lim_{n\to\infty}\rho(X_n\Delta X,0)=$ $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,X)=0$ is en de rij $\{X_n\overline{X}\}$ monotoon niet dalend is, is voor alle n $\rho(X_n\overline{X},0)=0$, dus $X_n\overline{X}=0$ d.w.z. $X_n\subset X$ voor alle n; X is dus een bovengrens van $\{X_n\}$. Is nu ook $X_n\subset Y$ voor alle n; dan is $\overline{X}_n\supset\overline{Y}$, dus $\overline{X}_nX\supset\overline{Y}X$, zodat $\rho(X_n,X)\geq\rho(\overline{X}_nX,0)\geq\rho(\overline{Y}X,0)$, zodat, wegens $\lim_{n\to\infty}\rho(X_n,X)=0$, $\rho(\overline{Y}X,0)=0$, dus $\overline{Y}X=0$ en $X\subset Y$. Nu is dus X de kleinste bovengrens van $\{X_n\}$. We hebben nu bewezen, dat voor iedere stijgende rij $\{X_n\}$ geldt, dat $\sup X_n=\rho\text{-}\lim X_n$. ~~Evenzo~~ geldt voor een dalende rij $\{Y_n\}$, dat $\inf Y_n=\rho\text{-}\lim Y_n$. Zij vervolgens $\{X_n\}\in\mathcal{A}$ met $X_iX_j=0$ $(i\neq j)$, $S_n=\bigcup_{k=1}^{n}X_k$ en $S=\bigcup_{K=1}^{\infty}X_k=\sup S_n=\rho\text{-}\lim S_n$. Nu is dus $0=\lim_{n\to\infty}\rho(S_n,S)=$ $=\lim_{n\to\infty}\rho(\overline{S}_nS,0)=\lim_{n\to\infty}\rho(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}X_k,0)$, zodat $\rho(\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k,0)-\sum_{k=1}^{n}\rho(X_k,0)=\rho(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}X_k,0)<\varepsilon$ voor voldoende grote n, dus $\rho(\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho(X_k,0)$.

De volgende stelling verklaart de benamingen sterke en zwakke limiet

St. 46 In een volledige wh-algebra geldt

1 $\lim_{n\to\infty}X_n=X \Rightarrow \rho\text{-}\lim_{n\to\infty}X_n=X$

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(X_n,X)<\infty \quad \lim_{n\to\infty}X_n=X$

Bewijs: 1 Zij $Y_n = \inf\limits_K X_{n+K}$ en $Z_n = \sup\limits_K X_{n+K}$, zodat $\{Y_n\}$ stijgend is en $\{Z_n\}$ dalend. Nu is $\sup Y_n = \rho$-$\lim Y_n$ X en $\inf Z_n = \rho$-$\lim Z_n = X$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(Y_n, X) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(Z_n, X) = 0$.

Daar $Y_n \subset X_n \subset Z_n$ en $Y_n \subset X \subset Z_n$, geldt nu

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(Y_n, X) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(\overline{Y}_n\, X, 0) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \rho(\overline{X}_n X, 0)$ en

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(Z_n, X) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(Z_n\, \overline{X}, 0)\ \lim\limits_{n\to\infty} \rho(X_n \overline{X}, 0)$, dus

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(X_n \triangle X, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(X_n, X) = 0$.

2 In de zelfde notatie als onder 1 met $\sup Y_n = Y$ en $\inf Z_n = Z$ hebben we $\rho(\overline{X}\, Z, 0) \leq \rho(\overline{X}\, Z_n, 0)$. Nu is $\rho(\overline{X}\, Z_n, 0) = \rho(\overline{X} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} X_k, 0) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \rho(\overline{X}\, X_k, 0) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \rho(X, X_k) < \varepsilon$

voor voldoende grote n, dus $\rho(\overline{X}\, Z, 0) = 0$ en $X \supset Z$. Analoog bewijst men $Y \supset X$, dus $Y = Z = X$.

Dat de implicaties in St.46 niet omkeerbaar zijn blijkt uit de volgende tegenvoorbeelden:

1 Bestaat $\mathcal{A}$ uit de Borelvzn op $[0,1]$ en $\rho(X,Y) = \mu(X \triangle Y)$ met μ de Lebesgue maat en bestaat de rij $\{X_m\}$ uit de intervallen ~~van de vorm~~ $\left[\frac{n-1}{k}, \frac{n}{k}\right]$ $(n=1,2,\ldots,k;\ k=1,2,\ldots)$, dan is $\rho(X_{\frac{1}{2}k(k-1)+n}, 0) = \frac{1}{k}$ dus ρ-$\lim X_m = 0$. Echter $\lim\limits_{m\to\infty} \sup X_m = (0,1]$, terwijl $\lim\limits_{m\to\infty} \inf X_m = 0$, zodat $\lim X_m$ niet bestaat.

2 Zij $\lim X_n = X$ en $\rho(X_n, X) = \varepsilon_n$. Nu geldt voor de rij $\{Y_n\}$, waarvan de eerste $[\frac{1}{\varepsilon_1}]+1$ elementen gelijk zijn aan X_1 de volgende $[\frac{1}{\varepsilon_1}]+1$ elementen gelijk aan x_2 etc., dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho(Y_n, X) \geq 1+1+\ldots = \infty$, terwijl $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = X$.

St. 47 Iedere zwak convergente rij in een volledige wh-algebra bevat een sterk convergente deelrij

Bewijs: Zij ρ-lim $X_n=X$, dus $\forall_{n>0}\ \exists_{K_n}\ \rho(X, X_{K_n}) \leq 2^{-n}$.

Nu geldt voor de rij $\{X_{K_n}\}$, dat $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(X, X_{K_n}) \leq 1$.

Volgens stelling 46 is de rij $\{X_{K_n}\}$ sterk convergent.

In stelling 45 is bewezen, dat een volledige metrische wh-algebra een σ-algebra is. We zullen nu laten zien, dat de op blz. 74 geconstrueerde algebra $\mathcal{A}''$ de kleinste σ-algebra is, die de (met $\mathcal{A}'$ isometrische) algebra $\mathcal{A}_0''$ der constante rijen uit $\mathcal{A}'$ omvat. We voeren hiertoe de volgende begrippen in

Def. 35: Is $\mathcal{S}$ een deelvz. van een σ-algebra, dan is

$$\mathcal{S}_\sigma = \{\bigcup_1^\infty A_n | A_n \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{S}_\delta = \{\bigcap_1^\infty A_n | A_n \in \mathcal{S}\}$$

Vervolgens herinneren we er aan, dat $\mathcal{A}_0''$ (metrisch) dicht is in $\mathcal{A}''$, d.w.z. $\forall_A^{\mathcal{A}''}\ \exists_{A_n}^{\mathcal{A}_0''}\ \rho\text{-lim } A_n=A$. Volgens Stelling 47 is dit equivalent met $\forall_A^{\mathcal{A}''}\ \exists_{B_n}^{\mathcal{A}_0''}\ \lim B_n = A$. We noemen $\mathcal{A}_0''$ dan algebraïsch dicht in $\mathcal{A}''$. We bewijzen nu algemeen:

Stelling 48: Is $\mathcal{A}$ een σ-algebra en is $\mathcal{A}_0$ algebraïsch dicht in $\mathcal{A}$, dan geldt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{0\sigma\delta} = \mathcal{A}_{0\delta\sigma}$.

Bewijs: triviaal geldt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{0\sigma\delta}$ en $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{0\delta\sigma}$. Is anderzijds $A \in \mathcal{A}$, dan is er een rij $\{A_n\}$ in A_0 met $\lim A_n = A$, dus

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_{0\sigma\delta} \cap \mathcal{A}_{\delta\sigma}, \text{ dus}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{0\sigma\delta} = \mathcal{A}_{0\delta\sigma}.$$

5 σ-additieve functies

Def. 36: Een functie φ op een algebra $\mathcal{A}$ heet additief, als φ aan elk element $A \in \mathcal{A}$ een (eindig) reëel getal $\varphi(A)$ toevoegt, terwijl $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, als $AB = 0$ (We zullen A en B dan disjunct noemen). Geldt voor iedere disjuncte rij $\{A_n\}$ met $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{A}$, dat $\varphi(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \varphi(A_n)$, dan heet φ σ-additief.

Opmerking 1: Men kan algemener complexe functies op $\mathcal{A}$ beschouwen; dat zullen we hier echter niet doen.

Opmerking 2: uit $\varphi(A) = \varphi(A \cup 0) = \varphi(A) + \varphi(0)$ volgt, dat voor iedere additieve functie $\varphi(0)=0$ is.

Stelling 49: Is φ additief op $\mathcal{A}$ en geldt voor iedere niet stijgende rij $\{A_n\}$ met $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ [1] $= 0$, dat $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = 0$ is, dan is φ σ-additief

Bewijs: Zij $\{A_n\}$ een disjuncte rij en zij $S = \bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{A}$.
Zij verder $S_N = \bigcup_1^N A_n$ en $S_N^* = S\,\overline{S}_N$, zodat $\lim\limits_{N\to\infty} S_N^* = 0$.
Nu is $S = S_N \cup S_N^*$ zodat $\varphi(S) = \varphi(S_N) + \varphi(S_N^*)$, dus

$$\varphi(S) = \lim_{N\to\infty} \varphi(S_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \varphi(A_n) = \sum_1^\infty \varphi(A_n).$$

Stelling 50: Is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$ en is $\{A_n\}$ monotoon in $\mathcal{A}$, terwijl $\lim A_n = A$, dan is $\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

Bewijs: Is $\{A_n\}$ niet dalend, dan is $\varphi(A) =$

$$\varphi(A_1 \cup A_2\overline{A}_1 \cup A_3\overline{A}_2 \cup \ldots) = \varphi(A_1) + \{\varphi(A_2) - \varphi(A_1)\} + \ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\varphi(A_1) + \{\varphi(A_2) - \varphi(A_1)\} + \ldots + \{\varphi(A_n) - \varphi(A_{n-1})\}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

Is $\{A_n\}$ niet stijgend, dan is $\{\overline{A}_n\}$ niet dalend met $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{A}_n = \overline{A}$, dus $\varphi(I) - \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\varphi(I) - \varphi(A_n)) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\overline{A}_n) = \varphi(\overline{A}) = \varphi(I) - \varphi(A)$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

---

1) Hoewel het limiet-begrip slechts voor σ-algebra's is ingevoerd, kunnen we, als $\lim\sup A_n$ en $\lim\inf A_n$ beide $\in \mathcal{A}$ zijn, ook in een willekeurige algebra over limieten spreken.

<u>Stelling 51</u>: Is φ σ-additief en $\varphi \geqslant 0$ op de σ-algebra $\mathcal{A}$, dan geldt voor iedere rij $\{A_n\}$ in $\mathcal{A}$:

$$\varphi(\limsup A_n) \overset{(1)}{\geqslant} \limsup \varphi(A_n) \overset{(2)}{\geqslant} \liminf \varphi(A_n) \overset{(3)}{\geqslant} \varphi(\liminf A_n).$$

Bewijs: (1) $\limsup A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, dus o.g.v. stelling 50 is $\varphi(\limsup A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} \varphi(A_k) =$

$= \limsup \varphi(A_n)$.

(2) triviaal.

(3) $\varphi(\liminf A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} \varphi(A_k) =$

$= \liminf \varphi(A_n)$.

<u>Opmerking</u>: Als $\lim A_n$ bestaat, dan geldt dus voor niet negatieve φ, dat $\varphi(\lim A_n) = \lim \varphi(A_n)$ is. Een later te bewijzen stelling zegt, dat iedere σ-additieve functie φ te schrijven is, als $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, waarin φ_1 en φ_2 σ-additief zijn en niet negatief. Hieruit volgt, dat voor een willekeurige σ-additieve functie φ geldt, dat $\varphi(\lim A_n) = \lim \varphi(A_n)$ is.

<u>Def. 37</u>: Een additieve functie φ op een algebra $\mathcal{A}$ heet onbegrensd op $X \in \mathcal{A}$, als $\forall_{p>0}\ \exists_{Y\subset X}\ |\varphi(Y)| \geqslant p$. Is φ onbegrensd op I, dan noemen we φ kortweg onbegrend. Een functie die niet onbegrensd is (op X) heet begrensd (op X) .

<u>Stelling 52</u>: Is een additieve functie φ onbegrensd op $X \in \mathcal{A}$, dan $\forall_{p>0}\ \exists_{Y\subset X}\ |\varphi(Y)| \geqslant p$, terwijl φ onbegrensd is op Y.

Bewijs: kies $X' \subset X$ met $|\varphi(X')| \geq |\varphi(X)| + p$. Is φ onbegrensd op X', kies dan $Y = X'$. Is φ begrensd op X', dan is φ onbegrensd op $X\overline{X}'$, immers: is $\forall_{Z\subset X'}\ |\varphi(Z)| \leq M$, dan

$\forall_{p>0}\ \exists_{X''\subset X}\ |\varphi(X'')| \geqslant |\varphi(X''\overline{X}')| - |\varphi(X''X')| \geqslant p$, dus

$|\varphi(X''\overline{X}')| > p - M$. Verder is $|\varphi(X\overline{X}')| \geq |\varphi(X')| - |\varphi(X)| \geq p$.

We kiezen nu $Y = X\overline{X}'$.

Stelling 53: Een σ-additieve functie op een σ-algebra $\mathcal{A}$ is begrensd.

Bewijs: Op grond van stelling 52 kunnen we $I = Y_0 \supset Y_1 \supset \ldots$ vinden met $|\varphi(Y_{n+1})| \geq |\varphi(Y_n)| + 1$. Zij nu $Y = \bigcap_0^\infty Y_n$, dan is o.g.v. stelling 50 $\varphi(Y) = \lim_{n\to\infty} \varphi(Y_n)$, dus $|\varphi(Y)| = \lim_{n\to} |\varphi(Y_n)|$, terwijl $|\varphi(Y_n)| \geq n$ is. Nu is dus $|\varphi(Y)| = \infty$, in tegenspraak met de definitie van φ.

Def. 37: Een σ-ideaal α is een ideaal met de eigenschap: als $A_n \in \alpha$ $(n=1,2,\ldots)$, dan is $\bigcup_1^\infty A_n \in \alpha$.

Een δ-coïdeaal (co-σ-ideaal) $\bar{\alpha}$ is een coïdeaal met de eigenschap: als $A_n \in \bar{\alpha}$ $(n= 1,2,\ldots)$, dan is $\bigcap_1^\infty A_n \in \bar{\alpha}$.

Opmerking: Uit de definitie volgt, dat een σ-ideaal met $\{A_n\}$ ook sup A_n en inf A_n bevat, dus ook lim sup A_n, lim inf A_n en (eventueel) lim A_n. Analoog voor δ-coïdealen.

In verband met de hoofdstelling over σ-idealen en σ-additieve functies, waaruit o.a. de klassieke splitsingsstellingen volgen (Hahn-Jordan, Lebesgue) voeren we de volgende notaties in:

Def. 38: Is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$ en is α een σ-ideaal in $\mathcal{A}$, dan definiëren we:

$$\varphi_\alpha^+(X) = \sup_{A\in\alpha} \varphi(AX)$$

$$\varphi_\alpha^-(X) = \inf_{A\in\alpha} \varphi(AX)$$

$$|\varphi_\alpha|(X) = \sup\lfloor A_n \in \alpha\ ,\ A_n \text{ disjunct}\rfloor \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(A_n X)|^{1)} .$$

In het speciale geval, dat $\alpha = \mathcal{A}$ is, schrijven we φ^+, φ^- en $|\varphi|$.

1) Is D een operator en is c de voorwaarde, onder welke D wordt toegepast, dan schrijven we D $\lfloor c \rfloor$, bijvoorbeeld sup $\lfloor c \rfloor$, $\sum \lfloor c \rfloor$ etc. in plaats van $\sup_c$, $\sum_c$ etc.

<u>Stelling 54</u>: (a) $\varphi_\alpha^+(X) \geq 0$ en $\varphi_\alpha^-(X) \leq 0$

(b) $|\varphi_\alpha|(X) = \varphi_\alpha^+(X) - \varphi_\alpha^-(X)$

(c) φ_α^+, φ_α^- en $|\varphi_\alpha|$ zijn σ-additieve functies

(d) $|\varphi_\alpha|(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(AX)=0$ voor alle $A \in \alpha$.

Bewijs: (a) is triviaal, daar $0 \in \alpha$.

(b): als $A_n \in \alpha$ $(n=1,2,\ldots)$, A_n disjunct, dan is

$\sum |\varphi(A_nX)| = \sum\lfloor \varphi(A_nX) \geq 0 \rfloor\ \varphi(A_nX) - \sum\lfloor\varphi(A_nX) \leq 0\rfloor\ \varphi(A_nX) = \varphi(BX) - \varphi(CX)$

met $B = \bigcup\lfloor\varphi(A_nX) \geq 0\rfloor\ A_n \in \alpha$ en $C = \bigcup\lfloor\varphi(A_nX) \leq 0\rfloor\ A_n \in \alpha$, dus

$|\varphi_\alpha|(X) \leq \varphi_\alpha^+(X) - \varphi_\alpha^-(X)$.

Stel, dat $|\varphi_\alpha|(X) < \varphi_\alpha^+(X) - \varphi_\alpha^-(X)$ is, dan zijn er $Y \in \alpha$ en $Z \in \alpha$ met $|\varphi_\alpha|(X) < \varphi(YX) - \varphi(ZX)$, $\varphi(YX) > 0$ en $\varphi(ZX) < 0$ is. We kunnen zonder beperking aannemen, dat $YZ=0$ is, immers: is $\varphi(XYZ) \geq 0$, dan is $\varphi(X\overline{Y}Z) = \varphi(XZ) - \varphi(XYZ) \leq \varphi(XZ)$, zodat we $Z' = \overline{Y}Z$ in plaats van Z kunnen nemen; is $\varphi(XYZ) \leq 0$, dan nemen we $Y' = Y\overline{Z}$ in plaats van Y.
Nu is dus $|\varphi_\alpha|(X) < |\varphi(YX)| + |\varphi(ZX)|$, met $Y \in \alpha$, $Z \in \alpha$ en $YZ=0$.
Dit is in strijd met de definitie van $|\varphi_\alpha|$.

(c): is $X = \bigcup_1^\infty X_n$ (X_n disjunct), dan is $\varphi_\alpha^+(X) = \sup\lfloor A \in \alpha\rfloor\ \varphi(AX) = \sup\lfloor A\in\alpha\rfloor \sum_1^\infty \varphi(AX_n) \leq \sum \sup\lfloor A\in\alpha\rfloor\ \varphi(AX_n) = \sum\varphi_\alpha^+(X_n)$. Anderzijds kunnen we bij iedere $\varepsilon > 0$ $A_n \in \alpha$, $A_n \in X_n$ en $\varepsilon_n > 0$ vinden, zodanig dat $\varphi(A_n) > \varphi_\alpha^+(X_n) - \varepsilon$ en $\sum_1^\infty \varepsilon_n \leq \varepsilon$ is. Zij nu $A = \bigcup_1^\infty A_n$, dan is $A \subset X$ en $\sum_1^\infty \varphi_\alpha^+(X_n) \leq \sum_1^\infty \varphi(A_n) + \varepsilon = \varphi(A) + \varepsilon = \varphi(AX) + \varepsilon \leq \varphi_\alpha^+(X) + \varepsilon$, dus $\varphi_\alpha^+(X) \geq \sum_1^\infty \varphi_\alpha^+(X_n)$. Voor φ_α^- loopt het bewijs analoog. De σ-additiviteit van $|\varphi_\alpha|$ volgt nu uit (b).

(d): uit $|\varphi_\alpha|(X)=0$ volgt, dat $\varphi_\alpha^+(X)=0$ is, dus dat $\varphi(AX) \leq 0$ is voor alle $A \in \alpha$. Evenzo volgt, dat $\varphi_\alpha^-(X)=0$ is, dus dat $\varphi(AX) \geq 0$ is voor alle $A \in \alpha$. Dus $\varphi(AX)=0$ voor alle $A \in \alpha$. Het omgekeerde is triviaal.

<u>Def.39</u>: Zijn α en β σ-idealen in de σ-algebra $\mathcal{A}$, dan geven we de vz $\{A \cup B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$ aan met (α, β). Men ziet gemak-

kelijk in, dat (α,β) een σ-ideaal is. Is α een hoofdideaal: $\alpha=(A)$, dan schrijven we (A,β).

<u>Def.40</u>: Zijn α en β σ-idealen in de σ-algebra $\mathcal{A}$, dan heet α <u>hoofdideaal modula β,</u> als er een $A_0 \in \alpha$ is, zodanig, dat $(\alpha,\beta) = (A_0,\beta)$.

<u>Stelling 55</u>: $(\alpha,\beta)=(A_0,\beta) \Longleftrightarrow \forall_A^{\alpha}\ \overline{A}_0\, A \in \beta$.

Bewijs: $\Longrightarrow$ ieder element $A \in \alpha \subset (\alpha,\beta)$ is te schrijven als $A=A_0\, X \cup B$ met $X \in \mathcal{A}$ en $B \in \beta$, dus $\overline{A}_0 A = \overline{A}_0 B \in \beta$.
$\Longleftarrow$ voor alle $A \in \alpha$ is $A=A_0 A \cup \overline{A}_0 A \in (A_0,\beta)$, dus $\alpha \subset (A_0,\beta)$ en dus $(\alpha,\beta) \subset (A_0,\beta)$. Daar triviaal $(A_0,\beta) \subset (\alpha,\beta)$, is $(A_0,\beta)=(\alpha,\beta)$.

<u>Stelling 56</u>: (hoofdstelling): Is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$ en is $\beta_0 = \beta_0(\varphi) \overset{\text{def}}{=\!=} \{X \mid \forall_Y^{\mathcal{A}}\, \varphi(XY)=0\}$ 1) (β_0 is een σ-ideaal), dan is ieder ideaal α in $\mathcal{A}$ hoofdideaal modulo β_0.

<u>Bewijs</u>: We zullen een element $A_0=A_0(\alpha) \in \alpha$ construeren, zodanig, dat $\varphi(A\,\overline{A}_0)=0$ is voor alle $A \in \alpha$. Dan is ook voor alle $X \in \mathcal{A}$ $\varphi(A\,\overline{A}_0 X)=0$, dus $A\,\overline{A}_0 \in \beta_0$. Volgens stelling 55 is dan $(\alpha,\beta_0)=(A_0,\beta)$.

Beschouw $c_\alpha = |\varphi_\alpha|(I) = \sup\left[A_n \in \alpha, A_n \text{ disjunct}\right] \sum |\varphi(A_n)|$. We zullen aantonen, dat we $A_1, A_2, \ldots$ kunnen vinden, zodanig, dat voor alle N geldt:

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_N$ zijn disjunct

(ii) is $B_N(A) = A \bigcap_1^N \overline{A}_N$, dan is voor alle $A \in \alpha$ $|\varphi_\alpha|(B_N(A)) \leq 2^{-N+1} c_\alpha$.

Voor $N=1$ kiezen we $A_1=0$. Zij nu voor $N=1,2,\ldots,k$ aan (i) en (ii) voldaan. Geldt nu voor alle $A \in \alpha$, dat $|\varphi_\alpha|(B_k(A)) \leq 2^{-k}$ is, kies dan $A_{k+1}=0$. Is voor zekere $A \in \alpha$ $|\varphi_\alpha|(B_k(A)) > 2^{-k} c_\alpha$, kies dan $A_{k+1}=B_k(A)$. Aan (i) is nu triviaal voldaan. Is vervolgens $A' \in \alpha$, dan is $2^{-k} c_\alpha + |\varphi_\alpha|(B_{k+1}(A')) < |\varphi_\alpha|(B_k(A)) + |\varphi_\alpha|(B_{k+1}(A')) = |\varphi_\alpha|(B_k(A)+B_{k+1}(A')) = |\varphi_\alpha|((A \cup A'\ \overline{A}_{k+1}) \bigcap_1^k \overline{A}_n) \leq 2^{-k+1} c_\alpha$ op grond van

----

1) Uit stelling 54 (d) volgt, dat $\beta_0 = \{X \mid |\varphi|(X)=0\}$ is.

de inductieveronderstelling, dus $|\varphi_\alpha|(B_{k+1}(A')) \leq 2^{-k} c_\alpha$. Ook aan (ii) is dus voldaan.

We definieren nu $A_0 = \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$. Voor alle $A \in \alpha$ geldt nu

$|\varphi_\alpha|(A\,\bar{A}_0) = \lim\limits_{k\to\infty} |\varphi_\alpha|(A \bigcap\limits_{}^{k} \bar{A}_n) = 0$. Dus $\varphi(A\,\bar{A}_0) = 0$ voor alle $A \in \alpha$ (zie St.54).

Stelling 57: Het element A_0 in St.56 is modulo β_0 bepaald, d.w.z. als ook $(A_0', \beta_0) = (\alpha, \beta_0)$ dan is $A_0 \triangle A_0' \in \beta_0$. Omgekeerd volgt uit $A_0 \triangle A_0' \in \beta_0$, dat $(A_0', \beta_0) = (\alpha, \beta_0)$ is.

Bewijs: Volgens St.55 is $A_0'\,\bar{A}_0 \in \beta_0$ en $A_0\,\bar{A}_0' \in \beta_0$, dus $A_0 \triangle A_0' = A_0 \bar{A}_0' \cup \bar{A}_0\, A_0' \in \beta_0$.
Is anderzijds $A_0 \triangle A_0' \in \beta_0$, dan is voor alle $A \in \alpha$
$A = A_0' A \cup \bar{A}_0'\, A = A_0' A \cup \bar{A}_0'(A\, A_0 \cup A\, \bar{A}_0) = A_0' A \cup B'$ met $B' = A_0'(AA_0 \cup A\bar{A}_0) \in \beta_0$, omdat $\bar{A}_0' A_0 \in \beta_0$ en $A\,\bar{A}_0 \in \beta_0$.

Opmerking: Tevens blijkt, dat voor alle $X \in \mathcal{A}$ $\varphi(A_0 X) =$
$= \varphi((A_0 A_0' \cup A_0 \bar{A}_0')X) = \varphi(A_0 A_0' X) = \varphi(A_0'\, X)$.

In verband met de te bespreken splitsingsstellingen definiëren we de volgende σ-idealen:

Def.41: Is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$ en is α een σ-ideaal in $\mathcal{A}$, dan definiëren we:

$$\beta^0 = \beta^0(\alpha) = \{X \mid X \in \alpha,\ \forall_Y^{\mathcal{A}}\ \varphi(XY) = 0\}$$
$$\beta^+ = \beta^+(\alpha) = \{X \mid X \in \alpha,\ \forall_Y^{\mathcal{A}}\ \varphi(XY) \geq 0\}$$
$$\beta^- = \beta^-(\alpha) = \{X \mid X \in \alpha,\ \forall_Y^{\mathcal{A}}\ \varphi(XY) \leq 0\}.$$

Men gaat gemakkelijk na, dat β^0, β^+ en β^- σ-idealen zijn.
Voor $\alpha = \mathcal{A}$ vindt men $\beta^0(\mathcal{A}) = \beta_0$.

Stelling 58: Zij $A_0^+ = A_0(\beta^+)$ en $A_0^- = A_0(\beta^-)$, dan is voor alle $A \in \alpha$ $\varphi(A\,\bar{A}_0^+) \leq 0$ en $\varphi(A\,\bar{A}_0^-) \geq 0$.

Bewijs: Stel, dat $\varphi(A_1 \bar{A}_0^+) > 0$ is, terwijl $A_1 \in \alpha$. Dan is $A_1 \bar{A}_0^+ \notin \beta^+$, daar wegens $A_1 A_0^+ \in \beta^+$, dan ook $A_1 \in \beta^+$ zou zijn, in welk geval

$\varphi(A_1\bar{A}_o^+)=0$ zou zijn. Er is dus een $A_2 \in \alpha$, met $A_2 \subset A_1$ met $\varphi(A_2\bar{A}_o^+) < 0$. Zij k_2 het kleinste natuurlijke getal met de eigenschap, dat er een $A \subset A_1$ is met $\varphi(A\ \bar{A}_o^+) \leq -\frac{1}{k_2}$.
We kunnen dus A_2 zo kiezen, dat $\varphi(A_2\ \bar{A}_o^+) \leq -\frac{1}{k_2}$, terwijl voor alle $A \subset A_1$ geldt, dat $\varphi(A\ \bar{A}_o^+) > -\frac{1}{k_2-1}$. Nu is $\varphi(A_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_o^+) =$
$= \varphi(A_1\ \bar{A}_o^+) - \varphi(A_2\ A_o^+) > 0$. Evenals boven kunnen we nu $A_3 \subset A_1\ \bar{A}_2$ vinden met $\varphi\ (A_3\ \bar{A}_o^+) \leq -\frac{1}{k_3} < 0$, terwijl voor alle $A \subset A_1\ \bar{A}_2$ weer $\varphi(A\ \bar{A}_o^+) > -\frac{1}{k_3-1}$. Zo voortgaande vinden we een disjuncte rij $A_1, A_2, \ldots,$ met de eigenschap $\varphi(A_n\bar{A}_o^+) \leq -\frac{1}{k_n}$, terwijl voor alle $A \subset A_1 \bigcap_2^{N-1} \bar{A}_n$ geldt, dat $\varphi(A\ \bar{A}_o^+) > -\frac{1}{k_N-1}$. Omdat

$$-\infty < \varphi(\bigcup_2^{\infty} A_n\ \bar{A}_o^+) = \sum_2^{\infty} \varphi(A_n\bar{A}_o^+) \leq -\sum_2^{\infty} \frac{1}{k_n} \quad \text{is } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} = 0.$$

Zij nu $B=A_1\bar{A}_o^+ \bigcap_2^{\infty} \bar{A}_n$, dan is voor alle $X \in \mathcal{A}$ en alle natuurlijke N $\varphi(BX) > -\frac{1}{k_N-1}$, dus $\varphi(BX) \geq 0$ voor alle $X \in \mathcal{A}$, dus $B \in \beta^+$, d.w.z. $B=A_o^+Z \cup B_o$ met $Z \in \mathcal{A}$ en $B_o \in \beta^o$. Uit de definitie van B volgt echter dat $A_o^+B=0$ is, dus $B \in \beta^o$, zodat $\varphi(A_1\bar{A}_o^+) = \varphi(B) + \sum_2^{\infty} (A_1\bar{A}_o^+A_n) =$
$\sum_2^{\infty} (\bar{A}_o^+A_n) \leq -\sum_2^{\infty} \frac{1}{k_n} \leq 0$, in tegenspraak met de veronderstelling, dat $\varphi(A_1\bar{A}_o^+) > 0$. Op analoge wijze toont men aan, dat $\varphi(A\ \bar{A}_o^-) \geq 0$ is voor alle $A \in \alpha$.

<u>Stelling 59</u>: voor alle $X \in \mathcal{A}$ is $\varphi_\alpha^+(X) = \varphi(A_o^+X)$ en $\varphi_\alpha^-(X) = \varphi(A_o^-X)$.
Bewijs: $\varphi_\alpha^+(X) \geq \varphi(A_o^+X)$ (zie Def.38), anderzijds volgt uit St.58, dat voor alle $A \in \alpha$ geldt, dat $\varphi(AX) = \varphi(A\ \bar{A}_o^+X) + \varphi(A\ A_o^+X) \leq$
$\leq \varphi(A\ A_o^+X) \leq \varphi(A_o^+X)$, dus $\varphi_\alpha^+(X) \leq \varphi(A_o^+X)$. Evenzo bewijst men $\varphi_\alpha^-(X) = \varphi(A_o^-X)$.
Speciaal hebben we dus voor $\alpha = \mathcal{A}$, dat $\varphi^+(X) = \varphi(A_o^+X)$ en $\varphi^-(X) = \varphi(A_o^-X)$ is.
We zijn nu in staat om de bekende splitsingsstellingen te bewijzen.
<u>Stelling 60</u>: (Hahn): is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$, dan is er een element $P \in \mathcal{A}$ met de eigenschap

$$X \subset P \Longrightarrow \varphi(X) = |\varphi|(X)$$

$$X \subset \bar{P} \Longrightarrow \varphi(X) = -|\varphi|(X).$$

Bewijs: beschouw $\mathcal{A}$ als σ-ideaal en definieer A_o^+ en A_o^- als in St.58. Voor alle $X\in\mathcal{A}$ is $\varphi(X)=\varphi(A_o^+X)+\varphi(\bar{A}_o^+X)$, terwijl uit St.58 volgt, dat $\bar{A}_o^+\in\beta^-$ en $\bar{A}_o^-\in\beta^+$ is, dus $\bar{A}_o^+\triangle A_o^-\in\beta_o$.
Nu is dus $\varphi(\bar{A}_o^+X)=\varphi^-(X)$ (zie St.59 en Opm. na St.57), zodat $\varphi(X)=\varphi^+(X)+\varphi^-(X)$. Voor $X\subset A_o^+$ is $\varphi^-(X)=0$ en voor $X\subset\bar{A}_o^+$ is $\varphi^+(X)=0$. Daar (St.54) $|\varphi|(X)=\varphi^+(X)-\varphi^-(X)$, voldoen $P=A_o^+$ of $P'=\bar{A}_o^-$ aan de gestelde eisen.

<u>Opmerking</u>: het is duidelijk, dat de splitsing van Hahn niet eenduidig is: als P voldoet en $P\triangle P'\in\beta_o$ is, dan voldoet ook P'. (zie St.57 en Opmerking daarna).

<u>Stelling 61</u> (Jordan): is φ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$, dan zijn er σ-additieve functies φ_1 en φ_2 zodanig, dat $\varphi(X)=\varphi_1(X)+\varphi_2(X)$ voor alle $X\in\mathcal{A}$, terwijl $\varphi_1(X)\geq 0$ is en $\varphi_2(X)\leq 0$.

Bewijs: Kies $\varphi_1(X)=\varphi^+(X)$ en $\varphi_2(X)=\varphi^-(X)$ (zie bewijs St.60).

<u>Opmerking</u>: zie opmerking na St.51.

<u>Stelling 62</u> (Lebesgue I): is φ σ-additief op de <u>atomaire</u> algebra $\mathcal{A}$, α_d het σ-ideaal van alle uit hoogstens aftelbaar veel atomen bestaande eln van $\mathcal{A}$ en is $A_d=A_o(\alpha_d)$, dan zijn er σ-additieve functies φ_c en φ_d zodanig, dat $\varphi(X)=\varphi_c(X)+\varphi_d(X)$ voor alle $X\in\mathcal{A}$, terwijl $\varphi_c(A)=0$ is voor $A\in\alpha_d$ en $\varphi_d(X)=\varphi_d(A_dX)$ voor alle $X\in\mathcal{A}$.

Bewijs: neem $\varphi_c(X)=\varphi(\bar{A}_dX)$ en $\varphi_d(X)=\varphi(A_dX)$.

Men noemt φ_c het continue deel van φ, φ_d het discrete deel.

<u>Def.42</u>: zijn φ en ψ σ-additieve functies op de σ-algebra $\mathcal{A}$, en is $\psi\geq 0$, dan heet φ <u>absoluut continu</u> t.o.v. ψ (notatie: $\varphi\equiv 0(\psi)$) als uit $\psi(X)=0$ volgt, dat $\varphi(X)=0$.

<u>Stelling 63</u> (Lebesgue II): zijn φ en ψ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$ en is $\psi\geq 0$, dan zijn er σ-additieve functies φ_r

en φ_s met de eigenschappen: $\varphi = \varphi_r + \varphi_s$; $\varphi_r \equiv 0(\psi)$; is $\alpha_s = \{X \mid \psi(X)=0\}$ (d.i. een σ-ideaal) en is $A_s = A_o(\alpha_s)$, dan is $\varphi_s(X) = \varphi_s(A_s X)$ voor alle $X \in \mathcal{A}$.

Bewijs: kies $\varphi_r(X) = \varphi(\bar{A}_s X)$ en $\varphi_s = \varphi(A_s X)$.

φ_r en φ_s heten respectievelijk het reguliere (of absoluut continue) deel en het singuliere deel van φ.

<u>Stelling 64</u> (Radon-Nikodym): zijn φ en ψ σ-additief op de σ-algebra $\mathcal{A}$, is $\psi \geqslant 0$ en is $\varphi \equiv 0(\psi)$, dan zijn er voor iedere $\varepsilon > 0$ reële getallen c_n en $B_n \in \mathcal{A}$ zodanig, dat voor alle $X \in \mathcal{A}$

$$\left| \varphi(X) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi(B_n X) \right| < \varepsilon.$$

Bewijs: zij voor reële c $\varphi_c = c\psi - \varphi$, $\beta_c^+ = \beta^+(\varphi_c)$, $\beta_c^o = \beta_o(\varphi_c)$ en $A_c = A_o(\beta_c^+)$. Nu is voor $c_1 \geqslant c_2$ steeds $\varphi_{c_1} \geqslant \varphi_{c_2}$ en $\beta_{c_1}^+ \supset \beta_{c_2}^+$, echter niet noodzakelijk $A_{c_1} \supset A_{c_2}$. We zullen de A_c nu vervangen door (t.o.v. β_c^o) equivalente elementen E_c, waarvoor deze monotonie wel geldt: zij R de vz der rationele getallen en $E_c = \bigcap \lfloor u > c; u \in R \rfloor A_u$. Nu zijn de E_c monotoon. We moeten nog aantonen, dat voor alle c $E_c \vartriangle A_c \in \beta_c^o$ is. Voor alle $u > c$ is $E_c \in \beta_u^+$, dus voor alle $X \in \mathcal{A}$ is $\varphi_u(E_c X) \geqslant 0$, d.w.z. $\varphi(E_c X) \leqslant u\,\psi(E_c X)$, dus ook $\varphi(E_c X) \leqslant c\,\psi(E_c X)$. Dus $\varphi_c(E_c X) \geqslant 0$, d.w.z. $E_c \in \beta_c^+$, zodat $E_c \bar{A}_c \in \beta_c^o$. Verder is $\bar{E}_c\, A_c = A_c \bigcup \lfloor u > c;\ u \in R \rfloor \bar{A}_u = \bigcup \lfloor u > c;\ u \in R \rfloor\ A_c\, \bar{A}_u$, terwijl voor alle $X \in \mathcal{A}$ en alle $u > c$ $\varphi(X\, A_c \bar{A}_u) \geqslant u\, \psi(X\, A_c \bar{A}_u)$ is en $\varphi(X\, A_c \bar{A}_u) \leqslant c\psi(X A_c \bar{A}_u)$, dus $\varphi(X A_c \bar{A}_u) = c\,\psi(X A_c \bar{A}_u)$, dus $A_c \bar{A}_u \in \beta_c^o$ voor alle $u > c$ en dus $A_c\, \bar{E}_c \in \beta_c^o$, dus $A_c \vartriangle E_c \in \beta_c^o$. Men gaat verder gemakkelijk na, dat E_c continu van rechts is, d.w.z. dat $E_c = \inf \lfloor u > c \rfloor\ E_u$ is.
We definiëren tenslotte $E_\infty = I$ en $E_{-\infty} = \lim_{c \to -\infty} E_c$.
We kunnen nu bij gegeven $\varepsilon > 0$ $c_n = c_n(\varepsilon)$ vinden met de eigenschap $\lim_{n \to \pm\infty} c_n = \pm\infty$, terwijl $0 < c_{n+1} - c_n < \varepsilon$ is (bijv. $c_n = n\varepsilon$).

Definiëren we $B_n = E_{c_{n+1}} \bar{E}_{c_n}$, dan zijn de B_n disjunct, terwijl $\bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} E_{c_n} = I$. Nu is $B_n \subset \bar{E}_{c_n}$ en $B_n \subset E_{c_{n+1}}$, dus voor alle $X \in \mathcal{A}$ is $c_n\,\psi(B_nX) \leq \varphi(B_nX) \leq c_n\,\psi(B_nX) + \varepsilon\,\psi(B_nX)$, zodat $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n\,\psi(B_nX) \leq \varphi(X) \leq \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n\,\psi(B_nX) + \varepsilon\,\psi(X)$. Daar $\psi(X)$ begrensd is, is hiermee het bewijs voltooid.

In het speciale geval, dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is op de deelvzn van een puntruimte $\mathfrak{X}$ met punten x, kunnen we St.64 als volgt formuleren: er is een reële meetbare[1] functie f(x) zodanig, dat voor alle $X \in \mathcal{A}$

$$\varphi(X) = \int_X f(x)\,d\psi .$$

Voor f(x) kan men nemen $f(x) = \inf\limits_{\lfloor x \in E_y \rfloor} y$. Daar $\{x \mid f(x) \leq a\} = E_a \in \mathcal{A}$, is f(x) meetbaar. Kiezen we $c_n = \varepsilon n$, dan is $t_\varepsilon(x) = \varepsilon \min\limits_{\lfloor x \in E_{\varepsilon k} \rfloor} k - \varepsilon = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n\,\chi_{B_n}(x)$ een trap-functie met de eigenschap $t_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq t_\varepsilon(x) + \varepsilon$. Hieruit volgt $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n\,\psi(B_nX) = \int_X t_\varepsilon(x)\,d\psi$ [2] $\leq \int_X f(x)\,d\psi \leq \int_X t_\varepsilon(x)\,d\psi + \varepsilon\,\psi(X)$. Met Stelling 64 vinden we nu $\varphi(X) = \int_X f(x)\,d\psi$.

Daar $\{x \mid f(x) \leq 0\} = E_0 = A_0(\beta_0^+) = A_0(\beta^-(\varphi))$, volgt uit St.54 (b) en St.59 dat $|\varphi|(X) = \varphi(\bar{E}_0X) - \varphi(E_0X) = \int_{\bar{E}_0X} f(x)\,d\psi - \int_{E_0X} f(x)\,d\psi =$

$$= \int_X |f(x)|\,d\psi .$$

6. Waarschijnlijkheidsrekening

Tot slot van dit hoofdstuk zullen we een kort overzicht geven van de wijze, waarop met behulp van de hier behandelde

----

1) Een functie f(x) heet ($\mathcal{A}$) meetbaar als de vz $\{x \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ voor alle reële a.

2) Op het integraalbegrip, dat in een volgend hoofdstuk zal worden behandeld, gaan we hier niet in.

theorie een opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening kan worden gegeven.
Bij de verzamelings-theoretische opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening gaat men uit van een σ-algebra $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van een puntverzameling (ruimte) $\mathfrak{X}$. Op $\mathcal{A}$ is een functie p^* gedefinieerd met de eigenschappen

(1) $\forall_A^{\mathcal{A}}\ p^*(A) \geqslant 0$

(2) $p^*(I) = 1$

(3) $p^*(\bigcup_1^{\infty} A_n) = \sum_1^{\infty} p^*(A_n)$, als $A_n A_m = 0$ voor $n \neq m$.

Hier gaan we uit van een algebra $\mathcal{A}$ met elementen A,B,C,... (eventualiteiten), waarop een functie P (waarschijnlijkheid) gedefinieerd is met de eigenschappen (1) en (2) en in plaats van (3) de zwakkere eigenschap

(3') $p(A \cup B) = P(A)+P(B)$, als $AB=0$.

De functie $\rho(A,B) \stackrel{def}{=} p(A \triangle B)$ is een pseudo-afstand op $\mathcal{A}$ (zie Def.25) met de eigenschap $\rho(A \cup B,0)=\rho(A,0)+\rho(B,0)$, als $AB=0$. Nu is $\mathcal{A}$ dus een wh-algebra (Def.34). Met behulp van de in St.43 beschreven uitbreidings-procedure kunnen we nu overgaan op een volledige metrische wh-algebra $\mathcal{A}''$. Volgens St.45 is $\mathcal{A}''$ een σ-algebra, waarop de afstand ρ en dus ook de waarschijnlijkheid P σ-additief kan worden voortgezet. We hebben nu een σ-algebra $\mathcal{A}''$ gekregen met een functie P, die aan (1), (2) en (3) voldoet. We hoeven hier dus de σ-additiviteit niet te eisen.

In deze opbouw ontbreken de "elementaire eventualiteiten", die in de verzamelingstheoretische opbouw worden voorgesteld door éénpuntsverzamelingen. Bovendien bevat de algebra $\mathcal{A}''$ slechts één element met waarschijnlijkheid 0, nl. het element 0 ($\mathcal{A}''$ is immers een metrische verzameling).

In de verzamelingstheoretische opbouw worden stochastische variabelen ingevoerd als reële meetbare functies op de ruimte $\mathfrak{X}$. Daar we in ons geval niet over een puntruimte beschikken, is dit hier niet mogelijk. We definiëren nu een stochastische variabele als een σ-homomorfie van de vz $\mathcal{B}$ der Borelvzn op de reële as in de algebra $\mathcal{A}''$, dus een afbeelding h, die aan ieder element $B \in \mathcal{B}$ een element $h(B) \in \mathcal{A}''$ toevoegt, met de eigenschappen

$$(a) \quad h\left(\bigcup_1^\infty B_n\right) = \bigcup_1^\infty h(B_n)$$

$$(b) \quad h(\overline{B}) = \overline{h(B)}.$$

Men gaat gemakkelijk na, dat deze definitie een generalisatie is van de verzamelingstheoretische definitie: de afbeelding $B \longrightarrow \{x \mid f(x) \in B\}$ is een σ-homomorfie. We noemen deze de σ-homomorfie voortgebracht door $f(x)$.
De verdelingsfunctie $F(x)$ behorende bij de bovengedefinieerde stochastische variabele wordt nu gedefinieerd door $F(x)=P(h((-\infty, x]))$.

De hier besproken opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening is echter geen wezenlijke uitbreiding van de verzamelingstheoretische opbouw. Men kan bewijzen (zie b.v. R. Sikorski, Boolean Algebras), dat bij iedere σ-algebra $\mathcal{A}$ een σ-algebra $\mathcal{F}$ van deelvzn van een ruimte X bestaat en een σ-ideaal α in $\mathcal{F}$ zodanig, dat $\mathcal{A} = \mathcal{F}/\alpha$. We kunnen nu dus met de verzamelingsalgebra $\mathcal{F}$ werken, als we de waarschijnlijkheid P^* op $\mathcal{F}$ definiëren door $P^*(F)=P(A)$ voor alle $F \in \mathcal{F}$, die op A worden afgebeeld. Verder kan men bewijzen dat bij iedere σ-homomorfie van $\mathcal{B}$ in $\mathcal{F}/\alpha$ een reële ($\mathcal{F}$) meetbare functie bestaat, die deze homomorfie voortbrengt.

Errata bij de syllabus S 295 van het colloqium Waarschijnlijkheidsrekening 1961-'62 o.l.v. Prof. Dr. J.Th. Runnenburg.

blz.	regel	staat:	moet staan:
1	8 v.o.	$\{\omega \mid \omega \neq \Lambda\}$	$\{\omega \mid \omega \notin \Lambda\}$
4	6 v.b.	achter $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, toevoegen: met de gebruikelijke (Euclidische) afstandsdefinitie;	
	13 v.b.	$\sum_{i=1}^{k}$	$\bigcup_{i=1}^{k}$
6	12 v.b.	Ω_n	Ω_k
15	9 v.o.	1.3.4	1.3.3
18	9 v.o.	voor elke	voor elke μ_ρ
19	5 v.o.	$\Lambda_\rho \Omega_\rho = 0$	$\Lambda_\sigma \Omega_\rho = 0$
	14 v.o.	nu bevat Ψ	nu bevat $\overline{\Psi}$
	11 v.o.	$\bigcup_\nu \Gamma_\nu^{(2)}$	$\bigcup_\lambda \Gamma_\lambda^{(2)}$
20	17 v.o.	$m(\Gamma_n \Gamma'')$	$m(\Gamma_n \Gamma_\lambda'')$
22	9 v.b.	$\leq$	$<$
	12 v.o.	$\Lambda \Delta \Gamma$	$\Lambda \Delta \Gamma_n$
	4 v.o.	van	vzn
23	12 v.o.	$\Lambda_1 \cup \Lambda_1$	$\Lambda_1 \cup \Lambda_2$
24	3 v.o.	van	vzn
27	5 v.b.	$\frac{3}{2} \theta$	$\frac{3}{2} \theta_n$
28	11 v.o.	$_1 < x_2$	$x_1 < x_2$.
	8 v.o.	$(x_1, \quad x$	$(x_1, \quad x_2)$
30	7 v.b.	blz.	blz. 5
34	13 v.o.	Ω_{w_1}	Λ_{w_1}
38	3 v.b.	$\Delta_{a_i}^{b_{i1}}$ (	$\Delta_{a_{i1}}^{b_{i1}}$ (
	7 v.b.	de eerste boven - index van het Δ-symbool is $a_{i_1}^2$	
40	13 v.b.	voor $1, \ldots, l_0$	voor $i = 1, \ldots, l_0$
41	5 v.o.	het $\leq$-teken aan het eind vervangen door: $= \mu(\{z \mid a < z \leq b+c \text{ en } z \nleq b\}) \leq$	
	4 v.o.	$\leq \mu(\{z \mid b < z \leq b+c\}) \leq \mu(\{z \mid z \leq b+c \text{ en } z \nleq b\})$	
43	15 v.o.	$\delta_2 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0$	$\delta_2 \geq 0$
44	15 v.b.	$-z_i$	z_i

blz.	regel:	staat:	moet staan:
49	4 v.b.	$(c_k, \delta_k]$	$(c_k, d_k]$
53	10 v.b.	I_M	$\overline{I_M}$
56	12,13 v.b.	schrappen	
57	1 v.b.	St. 3	St. 6
	2 v.b.	St. 2,(f) en Def. 3	St. 2 en St. 3
	7 v.b.	St. 6	St. 3
	9,10 v.b.	,terwijl ...volgt	en $A'''' \subset A''$, dus $A''''\subset A$, waaruit met St. 2 volgt
	14 en 16v.b.	conjunctie	disjunctie
58	6 v.b.	$\overline{\bar{A} \quad \bar{B}}$	$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$
59	2 v.b	$A\bar{\bar{B}}$	$(A \cap \bar{\bar{B}})$
	4 v.b.	St. 16	St. 17
62	8 v.b.	Een deelvz	Een niet-lege deelvz
64	15 v.o.	het maximaal	heet maximaal
	9 v.o.	een $X \notin \alpha$	en $X \notin \alpha$
65	2 v.b.	$A \in \alpha$	$A \notin \alpha$
	2 v.o.	a	$\mathcal{A}$
66	7 v.b.	$\bar{B}$	B
	17 v.o.	waarschijnlijkheid	waarschijnlijkheid φ
	13 v.o.	van	aan
	12 v.o.	coïdeaal	coïdeaal $\bar{\alpha}$
67	8 v.o.	$(A_n \quad B_n)$	$(\bar{A}_n \cup B_n)$
68	8,11 v.o.	St. 41	St. 38
69	7 v.o.	de tweede X_n ,, moet Y_{n+k}	zijn
70	3,4 v.b.	$X_n \quad Y_n$	$(X_n \cup Y_n)$
	3,4 v.b.	X Y	$X \cup Y$
	6,8 v.b.	semi	pseudo
72	5,8,15,16, 18 v.b.	x,y	X, Y
73	4 v.b.	ϑ	ϑ'
	6 v.b.	A_n'	A'
	9 v.b.	$\lim_{n\to}$	$\lim_{m\to\infty}$
	13,21 v.b.	m^{-1}	2^{-m}
	9,8,4,3, v.o.	semi	pseudo
	7 v.o.	$\rho(A \triangle B)$	$\rho(A,B)$

blz.	regel	staat:	moet staan:
74	7 v.b.	$\rho(B \triangle X)$	$\rho(B \triangle X, 0)$
75	1 v.o.	$< \infty$	$< \infty \Longrightarrow$
76	3 v.b.	$Y_n \; ^{X}$ en	$Y_n = X$ en
	7 v.b.	$\rho(Z_n \; \overline{X}, 0)$	$(Z_n \; \overline{X}, 0) \geqq$
77	2 v.o.	$\cap \mathcal{A}_{\delta\sigma}$	$\cap \mathcal{A}_{o\delta\sigma}$
80	3 v.b.	achter "Bewijs:" invoegen: Stel dat φ onbegrensd was.	
88	6 v.b. (e.v.)	p	P