STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 295

Syllabus van het Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof.dr. J.Th. Runnenburg

Hoofdstuk 2: Integratietheorie (p. 90-163)

Syllabus Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening (S 295), Errata hoofdstuk 2.

blz.	regel	staat:	moet staan:
94	3 v.o.	Invoegen: Gevolg: Uit Def.2.1.1 ontstaat een equivalente definitie als we " $\leq a$" vervangen door " $\in B$" (B Borelvz).	
95	Schrap r. 4-8 v.b. "de klasse ... voor $\mathcal{K}_f$" en vervang dit door r. 14-11 v.o. "Nu is ... eigenschap".		
96	6 v.b.	verplaatsen	verplanten
98	4 v.b.	$f(\omega) - \|f(\omega)\|$	$-f(\omega) + \|f(\omega)\|$
106	10 v.o.	R^+	$\bar{R}^+$
108	Schrap r. 12-14 v.b. "waarbij ... bovendien" en vervang dit door "dan is".		
109	4 v.b.	ordinaten	ordinaatvzn
110	9 v.b.	st. 2.2.4	st. 2.2.5
111	6 v.b.	$T(\mu)$	$ST(\mu)$
112	6 v.o.	st. 2.2.3	st. 2.2.4
114	7 v.o.	0	$-\frac{1}{n} < -(\mu x \mu_L)(A_{N(n)} \cup B_{M(n)})$
117	11 v.b., 10 v.o.	1f	$f\chi_\Lambda$ (3x)
	10,9 v.o.	$\int$	$\int_\Lambda$
120	1 v.o.	$\Lambda'_n = \Lambda_n - \Lambda_{n-1}$	$a_1 < a_2 < \ldots \to \infty$ en $\Lambda_n' = \Lambda_{a_n} - \Lambda_{a_{n-1}}$
121	1 v.b.	Λ_1	Λ_{a_1}
	2 v.b.(laatste lid)	Λ_n	Λ_{a_n}
123	7 v.b.	$-\infty \leq$	$-\infty <$
125	8 v.o.	I 16	I 16½
130	5 v.o.	f	$\underline{f}$
	2 v.o.	=	$\leq$
137	10 v.o.	ω,	ω_1,
143	12 v.o.	$f_o(\omega) =$	$f_c(\omega) \stackrel{def}{=}$

blz.	regel	staat:	moet staan:
148	15 v.b.	gereduceerd	beperkt
149	6 v.o.	(regel c) geheel schrappen.	
152	6 v.o.	(onleesbaar)	M2 niet en het geval
153	6, 10 v.b.	c 7 (b)	c 7 (a)
	1 v.o.	(voorlaatste lid) $M_{\chi'}$	$M_{\chi''}$
155	2 v.o.	M2 en M3	m2 en m3

2 Integratietheorie

2.1 $\mathcal{K}$-meetbare functies

2.1 (a) Definities

Gegeven is een ruimte Ω met punten ω en deelvzn $\Lambda, \Lambda_1, \ldots$. $\mathcal{K}$ is een σ-algebra op Ω en μ een maat op Ω met definitiegebied $\mathcal{K}$[1]. Op Ω als definitiegebied zijn reële puntfuncties $f(\omega)$ en $g(\omega)$ gegeven, die overal eindig zijn, maar niet noodzakelijk begrensd. R is de vz der reële getallen.

Def.2.1.1: $f(\omega)$ heet $\mathcal{K}$-meetbaar (meetbaar met betrekking tot de σ-algebra $\mathcal{K}$) als voor elk reëel getal a de vz $\{\omega | f(\omega) \leq a\}$ μ-meetbaar is, d.w.z. als $\forall_{a \in R} \{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{K}$. Men zegt ook: μ-meetbaar.
Nu is bijvoorbeeld ook $\{\omega | f(\omega) = a\} \in \mathcal{K}$!

Def.2.1.2: $f(\omega)$ en $g(\omega)$ heten μ-bijna overal gelijk (gelijk behoudens op een vz van de μ-maat 0) als $\{\omega | f(\omega) \neq g(\omega)\} \subset \Lambda_0$, waarbij $\Lambda_0 \in \mathcal{K}$ met $\mu(\Lambda_0) = 0$.

Als μ volledig is, geldt: $g(\omega)$ is $\mathcal{K}$-meetbaar als $f(\omega)$ $\mathcal{K}$-meetbaar is en $g(\omega)$ μ-bijna overal gelijk aan $f(\omega)$ is: immers $\{\omega | f(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) \neq f(\omega)\} \subset \Lambda_0$, dus een element van $\mathcal{K}$. Dan geldt $\{\omega | g(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) = f(\omega)\} = \{\omega | f(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) = f(\omega)\} = \{\omega | f(\omega) \leq a\} - \{\omega | f(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) \neq f(\omega)\}$, zodat ook deze vz tot $\mathcal{K}$ behoort. Gevolg: $\{\omega | g(\omega) \leq a\} = \{\omega | g(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) = f(\omega)\} \cup \{\omega | g(\omega) \leq a \text{ en } g(\omega) \neq f(\omega)\} \in \mathcal{K}$ voor elke $a \in R$.

Als μ niet volledig is, kan $g(\omega)$ onder dezelfde omstandigheden niet μ-meetbaar zijn!

Als $\Omega = R^n$ is (de n-dim. Euclidische ruimte) en μ de gewone Lebesguemaat, dan spreken we van L-meetbaar i.p.v. μ-meetbaar, enz.

Def.2.1.3: Als $f(\omega)$ een reële puntfn is, gedefinieerd op R^n, en $\{\omega | f(\omega) \leq a\}$ voor elke reële a een Borelvz van R^n is,

----

1) Het tripel $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ heet onder deze omstandigheden: maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$.

dan heet $f(\omega)$ een Bairefunctie.

Bairefuncties zijn meetbaar met betrekking tot elke interval-maat. In het bijzonder zijn stuksgewijs continue functies Bairefuncties.

2.1 (b) Verplanten van maat en functie

Vaak is het nuttig de ruimte Ω met punten ω, reële puntfn $f(\omega)$ gedef. op Ω en maat μ gedef. op σ-algebra $\mathcal{K}$ van deelvzn van Ω te "vervangen" door een, gezien de $f(\omega)$, geschiktere ruimte Ω' met punten ω', reële puntfn $f'(\omega')$ gedef. op Ω' en maat μ' gedef. op σ-algebra $\mathcal{K}'$ van deelvzn van Ω'. We denken ons daartoe een σ-algebra $\mathcal{K}'$ op Ω' gegeven met de eigenschap, dat $\mathcal{K}$ een aftelbaar operatiegetrouw beeld van $\mathcal{K}'$ is. D.w.z. er is een σ-homomorfe afbeelding φ van de elementen van $\mathcal{K}'$ op die van $\mathcal{K}$ zó, dat bij elke $\Lambda \in \mathcal{K}$ een $\Lambda' \in \mathcal{K}'$ bestaat met $\Lambda = \varphi(\Lambda')$ en bij elke $\Lambda' \in \mathcal{K}'$ is $\Lambda \overset{\text{def}}{=} \varphi(\Lambda') \in \mathcal{K}$.

Het "vervangen" van $\Omega, \mathcal{K}, \mu, f(\omega)$ door $\Omega', \mathcal{K}', \mu', f'(\omega')$ bij gegeven φ zullen we verplanten noemen, als geldt:

a) μ' gedef. op $\mathcal{K}'$ is zó, dat bij de afbeelding φ de getalwaarde van de maat voor elke $\Lambda' \in \mathcal{K}'$ behouden blijft, d.w.z. $\mu'(\Lambda') = \mu(\varphi(\Lambda'))$ voor elke $\Lambda' \in \mathcal{K}'$,

b) $f'(\omega')$ gedef. op Ω' is een reële puntfn en wel zó, dat voor elke reële a geldt $\{\omega' \mid f'(\omega') \leq a\} \in \mathcal{K}'$ en $\varphi(\{\omega' \mid f'(\omega') \leq a\}) = \{\omega \mid f(\omega) \leq a\}$.

Het probleem, bij gegeven $\Omega, \mathcal{K}, \mu, f(\omega), \Omega', \mathcal{K}'$ en φ een μ' en $f'(\omega')$ te vinden, kan als volgt worden opgelost. Definieer om aan a) te voldoen:

Def.2.1.4: $\mu'(\Lambda') \overset{\text{def}}{=} \mu(\varphi(\Lambda'))$ voor $\Lambda' \in \mathcal{K}'$.

Het is duidelijk, dat dit de enig mogelijke definitie van μ' op $\mathcal{K}'$ is. Uit de definitie volgt triviaal, dat $\mu'(\Lambda')$ een niet-negatieve vzfn is met definitie-gebied $\mathcal{K}'$. Omdat φ σ-homomorf is, zijn voor disjuncte $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots \in \mathcal{K}'$ ook de $\varphi(\Lambda'_1), \varphi(\Lambda'_2), \ldots$ disjunct en is $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda'_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(\Lambda'_n) \in \mathcal{K}$, zodat

$\mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda'_n)=\mu(\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda'_n))=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi(\Lambda'_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\varphi(\Lambda'_n))=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu'(\Lambda'_n)$ is. D.w.z. μ' is σ-additief, dus een maat op $\mathcal{K}'$.

Het vinden van een $f'(\omega')$ die aan b) voldoet, is belangrijk gecompliceerder. Redenen hiervoor zijn: 1) φ is een afbeelding van deelvzn en niet van punten, 2) we zijn wel zeker van de meetbaarheid van de doorsnede van aftelbaar veel meetbare vzn, maar niet van de meetbaarheid van de doorsnede van méér dan aftelbaar veel meetbare vzn.

Kies bij elk (eindig) rationaal getal r een vz $\Lambda'_r \in \mathcal{K}'$ met $\varphi(\Lambda'_r)=\{\omega \mid f(\omega)<r\}$. Dit is wegens $\{\omega \mid f(\omega)<r\}\in\mathcal{K}$ mogelijk. Voor elk reëel getal a voeren we in

$$\Lambda'(a) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{r<a} \Lambda'_r .$$

Dan is $\Lambda'(a)\in\mathcal{K}'$ voor elke $a\in R$. Uit $a_1<a_2$ volgt $\Lambda'(a_1)\subset\Lambda'(a_2)$. Voer nu in, in een poging om te bereiken $\{\omega' \mid g'(\omega')<a\}=\Lambda'(a)$ voor alle $a\in R$,

$$g'(\omega') \overset{\text{def}}{=} \inf_{\Lambda'(a)\ni\omega'} a .$$

Hiermee is $g'(\omega')$ vastgelegd voor alle $\omega'\in\Lambda'(\infty) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\text{alle } r} \Lambda'_r$.
Voor elke $\omega'\in\Lambda'(-\infty)\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{\text{alle } r}\Lambda'_r$ geldt $g'(\omega')=-\infty$, terwijl $\varphi(\Lambda'(-\infty))=\bigcap_{\text{alle } r}\varphi(\Lambda'_r)=\{\omega \mid f(\omega)=-\infty\}=0$ is. We tonen nu eerst aan, dat voor reële b geldt $\{\omega' \mid g'(\omega')<b \text{ en } \omega'\in\Lambda'(\infty)\}=\Lambda'(b)$. Kies een $\omega'\in\Lambda'(b)$. Bij ω' bestaat $r<b$ met $\omega'\in\Lambda'_r$, zodat ook $\omega'\in\Lambda'(\frac{r+b}{2})$ geldt. Dan is $g'(\omega')\leq\frac{r+b}{2}<b$, terwijl $\omega'\in\Lambda'(\infty)$ triviaal vervuld is. Dus behoort ω' tot de linker vz uit de te bewijzen gelijkheid. Kies nu een $\omega'\in\Lambda'(\infty)$, die aan $g'(\omega')<b$ voldoet. Dan bestaat er een $a<b$ met $\omega'\in\Lambda'(a)$, zodat a fortiori $\omega'\in\Lambda'(b)$ is en de gelijkheid bewezen is.

Nu is $\varphi(\{\omega' \mid g'(\omega')<b \text{ en } \omega'\in\Lambda'(\infty)\})=\varphi(\Lambda'(b))=\bigcup_{r<b}\varphi(\Lambda'_r)=$
$=\{\omega \mid f(\omega)<b\}$ met $\varphi(\Lambda'(\infty))=\bigcup_{\text{alle } r}\varphi(\Lambda'_r)=\{\omega \mid f(\omega)<\infty\}=\Omega$ of $\varphi(\Omega'-\Lambda'(\infty))=0$. De functie $g'(\omega')$ heeft bijna alle van $f'(\omega')$

geëiste eigenschappen: alleen op de (kleine) vz $\Omega' - \Lambda'(\infty)$ is hij niet gedefinieerd en op de (kleine) vz $\Lambda'(-\infty)$ neemt hij de waarde $-\infty$ aan. Kies daarom voor twee vaste waarden $c_1, c_2 \in R$ met $c_1 < c_2$

<u>Def.2.1.5</u>

$$f'(\omega') = \begin{cases} g'(\omega') & \text{voor } \omega' \in \Lambda'(\infty) - \Lambda'(-\infty), \\ c_1 & \text{voor } \omega' \in \Lambda'(-\infty), \\ c_2 & \text{voor } \omega' \in \Omega' - \Lambda'(\infty). \end{cases}$$

Dan geldt

$$\{\omega' \mid f'(\omega') < a\} = \begin{cases} \{\omega' \mid g'(\omega') < a \text{ en } \omega' \in \Lambda'(\infty)\} - \Lambda'(-\infty) & \text{voor } a \leq c_1 \\ \{\omega' \mid g'(\omega') < a \text{ en } \omega' \in \Lambda'(\infty)\} & \text{voor } c_1 < a \leq c_2, \\ \{\omega' \mid g'(\omega') < a \text{ en } \omega' \in \Lambda'(\infty)\} \cup (\Omega' - \Lambda'(\infty)) & \text{voor } c_2 < a, \end{cases}$$

zodat nu voor alle $a \in R$ voldaan is aan

$$\varphi(\{\omega' \mid f'(\omega') < a\}) = \{\omega \mid f(\omega) < a\} \quad .$$

Hiermee is de <u>verplantingsstelling</u> bewezen:

<u>St.2.1.1</u>: Als de σ-algebra $\mathcal{K}$ der μ-meetbare deelvzn Λ van Ω het σ-homomorfe beeld van de σ-algebra $\mathcal{K}'$ van deelvzn Λ' van Ω' is met $\Lambda = \varphi(\Lambda')$, dan is $\mu'(\Lambda') \overset{\text{def}}{=} \mu(\varphi(\Lambda'))$ een maat op Ω' met definitiegebied $\mathcal{K}'$.

Iedere μ-meetbare reële puntfn $f(\omega)$ gedef. op Ω kan verplant worden tot een μ'-meetbare reële puntfn $f'(\omega')$ gedef. op Ω' met $\varphi(\{\omega' \mid f'(\omega') < a\}) = \{\omega \mid f(\omega) < a\}$ voor elke $a \in R$, zodat tevens voor elke $a, b \in R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ geldt $\mu'(\{\omega' \mid a < f'(\omega') \leq b\}) = \mu(\{\omega \mid a < f(\omega) \leq b\})$.

Een functie $f''(\omega')$ met dezelfde eigenschappen als $f'(\omega')$ voldoet aan $\varphi(\{\omega' \mid f'(\omega') < a \text{ en } f''(\omega') \geq a\}) = \{\omega \mid f(\omega) < a \text{ en } f(\omega) \geq a\} = 0$. Omdat $\{\omega' \mid f''(\omega') \neq f'(\omega')\} = \bigcup_{\text{alle } r} \{\omega' \mid f'(\omega') < r \text{ en } f''(\omega') \geq r\} \cup \bigcup_{\text{alle } r} \{\omega' \mid f'(\omega) \geq r \text{ en } f''(\omega') < r\}$, geldt $\mu'(\{\omega' \mid f''(\omega') \neq f'(\omega')\}) = 0$. Hieruit blijkt, dat $f'(\omega')$ en $f''(\omega')$ μ'-bijna overal gelijk zijn.

We kunnen gelijktijdig n μ-meetbare functies $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots f_n(\omega)$ van Ω naar Ω' verplanten. Nu is voor (uitgebreid) reële

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega' \mid a_i < f'_i(\omega') \leq b_i\}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi(\{\omega' \mid a_i < f'_i(\omega') \leq b_i\}) = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \mid a_i < f(\omega) \leq b_i\}.$$

Als $f'(\omega) \overset{def}{=} (f'_1(\omega'), f'_2(\omega'), \ldots, f'_n(\omega'))$ en

$f(\omega) \overset{def}{=} (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ is, dan geldt

$\varphi(\{\omega' \mid a < f'(\omega') \leq b\}) = \{\omega \mid a < f(\omega) \leq b\}$ of ook

$$\varphi(\{\omega' \mid f'(\omega') \in I_{a,b}\}) = \{\omega \mid f(\omega) \in I_{a,b}\}.$$

Tot nu veronderstelden we te beschikken over een σ-homomorfe afbeelding φ van $\mathcal{K}'$ op $\mathcal{K}$. Nemen we nu $\Omega' = R^n$ en $\mathcal{K}' = {}^{B}\mathcal{G}$, de σ-algebra der Borelvzn van R^n, dan kunnen we een σ-homomorfe afbeelding φ <u>definiëren</u> met behulp van n op Ω gedefinieerde reële μ-meetbare puntfn's $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)$ (of in vectornotatie $f(\omega)$). Ieder punt $\omega \in \Omega$ wordt door $f(\omega)$ op het punt $y \in R^n$ met $y = f(\omega)$ afgebeeld. Voer in

$$\varphi(B) \overset{def}{=} \{\omega \mid f(\omega) \in B\}$$

voor alle deelvzn B van R^n. Dan is φ een σ-homomorfe afbeelding (zie blz.11). Deze φ beeldt het interval $I_{-\infty,a} = \{y \mid y_i \leq a_i \text{ voor } 1 \leq i \leq n\}$, deelvz van R^n, af op de μ-meetbare deelvz $\Lambda_a \overset{def}{=} \varphi(I_{-\infty,a}) = \{\omega \mid f(\omega) \leq a\}$ van Ω voor elke (uitgebreid) reële vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. De Λ_a zijn in feite de eenvoudigste deelvzn van Ω die met behulp van $f(\omega)$ beschreven kunnen worden. Omdat de $f_i(\omega)$ μ-meetbaar zijn, geldt $\Lambda_a \in \mathcal{K}$. De Boreluitbreiding van de Λ_a noemen we $\mathcal{K}_f$. Per definitie is $\mathcal{K}_f$ dus de kleinste σ-algebra die alle vzn $\{\omega \mid f(\omega) \leq a\}$, met a een (uitgebreid) reële vector, bevat. $\mathcal{K}_f$ zal in het algemeen niet alle door relaties tussen de $f_i(\omega)$ bepaalbare deelvzn van $\mathcal{K}$ bevatten, maar is per definitie nooit <u>groter</u> dan de σ-algebra $\mathcal{K}$, dus $\mathcal{K}_f \subset \mathcal{K}$ is altijd van kracht.

<u>St.2.1.2</u>: $\varphi({}^{B}\mathcal{G}) = \mathcal{K}_f$, d.w.z. φ is een σ-homomorfe afbeelding van ${}^{B}\mathcal{G}$ op $\mathcal{K}_f$.

<u>Interpretatie</u>: 1) iedere $\Lambda \in \mathcal{K}_f$ kan geschreven worden als $\Lambda = \{\omega \mid f(\omega) \in B\}$, waarbij $B \in {}^{B}\mathcal{G}$ is; 2) voor iedere $B \in {}^{B}\mathcal{G}$ geldt

$\{\omega \mid f(\omega) \in B\} \in \mathcal{K}_f$. Hierbij moeten we ons realiseren, dat de B in 1) niet altijd ondubbelzinnig bepaald is: als $f(\omega)$ nooit de waarde a aanneemt, dan kan a wel of niet in B genomen worden.

<u>Bewijs</u>: de klasse $\{\varphi(X) \mid X \in \mathcal{G}_{R^n}\}$ met $\mathcal{G}_{R^n}$ de klasse van alle deelvzn van R^n, is een σ-algebra die alle vzn $\{\omega \mid f(\omega) \leq a\} = \varphi(I_{-\infty,a})$ omvat. D.w.z. $\mathcal{K}_f$ is een <u>deelvz</u> van deze klasse. Daar de klasse uitsluitend vzn van het type $\varphi(X) = \{\omega \mid f(\omega) \in X\}$ met $X \subset R^n$ bevat, geldt dit óók voor $\mathcal{K}_f$. D.w.z. elke $\Lambda \in \mathcal{K}_f$ is van het type $\{\omega \mid f(\omega) \in X\}$ met $X \subset R^n$ of bij elke $\Lambda \in \mathcal{K}_f$ bestaat $X \subset R^n$ met $\Lambda = \varphi(X)$.

Beschouw $\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \{D \mid \varphi(D) \in \mathcal{K}_f\}$. Dan geldt $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{K}_f$, want $\varphi(\mathcal{D}) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ voldoet aan $\varphi(\mathcal{D}) = \{\varphi(D) \mid \varphi(D) \in \mathcal{K}_f\} = \{\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{K}_f\} = \mathcal{K}_f$. Omdat φ σ-homomorf is, moet $\mathcal{D}$ een σ-algebra zijn: a) $\mathcal{D}$ is niet leeg, want de $I_{-\infty,a}$ behoren tot $\mathcal{D}$; b) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi(D) \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \overline{\varphi(D)} \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \varphi(\overline{D}) \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \overline{D} \in \mathcal{D}$; c) $\forall_{n \geq 1}\, D_n \in \mathcal{D} \Rightarrow \Rightarrow \forall_{n \geq 1}\, \varphi(D_n) \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(D_n) \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) \in \mathcal{K}_f \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Omdat $\mathcal{D}$ alle $I_{-\infty,a}$ omvat en een σ-algebra is, geldt voor ${}^{B}\mathcal{G}$, de kleinste σ-algebra, die alle $I_{-\infty,a}$ omvat: ${}^{B}\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$. Gevolg: $\varphi({}^{B}\mathcal{G}) \subset \varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{K}_f$.

Nu is $\varphi({}^{B}\mathcal{G})$ een σ-homomorfe afbeelding van een σ-algebra, dus zelf een σ-algebra, die bevat is in $\mathcal{K}$ en alle $\varphi(I_{-\infty,a}) = \{\omega \mid f(\omega) \leq a\}$ bevat. Hieruit volgt $\varphi({}^{B}\mathcal{G}) \supset \mathcal{K}_f$, de kleinste σ-algebra met deze eigenschap.

Conclusie: $\varphi({}^{B}\mathcal{G}) = \mathcal{K}_f$.

Als we het definitiegebied $\mathcal{K}$ van de maat μ beperken tot $\mathcal{K}_f$, dan kunnen we de φ van St.2.1.2 gebruiken om St.2.1.1 toe te passen en de maat μ te verplanten tot μ' op R^n i.p.v. Ω. Aan $B \in {}^{B}\mathcal{G}$ wordt daarbij de maat μ' toegekend met $\mu'(B) = \mu(\varphi(B)) = \mu(\{\omega \mid f(\omega) \in B\})$. Als $\mu(\Omega) = 1$ is, dan is μ' een <u>genormeerde intervalmaat</u> (d.i. een intervalmaat met $\mu'(R^n) = 1$) op R^n en kan μ' met een verdelingsfunctie beschreven worden:

$$F_f(a) \overset{\text{def}}{=} \mu(\{\omega \mid f(\omega) \leq a\}).$$

De fn $F_f(a)$ heet de simultane (of gemeenschappelijk) verdelingsfn der $f_i(\omega)$. Als μ een σ-finiete maat is op Ω, dan is ook μ' een σ-finiete maat op R^n. Is bovendien $\mu'(I_{a,b})=\mu(\{\omega | a<f(\omega)\leq b\})$ eindig voor alle eindige reële n-dim. vectoren a en b, dan is μ' wederom een intervalmaat.

Bij het verplaatsen van Ω naar R^n gaat de vector $f(\omega)$, gedefinieerd op Ω, over in een vector $f'(y)$, gedefinieerd op R^n. Een mogelijke keus voor $f'(y)$ is: $f'(y)=y$. Dit leidt immers tot $\varphi(\{y \mid a<f'(y)\leq b\})=\varphi(\{y|a<y\leq b\})=\{\omega \mid a<f(\omega)\leq b\}$, met $f_i'(y)=y_i$ een μ'-meetbare functie van y. Uit de discussie na St.2.1.1 volgt, dat ook andere vectoren $f'(y)$ mogelijk zijn. Deze wijken echter slechts op een vz met μ'-maat 0 van de hier gevonden Bairevector (d.i. een vector, waarvan de componenten Bairefn's zijn) $f'(y)=y$ af, zoals we al zagen.

De zojuist besproken verplanting wordt in de whr herhaaldelijk toegepast. Zij leidt tot een overzichtelijker tripel $(R^n, {}^{\mathcal{B}}\mathcal{G}, \mu')$, dan het oorspronkelijke abstracte tripel $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$. Er kleeft één bezwaar aan: μ op $\mathcal{K}$ als definitiegebied wordt beperkt tot μ op $\mathcal{K}_f$ als definitiegebeid. We raken dus iets kwijt. We winnen, dat we met een intervalmaat (d.w.z. in de whr: met verdelingsfuncties) kunnen werken.

We kunnen het verplanten herhalen: uitgaande van $\Omega, \mathcal{K}, \mu, f(\omega)$ kunnen we met een σ-homomorfe afbeelding φ' van $\mathcal{K}'$ (een σ-algebra van deelvzn van Ω') op $\mathcal{K}$ en een dito φ'' van $\mathcal{K}''$ (een σ-algebra van deelvzn van Ω'') op $\mathcal{K}'$ eerst verplanten tot $\Omega', \mathcal{K}', \mu', f'(\omega')$ en daarna tot $\Omega'', \mathcal{K}'', \mu'', f''(\omega'')$. Als nu geldt: $\Omega''=R^n$ en $\mathcal{K}''={}^{\mathcal{B}}\mathcal{G}$, de klasse der Borelvzn van R^n, terwijl $\varphi(B)\overset{def}{=}\varphi'(\varphi''(B))$ voor alle $B\in{}^{\mathcal{B}}\mathcal{G}$ juist door $\varphi(B)=\{\omega|f(\omega)\in B\}$ gegeven wordt, dan vinden we voor μ'' op R^n opnieuw (ingeval $\mu(\Omega)=1$ is)

$$F_f(a) = \mu(\{\omega \mid f(\omega)\leq a\})$$

terug, omdat hiervoor alleen de oorspronkelijke maat μ en de oorspronkelijke functie $f(\omega)$ van belang zijn: voor $B\in{}^{\mathcal{B}}\mathcal{G}$ geldt immers

$$\mu''(B)=\mu'(\varphi''(B))=\mu(\varphi'|\varphi''(B)))=\mu(\{\omega \mid f(\omega)\in B\}).$$

Tevens is gebleken, dat we i.p.v. de $\mathcal{K}$-meetbare f_i Bairefuncties y_i kunnen bestuderen, als vzn met maat 0 voor ons niet interessant zijn: d.w.z. als we alleen kijken naar die eigenschappen van een functie, die deze functie met alle andere er μ-bijna overal aan gelijke functies gemeen heeft.

Op analoge wijze kunnen we aftelbaar veel of zelfs méér dan aftelbaar veel functies $f_t(\omega)$ verplanten van Ω naar R^T, waarbij T de indexvz der $f_t(\omega)$ is. ${}^B\mathcal{G}$ is nu de klasse der Borelvzn van R^T, d.w.z. de kleinste σ-algebra, die alle cylindervzn $\{y \mid y_{t_1} \leq a_1, y_{t_2} \leq a_2, \ldots, y_{t_n} \leq a_n\}$ (met $y \in R^T$, n eindig geheel en $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$) omvat.

2.1 (c) <u>Convergentie μ-bijna overal</u>

Met $\mathcal{K}$-meetbare functies bij een maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ kunnen allerlei operaties uitgevoerd worden, zonder dat we de klasse $\mathcal{K}$ verlaten.
Als $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)$ $\mathcal{K}$-meetbare reële puntfn's zijn en $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ een reële Bairefn is, gedef. op R^n, dan is $g(\omega) = \Phi(f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ een $\mathcal{K}$-meetbare reële puntfn.
Laat ${}^B\mathcal{G}$ de klasse der Borelvzn van R^n zijn.

<u>St.2.1.3</u>: Toepassing van een Bairefn op $\mathcal{K}$-meetbare reële f_n's levert een $\mathcal{K}$-meetbare reële fn.

Bewijs: $\{\omega \mid g(\omega) \leq a\} = \{\omega \mid \Phi(f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega)) \leq a\}$. Als nu $B(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq a\}$ is, dan is $B(a) \in {}^B\mathcal{G}$, want Φ is een Bairefn. Dan is ook $\{\omega \mid g(\omega) \leq a\} = \{\omega \mid f(\omega) \in B(a)\} \in \mathcal{K}_f \subset \mathcal{K}$, als $f(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ is en we gebruik maken van het in 2.1 (b) bewezene.
Maar dan is dus ook $\{\omega \mid g(\omega) \leq a\} \in \mathcal{K}$ voor elke $a \in R$.

<u>St.2.1.4</u>: Als $f(\omega)$ en $g(\omega)$ $\mathcal{K}$-meetbare reële fn's bij maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ zijn, dan zijn ook $|f|$, cf (met $c \in R$), $f+g$, $f-g$ en fg $\mathcal{K}$-meetbare fn's.

Bewijs: pas St.2.1.3 toe. Dat $\Phi(y_1, y_2) = y_1 y_2$ een Bairefn op R^2 is, volgt uit het feit, dat $\{(y_1,y_2) \mid y_1y_2 \leq a\}$ een gesloten deelvz van R^2 is (hetgeen weer volgt uit: y_1y_2 is een continue functie van (y_1,y_2)) en dus een Borelvz voor elke reële a.

Opm. Ook $f^+(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(\omega)+|f(\omega)|}{2}$ en $f^-(\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(\omega)-|f(\omega)|}{2}$ zijn dus $\mathcal{K}$-meetbaar, als $f(\omega)$ het is.

St.2.1.5 Als $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots$ een rij $\mathcal{K}$-meetbare fn's is bij maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ met $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ voor alle $\omega \in \bar{\Lambda}_0$ met $\Lambda_0 \in \mathcal{K}$ en $\mu(\Lambda_0)=0$, dan is $f(\omega)$ op $\bar{\Lambda}_0$ $\mathcal{K}$-meetbaar, d.w.z. $\{\omega \mid f(\omega) \leq a$ en $\omega \in \bar{\Lambda}_0\} \in \mathcal{K}$ voor elke $a \in R$.

Bewijs: definieer $f^*(\omega) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(\omega) & \text{als } \omega \in \bar{\Lambda}_0 \\ 0 & \text{als } \omega \in \Lambda_0 \end{cases}$, en $f_n^*(\omega) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_n(\omega) & \text{als } \omega \in \bar{\Lambda}_0 \\ 0 & \text{als } \omega \in \Lambda_0 \end{cases}$

dan is $f^*(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n^*(\omega)$ voor alle $\omega \in \Omega$. Met

$$\Lambda_{m,n}(a) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \mid f_n^*(\omega) \leq a + \tfrac{1}{m}\}$$

voor $m,n=1,2,\ldots$ geldt: $\Lambda_{m,n}(a) \in \mathcal{K}$, dus voor $\Lambda^*(a) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \Lambda_{m,k}(a)$ geldt ook $\Lambda^*(a) \in \mathcal{K}$ voor alle $a \in R$.

Uit $f^*(\omega_0) \leq a$ volgt $f_n^*(\omega_0) \leq a + \frac{1}{m}$ voor $n \geq n_0(m)$ en blijkt $\omega_0 \in \Lambda^*(a)$.
Uit $f^*(\omega_0) > a$ volgt $f_n^*(\omega_0) > a + \frac{1}{m_0}$ voor $n \geq n_0$ als m_0 voldoende groot gekozen wordt. Dan blijkt ook $\omega_0 \notin \Lambda^*(a)$. D.w.z. voor alle $a \in R$ geldt

$$\Lambda^*(a) = \{\omega \mid f^*(\omega) \leq a\},$$

zodat $\{\omega \mid f^*(\omega) \leq a\} \in \mathcal{K}$ voor alle $a \in R$. Tevens is: "$f^*(\omega)$ is $\mathcal{K}$-meetbaar" equivalent met "$f(\omega)$ is op $\bar{\Lambda}_0$ $\mathcal{K}$-meetbaar".
Opm. Als μ geen volledige maat is, kunnen we niet concluderen: $f(\omega)$ is $\mathcal{K}$-meetbaar; als μ wel volledig is, gaat dit wel.
Altijd geldt: behoudens op een vz van de μ-maat nul is $f(\omega)$ gelijk aan een $\mathcal{K}$-meetbare fn.

St.2.1.6: Als $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots$ een rij $\mathcal{K}$-meetbare reële fn's is bij maatruimte $(\Omega, \mathcal{K}, \mu)$ en $\Lambda \overset{\text{def}}{=} \{\omega \mid \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ bestaat}\}$, dan is $\Lambda \in \mathcal{K}$.

Bewijs: controleer $\Lambda = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega \mid |f_n(\omega)-f_{n+k}(\omega)| < \frac{1}{m}\} \in \mathcal{K}$.

Opm. Ook $\lim_{n\to\infty}$ sup $f_n(\omega)$ en $\lim_{n\to\infty}$ inf $f_n(\omega)$ zijn $\mathcal{K}$-meetbaar.

2.2 μ-integreerbaarheid

We zullen in deze en de volgende paragraaf de volgende notaties gebruiken:

R is de vz van de reële getallen.

R^+ is de vz van de niet-negatieve reële getallen.

$\overline{R}=R \cup \{-\infty,+\infty\}$ is de vz van de gegeneraliseerde reële getallen, waarbij met de getallen $\pm\infty$ gerekend wordt volgens de afspraken:

$a.(\pm\infty)=(\pm\infty).a=\pm\infty$ en $(-a)(\pm\infty)=(\pm\infty)(-a)=\mp\infty$ voor $0<a\leq\infty$;

$0.(\pm\infty)=0$; $-\infty<a<\infty$ voor elke $a \in R$;

$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=\pm\infty$ voor $a\in\overline{R}$ en $a \neq \mp\infty$.

$\overline{R}^+$ is de vz van de niet-negatieve gegeneraliseerde reële getallen.

Men verifieert gemakkelijk dat voor a_k en $b_j \in \overline{R}^+$ altijd geldt:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j .$$

$\mathcal{G}_r$, resp $\mathcal{G}_r^+$, resp. $\overline{\mathcal{G}}_r$, resp. $\overline{\mathcal{G}}_r^+$ is de klasse van de L-meetbare deelvzn van R, resp. R^+, resp. $\overline{R}$, resp. $\overline{R}^+$.

Hierbij is $\overline{\mathcal{G}}_r = {}^{B}(\mathcal{G}_r \cup \{\{+\infty\},\{-\infty\}\})$, met de afspraak:

$$\mu_L(\{+\infty\})=\mu_L(\{-\infty\})=0.$$

Voor $\Phi \subset (\Omega_1, \Omega_2)$ verstaan we onder Φ_{ω_1} $(\omega_1 \in \Omega_1)$:

$$\Phi_{\omega_1} = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in \Phi\}.$$

Vooruitlopend op par.2.3, waarin productmaten onderzocht zullen worden, zullen we eerst een stelling (2.2.3) bewijzen over de op een product van twee maatruimten geïnduceerde maat. Stel dat $(\Omega_\nu, \mathcal{G}_\nu, \mu_\nu)$ $(\nu=1,2)$ twee σ-finiete maatruimten zijn. Door een uitbreidingsprocédé als in par. 1.4, zullen we op ${}^{B}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ een maat construeren, die voor productverzamelingen $(\Lambda^1, \Lambda^2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$

gelijk is aan $\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)$. Volgens par. 1.4 is het voldoende op $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ een σ-additieve, σ-finiete inhoud m te definiëren met deze eigenschappen. Volgens st.1.2.5 bestaat $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ uit eindige verenigingen van (Λ^1,Λ^2) met $\Lambda^1\in\mathcal{G}_1$ en $\Lambda^2\in\mathcal{G}_2$, terwijl een dergelijke vereniging altijd disjunct geschreven kan worden. Door de hierboven aan m opgelegde eis is m dus al vastgelegd op $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$. Voordat we m echter kunnen definiëren, dienen we eerst de volgende eenduidigheidsstelling te bewijzen:

St.2.2.1: Als $\Phi=\bigcup_{k=1}^{n}\Psi_k=\bigcup_{l=1}^{\infty}\Psi'_l$, met $\Psi_k=(\Lambda_k^1,\Lambda_k^2)\in\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$;

$\Psi'_l=('\Lambda_l^1,'\Lambda_l^2)\in\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$; $k_1\neq k_2\Rightarrow\Psi_{k_1}\cap\Psi_{k_2}=0$ en

$l_1\neq l_2\Rightarrow\Psi'_{l_1}\cap\Psi'_{l_2}=0$, dan geldt

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_1(\Lambda_k^1)\mu_2(\Lambda_k^2)=\sum_{l=1}^{\infty}\mu_1('\Lambda_l^1)\mu_2('\Lambda_l^2).$$

Als deze stelling bewezen is, is de volgende definitie toelaatbaar:

Def.2.2.1: De verzamelingsfunctie m op $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ wordt gedefinieerd door:

$$m(\Phi)=\sum_{k=1}^{n}\mu_1(\Lambda_k^1)\mu_2(\Lambda_k^2) \quad ,$$

voor

$$\Phi=\bigcup_{k=1}^{n}(\Lambda_k^1,\Lambda_k^2) \text{ met } (\Lambda_k^1,\Lambda_k^2)\in\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2 \text{ en}$$

$$k\neq l\Rightarrow(\Lambda_k^1,\Lambda_k^2)\cap(\Lambda_l^1,\Lambda_l^2)=0.$$

Uit st.2.2.1 volgt dan vrijwel direct:

St.2.2.2: Door def.2.2.1. is m op $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ eenduidig bepaald; m is een σ-additieve, σ-finiete inhoud.

Voor het bewijs van st.2.2.1. hebben we de volgende hulpstelling nodig:

Hulpstelling: Bij ieder eindig stel deelvzn $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n$ van een vz Ω bestaat een kleinste systeem $C(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)=\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_{N(n)}\}$ van deelvzn Γ_k van $\bigcup_{k=1}^{n}\Lambda_k$ met de volgende eigenschappen:

a) de Γ_k zijn disjunct.

b) iedere Λ_k is een vereniging van Γ_j's.

Bewijs: Zij $K(\omega)=\{k\,|\,\omega\in\Lambda_k\}$ en $\bar{K}(\omega)=\{k\,|\,\omega\in\bar{\Lambda}_k\}$. Dan voldoet de volgende keuze van de vzn Γ:

$$\Gamma(\omega)\overset{def}{=}\Big(\bigcap_{k\in K(\omega)}\Lambda_k\Big)\cap\Big(\bigcap_{k\in\bar{K}(\omega)}\bar{\Lambda}_k\Big).$$

Want stel $\omega'\in\Gamma(\omega)$, dan volgt dat voor $k\in K(\omega)$ $\omega'\in\Lambda_k$ is, en voor $k\in\bar{K}(\omega)$ geldt $\omega'\in\bar{\Lambda}_k$, dus $K(\omega')=K(\omega)$ en $\bar{K}(\omega')=\bar{K}(\omega)$, dus $\Gamma(\omega')=\Gamma(\omega)$. Dus $\omega'\notin\Gamma(\omega)\Rightarrow\Gamma(\omega')\cap\Gamma(\omega)=0$. Verder is $\Lambda_k=\bigcup_{\omega\in\Lambda_k}\Gamma(\omega)$. Dat er slechts eindig veel verschillende Γ's zijn volgt uit het feit dat de Γ's een deelklasse vormden van de uit 2^n elementen bestaande klasse van vzn van de vorm

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{j}\Lambda_{k_i}\Big)\cap\Big(\bigcap_{i=j+1}^{n}\bar{\Lambda}_{k_i}\Big)\quad.$$

Opm. de vzn $\Gamma_1,\dots,\Gamma_{N(n)}$ zijn de atomen van de kleinste algebra (en ook: σ-algebra) die $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ bevat.
We voeren nog de volgende notatie in:

$$L_C(\Lambda)=\{k\,|\,\Gamma_k\subset\Lambda \text{ en } \Gamma_k\in C\}.$$

We gaan nu over tot het bewijs van st.2.2.1:

<u>1°</u> $\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)\overset{(\geq)}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mu_1(\Lambda_k^1).\mu_2(\Lambda_l^2)$, als gegeven is:

$$\Lambda^\nu\overset{(\supseteq)}{=}\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^\nu\quad(\nu=1,2);\ k\neq k'\Rightarrow\Lambda_k^\nu\cap\Lambda_{k'}^\nu=0\quad(\nu=1,2).$$

Bewijs:

$$\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)\overset{(\geq)}{=}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_1(\Lambda_k^1)\Big).\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\mu_2(\Lambda_l^2)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mu_1(\Lambda_k^1).\Lambda_2(\Lambda_l^2)$$

<u>2°</u> $\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)\overset{(\geq)}{=}\sum_{k=1}^{n}\mu_1(\Lambda_k^1).\mu_2(\Lambda_k^2)$, als gegeven is:

$$(\Lambda^1,\Lambda^2)\overset{(\supseteq)}{=}\bigcup_{k=1}^{n}(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k);\ k\neq k'\Rightarrow(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k)\cap(\Lambda^1_{k'},\Lambda^2_{k'})=0.$$

Bewijs: Zij $C_\nu=C(\Lambda^\nu_1,\ldots,\Lambda^\nu_n,\Lambda^\nu)=\{\Gamma^\nu_1,\ldots,\Gamma^\nu_{N(\nu)}\}$ en $L_{C_\nu}(\Lambda^\nu_k)=L_\nu(k)$; $L_\nu(0)=L_{C_\nu}(\Lambda^\nu)$. Dan volgt uit het disjunct zijn van de vzn $(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k)$, dat de vzn $(L_1(k),L_2(k))$ voor $k=1,2,\ldots$ disjunct zijn. Verder geldt: $(L_1(0),L_2(0))\overset{(\supseteq)}{=}\bigcup_{k=1}^{n}(L_1(k),L_2(k))$.

Dus:

$$(\Lambda^1,\Lambda^2)=\bigcup_{k_1\in L_1(0)}\ \bigcup_{k_2\in L_2(0)}(\Gamma^1_{k_1},\Gamma^2_{k_2})\overset{(\supseteq)}{=}\bigcup_{k=1}^{n}\ \bigcup_{k_1\in L_1(k)}\ \bigcup_{k_2\in L_2(k)}(\Gamma^1_{k_1},\Gamma^2_{k_2}).$$

Dus, door tweemaal toepassen van $\underline{1^o}$:

$$\mu_1(\Lambda^1)\mu_2(\Lambda^2)\overset{(1^o)}{=}\sum_{k_1\in L_1(0)}\ \sum_{k_2\in L_2(0)}\mu_1(\Gamma^1_{k_1})\mu_2(\Gamma^2_{k_2})\overset{(\geq)}{=}$$

$$\overset{(\geq)}{=}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{k_1\in L_1(k)}\ \sum_{k_2\in L_2(k)}\mu_1(\Gamma^1_{k_1}).\mu_2(\Gamma^2_{k_2})\overset{(1^o)}{=}\sum_{k=1}^{n}\mu_1(\Lambda^1_k).\mu_2(\Lambda^2_k).$$

$\underline{3^o}$ $\sum_{k=1}^{n}\mu_1(\Lambda^1_k).\mu_2(\Lambda^2_k)\leq\sum_{k=1}^{m}\mu_1('\Lambda^1_k).\mu_2('\Lambda^2_k)$, als gegeven is:

$$\bigcup_{k=1}^{n}(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k)\subset\bigcup_{k=1}^{m}('\Lambda^1_k,'\Lambda^2_k);\ k\neq k'\Rightarrow(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k)\cap(\Lambda^1_{k'},\Lambda^2_{k'})=0.$$

Bewijs: Voor $C_\nu=C(\Lambda^\nu_1,\ldots,\Lambda^\nu_n,'\Lambda^\nu_1,\ldots,'\Lambda^\nu_m)$ en $L_\nu(k)=L_{C_\nu}(\Lambda^\nu_k)$; $L'_\nu(k)=L_{C_\nu}('\Lambda^\nu_k)$ geldt:

$$\bigcup_{k=1}^{n}(L_1(k),L_2(k))\subset\bigcup_{k=1}^{m}(L'_1(k),L'_2(k)),$$

en de eerste vereniging is disjunct. Het bewijs loopt met behulp hiervan als onder $\underline{2^o}$.

$\underline{4^o}$ $\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_1(\Lambda^1_k).\mu_2(\Lambda^2_k)$, als gegeven is:

$$(\Lambda^1,\Lambda^2)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k);\ k\neq k'\Rightarrow(\Lambda^1_k,\Lambda^2_k)\cap(\Lambda^1_{k'},\Lambda^2_{k'})=0\ .$$

Bewijs: Uit 2° volgt onmiddellijk voor alle n:

$$\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2) \geqq \sum_{k=1}^{n} \mu_1(\Lambda_k^1).\mu_2(\Lambda_k^2).$$

Dus:

(1) $$\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\Lambda_k^1).\mu_2(\Lambda_k^2).$$

Voor $\mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)=0$ is de bewering triviaal, want als bv. $\mu_1(\Lambda^1)=0$ is, dan ook voor alle k $\mu_1(\Lambda_k^1)=0$ etc.

We veronderstellen dus

$$\mu_\nu(\Lambda^\nu) > 0$$

en kiezen getallen λ_1 en λ_2 zo dat

$$0 < \lambda_\nu < \mu_\nu(\Lambda^\nu).$$

Dan voeren we de volgende vzn in:

$$\Lambda_2^n(\omega_1) = \{\omega_2 \mid (\omega_1,\omega_2) \in \bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda_k^1, \Lambda_k^2)\}.$$

Dan geldt

$$\Lambda_2^n(\omega_1) \uparrow \Lambda^2 \quad \text{voor } n \to \infty .$$

Dus:

$$\mu_2(\Lambda_2^n(\omega_1)) \uparrow \mu_2(\Lambda^2) \quad ,$$

dus er is een $N_2(\omega_1)$, zo dat voor $n > N_2(\omega_1)$ geldt:

$$\mu_2(\Lambda_2^n(\omega_1)) > \lambda_2 \quad .$$

Verder voeren we in de vzn:

$$\Delta^n = \{\omega_1 \mid \mu_2(\Lambda_2^n(\omega_1)) > \lambda_2 \text{ en } \omega_1 \in \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k^1\}.$$

Zij $C_n = C(\Lambda_1^1, \ldots, \Lambda_n^1) = \{\Gamma_1^n, \ldots, \Gamma_{N(n)}^n\}$. Dan geldt:

Uit $\omega_1 \in \Gamma_k^n$ en $\omega_1' \in \Gamma_k^n$ volgt $\Lambda_2^n(\omega_1) = \Lambda_2^n(\omega_1')$ (zodat we ook kunnen schrijven $\Lambda_2^n(k)$ voor: $\Lambda_2^n(\omega_1)$ met $\omega_1 \in \Gamma_k^n$).

Dus ($\omega_1 \in \Gamma_k^n$ en $\omega_1 \in \Delta^n$) $\Rightarrow \Gamma_k^n \subset \Delta^n$, dus:

$$\Delta^n = \bigcup_{k \in L_n} \Gamma^n_k \qquad (L_n \overset{afk}{=} L_{C_n}(\Delta^n)).$$

Verder volgt direct uit de definitie van Δ^n:

$$\Delta^n \subset \Delta^{n+1}$$

We laten zien dat $\Delta^n \uparrow \Lambda^1$:

$\omega_1 \varepsilon \Lambda_1 \Rightarrow (n > N_2(\omega_1) \Rightarrow \mu_2(\Lambda^n_2(\omega_1) > \lambda_2)$ en $(n > N_o \Rightarrow \omega_1 \varepsilon \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda^1_k)$.

Dus $\omega_1 \varepsilon \Delta^n$ voor $n > \max\{N_o, N_2(\omega_1)\}$. Dus

$$\Delta^n \uparrow \Lambda^1 \quad .$$

Hieruit volgt, dat er een N_1 is, zo dat voor $n > N_1$ geldt:

$$\mu_1(\Delta^n) > \lambda_1.$$

Kies nu $n > N_1$, dan geldt:

$$\bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda^1_k, \Lambda^2_k) \supset \bigcup_{k \in L_n} (\Gamma^n_k, \Lambda^n_2(k)) \qquad (\overset{afk}{=} \Phi),$$

want:

$$(\omega_1, \omega_2) \varepsilon \Phi \Rightarrow \exists_{k \varepsilon L_n} \quad \omega_1 \varepsilon \Gamma^n_k \quad \text{en} \quad \omega_2 \varepsilon \Lambda^n_2(k) \Rightarrow$$

$$\omega_1 \varepsilon \Delta^n \quad \text{en} \quad \omega_2 \varepsilon \Lambda^n_2(\omega_1) \Rightarrow (\omega_1, \omega_2) \varepsilon \bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda^1_k, \Lambda^2_k).$$

Φ is een eindige disjuncte vereniging, dus we kunnen $\underline{3^o}$ toepassen:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_1(\Lambda^1_k)\ \mu_2(\Lambda^2_k) \geqq \sum_{k \varepsilon L_n} \mu_1(\Gamma^n_k).\ \mu_2(\Lambda^n_2(k)).$$

Nu is $\Lambda^n_2(k) = \Lambda^n_2(\omega_1)$ voor $\omega_1 \varepsilon \Gamma^n_k$ dus $\omega_1 \varepsilon \Delta^n$, dus $\mu_2(\Lambda^n_2(k)) > \lambda_2$. Dus:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_1(\Lambda^1_k)\ \mu_2(\Lambda^2_k) > \lambda_2 \sum_{k \varepsilon L_n} \mu_1(\Gamma^n_k) = \lambda_2\, \mu_1(\Delta^n) > \lambda_1\, \lambda_2.$$

Dus, voor alle λ_1 en λ_2 met $\lambda_\nu < \mu_\nu(\Lambda^\nu)$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\Lambda_k^1)\ \mu_2(\Lambda_k^2) \geq \lambda_1 \lambda_2 \quad ,$$

zodat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(\Lambda_k^1)\mu_2(\Lambda_k^2) \geq \mu_1(\Lambda^1).\ \mu_2(\Lambda^2).$$

Door combinatie met (1) volgt de bewering direct.

<u>5°</u> $\sum_{k=1}^{n} \mu_1(\Lambda_k^1).\mu_2(\Lambda_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1('\Lambda_k^1).\ \mu_2('\Lambda_k^2)$, voor:

$$\bigcup_{k=1}^{n} (\Lambda_k^1, \Lambda_k^2) = \bigcup_{k=1}^{\infty} ('\Lambda_k^1, '\Lambda_k^2)$$ (beide verenigingen disjunct).

Bewijs: door tweemaal toepassen van <u>4°</u> krijgen we (schrijf $\Psi_k = (\Lambda_k^1, \Lambda_k^2)$; $\Psi'_k = ('\Lambda_k^1, '\Lambda_k^2)$; $m(\psi) = \mu_1(\Lambda^1).\mu_2(\Lambda^2)$ voor $\Psi = (\Lambda^1, \Lambda^2)$): $\sum_{k=1}^{n} m(\psi_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{\infty} m(\psi_k \cap \psi'_l) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} = \sum_{l=1}^{\infty} m(\psi'_l)$.

Hiermee is het bewijs van st.2.2.1 geleverd.

Bewijs van st.2.2.2:
De eenduidigheid en de σ-additiviteit zijn een direct gevolg van st.2.2.1. Voor het σ-finiet zijn bedenken we, dat μ_1 en μ_2 σ-finiet zijn, dus dat er splitsingen

$$\Omega_\nu = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_\nu^k$$

zijn met

$$\mu_\nu(\Omega_\nu^k) < \infty \quad .$$

Dan is

$$(\Omega_1, \Omega_2) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty} (\Omega_1^k, \Omega_2^l)$$

een σ-finiete splitsing van (Ω_1, Ω_2):

$$m((\Omega_1^k, \Omega_2^l)) = \mu_1(\Omega_1^k).\ \mu_2(\Omega_2^l) < \infty .$$

Op grond van de resultaten in par.1.4 is nu tevens aangetoond:

St.2.2.3: Er bestaat een klasse $\mathcal{F}_B(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ van deelvzn van (Ω_1, Ω_2), die $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ omvat en een op $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ gedefinieerde maat die voor de elementen van $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ met de m van def.2.2.1. samenvalt.
Als $\mu_1(\Omega_1).\mu_2(\Omega_2) < \infty$ is, bestaat $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ uit die deelvzn van (Ω_1, Ω_2), die m-approximeerbaar zijn door elementen van $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$. Als $\mu_1(\Omega_1).\mu_2(\Omega_2)=\infty$ is, bestaat $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ uit alle deelvzn van (Ω_1, Ω_2), waarvoor geldt dat iedere doorsnede met een $\Psi = (\Lambda^1, \Lambda^2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ met $m(\Psi) < \infty$, m-approximeerbaar is door een $\Phi \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$.

Def.2.2.2: We noemen deze maat de productmaat en noteren hem als $\mu_1 \times \mu_2$.

Opmerkingen: Uit de bovenstaande bewijzen is direct te zien dat de stellingen juist blijven als men een product van eindig veel maatruimten beschouwt. De vraag naar het al of niet associatief zijn van het vormen van een maatproduct is met het bovenstaande echter nog niet beantwoord.
We zullen deze productmaat gebruiken voor de definitie van de integraal. Daartoe voeren we eerst in $((\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ is een σ-finiete maatruimte):

Def.2.2.3: Als f een afbeelding is van Ω in R^+ dan is $\underline{\Theta}(f) = \{(\omega, x) \mid \omega \in \Omega \ , \ 0 \leq x < f(\omega)\}$ de inwendige ordinatenverzameling van f en
$\bar{\Theta}(f) = \{(\omega, x) \mid \omega \in \Omega, 0 \leq x \leq f(\omega)\}$ de ordinatenverzameling van f.

Voor deze ordinatenverzamelingen geldt:

St.2.2.4:

$$\underline{\Theta}(\liminf f_n) \subset \liminf \underline{\Theta}(f_n) \subset \liminf \bar{\Theta}(f_n) \subset \bar{\Theta}(\liminf f_n)$$

$$\underline{\Theta}(\limsup f_n) \subset \limsup \underline{\Theta}(f_n) \subset \limsup \bar{\Theta}(f_n) \subset \bar{\Theta}(\limsup f_n),$$

voor iedere rij niet negatieve functies f_n.

Bewijs:

Zij $\{b_k\}$ een rij, met $b_k \in \overline{R}^+$ voor alle k. Dan is:

$$[0,\inf b_k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} [0,b_k) \subset [0, \inf b_k] = \bigcap_{k=1}^{\infty} [0,b_k] ,$$

en

$$[0,\sup b_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [0, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [0,b_k] \subset [0, \sup b_k] .$$

Dus:

$$[0,\lim\inf b_n) = [0, \sup_k \inf_{n \geq k} b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [0, \inf_{n\geq k} b_n) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} [0,b_n) =$$

$$= \lim\inf [0,b_n) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} [0,b_n] \subset [0,\sup_k \inf_{n\geq k} b_n] = [0,\lim\inf b_n].$$

En op soortgelijke wijze:

$$[0,\lim\sup b_n) \subset \lim\sup [0,b_n) \subset \lim\sup [0,b_n] \subset [0,\lim\sup b_n].$$

Met behulp hiervan volgt de bewering nu direct uit:

$$\underline{\Theta}(f) = \bigcup_{\omega\in\Omega} (\{\omega\}, [0,f(\omega))) \text{ en } \overline{\Theta}(f) = \bigcup_{\omega\in\Omega} (\{\omega\}, [0,f(\omega)]).$$

<u>Def.2.2.4</u>:

De functie $\chi_\Lambda(\omega) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 \text{ voor} & \omega \in \Lambda \\ 0 \text{ voor} & \omega \notin \Lambda \end{cases}$

heet de <u>karakteristieke functie</u> van Λ .

<u>Def.2.2.5</u>: De functies

$$t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\Lambda_k}(\omega),$$

met $\alpha_k \in \overline{R}$ en $j \neq k \Longrightarrow (\Lambda_j \cap \Lambda_k = 0$ en $\alpha_j \neq \alpha_k)$, heten <u>trapfuncties</u>.

De volgende eigenschappen van trapfuncties zijn vrijwel triviaal:

<u>T1</u> Een trapfunctie is dan en slechts dan meetbaar als alle Λ_k meetbaar zijn.

<u>T2</u> Een functie $f(\omega)$ is dan en slechts dan een trapfunctie als $f(\omega)$ slechts eindig veel waarden aanneemt.

T3 Een functie

$$u(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\ \chi_{\Lambda_k}(\omega)$$

met

$$\alpha_k\in\bar{R},\quad \Lambda_k\subset\Omega,$$

is dan en slechts dan een trapfunctie als voor geen tweetal waarden k_1 en k_2 geldt:

$$k_1\neq k_2;\ \alpha_{k_1}=-\infty;\ \alpha_{k_2}=+\infty \quad \text{en} \quad \Lambda_{k_1}\cap\Lambda_{k_2}\neq 0 .$$

T4 Voor een meetbare niet-negatieve trapfunctie t geldt:

$$\underline{\Theta}(t)\in\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}_r^+\subset\mathcal{F}(\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}_r^+)$$

en

$$\bar{\Theta}(t)\in\mathcal{G}\times\bar{\mathcal{G}}_r^+\subset\mathcal{F}(\mathcal{G},\ \bar{\mathcal{G}}_r^+)\ ;$$

als $t(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\ \chi_{\Lambda_k}(\omega)$, waarbij voor $k\neq j$ geldt $\Lambda_k\cap\Lambda_j=0$ en niet voor twee waarden k_1 en k_2 geldt:
$k_1\neq k_2$, $\alpha_{k_1}\neq\alpha_{k_2}$, $\mu(\Lambda_{k_1})>0$, $\mu(\Lambda_{k_2})>0$, dan is bovendien

$$(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(t))=(\mu\times\mu_L)(\bar{\Theta}(t))=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\mu(\Lambda_k).$$

De eerste twee beweringen van T4 kunnen gegeneraliseerd worden tot alle meetbare niet-negatieve functies:

St.2.2.5: Voor alle meetbare niet-negatieve functies f geldt:

$$\underline{\Theta}(f)\in\mathcal{F}(\mathcal{G},\ \bar{\mathcal{G}}_r^+)\ \text{en}\ \bar{\Theta}(f)\in\mathcal{F}(\mathcal{G},\ \bar{\mathcal{G}}_r^+)$$

terwijl bovendien

$$(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f))=(\mu\times\mu_L)(\bar{\Theta}(f))\qquad \text{is.}$$

Bewijs: Op grond van st.2.2.3 is het nodig en voldoende aan te tonen dat[1)2)] $\Theta(f)\cap(\Omega_k,\ [l,l+1))$ en $\Theta(f)\cap(\Omega_k,\{\infty\})$, voor alle

----

1) Waar in het bewijs $\Theta(f)$ geschreven wordt, geldt de bewering zowel voor $\underline{\Theta}(f)$ als voor $\bar{\Theta}(f)$.Komen in een bewering meerdere ordinaatvzn voor die niet gestreept zijn, bv. $\Theta(f)$ en $\Theta(g)$, dan is de bedoeling dat de bewering zowel geldig is voor $\bar{\Theta}(f)$ en $\bar{\Theta}(g)$, als voor $\underline{\Theta}(f)$ en $\Theta(g)$. ∞

natuurlijke k en l geapproximeerd kunnen worden door elementen van $\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}_r^+$, dus op grond van T4 is het voldoende om aan te tonen dat deze vzn tot $\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}_r^+$ behoren of geapproximeerd kunnen worden door ordinaten van trapfuncties. Voor vzn van de vorm $\Theta(f)\cap(\Omega_k,\{\infty\})$ is deze bewering vrijwel triviaal:

$$\underline{\Theta}(f)\cap(\Omega_k,\{\infty\}) = O\in\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}_r^+$$

en

$$\overline{\Theta}(f)\cap(\Omega_k,\{\infty\})=(\{\omega\mid f(\omega)=\infty\}\cap\Omega_k,\{\infty\})\in\mathcal{G}\times\overline{\mathcal{G}}_r^+ \quad .$$

Een trapfunctie $t_{\varepsilon,f}$, waarvan de ordinatenvz $\Theta(f)\cap(\Omega_k,[l,l+1))$ approximeert, construeren we als volgt:

Zij:

$$\Lambda_\nu=\{\omega|\omega\in\Omega_k; l+(\nu-1)\varepsilon' \leqq f(\omega)<l+\nu\varepsilon'\}\,;\ \nu=1,\ldots,N_k; N_k=1+\left[\frac{\mu(\Omega_k)}{\varepsilon}\right];$$

$$\varepsilon'=\frac{1}{N_k}\quad ,$$

$$\Lambda_0=\{\omega\mid\omega\in\Omega_k;\ f(\omega)<l\}\ \text{ en }\ \Lambda_{N_k+1}=\{\omega\mid\omega\in\Omega_k;\ f(\omega)\geqq l+1\}\ .$$

Dan definiëren we:

$$t_{\varepsilon,f}=\sum_{\nu=0}^{N_k+1}\alpha_\nu\chi_{\Lambda_\nu}\ ,\ \text{met }\ \alpha_\nu=l+(\nu-\tfrac{1}{2})\varepsilon' \ \text{ voor }\ \nu=1,\ldots,N_k;$$

$$\alpha_0=l;\ \alpha_{N_k+1}=l+1\ .$$

En

$$t^{\pm}_{\varepsilon,f}=\sum_{\nu=0}^{N_k+1}\alpha_\nu^{\pm}\chi_{\Lambda_\nu}\ ,\ \text{met }\ \alpha_0^{\pm}=\alpha_0;\ \alpha^{\pm}_{N_k+1}=\alpha_{N_k+1};\ \alpha_\nu^{\pm}=\alpha_\nu\pm\tfrac{1}{2}\varepsilon'$$

$$\text{voor }\ \nu=1,\ldots,N_k.$$

Dan geldt voor $A=\Theta'(f)$ én voor $A=\Theta'(t_{\varepsilon,f})$:

$$\underline{\Theta}'(t^-_{\varepsilon,f})\subset A\subset\overline{\Theta}'(t^+_{\varepsilon,f}),$$

als we onder $\Theta'(g)$ verstaan $\Theta(g)\cap(\Omega_k,[l,l+1))$. Dus:

$$\Theta'(f)\,\Delta\,\Theta'(t_{\varepsilon,f})\subset\overline{\Theta}'(t^+_{\varepsilon,f})-\underline{\Theta}'(t^-_{\varepsilon,f})$$

en daarom (zie T4 hierboven):

$$(\mu\times\mu_L)^*(\Theta'(f)\,\Delta\,\Theta'(t_{\varepsilon,f})) \leqq (\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}'(t^+_{\varepsilon,f}))-(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}'(t^-_{\varepsilon,f}))=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{N_k} \varepsilon'\,.\,\mu(\Lambda_\nu) \leqq \frac{1}{N_k}\,.\,\mu(\Omega_k) \leqq \varepsilon\ .$$

Dus volgens st.2.2.3 is $\Theta(f)\in\mathcal{F}(\mathcal{G},\overline{\mathcal{G}}^+_r)$. Daar bovendien

$$(\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}'(t_{\varepsilon,f}))=(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}'(t_{\varepsilon,f}))$$

voor alle $\varepsilon>0$, blijkt dat

$$(\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}'(f))=(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}'(f)),$$

zodat

$$(\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(f))=(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f))\quad .$$

Def.2.2.6: Het volgens st.22.4 voor iedere meetbare niet-negatieve functie f gedefinieerde getal

$$(\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(f))=(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f))$$

heet de integraal van f over $(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ en wordt geschreven als:

$$\int f\,d\mu\quad .$$

Uitbreiding van dit integraalbegrip tot willekeurige meetbare functies gaat nu met behulp van de splitsing

$$f=f^+-f^-$$

(zie opm. na st.2.1.4). We definiëren:

Def.2.2.7: a) een meetbare functie f waarvoor tenminste een van de integralen $\int f^\pm\,d\mu$ eindig is, heet integreerbaar. Zijn beide integralen $\int f^\pm d\mu$ eindig, dan heet f sommeerbaar.

b) voor integreerbare f is:

$$\int f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\ .$$

c) voor integreerbare f_1 en f_2 is

$$\int (f_1 + if_2) d\mu \overset{\text{def}}{=} \int f_1 d\mu + i \int f_2 \, d\mu .$$

We voeren nog de volgende notaties voor verschillende functie vzn in:

$M(\mu) = \{f \mid f\ \mathcal{G}\text{-meetbaar}\}$; $I(\mu) = \{f \mid f \text{ integreerbaar over } (\Omega, \mathcal{G}, \mu)\}$;
$S(\mu) = \{f \mid f \text{ sommeerbaar over } (\Omega, \mathcal{G}, \mu)\}$; $T(\mu) = \{f \mid f \text{ is een sommeerbare trapfunctie}\}$.

Als dit niet tot verwarring aanleiding kan geven zullen we het argument μ weglaten. Bij alle ingevoerde klassen geven we de deelvzn van niet-negatieve functies van deze klasse aan met een + - teken bovenaan: bv. $M^+(\mu)$.

St.2.2.6: $f \in I(\mu)$ en $\Lambda \in \mathcal{G} \Rightarrow f\chi_\Lambda \in I(\mu)$;
$f \in S(\mu)$ en $\Lambda \in \mathcal{G} \Longrightarrow f\chi_\Lambda \in S(\mu)$.

Bewijs: $\chi_\Lambda \geqq 0 \Longrightarrow (f\,\chi_\Lambda)^{\pm} = f^{\pm}\chi_\Lambda \Longrightarrow 0 \leqq (f\,\chi_\Lambda)^{\pm} \leqq f^{\pm}$.

Bovendien is $f\,\chi_\Lambda$, en dus ook $(f\,\chi_\Lambda)^{\pm}$, meetbaar. Dus:

$$\Theta((f\,\chi_\Lambda)^{\pm}) \in \mathcal{F}(\mathcal{G}, \mathcal{G}_r^+) \text{ en } \Theta((f\,\chi_\Lambda)^{\pm}) \subset \Theta(f^{\pm}) .$$

Dus:

$$\int f^{\pm} \, d\mu < \infty \Longrightarrow \int (f\,\chi_\Lambda)^{\pm} \, d\mu < \infty .$$

Daaruit volgt direct de bewering.

Def.2.2.8: Voor $f \in I$; $\Lambda \in \mathcal{G}$ is

$$\int_\Lambda f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int f\,\chi_\Lambda \, d\mu .$$

St.2.2.7: Als Λ_k een rij elementen is van een σ-algebra $\mathcal{G}$, waarop een maat μ is gegeven, dan geldt:

$$\mu(\liminf \Lambda_n) \leqq \liminf \mu(\Lambda_n).$$

Als bovendien geldt $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k) < \infty$ dan geldt ook

$$\mu(\limsup \Lambda_n) \geqq \limsup \mu(\Lambda_n).$$

Bewijs:

$$\mu(\liminf \Lambda_n)=\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\Lambda_n)=\sup_k \mu(\bigcap_{n=k}^{\infty}\Lambda_n) \leqq$$

$$\leqq \sup_k \inf_{n\geqq k} \mu(\Lambda_n)= \liminf \mu(\Lambda_n).$$

En

$$\mu(\limsup \Lambda_n)=\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\Lambda_n)=\inf_k \mu(\bigcup_{n=k}^{\infty}\Lambda_n) \geqq$$

$$\geqq \inf_k \sup_{n\geqq k} \mu(\Lambda_n)=\limsup \mu(\Lambda_n).$$

Opm.: in een iets andere versie komt deze stelling in het aparte deel Hfdst. 1a, van de syllabus als st.51 op blz.79 voor.

Het verband tussen def.2.2.8 en de ontwikkeling van het integraalbegrip door limieten van Lebesguesommen wordt gegeven door:

St.2.2.8: $f \in S$ dan en slechts dan als er een rij trapfuncties t_n bestaat met de volgende eigenschappen:

1) $\forall_\omega \lim_{n\to\infty} t_n(\omega)=f(\omega)$; t_n sommeerbaar;

2) $\lim_{n\to\infty} \int t_n \, d\mu$ bestaat en is eindig.

Voor een dergelijke rij geldt dan bovendien:

$$\lim_{n\to\infty} \int t_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Bewijs: We beperken ons eerst tot niet-negatieve f. Zij t_n een rij niet-negatieve trapfuncties met de eigenschappen 1) en 2). Dan geldt volgens st.2.2.3:

$$\underline{\Theta}(f)=\underline{\Theta}(\lim t_n)=\underline{\Theta}(\liminf t_n)\subset \liminf \underline{\Theta}(t_n)\subset \limsup \overline{\Theta}(t_n)\subset$$

$$\subset \overline{\Theta}(\limsup t_n)=\overline{\Theta}(\lim t_n)=\overline{\Theta}(f),$$

dus, daar f als limiet van een rij niet-negatieve, meetbare functies zelf niet-negatief en meetbaar is (st.2.1.5), is

$$\Theta(f)\in \mathcal{F}(\mathcal{G}, \overline{\mathcal{G}}_r^{+}) \text{ en } (\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f))=(\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(f))$$

volgens st.2.2.5. Dus, met st.2.2.7:

$(\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f)) \leqq (\mu\times\mu_L)(\liminf \underline{\Theta}(t_n)) \leqq \liminf (\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(t_n))=$

$=\liminf \int t_n d\mu = \lim \int t_n d\mu = \limsup \int t_n d\mu =$

$=\limsup (\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(t_n)) \leqq (\mu\times\mu_L)(\limsup \overline{\Theta}(t_n)) \leqq (\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(f)).$

Dus:

$$\int f \, d\mu = (\mu\times\mu_L)(\underline{\Theta}(f)) = (\mu\times\mu_L)(\overline{\Theta}(f)) = \lim_{n\to\infty} \int t_n \, d\mu.$$

Stel nu dat $f \geqq 0$ sommeerbaar is.
Dan merken we eerst op dat de volgende rijen vzn:

$$A_N = \{(\omega,x) \mid N \leqq x \leqq f(\omega)\}$$
$$B_M = \{(\omega,x) \mid 0 \leqq x < f(\omega) < \tfrac{1}{M}\}$$

beide niet-stijgend zijn, en dat bovendien:

$$A_N \subset \overline{\Theta}(f) \quad \text{en } B_M \subset \underline{\Theta}(f).$$

verder

$$A = \lim_{N\to\infty} A_N = (\{\omega \mid f(\omega)=\infty\}, \{\infty\}) \quad \text{en } B = \lim_{M\to\infty} B_M = \emptyset .$$

dus:

$$\lim_{N\to\infty} (\mu\times\mu_L)(A_N) = \lim_{M\to\infty} (\mu\times\mu_L)(B_M) = 0.$$

Voor alle natuurlijke n is het dus mogelijk de getallen $M(n)$ en $N(n)$ zo te bepalen dat

1) $M(n+1) \geqq M(n) + 1$, $N(n+1) \geqq N(n)+1$, $N(n) > \frac{1}{M(n)}$, en

2) $(\mu\times\mu_L)(A_{N(n)}) < \frac{1}{3n}$ en $(\mu\times\mu_L)(B_{M(n)}) < \frac{1}{3n}$.

Bepaal nu de vzn:

$\Omega_1(n) = \{\omega \mid f(\omega) \geqq N(n)\}$; $\Omega_2(n) = \{\omega \mid f(\omega) < \frac{1}{M(n)}\}$;

$\Omega_3(n) = \Omega - (\Omega_1(n) \cup \Omega_2(n))$.

Dan geldt:

$$(\Omega_1(n) \cup \Omega_3(n), [0, \tfrac{1}{M(n)})) \subset \underline{\Theta}(f),$$

dus:

$$\mu(\Omega_1(n) \cup \Omega_3(n)) . \frac{1}{M(n)} \leqq \int f \, d\mu < \infty ;$$

dus:

$$\mu(\Omega_3(n)) \leqq \mu(\Omega_1(n) \cup \Omega_3(n)) < \infty .$$

Nu voeren we in:

$$t_n^{\pm} = N(n) \, \chi_{\Omega_1(n)} + \sum_{k=1}^{T} \alpha_k^{\pm} \, \chi_{\Lambda_k},$$

met

$$\Lambda_k = \left\{ \omega \,\middle|\, \frac{1}{M(n)} + (k-1)\varepsilon \leqq f(\omega) < \frac{1}{M(n)} + k\,\varepsilon \right\};$$

$$T = 1 + \left[3n . \mu(\Omega_3(n)) . \left(N(n) - \frac{1}{M(n)}\right) \right] \quad ; \; T\,\varepsilon = N(n) - \frac{1}{M(n)} \; ;$$

$$\alpha_k^{+} = k\,\varepsilon + \frac{1}{M(n)} \; ; \quad \alpha_k^{-} = (k-1)\,\varepsilon + \frac{1}{M(n)} .$$

Dan volgt direct

$$T > 3\,n . \mu(\Omega_3(n)) . \left(N(n) - \frac{1}{M(n)}\right),$$

dus

(1) $$\varepsilon < \frac{1}{3\,n . \mu(\Omega_3(n))} .$$

Dan geldt dus voor $A = \int f \, d\mu - \int t_n^- \, d\mu$ én voor $A = \int t_n^+ d\mu - \int f \, d\mu$:

$$0 \leqq A < (\mu \times \mu_L)(A_{N(n)} \cup B_{M(n)}) + \varepsilon . \mu(\Omega_3(n)) < \frac{1}{n} .$$

Dus:

$$\lim_{n\to\infty} \int t_n^+ \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int t_n^- \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty .$$

Verder geldt voor $n \to \infty$:

$$\Omega_1(n) \downarrow \{\omega \mid f(\omega) = \infty\} \text{ en } \Omega_2(n) \downarrow \{\omega \mid f(\omega) = 0\} .$$

Dus voor iedere ω met $0 < f(\omega) < \infty$ is er een n_o, zo dat voor $n > n_o$ geldt $\omega \in \Omega_3(n)$ en dus:

$$0 \leqq f(\omega) - t_n^-(\omega) < \varepsilon(n) \quad \text{en} \quad 0 < t_n^+(\omega) - f(\omega) \leqq \varepsilon(n).$$

$\varepsilon(n) \to 0$ voor $n \to \infty$ (zie (1); $\mu(\Omega_3(n))$ stijgend), dus voor alle $\omega \in \Omega_3(n)$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^-(\omega) = \lim_{n\to\infty} t_n^+(\omega) = f(\omega).$$

Voor ω met $f(\omega) = \infty$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{\pm}(\omega) = \lim_{n\to\infty} N(n) = \infty = f(\omega);$$

en voor ω met $f(\omega)=0$:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^{\pm}(\omega) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(\omega) .$$

Hiermee is de stelling voor niet-negatieve f bewezen. Voor willekeurige f kan men gemakkelijk met behulp van het bovenstaande en met de splitsing $f=f^+-f^-$ de stelling bewijzen.

Opm:

1) $t_n^- \leqq f$.

2) Uit de constructie van t_n^- blijkt dat men altijd een trapfunctie $t_{\varepsilon,R,f}$ kan vinden die, bij voorgeschreven $\varepsilon>0$, $R>0$, $f \geqq 0$, $f \in S$, voldoet aan:

   a) $f(\omega) < R \Rightarrow 0 \leqq f(\omega) - t_{\varepsilon,R,f}(\omega) < \varepsilon$

   b) $f(\omega) \geqq R \Rightarrow t_{\varepsilon,R,f}(\omega) \geqq R$.

   c) $0 \leqq \int f\, d\mu - \int t_{\varepsilon,R,f}\, d\mu < \varepsilon$.

   Kies daartoe n.l. n zo groot dat voldaan is aan respectievelijk:

   i) $N(n) > R$

   ii) $\frac{1}{n} < \varepsilon$

   iii) $\frac{1}{M(n)} < \varepsilon$

   iv) $3\, n.\, \mu(\Omega_3(n)) > \frac{1}{\varepsilon}$.

3) Tenslotte merken we nog op, zonder nadere uitwerking, dat het bij gegeven f en $g \in S$, beide $\geqq 0$ en met $f \geqq g$, mogelijk is de benaderende trapfuncties $t_{\varepsilon,R,f}$ en $t_{\varepsilon',R',g}$ zo te kiezen dat $t_{\varepsilon,R,f} = t_{\varepsilon',R',g}$.

We geven nu een opsomming van een reeks eigenschappen van de door def. 2.2.6 t/m 2.2.8 gedefinieerde integraal. De eerste drie hebben betrekking op trapfuncties en zijn triviaal:

ST 1 Een trapfunctie
$$t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\Lambda_k},$$
met:
$$k \neq j \Rightarrow \Lambda_k \cap \Lambda_j = 0; \quad \Lambda_k \in \mathcal{G} \text{ voor alle } k,$$
is dan en slechts dan sommeerbaar als voor alle k geldt:
$$\alpha_k \in R \quad \text{voor } \mu(\Lambda_k) > 0 \text{ en } \mu(\Lambda_k) < \infty \text{ als } \alpha_k \neq 0.$$
t is dan en slechts dan integreerbaar als voor geen tweetal waarden k_1 en k_2 geldt:
$$\mu(\Lambda_{k_1}) > 0; \quad \mu(\Lambda_{k_2}) > 0 \quad ; \alpha_{k_1} = -\infty; \quad \alpha_{k_2} = +\infty.$$
Als t integreerbaar is geldt:
$$\int t \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(\Lambda_k).$$

ST 2 Voor $t \in ST(\mu)$ en $a \in R$ geldt: $at \in ST(\mu)$ en
$$\int at \, d\mu = a \int t \, d\mu .$$

ST 3 Voor $t_1, t_2 \in ST(\mu)$ geldt: $t_1+t_2 \in ST(\mu)$ en
$$\int (t_1+t_2) d\mu = \int t_1 \, d\mu + \int t_2 \, d\mu.$$

I 0 Als $u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{\Lambda_k}$ met $\Lambda_k \in \mathcal{G}$, en $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(\Lambda_k)$ is convergent (eventueel naar $\pm \infty$), dan is $u \in I(\mu)$ en $\int u \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \mu(\Lambda_k)$. Bewijs: triviaal.

I 1 Voor $f \in I(\mu)$; $N \in \mathcal{G}$; $\mu(N)=0$ geldt
$$\int_N f \, d\mu = 0.$$

Bewijs:

$$\underline{\theta}(f^{\pm}\chi_N) \subset (N, \left[0, \sup_{\omega\in N}\left| f(\omega)\right|\right)) ,$$

dus:

$$(\mu\times\mu_L)(\underline{\theta}(f^{\pm}\chi_N)) \leq \mu(N) . \sup_{\omega\in N}\left|f(\omega)\right| = 0,$$

dus:

$$\int_N f^{\pm}d\mu = 0, \text{ en dus } \int_N fd\mu = 0.$$

Opmerking:
$(\mu\times\mu_L)$ is een maat die verkregen is door uitbreiding van een inhoud, dus volledig (St.1.4.6). Dus geldt I1 ook voor vzn N' waarvoor $N' \subset N \in \mathcal{C}$, met $\mu(N)=0$ (anders gezegd: waarvoor $\mu^*(N')=0$).

I2 Voor $f \in I$; $\Lambda_k \in \mathcal{G}$ disjunct; $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = \Lambda$, geldt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Lambda_k} fd\mu = \int_{\Lambda} fd\mu .$$

Bewijs:
De vzn $\underline{\theta}(f^{\pm}\chi_{\Lambda_k})$ zijn disjunct en $\bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{\theta}(f^{\pm}\chi_{\Lambda_k}) = \underline{\theta}(f^{\pm}\chi_{\Lambda})$, dus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Lambda_k} f^{\pm}d\mu = \int_{\Lambda} f^{\pm}d\mu.$$

Als $f \in S$ volgt de bewering direct. Als $f \in I-S$ en bv $\int f^+d\mu = \infty$ en $\int f^-d\mu < \infty$, dan is $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Lambda_k} f^+d\mu = \infty$ en $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Lambda_k} f^-d\mu < \infty$ waaruit volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\int_{\Lambda_k} f^+d\mu - \int_{\Lambda_k} f^-d\mu\right\} = \infty .$$

I3 Als $f,g \in I$; $f=g$ μ- b.o., dan geldt: $\int fd\mu = \int gd\mu$.

Bewijs:
Zij $N = \{\omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}$, dan is $\mu^*(N) = 0$ en $g(\omega) = f(\omega)$ voor $\omega \in \overline{N}$.
Volgens I1 en I2 is verder $\int f^{\pm}d\mu = \int_N f^{\pm}d\mu + \int_{\overline{N}} f^{\pm}d\mu = 0 + \int_{\overline{N}} g^{\pm}d\mu =$

$$= \int_N g^{\pm}d\mu + \int_{\overline{N}} g^{\pm}d\mu = \int g^{\pm}d\mu ,$$

dus $\int fd\mu = \int gd\mu$.
Naar aanleiding hiervan geven we de volgende aanvullende definities:

Def. 2.2.7 * $M^{*}(\mu)=\{f \mid \exists_g g\in M(\mu)$ en $f=g$ μ-b.o.$\}$;
$I^{*}(\mu)=\{f \mid \exists_g g\in I(\mu)$ en $f=g$ μ- b.o.$\}$;
$S^{*}(\mu)=\{f \mid \exists_g g\in S(\mu)$ en $f=g$ μ-b.o.$\}$;
voor $f\in I^{*}(\mu)$ en $g\in I(\mu)$ met $f=g$ μ- b.o. is

$$\int f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int g d\mu .$$

St. 2.2.8 *: St.2.2.8 op pag. 112 geldt ook met $f\in S^{*}$
i.p.v. $f\in S$ en $\lim_{n\to\infty} t_n(w) = f(w)$ μ-b.o.
i.p.v. $\forall_w \lim_{n\to\infty} t_n(w)= f(w)$.

Bewijs: triviaal. Ook I 2 geldt voor $f\in I^{*}$ i.p.v. $f\in I$.

I 4 Voor $f\in S^{*}$, $a\in R$ geldt $af\in S^{*}$ en $\int af d\mu = a\int f d\mu$.

Bewijs:
Met st. 2.2.8* vinden we een rij sommeerbare trapfuncties $\{t_n\}$ met: $\lim_{n\to\infty} t_n(\omega)=f(\omega)$ μ-b.o. en $\lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu = \int f d\mu$.
Voor de rij sommeerbare trapfuncties $\{at_n\}$ geldt dus, met ST2: $\lim_{n\to\infty} at_n(\omega) = af(\omega)$ μ-b.o. en $-\infty<\lim_{n\to\infty}\int at_n d\mu = a\lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu<\infty$, dus, weer volgens st. 2.2.8*:

$$af\in S^{*} \text{ en } \int af d\mu = \lim_{n\to\infty}\int at_n d\mu = a.\lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu = a\int f d\mu.$$

I5 Als $f\in S^{*}$; $g\in S^{*}$, dan $f+g\in S^{*}$ en $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

Bewijs:
Volgens st. 2.2.8* zijn er rijen trapfuncties $\{t_n\}$ en $\{u_n\}$ met:
$\lim_{n\to\infty} t_n(\omega) = f(\omega)$ μ-b.o.; $\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = g(\omega)$ μ-b.o.;
$\lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu = \int f d\mu$ en $\lim_{n\to\infty}\int u_n d\mu = \int g d\mu$. Dus met ST. 3:
$\lim_{n\to\infty} (t_n(\omega)+u_n(\omega))=f(\omega)+g(\omega)$ μ-b.o.; $-\infty<\lim_{n\to\infty}\int (t_n+u_n)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu<\infty$, dus, weer volgens st. 2.2.8*:

$$\int (f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (t_n+u_n)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

<u>I6</u> ($f \in M^*$; $g \in I^*$; $f \geq g$ μ-b.o.; $\int g d\mu > -\infty$) $\Rightarrow$ $f \in I^*$ en $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

<u>Bewijs</u>:
Zij $\bar{N} = \{\omega | f(\omega) < g(\omega)\}$, dan is dus $\mu^*(\bar{N})=0$. Dan geldt, voor alle ω:
$f\ \chi_N \geq g\ \chi_N$, dus $f^+ \chi_N \geq g^+ \chi_N$ en $f^- \chi_N \leq g^- \chi_N$. Dus:

$\theta(f^{-}\chi_N) \subset \theta(g^{-}\chi_N) \Rightarrow \int f^{-}d\mu \leq \int g^{-}d\mu < \infty$ (omdat $\int g d\mu > -\infty$ is), dus $f \in I^{*}$. Geheel analoog vinden we: $\int f^{+}d\mu \geq \int g^{+}d\mu$, dus:

$$\int f d\mu = \int f^{+}d\mu - \int f^{-}d\mu \geq \int g^{+}d\mu - \int g^{-}d\mu = \int g\, d\mu.$$

Opmerking:

Op grond van symmetrie kan men ook inzien dat de volgende bewering juist is:

I6* ($f \in M^{*}$; $g \in I^{*}$; $f \leq g$ μ-b.o.; $\int g d\mu < \infty) \Rightarrow f \in I^{*}$ en $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
In het bijzonder geldt (neem $g(\omega)=0$ voor alle ω):
I6** ($f \in M^{*}$; $f \geq 0$ μ-b.o.$) \Rightarrow f \in I^{*}$ en $\int f d\mu \geq 0$.

I7 Voor $f \in S^{*}$ en $\Lambda \in \mathcal{G}$ geldt:

$$\mu(\Lambda) . \inf_{\omega \in \Lambda} f(\omega) \leq \int_{\Lambda} f d\mu \leq \mu(\Lambda) \; . \sup_{\omega \in \Lambda} f(\omega).$$

Bewijs:
De bewering volgt direct uit I6 (met $g_1(\omega) = \chi_{\Lambda} . \inf_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)$) en I6* (met $g_2(\omega) = \chi_{\Lambda} . \sup_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)$).

I8 (ongelijkheid van Chebyshev). Als $f \in S^{*}$ en $f \geq 0$ is, dan geldt voor elke constante $c>0$:

$$\mu(\{\omega | f(\omega) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int f d\mu.$$

Bewijs:

Stel $\Lambda = \{\omega | f(\omega) \geq c\}$. Dan geldt volgens I2 en I7:

$$\int f d\mu = \int_{\Lambda} f d\mu + \int_{\bar{\Lambda}} f d\mu \geq \int_{\Lambda} f d\mu \geq \int_{\Lambda} c d\mu = c \; \mu(\Lambda),$$

dus

$$\mu(\Lambda) \leq \frac{1}{c} \int f d\mu .$$

I9 Als $f \in M^{*}$; $g \in S^{*}$; $-\infty < m = \inf f(\omega) \leq M = \sup f(\omega) < \infty$; $g \geq 0$ is, dan geldt:

$$fg \in S^{*} \text{ en } \exists_{a \in R}\; m \leq a \leq M \text{ en } \int fg d\mu = a \int g d\mu .$$

Bewijs:

$mg \leqq fg \leqq Mg$, dus volgens I4 en I6 is $fg \in I^*$ en, ook volgens I6:

$-\infty < m \int g d\mu = \int mg d\mu \leqq \int fg d\mu \leqq \int Mg d\mu = M \int g d\mu < \infty$.

Daaruit volgt onmiddellijk de bewering.

I10 $\int |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f=0$ μ-b.o.

Bewijs:

$$\int |f| d\mu = 0 \overset{(I8)}{\Longleftrightarrow} \forall_{n\in N}\, \mu(\{\omega \mid |f(\omega)| \geqq \tfrac{1}{n}\}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{\omega \mid \tfrac{1}{n} \geqq |f(\omega)| > \tfrac{1}{n+1}\}) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \mu(\{\omega \mid |f(\omega)| > 0\}) = 0 \Leftrightarrow f=0 \quad \mu\text{-b.o.}$$

I11 $f \in S^* \Longrightarrow |f| \in S^*$ en

$$\left|\int f d\mu\right| \leqq \int |f| d\mu.$$

Bewijs:

$f \in S^* \Longrightarrow 0 \leqq \int f^{\pm} d\mu < \infty$, dus, volgens I5 $|f| = f^+ + f^- \in S^*$ en

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leqq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

I12

$g \in S^*$; $f \in M^*$; $|f| \leqq |g|$ μ-b.o. $\Longrightarrow f \in S^*$.

Bewijs:

Volgens I11: $|g| \in S^*$, dus volgens I6 $|f| \in I^*$ en

$$0 \leqq \int |f| d\mu \leqq \int |g| d\mu < \infty ,$$

dus $|f| \in S^*$. Bovendien

$$0 \leqq f^{\pm} \leqq |f|$$

en $f^{\pm} \in M^*$, dus volgens I6:

$$0 \leqq \int f^{\pm} d\mu \leqq \int |f| d\mu < \infty ,$$

dus $f \in S^*$.

I13 $f \in S^* \Longrightarrow \int f d\mu = \lim\limits_{a\to\infty} \int_{\Lambda_a} f d\mu$, met $\Lambda_a = \{\omega \mid |f(\omega)| \leqq a\}$.

Bewijs:

Λ_a is een stijgende rij en $\Lambda_a \uparrow \Lambda_\infty = \{\omega \mid |f(\omega)| < \infty\}$. Omdat $f \in S^*$, geldt $\mu^*(\bar{\Lambda}_\infty) = 0$. (bv. uit I8). Dan is, met $\Lambda'_n = \Lambda_n - \Lambda_{n-1}$ voor $n > 1$

en $\Lambda_1' = \Lambda_1$, en volgens I1 en I2:

$$\int f d\mu = \int_{\Lambda_\infty} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Lambda'_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ldots = \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_n} f d\mu .$$

I14 $f \in I^{*} \Longrightarrow (\forall_{\Lambda\in\mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f=0 \ \mu\text{-b.o.})$.

Bewijs:

Zij $\Lambda^+(f) = \{\omega | f(\omega) > 0\}$; $\Lambda^-(f) = \{\omega | f(\omega) < 0\}$; $\Lambda^0(f) = \{\omega | f(\omega) = 0\}$.

Dan geldt dus

$\forall_{\Lambda\in\mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu = 0 \Longrightarrow \int_{\Lambda^+(f)} f d\mu = \int_{\Lambda^-(f)} f d\mu = 0$, dus, met I8:

$\forall_{c>0}\ \mu(\{\omega | f(\omega) \geqq c\}) \leqq \frac{1}{c} \int_{\Lambda^+(f)} f d\mu = 0$ en dus $\mu(\{\omega | f(\omega) > 0\}) = 0$

en $\forall_{c>0}\ \mu(\{\omega | f(\omega) \leqq -c\}) \leqq \frac{1}{c} \int_{\Lambda^-(f)} (-f) d\mu = 0$ en dus $\mu(\{\omega | f(\omega) < 0\}) = 0$.

Dus $\mu(\{\omega | f(\omega) \neq 0\}) = 0 \Longleftrightarrow f=0 \ \mu$- b.o.

In andere richting is de bewering een direct gevolg van achtereenvolgens I11 en I10.

I15 $f, g \in S^{*} \Longrightarrow (f \leqq g \ \mu\text{-b.o.} \Longleftrightarrow \forall_{\Lambda\in\mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu \leqq \int_\Lambda g d\mu)$.

Bewijs:

"$\Longrightarrow$" volgt direct uit I6. Zij nu $\forall_{\Lambda\in\mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu \leqq \int_\Lambda g d\mu$ en

$\Lambda_1 = \{\omega | f(\omega) \leqq g(\omega)\}$; $\Lambda_{2,\varepsilon} = \{\omega | f(\omega) > g(\omega) + \varepsilon\}$, dan is dus, voor alle

$\varepsilon > 0$, $\int_{\Lambda_{2,\varepsilon}} f d\mu \leqq \int_{\Lambda_{2,\varepsilon}} g d\mu \Longrightarrow \int_{\Lambda_{2,\varepsilon}} (f-g) d\mu \leqq 0$ en, volgens I7

$\int_{\Lambda_{2,\varepsilon}} (f-g) d\mu \geqq \varepsilon\mu(\Lambda_{2,\varepsilon})$, dus $\mu(\Lambda_{2,\varepsilon}) = 0$ voor alle $\varepsilon > 0 \Longrightarrow$

$$\mu(\{\omega | f(\omega) > g(\omega)\}) = 0 \Longrightarrow f \leqq g \ \mu\text{-b.o.}$$

I16 $f \in S^{*} \Longrightarrow \left(\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{\Lambda\in\mathcal{G}} \mu(\Lambda) < \delta \Longrightarrow \left|\int_\Lambda f d\mu\right| < \varepsilon\right)$.

Bewijs:

Volgens I11 zijn we klaar als we de bewering bewezen hebben voor

$f \geqq 0$. Volgens I13 is er dan een a zodat

$$\int_{\Lambda_a} f d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon ;$$

Voor $\omega \in \Lambda_a$ geldt $0 \leqq f(\omega) \leqq a$, dus met I7;

$$\int_\Lambda f d\mu = \int_{\Lambda \cap \Lambda_a} f d\mu + \int_{\Lambda \cap \bar{\Lambda}_a} f d\mu < a\,\mu(\Lambda \cap \Lambda_a) + \frac{1}{2}\varepsilon \leqq a\,\mu(\Lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon .$$

Door $\delta < \frac{\varepsilon}{2a}$ te kiezen is dan, als $\mu(\Lambda) < \delta$ is:

$$\int_\Lambda f d\mu \leqq a\,\mu(\Lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

<u>St. 2.2.9</u> (gemajoreerde convergentie)[1]. Als, voor alle natuurlijke n, $f_n \in M^*(\mu)$ en er is een $g \in S^*(\mu)$, zodat $|f_n| \leqq g$ μ-b.o. voor alle n, dan zijn $p = \lim\inf f_n$ en $q = \lim\sup f_n$ sommeerbaar en voor alle $\Lambda \in \mathcal{G}$ geldt:

$$-\int_\Lambda g d\mu \leqq \int_\Lambda p d\mu \leqq \lim\inf \int_\Lambda f_n\, d\mu \leqq \lim\sup \int_\Lambda f_n d\mu \leqq \int_\Lambda q d\mu \leqq \int g d\mu .$$

In het bijzonder: als bovendien $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$ μ-b.o. bestaat dan is $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in S^*$ en

$$\int_\Lambda \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda f_n\, d\mu .$$

<u>Bewijs</u>:

Volgens st. 2.1.6 geldt $p, q \in M^*$. Verder $|p| \leqq g$ en $|q| \leqq g$ μ-b.o. (de uitzonderings vz N is een deelvz van $\{\omega \mid \exists_n\ |f_n(\omega)| > g(\omega)\} =$
$= \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid |f_n(\omega)| > g(\omega)\}$ en dat is een μ- nulvz.). Nu geldt:

$$p^+ = \lim\inf f_n^+ \text{ en } q^+ = \lim\sup f_n^+;$$

dus, volgens st. 2.2.4:

$$\underline{\theta}'(p^+) = \underline{\theta}'(\lim\inf f_n^+) \subset \lim\inf \underline{\theta}'(f_n^+) \subset \lim\sup \overline{\theta}'(f_n^+) \subset$$

$$\subset \overline{\theta}'(\lim\sup f_n^+) = \overline{\theta}'(q^+) \subset \overline{\theta}'(|q|) \subset \overline{\theta}'(g),$$

waarbij $\theta'(h) = \theta(h\,\chi_{\Lambda - N})$. Dus:

(1) $0 \leqq \int_\Lambda p^+ d\mu \leqq \lim\inf \int_\Lambda f_n^+\, d\mu \leqq$

1) De eerste bewering van de stelling komt in de literatuur voor als het lemma van Fatou.

$\leq \limsup \int_\Lambda f_n^+ d\mu \leq \int_\Lambda q^+ d\mu \leq \int_\Lambda g d\mu < \infty$.

Analoog:

$p^- = \limsup f_n^-$ en $q^- = \liminf f_n^-$,

dus:

$0 \leq \int_\Lambda q^- d\mu \leq \liminf \int_\Lambda f_n^- d\mu \leq \limsup \int_\Lambda f_n^- d\mu \leq \int_\Lambda p^- d\mu \leq \int_\Lambda g d\mu < \infty$.

Daaruit volgt, door met -1 te vermenigvuldigen:

(2) $-\infty \leq -\int_\Lambda g d\mu \leq -\int_\Lambda p^- d\mu \leq \liminf \left(-\int_\Lambda f_n^- d\mu\right) \leq$

$\leq \limsup \left(-\int_\Lambda f_n^- d\mu\right) \leq -\int_\Lambda q^- d\mu \leq 0$.

Door (1) en (2) op te tellen vinden we dan:

$$-\int_\Lambda g d\mu \leq \int_\Lambda p d\mu \leq \liminf \int_\Lambda f_n^+ d\mu + \liminf \left(-\int_\Lambda f_n^- d\mu\right) \leq \liminf \int_\Lambda f_n \, d\mu \leq$$

$$\leq \limsup \int_\Lambda f_n d\mu \leq \limsup \int_\Lambda f_n^+ d\mu + \limsup \left(-\int_\Lambda f_n^- d\mu\right) \leq \int_\Lambda q d\mu \leq \int_\Lambda g d\mu .$$

Daarmee is de eerste bewering van de stelling bewezen. De tweede bewering volgt nu uit: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-b.o. $\Rightarrow p = q$ μ-b.o., dus $\int_\Lambda p d\mu = \int_\Lambda q d\mu$, dus volgens het voorgaande:

$$\int_\Lambda f d\mu = \int_\Lambda p d\mu \leq \liminf \int_\Lambda f_n d\mu \leq \limsup \int_\Lambda f_n d\mu \leq \int_\Lambda q d\mu = \int_\Lambda f d\mu .$$

Dus: $\liminf \int_\Lambda f_n d\mu = \limsup \int_\Lambda f_n d\mu = \lim \int_\Lambda f_n d\mu = \int_\Lambda f d\mu$.

<u>St. 2.2.10</u> (Lebesgue). Als voor alle natuurlijke n geldt:

$f_n \in S^*$; $f_n \leq f_{n+1}$ μ-b.o.; $-\infty < \int f_n \, d\mu \leq C < \infty$ dan bestaat $\lim_{n\to\infty} f_n$ μ-b.o., en voor iedere $f \in M^*$ met $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-b.o, geldt $f \in S^*$ en

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu .$$

<u>Bewijs</u>:

We veronderstellen dat $f_1 \geq 0$ μ-b.o. Dan volgt de juistheid van de bewering in het algemene geval uit de overweging dat $g_n = f_n - f_1 \geq 0$ μ-b.o. is, terwijl de rij g_n aan de voorwaarden van de stelling voldoet.

Laat $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-b.o. zijn.

Uit I6 en st 2.1.5 volgt $f \in I^*$. Verder, als we de volgende rij vzn invoeren:

$$\Lambda_r = \{\omega \mid f(\omega) \leq r\},$$

dan geldt dat Λ_r een niet dalende rij is voor $r \to \infty$ en

$$\Lambda_r \uparrow \{\omega \mid f(\omega) < \infty\} \overset{\text{afk}}{=} \Lambda_\infty$$

Verder is:

$$\bar{\Lambda}_\infty = \{\omega | f(\omega) = \infty\} \subset N \cup \{\omega | \forall_{r>0} \exists_n \ f_n(\omega) > r\} = N \cup \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} M_{n,r}$$

met

$$N \subset \{\omega | f(\omega) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ of } \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ bestaat niet}\} \text{ , dus}$$

$\mu^*(N)=0$,

en

$$M_{n,r} = \{\omega | f_n(\omega) > r\} .$$

Nu geldt, volgens I8:

$$\mu(M_{n,r}) \leqq \frac{1}{r} \int f_n d\mu \leqq \frac{C}{r} \quad ,$$

dus

$$\mu^*(\bar{\Lambda}_\infty) \leqq \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(M_{n,r}) \leqq \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{C}{r} = 0,$$

dus

$$\mu^*(\bar{\Lambda}_\infty) = 0.$$

We bepalen nu de trapfuncties t_n zo, dat (zie opm. 2 en 3 na st 2.2.8, houd rekening met $\mu^*(\bar{\Lambda}_\infty) = 0$):

a) $\forall_{\omega\in\Lambda_\infty} \ t_n(\omega) \leqq f_n(\omega)$ en $t_n(\omega) \leqq t_{n+1}(\omega)$; $\forall_{\omega\in\bar{\Lambda}_\infty} \ t_n(\omega) = \infty$;

b) Voor $\omega\in\Lambda_n$ geldt $f_n(\omega) - t_n(\omega) < \frac{1}{n}$;

c) $0 \leqq \int f_n d\mu - \int t_n d\mu < \frac{1}{n}$.

Voor $\omega\in\Lambda_\infty$ geldt nu:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N \ n > N \Longrightarrow |f(\omega) - t_n(\omega)| < \varepsilon .$$

Kies daartoe n.l. N zo groot, dat voor $n > N$ voldaan is aan:

1° $\omega \in \Lambda_n$

2° $n^{-1} < \frac{1}{2}\varepsilon$

3° $f(\omega) - f_n(\omega) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Dus, voor $\omega \in \Lambda_\infty$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\omega) = f(\omega).$$

Verder geldt, volgens I6, voor alle n:

$$\int t_n d\mu \leqq \int t_{n+1} d\mu \leqq \int f_{n+1}\, d\mu \leqq C,$$

dus $\int t_n d\mu$ is een niet-dalende, naar boven begrensde rij en is dus convergent met eindige limiet. Op grond van st. 2.2.8 (zie ook opm. na Def. 2.2.7*) geldt dus:

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu .$$

Maar

$$0 \leqq \int f_n d\mu - \int t_n d\mu < \frac{1}{n},$$

dus:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu = \int f d\mu .$$

<u>Gevolgen</u>:

<u>I16</u> Als $f_t \in M$ voor alle $t \in [\alpha, \beta]$, $h \in S^*$, $\forall_\omega \forall_t \; |f(\omega, t)| < h(\omega)$, f_t is continu in $t=t_0$ voor μ-b.a. ω, dan is

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int f_t d\mu$$

continu in $t=t_0$.

<u>Bewijs</u>:

Voor iedere rij reële getallen $t_1, t_2, \ldots$ met $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ volgt uit st. 2.2.9, toegepast op de rij $f_n = f_{t_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \varphi(t_0).$$

I17 Als voor zekere $b > 0$ geldt: $f_t \in M$ voor alle $t \in (t_0 - b,\ t_0 + b)$, $\frac{d}{dt} f_t$ bestaat in $t = t_0$ voor μ-b.a. ω, $f_{t_0} \in S$, terwijl $h \in S^*$ en N met $\mu^*(N) = 0$ bestaan zodat

$\exists_{c>0} \quad \forall_{\omega \in \bar{N}} \quad 0 < |\delta| < c \Rightarrow \left| \delta^{-1} \{ f_{t_0+\delta}(\omega) - f_{t_0}(\omega) \} \right| \leq h(\omega)$,

dan is $\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int f_t \, d\mu$ differentieerbaar voor $t = t_0$ en

$$\varphi'(t_0) = \int \left[\frac{df_t}{dt} \right]_{t=t_0} d\mu .$$

Bewijs:

Als bij I16½, met de rij $f_n = \delta_n^{-1} (f_{t_0+\delta_n} - f_{t_0})$ waarbij $|\delta_n| < c$ en $\delta_n \to 0$.

I18 Als $\mu(\Omega)\ \infty$, $f_t \in S$ voor alle $t \in [\alpha, \beta]$, $\frac{d}{dt} f_t$ bestaat voor alle ω en alle $t \in [\alpha, \beta]$; $h \in S$, $\forall_\omega \forall_t \, |f_t(\omega)| \leq h(\omega)$, dan is $\frac{d}{dt} f_t \in S^*$ en

$$\forall_{t \in [\alpha,\beta]} \ \frac{d}{dt} \int f_t \, d\mu = \int \frac{d}{dt} f_t \cdot d\mu .$$

Voor het bewijs van deze bewering gebruikt men de rij functies $f_n = (t_n - t)^{-1} (f_{t_n} - f_t)$ en de stelling van Egorov (zie bv. Zaanen, Lineair Analysis, pag. 31).

I19 Als $\Lambda_n \in \mathcal{G}$ voor alle natuurlijke n, $\Lambda_n \uparrow \Lambda$, $\mu(\bar{\Lambda}) = 0$; $f \chi_{\Lambda_n} \in S^*$, en er is een $C < \infty$ met voor alle n $\int_{\Lambda_n} f d\mu \leq C$, dan is $f \in S^*$ en

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Lambda_n} f d\mu = \int f d\mu \leq C.$$

Bewijs:

Pas st. 2.2.10 toe op de rij functies $f_n = f \chi_{\Lambda_n}$.

De stellingen I16½ t/m I18 zijn niet zo scherp mogelijk geformuleerd.

Men kan echter in het algemeen niet de voorwaarden afzwakken tot (bv. in I16½):

$\forall_t\ f_t \in M^*$, omdat dan in het algemeen de vereniging over t van de verzamelingen waarop f_t niet meetbaar is geen μ-nulvz meer zal zijn.

We kunnen het merendeel van de tot dusver gevonden resultaten samenvatten door gebruik te maken van terminologie uit de lineaire analyse. Daartoe voeren we nog de volgende notaties in:

$$J \overset{\text{def}}{=} \{ f \mid \mu^*(\{\omega \mid f(\omega) \neq 0\}) = 0 \}$$

$$I_\mu(f,\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \int_\Lambda f d\mu \ ; \ I_\mu(f) \overset{\text{def}}{=} I_\mu(f,\Omega); \ \|f\| \overset{\text{def}}{=} I_\mu(|f|) .$$

Dan geldt

St. 2.2.11 a) $S^*(\mu)$ en $S(\mu)$ zijn lineaire ruimten.

b) $J \subset S^*(\mu)$ en J is een ideaal.

c) $\bar{S} \overset{\text{def}}{=} S^*(\mu)/J$ is een lineaire ruimte.

d) $I_\mu(f,\Lambda)$ is, voor vaste $f \in S^*(\mu)$, een σ-additieve vzfunctie, gedefinieerd op $\mathcal{G}$, die absoluut continu is t.o.v. μ. $I_\mu(f,\Lambda)$ is dan en slechts dan een maat als $f \geqq 0$ μ-b.o.

e) $I_\mu(f,\Lambda)$ en dus ook $I_\mu(f)$ en $\|f\|$, zijn constant op iedere $\bar{f} \in \bar{S}$. Als we, op grond daarvan, definiëren:

$I_\mu(\bar{f},\Lambda) = I_\mu(f,\Lambda)$; $I_\mu(\bar{f}) = I_\mu(f)$ en $\|\bar{f}\| = \|f\|$,

voor $\bar{f} \in \bar{S}$ en $f \in \bar{f}$, dan geldt:

$\|\bar{f}\|$ is een norm in $\bar{S}$.

f) $I_\mu(\bar{f})$ is een niet-negatieve, begrensde (dus continue) lineaire functionaal op $\bar{S}$.

g) $\bar{S}$ is volledig t.o.v. $\|\bar{f}\|$.

h) de vz $T(\mu)/(J \cap T(\mu))$ is dicht in $\bar{S}$ t.o.v. deze norm.

Bewijs:

a) I4 en I5

b) I1, I4, I5 en $f=0$ μ-b.o. $\Longrightarrow fg=0$ μ-b.o. voor alle $g \in S^*(\mu)$.

c) I4, I5 en I1.

d) I1, I2 en voor "slechts dan":

$$\mu(\{\omega \mid f(\omega)<0\})>0 \Longrightarrow \exists_{c<0}\, \mu(\{\omega \mid f(\omega) \leq c\}) > 0 \overset{(I7)}{\Longrightarrow} I_\mu(f,\{\omega \mid f(\omega) \leqq c\}) < 0.$$

e) I3 en def. 2.2.7* voor de eerste bewering; verder:
$\|\bar{f}\|=0 \Leftrightarrow \bar{f}=0$ volgens I10;
$\|a\bar{f}\| = |a| . \|\bar{f}\|$ volgens I4;
$\|\bar{f}+\bar{g}\| = I_\mu(|\bar{f}+\bar{g}|) \leqq I_\mu(|\bar{f}|+|\bar{g}|) = I_\mu(|\bar{f}|)+I_\mu(|\bar{g}|) = \|\bar{f}\|+\|\bar{g}\|$,
volgens I6 en I5.

f) lineaire functionaal: I4 en I5;
niet-negatief: I6**;
begrensd: I11.

h) St. 2.2.8, opm. na def. 2.2.7* en I3.

g) Stel dat, voor alle natuurlijke n $\bar{f}_n \in \bar{S}$ en dat

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|\bar{f}_n - \bar{f}_m\| = 0.$$

We moeten dan bewijzen dat er een $\bar{f}\in\bar{S}$ is, met

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{f}-\bar{f}_n\| = 0.$$

Daartoe bepalen we eerst een deelrij $\bar{g}_k = \bar{f}_{n_k}$, waarvoor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{g}_{k+1} - \bar{g}_k\| < \infty$$

is, op de volgende manier:

Kies voor n_1 de kleinste n waarvoor $\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\| < \frac{1}{2}$ voor alle $m > n$ en voor n_k de kleinste $n > n_{k-1}$ waarvoor $\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\| < (\frac{1}{2})^k$ voor alle $m > n$.

Stel dan:

$$\bar{g} = |\bar{g}_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n| .$$

Nu geldt, voor

$$\bar{h}_k = |\bar{g}_1| + \sum_{n=1}^{k} |\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n| ,$$

dat

$$\bar{h}_{k+1} \geqq \bar{h}_k \text{ en } \int \bar{h}_k d\mu \leqq \|\bar{g}_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n\| < \infty ,$$

zodat we st. 2.2.10 kunnen toepassen:

$$\bar{g}\in\bar{S} \text{ en } \int \bar{g} d\mu = \lim_{k\to\infty} \int \bar{h}_k d\mu = \|\bar{g}_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n\| .$$

Kies een $g \in \bar{g}$, dan geldt voor

$$\Lambda_{\infty} = \{\omega \,|\, |g(\omega)| \neq \infty\}$$

dat

$$\mu^{*}(\bar{\Lambda}_{\infty}) = 0,$$

omdat $g \in S^{*}$. Voor $\omega \in \Lambda_{\infty}$ is dus $\sum_{n=1}^{\infty}\{g_{n+1}(\omega) - g_n(\omega)\}$ absoluut convergent. We definiëren:

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ voor } \omega \in \bar{\Lambda}_{\infty} \\ g_1(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_{n+1}(\omega) - g_n(\omega)\} \quad \text{voor } \omega \in \Lambda_{\infty}. \end{cases}$$

Dan is $f \in M^{*}$ en $|f| \leqq g$ μ-b.o.. Dus, volgens st. 2.2.9 is $f \in S^{*}$, dus $\bar{f} \in \bar{S}$ en

$$\int \bar{f} d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \{\bar{g}_1 + \sum_{k=1}^{n} (\bar{g}_{k+1} - \bar{g}_k)\} \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \bar{g}_{n+1} d\mu \;.$$

Dus:

$$\lim_{n \to \infty} \|\bar{f} - \bar{g}_n\| = 0$$

en, omdat

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \|\bar{f}_m - \bar{g}_n\| = 0$$

is, volgt hieruit

$$\lim_{n \to \infty} \|\bar{f} - \bar{f}_n\| = 0 \;.$$

Hiermee is het bewijs van st. 2.2.11 voltooid.

We besluiten deze paragraaf met enkele opmerkingen over de relatie van het hierboven ingevoerde integraalbegrip met dat volgens Riemann. We herinneren aan de definitie van absolute R-integreerbaarheid: Een functie $f(x)$ is absoluut R-integreerbaar over een interval $I_{a,b}$ (eindig of oneindig) als $|f(x)|$ eigenlijk of oneigenlijk R-integreerbaar is over $I_{a,b}$.

St.2.2.12 Als $f(x)$ over het (eventueel oneindige) n-dimensionale interval $I_{a,b}$ absoluut R-integreerbaar is, dan is f over $I_{a,b}$ sommeerbaar (t.o.v. de Lebesgue maat μ_L) en:

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int_{I_{a,b}} f\, d\mu_L .$$

In het bijzonder geldt de bewering dus als $f(x)$ over het eindige interval $I_{a,b}$ eigenlijk R-integreerbaar is.

Bewijs:

Zij $f(x)$ eigenlijk R-integreerbaar over $I_{a,b}$ $(-\infty<a\leqq b<\infty)$ en laat $\{I_\rho^{(k)}\}$ een rij eindige disjuncte splitsingen van $I_{a,b}$ in deelintervallen $I_1^{(k)},\ldots,I_{\rho_k}^{(k)}$ zijn met $\delta_k=\max\limits_{\rho} \mu_L(I_\rho^{(k)})$; $\sup\limits_{x\in I_\rho^{(k)}} f(x)=\bar{f}_\rho^{(k)}$; $\inf\limits_{x\in I_\rho^{(k)}} f(x)=\underline{f}_\rho^{(k)}$ en $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$. Dan geldt volgens Riemann:

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\sum_\rho \bar{f}_\rho^{(k)}\mu_L(I_\rho^{(k)}) = \lim_{k\to\infty}\sum_\rho \underline{f}^{(k)}\mu_L(I_\rho^{(k)}).$$

Wegens de eigenlijke R-integreerbaarheid van f kunnen we op de rij trapfuncties

$$t_k = \sum_\rho f_\rho^{(k)}\chi_{I_\rho^{(k)}} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

st.2.2.8 toepassen, dus $f\chi_{I_{a,b}}\in S(\mu_L)$. Volgens I7 en I2 is verder

$$\sum_\rho \underline{f}_\rho^{(k)}\mu_L(I_\rho^{(k)}) \leqq \int_{I_{a,b}} f\, d\mu_L = \sum_\rho \bar{f}_\rho^{(k)}\mu_L(I_\rho^{(k)}) .$$

Door de limietovergang $k\to\infty$ uit te voeren volgt de bewering voor

dit geval onmiddellijk.
Als f absoluut integreerbaar is over $I_{a,b}(-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty)$, dan is er een stijgende rij eindige intervallen I_k met $\lim_{k\to\infty} I_k = I_{a,b}$ en $f(x)$ is voor alle k eigenlijk R-integreerbaar over I_k. Dan volgt de bewering door successievelijk toe te passen I19 (op $|f|\,\chi_{I_{a,b}}$ en de rij intervallen $I_k \cup \bar{I}_{a,b}$) en st.2.2.9 (op $f_k = f\,\chi_{I_k}$ met $g = |f|\,\chi_{I_{a,b}}$).

Opmerkingen:

1) De eis van absolute R-integreerbaarheid kan niet gemist worden, zoals kan blijken uit het volgende voorbeeld:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\,(x^2 \sin^2 x^{-2})$$

is over $[0,1]$ oneigenlijk R-integreerbaar, maar niet absoluut R-integreerbaar. f is ook niet sommeerbaar over $[0,1]$. Om dit te bewijzen toont men eerst aan dat:

$$\int_{\Lambda_n} |f|\; d\mu_L \geqq \{\pi(6n+1)\}^{-1} \quad ,$$

waarin

$$\Lambda_n = \left[\{\pi(2n+\tfrac{1}{3})\}^{-\frac{1}{2}}\,,\{\pi(2n-\tfrac{1}{3})\}^{-\frac{1}{2}}\right]$$

is, zodat

$$\int_{[0,1]} |f|\; d\mu_L \geqq \sum_n \{\pi(6n+1)\}^{-1} = \infty$$

is, dus:

$$f \notin S\,(\mu_L).$$

Het is echter wel mogelijk om, net als bij R-integralen, oneigenlijke L-integralen te definiëren. In dit geval wordt dan

$$\int_{[0,1]} f\; d\mu_L \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[\varepsilon,1]} f\; d\mu_L \quad .$$

Deze oneigenlijke L-integraal is dus weer gelijk aan de corresponderende oneigenlijke R-integraal.

2) Voor toepassingen in de theorie van de stochastische processen is de volgende gedeeltelijke omkering van st.2.2.12 van

belang (we formuleren de bewering voor R^1. Het is echter direct in te zien dat de bewering juist blijft voor R^n):

I20 Zij f sommeerbaar over $[a,b]$ $(-\infty < a \leqq b < \infty)$

$$R[f;s_1,\ldots,s_n] = \sum_{k=0}^{n} (s_{k+1}-s_k)f(s_k);\ s_0=a \leqq s_1 \leqq \ldots \leqq s_n \leqq s_{n+1}=b;$$

$$\delta = \max_k \{s_{k+1}-s_k\};$$

voor $0 \leqq t \leqq b-a$ is

$R_t[f;s_1,\ldots,s_n] = R[f;s'_1,\ldots,s'_n]$, waarin de getallen $s'_1,\ldots,s'_n$ uit $s_1,\ldots,s_n$ ontstaan door de getallen $s_1+t,\ldots,s_k+t,\ s_{k+1}+t-(b-a),\ldots,s_n+t-(b-a)$ (met $s_k+t \leqq b$ en $s_{k+1}+t > b$), naar opklimmende grootte te rangschikken.

Dan geldt:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_0^{b-a} \left| R_t[f;s_1,\ldots s_n] - \int_{[a,b]} f\, d\mu_L \right| dt = 0 .$$

Men kan I20, enigszins onnauwkeurig, ook zo formuleren: Voor δ klein genoeg is de maat van de vz t-'s, waarvoor de Riemann-som $R_t[f;s_1,\ldots,s_n]$ geen goede benadering is van $\int_{[a,b]} f\, d\mu_L$, klein.

Voor het bewijs van I20 verwijzen we naar Doob p.63-64.

3) Als μ een intervalmaat is (zie par.1.5), F een bijbehorende verdelingsfunctie en f absoluut Riemann-Stieltjes integreerbaar over $I_{a,b}$ $(-\infty \leqq a \leqq b \leqq \infty)$ dan geldt: f is sommeerbaar over $I_{a,b}$ en

$$\int_{I_{a,b}} f\, d\mu = \int_{I_{a,b}} f(x)d\,F(x) .$$

Bewijs: als st.2.2.12.

2.3 Productmaat

We vinden, als bij meervoudige R-integralen, eerst een voorstelling van de door Def.2.2.2. geïntroduceerde productmaat als een integraal. Ter voorbereiding eerst:

St.2.3.1 Als G_ν $(\nu=1,2)$ σ-algebra's van deelvzn van Ω_ν zijn, dan geldt:

$$\Lambda \in {}^{\mathcal{B}}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \Longrightarrow \forall_{\omega_1 \in \Omega_1} \quad \Lambda_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2 .$$

Bewijs:
Beschouw de klasse $\mathcal{F}$ van deelvzn Λ van (Ω_1, Ω_2) waarvoor geldt:

$$\forall_{\omega_1 \in \Omega_1} \quad \Lambda_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2 .$$

Dan geldt:
1^o $\mathcal{F}$ is een σ-algebra, want:

$$(\bar{\Lambda})_{\omega_1} = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in \bar{\Lambda}\} = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \notin \Lambda\} = \overline{\{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda\}} = \overline{\Lambda_{\omega_1}},$$

dus:

$$\Lambda \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall_{\omega_1 \in \Omega_1} \quad \Lambda_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2 \Longrightarrow \forall_{\omega_1 \in \Omega_1} \quad \overline{\Lambda_{\omega_1}} \in \mathcal{G}_2 \Longrightarrow \forall_{\omega_1 \in \Omega_1} (\bar{\Lambda})_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2$$

$$\Longrightarrow \bar{\Lambda} \in \mathcal{F},$$

en

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k, \text{ met } \Lambda_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \Lambda_{\omega_1} = \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda\} = \{\omega_2 \mid \exists_k (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda_k\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in \Lambda_k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda_k)_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2 \Longrightarrow \Lambda \in \mathcal{F} .$$

2^o $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, want:

als $\Phi = \bigcup_{k=1}^{n} \Psi_k$ en $\Psi_k = (\Lambda_k^1, \Lambda_k^2)$ met $\Lambda_k^\nu \in \mathcal{G}_\nu$,

dan is:

$$\Phi_{\omega_1} = \bigcup_{k \in L(\omega_1)} \Lambda_k^2 , \text{ met } L(\omega_1) = \{k \mid \omega_1 \in \Lambda_k^1\} ,$$

dus:

$$\Phi_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2 .$$

Uit 1^o en 2^o volgt:

$$^{\mathcal{B}}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \subset \mathcal{F}$$

en daarmee is de stelling bewezen.

St.2.3.2 Als de maten μ_1 en μ_2, gedefinieerd op de σ-algebra's $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$ σ-finiet zijn, dan geldt voor $\Lambda \in {}^{\mathcal{B}}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$

en

$$f_\Lambda(\omega_1) \overset{\text{def}}{=} \mu_2(\Lambda_{\omega_1}), \text{ resp. } g_\Lambda(\omega_2) \overset{\text{def}}{=} \mu_1(\Lambda_{\omega_2}):$$

$f_\Lambda \in I^*(\mu_1)$; $g_\Lambda \in I^*(\mu_2)$ en

$$(\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda) = \int f_\Lambda \, d\mu_1 = \int g_\Lambda \, d\mu_2.$$

Bewijs:
We beschouwen eerst het geval dat Λ een aftelbare vereniging van elementen van $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ is. Zij:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \; ; \; \Gamma_k = (\Lambda_k^1, \Lambda_k^2) \text{ met } \Lambda_k^\nu \in \mathcal{G}_\nu; \; k \neq j \Rightarrow \Gamma_k \cap \Gamma_j = 0,$$

dan is:

$$\Lambda_{\omega_1} = \bigcup_{k \in L(\omega_1)} \Lambda_k^2, \text{ met } L(\omega_1) = \{k \mid \omega_1 \in \Lambda_k^1\},$$

dus:

$$f_\Lambda(\omega_1) = \mu_2(\Lambda_{\omega_1}) = \sum_{k \in L(\omega_1)} \mu_2(\Lambda_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(\Lambda_k^2) \chi_{\Lambda_k^1}(\omega_1),$$

zodat, volgens I0, $f_\Lambda \in I(\mu_1)$ en

$$\int f_\Lambda \, d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(\Lambda_k^2) . \mu_1(\Lambda_k^1) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_1 \times \mu_2)(\Gamma_k) = (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda).$$

We concluderen hieruit direct dat de bewering voor eindige $\mu_1(\Omega_1)$ en $\mu_2(\Omega_2)$ ook juist is voor limieten van dalende rijen vzn van deze vorm (limiet_overgang in het linkerlid volgens st.2.2.10, in het rechterlid volgens de σ-additiviteit) en voor de complementen van dit soort vzn. (want $f_{\bar{\Lambda}} = \mu_2(\Omega_2) - f_\Lambda$). Dus de bewering geldt voor alle vzn van de vorm:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,n} \text{ of } \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi'_{k,n}, \text{ met } \Phi_{k,n}, \Phi'_{k,n} \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 .$$

Vervolgens veronderstellen we $\Lambda \subset (\Lambda_1, \Lambda_2)$ met $\mu_1(\Lambda_1) . \mu_2(\Lambda_2) < \infty$ en $\Lambda \in {}^{\mathcal{B}}(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$. Volgens st.1.4.5 en 2.2.3 bestaan dan vzn Λ' en Λ'' met

$$\Lambda'' \subset \Lambda \subset \Lambda',$$
$$(\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda'') = (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda) = (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda')$$

en

$$\Lambda''=\bigcup_n \bigcap_k \Phi''_{n,k} \; ; \; \Lambda'=\bigcap_n \bigcup_k \Phi'_{n,k} \; ; \; \Phi''_{n,k} \text{ en } \Phi'_{n,k} \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 .$$

Volgens het voorgaande geldt nu dus:

$$\int f_{\Lambda''}\, d\mu_1=(\mu_1\times\mu_2)(\Lambda''_1)=(\mu_1\times\mu_2)(\Lambda)=(\mu_1\times\mu_2)(\Lambda')=\int f_{\Lambda'}\, d\mu_1,$$

en bovendien (uit $\Lambda''\subset\Lambda\subset\Lambda'$):

(2) $$f_{\Lambda''} \leqq f_{\Lambda} \leqq f_{\Lambda'} .$$

Dus

$$f_{\Lambda'}-f_{\Lambda''} \geqq 0 \text{ en } \int (f_{\Lambda'}-f_{\Lambda''})d\mu_1=0 \Longrightarrow f_{\Lambda'}=f_{\Lambda''} \quad \mu\text{-b.o.} ,$$

maar dan ook, volgens (2)

$$f_{\Lambda} = f_{\Lambda'} \qquad \mu\text{-b.o.} ,$$

dus

$$f_{\Lambda} \in S^*(\mu_1) \quad \text{en}$$

$$\int f_{\Lambda}\, d\mu_1 = (\mu_1\times\mu_2)(\Lambda) .$$

In het algemene geval splitsen we (Ω_1,Ω_2) in disjuncte vzn (Ω_1^k,Ω_2^j) met $\mu_\nu(\Omega_\nu^k)<\infty$. In ieder van die vzn kunnen we bovenstaande conclusie trekken. Dan gebruiken we:

$$f_{\Lambda} = \sum_{k,j} f_{\Lambda\cap(\Omega_1^k,\Omega_2^j)}$$

en de σ-additiviteit van $(\mu_1\times\mu_2)$ om met behulp van I2 ook voor dit geval de juistheid van de bewering aan te tonen. De tweede bewering: $(\mu_1\times\mu_2)(\Lambda)=\int g_{\Lambda}\, d\mu_2$, volgt direct uit symmetrieoverwegingen.

Gevolg: als $N \in {}^{B}(\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2)$ voldoet aan $(\mu_1\times\mu_2)(N)=0$, dan geldt voor μ_2-bijna alle ω_2: $\mu_1(N_{\omega_2})=0$.

<u>Bewijs</u>: $(\mu_1\times\mu_2)(N)=\int\mu_1(N_{\omega_2})d\mu_2=0$ en $\mu_1(N_{\omega_2})\geqq 0$. Daaruit volgt $\mu_1(N_{\omega_2})=0$ μ_2-b.o..

St.2.3.3. (Fubini) $(\Omega_\nu, \mathcal{G}_\nu, \mu_\nu)$ $(\nu = 1,2)$ zijn σ-finiete maatruimten. Dan geldt:

$$f \in S^*(\mu_1 \times \mu_2) \Longrightarrow f \in S^*(\mu_1)\ \mu_2\text{-b.o.};\ f \in S^*(\mu_2)\ \mu_1\text{-b.o.};$$

$$\int f d\mu_1 \in S^*(\mu_2);\ \int f d\mu_2 \in S^*(\mu_1) \quad \text{en}$$

$$\int f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int d\mu_1 \left\{ \int f d\mu_2 \right\} = \int d\mu_2 \left\{ \int f d\mu_1 \right\}.$$

Bewijs:
We bewijzen de stelling eerst voor sommeerbare trapfuncties. Zij

$$t(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\Lambda^k}(\omega_1, \omega_2)$$

een sommeerbare trapfunctie:

$$\forall_k \quad \Lambda^k \in {}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2);\ (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda^k) > 0 \Longrightarrow -\infty < \alpha_k < \infty;$$

$$(\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda^k) = \infty \Longrightarrow \alpha_k = 0,$$

dan is, enerzijds:

$$\int t d(\mu_1 \times \mu_2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda^k),$$

en anderzijds

$$\chi_{\Lambda^k}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{\Lambda^k_{\omega_1}}(\omega_2)$$

met (st.2.3.1 , st.2.3.2 en gevolg st.2.3.2):

$$\forall_k \quad \forall_{\omega_1} \quad \Lambda^k_{\omega_1} \in \mathcal{G}_2;\ (\mu_2(\Lambda^k_{\omega_1}) > 0 \Longrightarrow -\infty < \alpha_k < \infty)\ \mu_1\text{-b.o.};$$

$$(\mu_2(\Lambda^k_{\omega_1}) = \infty \Longrightarrow \alpha_k = 0)\ \mu_1\text{-b.o.}$$

Dus, voor μ_1-b.a. ω_1 is $t \in S^*(\mu_2)$ en

$$\int t d\mu_2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_2(\Lambda^k_{\omega_1}).$$

Dus (st.2.3.2):

$$\int t d\mu_2 \in S^*(\mu_1) \text{ en } \int d\mu_1 \left\{ \int t d\mu_2 \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mu_1 \times \mu_2)(\Lambda^k) = \int t d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Zij nu $f \in S^*(\mu_1 \times \mu_2)$. Dan is er volgens st.2.2.8* een monotoon niet-dalende rij sommeerbare trapfuncties $\{t_n(\omega_1, \omega_2)\}$ met:

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\omega_1,\omega_2) = f(\omega_1,\omega_2),\ (\mu_1\times\mu_2)\text{-b.o.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int t_n d(\mu_1\times\mu_2) \text{ bestaat en } = \int fd(\mu_1\times\mu_2).$$

Stel
$$g_n(\omega_2) = \int t_n d\mu_1$$

voor alle ω_2 waarvoor het rechterlid bestaat en

$$g_n(\omega_2) = 0$$

voor die ω_2 waarvoor $t_n \notin S^*(\mu_1)$. Dan geldt dus, volgens het bovenstaande, μ_2-b.o.:

$$\forall_n \quad g_n(\omega_2) = \int t_n d\mu_1$$

en

$$\int g_n d\mu_2 = \int d\mu_2 \left\{\int t_n d\mu_1\right\} = \int t_n d(\mu_1\times\mu_2),$$

dus:

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu_2 = \int fd(\mu_1\times\mu_2) < \infty$$

en

$$\forall_n\ \forall_{\omega_2}\ g_{n+1}(\omega_2) \geqq g_n(\omega_2),$$

dus

$$\int g_n d\mu_2 \leqq \int fd(\mu_1\times\mu_2) < \infty .$$

Dus:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega_2) < \infty \qquad \mu_2\text{-b.o.}$$

(vergelijk bewijs van st.2.2.10). Dus de trapfuncties t_n, als functies van ω, voldoen aan (zie gevolg van st.2.3.2):
Voor μ_2-b.a. ω_2 geldt

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\omega_1,\omega_2) = f(\omega_1,\omega_2) \quad \mu_1\text{-b.o.}$$

en

$$\lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu_1 < \infty .$$

Op de rij t_n kan dus voor μ_2-b.a. ω_2 st.2.2.8* toegepast worden: $f \in S^*(\mu_1)$ μ_2-b.o. en

$$\int fd\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int t_n d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega_2) \quad \mu_2\text{-b.o.}$$

Nu voldoet dus de rij functies g_n aan de eisen van st. 2.2.10, zodat geldt:

$$\lim \int g_n d\mu_2 = \int \lim g_n \, d\mu_2,$$

dus:

$$\int f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int d\mu_2 \left\{ \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu_1 \right\} =$$
$$= \int d\mu_2 \left\{ \int f d\mu_1 \right\}.$$

De tweede bewering van de stelling volgt uit symmetrie overwegingen. Daarmee is de stelling van Fubini bewezen. We besluiten deze paragraaf met twee opmerkingen:

1) De productmaat $\mu_1 \times \mu_2$ van Def.2.2.2 kan natuurlijk ook voortgebracht worden door het product van twee σ-additieve inhouden m_1 en m_2. Stel dat m_1 en m_2 σ-finiete σ-additieve inhouden zijn op de algebra's $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$, terwijl μ_1 en μ_2 de uitbreidingen van m_1 en m_2 tot de σ-algebra's ${}^B\mathcal{G}_1$ en ${}^B\mathcal{G}_2$ zijn. We kunnen dan de inhoud $m_1 \times m_2$ op $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ voortzetten tot een maat μ op ${}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ en ook de inhoud $\mu_1 \times \mu_2$ op ${}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2$ tot een maat ν op ${}^B({}^B\mathcal{G}_1 \times {}^B\mathcal{G}_2)(= {}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$ volgens pag.7). μ en ν stemmen dan overeen op de algebra $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ en zijn dus identiek (st.1.4.4). Het is dus geen beperking van de algemeenheid om bij het vormen van een maatproduct van σ-algebra's uit te gaan.

2) Stel dat 3 σ-finiete maatruimten $(\Omega_\nu, \mathcal{G}_\nu, \mu_\nu)$ $(\nu = 1,2,3)$ gegeven zijn. Beschouw de maten $\mu = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ en $\nu = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$. μ resp. ν ontstaan door uitbreiding van een inhoud op $\mathcal{G}_1 \times {}^B(\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3)$ resp. ${}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \times \mathcal{G}_3$. Het is direct duidelijk dat de twee inhouden overeenstemmen op de algebra $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3$. Uit

$${}^B({}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) \times \mathcal{G}_3) = {}^B(\mathcal{G}_1 \times {}^B(\mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3)) =$$
$$= {}^B(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3),$$

volgt dat μ en ν al ontstaan door uitbreiding van deze op $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3$ gedefinieerde inhoud. Dus $\mu = \nu$. Verder ligt het voor de hand om de maat die ontstaat door uitbreiding van de productinhoud op $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3$ te noteren als $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$. Hiermee is dus bewezen:

$$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3) = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3,$$

m.a.w. de vorming van (eindige) maatproducten is associatief.

2.4. De stelling van Radon-Nikodym

Zij ν een σ-additieve verzamelingsfunctie op een σ-algebra $\mathcal{G}$ van deelvzn van Ω (zie blz. 12). Dit houdt dus onder meer in dat $\Lambda \in \mathcal{G}$ impliceert $-\infty < \nu(\Lambda) \leqq \infty$. We voeren in:

Def.2.4.1. De vz $\Lambda \in \mathcal{G}$ heet positief (resp. negatief) met betrekking tot de σ-add. vz. functie ν als voor iedere $\Lambda' \in \mathcal{G}$ geldt

$$\nu(\Lambda \cap \Lambda') \geqq 0 \quad (\text{resp.} \leqq 0),$$

en bewijzen:

St.2.4.1. Bij iedere σ-additieve verzamelingsfunctie ν bestaat een splitsing van Ω in twee disjuncte vzn:

$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

zo dat Ω^+ een positieve en Ω^- een negatieve vz is met betrekking tot ν (splitsing van Hahn).

Bewijs.
Zij $\mathcal{K}^-$ de klasse van alle negatieve vzn uit $\mathcal{G}$ met betrekking tot ν. $0 \in \mathcal{K}^-$, dus $\mathcal{K}^-$ is niet leeg. Stel $\beta = \inf_{\Lambda \in \mathcal{K}^-} \nu(\Lambda)$. Kies een rij vzn $\{\Lambda_n\}$ uit $\mathcal{K}^-$ waarvoor $\lim_{n\to\infty} \nu(\Lambda_n) = \beta$. Dan is $\Omega^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ een negatieve vz (als vereniging van negatieve vzn), waarvoor

$$\nu(\Omega^-) = \beta,$$

want voor alle n geldt $\Lambda_n \subset \Omega^-$, $\Lambda_n \in \mathcal{K}^-$, $\Omega^- \in \mathcal{K}^-$, dus:

$$\nu(\Omega^-) = \nu(\Lambda_n) + \nu(\Omega^- - \Lambda_n) \leqq \nu(\Lambda_n),$$

dus

$$\nu(\Omega^-) \leqq \lim_{n\to\infty} \nu(\Lambda_n) = \beta,$$

en ook

$$\nu(\Omega^-) \geqq \beta \quad (\text{omdat } \Omega^- \in \mathcal{K}^-).$$

Stel

$$\Omega^+ = \Omega - \Omega^-,$$

en veronderstel dat Ω^+ geen positieve vz is, dus stel dat er een $\Lambda_0 \subset \Omega^+$ is met $\nu(\Lambda_0) < 0$. Λ_0 kan geen negatieve vz zijn, want dan zou $\Omega^- \cup \Lambda_0$ een negatieve vz zijn met $\nu(\Omega^- \cup \Lambda_0) < \beta$. Stel dat k_1 het kleinste natuurlijk getal is met de eigenschap dat Λ_0 nog een deelvz $\Lambda_1 \in \mathcal{G}$ bevat met $\nu(\Lambda_1) \geqq \frac{1}{k_1}$. Dan is

$$\nu(\Lambda_o-\Lambda_1) = \nu(\Lambda_o) - \nu(\Lambda_1) \leqq \nu(\Lambda_o) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Op $\Lambda_o - \Lambda_1$ kunnen we dan dezelfde redenering toepassen als op Λ_o en we vinden dan een vz $\Lambda_2 \subset \Lambda_o - \Lambda_1$ en een kleinste natuurlijk getal k_2 zo dat

$$\nu(\Lambda_2) \geqq \frac{1}{k_2} .$$

Zo doorgaande vinden we een rij van $\{\Lambda_n\}$ met:

$$\Lambda_n \subset \Lambda_o - \bigcup_1^{n-1} \Lambda_k$$

en

$$\nu(\Lambda_n) \geqq \frac{1}{k_n} .$$

Nu geldt: $-\infty < \nu(\Lambda_o) < 0$, dus voor iedere deelvz Λ van Λ_o geldt $|\nu(\Lambda)| < \infty$ (want $\nu(\Lambda_o) = \nu(\Lambda) + \nu(\Lambda_o - \Lambda)$). Dus, omdat de vzn Λ_n disjunct zijn en omdat:

$$\nu(\bigcup_1^{\infty} \Lambda_n) = \sum_1^{\infty} \nu(\Lambda_n) \geqq \sum_1^{\infty} \frac{1}{k_n} ,$$

is, moet

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{k_n} = 0$$

zijn. Dus, als we stellen

$$\Gamma_o = \Lambda_o - \bigcup_1^{\infty} \Lambda_n$$

geldt voor alle n dat Γ_o geen deelvzn meer heeft met

$$\nu(\Lambda) \geqq \frac{1}{k_n - 1} ,$$

dus Γ_o heeft geen deelvzn met

$$\nu(\Lambda) > 0,$$

dus Γ_o is een negatieve vz. Anderzijds is

$$\nu(\Gamma_o) = \nu(\Lambda_o) - \sum_1^{\infty} \nu(\Lambda_n) \leqq \nu(\Lambda_o) < 0$$

in strijd met de minimaliteit van Ω^-. Dus Ω^+ is een positieve vz.

<u>St.2.4.2.</u> Als $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$ twee Hahn-splitsingen van Ω met betrekking tot ν zijn, dan geldt:

$$\Lambda \in \mathcal{G} \Rightarrow \nu(\Lambda \cap \Omega^+) = \nu(\Lambda \cap \Omega_1^+) \quad \text{en} \quad \nu(\Lambda \cap \Omega^-) = \nu(\Lambda \cap \Omega_1^-).$$

Bewijs:

$$\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+) \subset \Lambda \cap \Omega^+ \Longrightarrow \nu(\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+)) \geqq 0$$

en

$$\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+) \subset \Lambda \cap \Omega_1^- \Longrightarrow \nu(\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+)) \leqq 0.$$

Dus

$$\nu(\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+)) = 0$$

en op grond van symmetrie:

$$\nu(\Lambda \cap (\Omega_1^+ - \Omega^+)) = 0.$$

Dus:

$$\nu(\Lambda \cap \Omega^+) = \nu(\Lambda \cap \Omega_1^+) + \nu(\Lambda \cap (\Omega^+ - \Omega_1^+)) - \nu(\Lambda \cap (\Omega_1^+ - \Omega^+)) = \nu(\Lambda \cap \Omega_1^+).$$

De rest is nu triviaal.

Op grond van deze laatste stelling kunnen we nu de volgende nieuwe vz functies definiëren:

Def.2.4.2. Voor $\Lambda \in \mathcal{G}$ is:

$$\nu^+(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \nu(\Lambda \cap \Omega^+); \quad \nu^-(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \nu(\Lambda \cap \Omega^-)$$

en

$$|\nu|(\Lambda) \overset{\text{def}}{=} \nu^+(\Lambda) - \nu^-(\Lambda),$$

als $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ een Hahn-splitsing is.

St.2.4.3. $\nu^+, -\nu^-$ en $|\nu|$ zijn maten op $\mathcal{G}$ met

a) $\nu^-(\Lambda) > -\infty$ voor alle $\Lambda \in \mathcal{G}$.

b) $\nu(\Lambda) = \nu^+(\Lambda) + \nu^-(\Lambda)$ voor alle $\Lambda \in \mathcal{G}$. (Splitsing van Jordan).

Bewijs:

a) $\nu^-(\Lambda) = \nu(\Lambda \cap \Omega^-) > -\infty$.

b) $\nu^+(\Lambda) + \nu^-(\Lambda) = \nu(\Lambda \cap \Omega^+) + \nu(\Lambda \cap \Omega^-) = \nu((\Lambda \cap \Omega^+) \cup (\Lambda \cap \Omega^-))$
$= \nu(\Lambda)$.

ν heet eindig resp. σ-finiet als ν^+ eindig resp. σ-finiet is.

Def.2.4.3. De σ-additieve vz functie ν heet absoluut continu t.o.v. de σ-additieve vz functie μ gedefinieerd op dezelfde σ-algebra $\mathcal{G}$, genoteerd

$$\nu << \mu,$$

als geldt:

$$\forall_{\Lambda \in \mathcal{G}} \quad \mu(\Lambda) = 0 \implies \nu(\Lambda) = 0.$$

St.2.4.4. Als ν en μ eindige maten zijn, ν niet identiek 0, $\nu << \mu$, dan is er een $\varepsilon > 0$ en een $\Lambda \in \mathcal{G}$ met $\mu(\Lambda) > 0$ en zo dat Λ positief is met betrekking tot $\nu - \varepsilon\mu$.

Bewijs:

Zij $\Omega = \Omega_n^+ \cup \Omega_n^-$ een Hahnsplitsing horend bij de σ-add. vz. functie $\nu - \frac{1}{n}\mu$ en stel

$$\Omega_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^+ \ ; \ \Omega_0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n^-, \text{ dus } \Omega_0^- = \overline{\Omega_0^+}.$$

Dus, omdat $\Omega_0^- \subset \Omega_n^-$ voor alle n:

$$\forall_n (\nu - \tfrac{1}{n}\mu)(\Omega_0^-) \leqq 0 \implies \forall_n 0 \leqq \nu(\Omega_0^-) \leqq \tfrac{1}{n}\mu(\Omega_0^-) \implies \nu(\Omega_0^-) = 0,$$

dus is

$$\nu(\Omega_0^+) > 0 \implies \mu(\Omega_0^+) > 0,$$

dus:

$$\exists_n \qquad \mu(\Omega_n^+) > 0.$$

Neem $\Lambda = \Omega_n^+$ en $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dan is aan de bewering voldaan.

St.2.4.5. (Radon-Nikodym). $(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ is een σ-finiete maatruimte, ν is een σ-additieve vz functie gedefinieerd op $\mathcal{G}$, die σ-finiet is en $\nu << \mu$. Dan bestaat een functie $f : \Omega \to \mathbb{R}$, zo dat $f \in I^*(\mu)$ en

$$\forall_{\Lambda \in \mathcal{G}} \quad \nu(\Lambda) = \int_\Lambda f d\mu .$$

Twee verschillende functies die hieraan voldoen zijn μ-b.o. gelijk. Als geldt $0 \leqq \nu \leqq \mu$ dan kan f zo gekozen worden dat voor alle $\omega \in \Omega$

$$0 \leqq f(\omega) \leqq 1$$

geldt.

Bewijs:

We beperken ons eerst tot het geval dat ν een maat is en dat ν en μ beide eindig zijn. Stel dan

$$\mathcal{H} = \{f \mid f \in I^*(\mu), \quad \forall_{\Lambda \in \mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu \leqq \nu(\Lambda)\}$$

en

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{H}} \int f d\mu .$$

($\mathcal{H}$ is niet leeg want de functie die overal 0 is hoort tot $\mathcal{H}$). Laat $\{f_n\}$ een rij functies in $\mathcal{H}$ zijn met

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu = \alpha .$$

Zij

$$g_n(\omega) = \max \{f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)\} ,$$

dan kan voor iedere n en iedere $\Lambda \in \mathcal{G}$ een disjuncte splitsing van Λ :

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_n$$

gevonden worden met $\Lambda_k \in \mathcal{G}$ $(k=1,\dots,n)$ en

$$g_n(\omega) = f_k(\omega) \quad \text{voor } \omega \in \Lambda_k \quad (k=1,\dots,n).$$

Dus:

$$\int_\Lambda g_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Lambda_k} f_k d\mu \leqq \sum_{k=1}^{n} \nu(\Lambda_k) = \nu(\Lambda),$$

dus

$$g_n \in \mathcal{H} .$$

Verder is:

$$f_o(\omega) = \sup_{k \in N} f_k(\omega) = \lim_{n \to \infty} g_n(\omega)$$

en de rij g_n is monotoon met begrensde integralen:

$$\int g_n d\mu \leqq \nu(\Omega) < \infty ,$$

dus op grond van st.2.2.10 is $f_o \in I^*(\mu)$ en

$$\int_\Lambda f_o d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\Lambda g_n d\mu \leqq \lim_{n \longrightarrow \infty} \nu(\Lambda) = \nu(\Lambda),$$

dus

$$f_o \in \mathcal{H}$$

en

$$\int f_o d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int g_n d\mu ,$$

terwijl ($g_n \in \mathcal{H}$):

$$\alpha \geqq \int g_n d\mu \geqq \int f_k d\mu \qquad (k=1,\dots,n),$$

dus

$$\alpha \geqq \lim \int g_n d\mu \geqq \lim \int f_k d\mu = \alpha,$$

dus

$$\int f_o d\mu = \alpha .$$

Stel nu

$$\nu_o(\Lambda) = \nu(\Lambda) - \int_\Lambda f_o d\mu$$

en veronderstel dat ν_o niet identiek 0 is. Dan bestaat er volgens st.2.4.4 een $\varepsilon > 0$ en een $\Lambda \in \mathcal{G}$ met $\mu(\Lambda) > 0$ en

$$(\nu_o - \varepsilon\mu)(\Lambda \cap \Lambda') \geqq 0 \quad \text{voor alle} \quad \Lambda' \in \mathcal{G} ,$$

dus:

$$\varepsilon\mu(\Lambda \cap \Lambda') \leqq \nu(\Lambda \cap \Lambda') - \int_{\Lambda \cap \Lambda'} f_o d\mu .$$

Als $g = f_o + \varepsilon \chi_\Lambda$ is, dan is:

$$\int_{\Lambda'} gd\mu = \int_{\Lambda'} f_o d\mu + \varepsilon\mu(\Lambda \cap \Lambda'),$$

dus ($f_o \in \mathcal{H}$):

$$\int_{\Lambda'} gd\mu \leqq \int_{\Lambda'} f_o d\mu + \nu(\Lambda \cap \Lambda') - \int_{\Lambda \cap \Lambda'} f_o d\mu = \nu(\Lambda \cap \Lambda') +$$
$$+ \int_{\Lambda' - \Lambda} f_o d\mu \leqq \nu(\Lambda \cap \Lambda') + \nu(\Lambda' - \Lambda) = \nu(\Lambda'),$$

dus

$$g \in \mathcal{H},$$

maar:

$$\int gd\mu = \int f_o d\mu + \varepsilon\mu(\Lambda) = \alpha + \varepsilon\mu(\Lambda) > \alpha$$

in strijd met $g \in \mathcal{H}$. Dus $\nu_o(\Lambda) = 0$ voor alle Λ, dus:

$$\nu(\Lambda) = \int_\Lambda f_o d\mu .$$

Dat twee verschillende functies die hieraan voldoen μ-b.o. gelijk zijn volgt direct uit I 14. Daar bovendien uit

$$\forall_\Lambda \int_\Lambda f_o d\mu = \nu(\Lambda) < \infty ,$$

volgt dat $|f_o| < \infty$ is μ-b.o., blijkt dat het mogelijk is f_o op een μ-nulvz zo te wijzigen dat f_o voor alle ω eindig is. Als ν een eindige σ-additieve vz functie is volgt de bewering direct uit:

$$\nu << \mu \Longrightarrow \nu^+ << \mu \text{ en } \nu^- << \mu .$$

Als ν en μ σ-finiet zijn dan bestaat een splitsing

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k,$$

zodanig dat ν en μ op iedere Ω_k eindig zijn, zodat voor de restricties van ν en μ tot Ω_k er dus een f_k bestaat. Dan is direct in te zien dat de functie $f : \Omega \rightarrow R$ met

$$\forall_k \quad \omega \in \Omega_k \Longrightarrow f(\omega) = f_k(\omega)$$

voldoet.

Als tenslotte $0 \leqq \nu \leqq \mu$ is, kan men in het bewijs de klasse $\mathcal{H}$ vervangen door

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ f \mid f \in I^*(\mu);\ \forall_{\Lambda \in \mathcal{G}} \int_\Lambda f d\mu \leqq \nu(\Lambda);\ \forall_\omega \quad 0 \leqq f(\omega) \leqq 1 \right\},$$

zonder overigens essentiële veranderingen in het bewijs aan te brengen. Hiermee is de stelling van Radon-Nikodym bewezen.

Opmerking.

Voor het begrip voorwaardelijke waarschijnlijkheid is de volgende toepassing van de st. van Radon-Nikodym van belang. Zij $(\Omega, \mathcal{G}, p)$ een wh-ruimte ($\mathcal{G}$ is een σ-algebra van deelvzn van Ω, p is een maat op $\mathcal{G}$ met $p(\Omega) = 1$). Voor iedere $\Lambda \in \mathcal{G}$ is $p_\Lambda(\Lambda') \stackrel{\text{def}}{=} p(\Lambda \cap \Lambda')$ een maat op $\mathcal{G}$ met:

$$0 \leqq p_\Lambda \leqq p, \text{ dus } p_\Lambda << p.$$

Volgens R.-N. is er dus een functie $f_\Lambda(\omega)$ met $0 \leqq f_\Lambda \leqq 1$, en

$$p_\Lambda(\Lambda') = \int_{\Lambda'} f_\Lambda \, dp.$$

Als men de zo gevonden functie $f_\Lambda(\omega)$ wil interpreteren als de voorwaardelijke kans $P\{\Lambda \mid \omega\}$ dan moet $f_\Lambda(\omega)$ bovendien nog voor iedere vaste ω een maat in Λ zijn. Bij een willekeurige $\mathcal{G}$ is het niet mogelijk om aan te tonen dat een dergelijke versie van f_Λ bestaat. Als $\mathcal{G}$ de klasse van de Borelvzn in R^n is, of een σ-algebra die aan bepaalde aftelbaarheidseisen voldoet dan is het wel mogelijk om aan te tonen dat er altijd een "reguliere" versie van f_Λ is. We komen hier later op terug.

2.5. Maten op productruimten met oneindig veel factoren

We bewijzen eerst de volgende hulpstelling:

Hulpstelling. Als m een inhoud is op de algebra $\mathcal{G}$ en voor iedere krimpende rij $\{\Lambda_n\}$, met $\Lambda_n \in \mathcal{G}$, geldt: $m(\Lambda_n) \geq \varepsilon > 0$ voor alle n impliceert $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \neq 0$, dan is m σ-additief en omgekeerd.

Bewijs:

Veronderstel dat m niet σ-additief is. Dan is er een rij disjuncte vzn $\{\Lambda_n'\}$ met $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n' \in \mathcal{G}$; $\Lambda_n' \in \mathcal{G}$, zodat $\sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n') \neq m(\Lambda)$. Uit de eindige additiviteit van m volgt onmiddellijk dat dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\Lambda_n') < m(\Lambda)$$

is. Beschouw nu de rij $\Lambda_n = \Lambda - \bigcup_{k=1}^{n} \Lambda_k'$. Dat is een krimpende rij met

$$m(\Lambda_n) = m(\Lambda) - \sum_{k=1}^{n} m(\Lambda_k') \geqq m(\Lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} m(\Lambda_k') > 0,$$

en

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \Lambda - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_k' = 0 .$$

Dit geeft een tegenspraak, dus m is σ-additief.

Anderzijds, als m σ-additief is en $\{\Lambda_n\}$ een rij is met $\Lambda_n \downarrow$, $m(\Lambda_n) \geqq \varepsilon > 0$, dan zou de veronderstelling $\Lambda_n \downarrow 0$ volgens st.1.3.4 tot een ongerijmdheid voeren.

In het volgende zullen we onderzoeken onder welke voorwaarden in een productruimte met oneindig veel factoren een maat geconstrueerd kan worden. Om de samenhang van de verschillende oplossingen van dit probleem duidelijk te maken zullen we een formulering geven waarbij de productnotatie vermeden wordt. Met het oog op volledigheid zullen we ook enkele vroeger al bewezen resultaten nog eens in deze nieuwe formulering geven (zie pag. 6 t/m 10).

Zij $\varkappa_0$ een indexverzameling (in het algemeen overaftelbaar). $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_\infty$, $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}_0^{\varkappa}$, $\mathcal{K}_\infty^{\varkappa}$, $\mathcal{K}^{\varkappa}$) zijn de klassen van eindige, resp. aftelbare, resp. alle deelvzn van $\varkappa_0$ ($\varkappa$). Bij iedere $\varrho \in \varkappa_0$ is een volledige maatruimte $(\Omega_\varrho, \mathcal{G}_\varrho, \mu_\varrho)$ met $\mu_\varrho(\Omega_\varrho) = 1$ gegeven. Voor alle $\varkappa \in \mathcal{K}$ vormen we de productruimte

$$\Omega_\varkappa = \prod_{\rho\in\varkappa}' \Omega_\rho$$

en voor alle $\varkappa \in \mathscr{K}_0$ de product-maatruimte $(\Omega_\varkappa, \mathcal{G}_\varkappa, \mu_\varkappa)$:

$$\mathcal{G}_\varkappa = {}^B\prod_{\rho\in\varkappa} \mathcal{G}_\rho \quad ; \quad \mu_\varkappa = \prod_{\rho\in\varkappa}\mu_\rho .$$

De karakteristieke eigenschappen van productruimten kunnen we nu formuleren met behulp van het stelsel afbeeldingen (projecties)

$$\varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} : \Omega_{\varkappa_2} \longrightarrow \Omega_{\varkappa_1} \qquad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2),$$

gedefiniëerd door:

$$(\varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}\omega)_\rho = \omega_\rho \text{ voor } \omega \in \Omega_{\varkappa_2} \quad , \quad \varkappa_1 \subset \varkappa_2, \text{ alle } \rho \in \varkappa_1.$$

Deze φ heeft de volgende eigenschappen:

<u>P1</u> $\qquad \varphi_\varkappa^\varkappa = \iota_\varkappa$ (identieke afbeelding op $\Omega_\varkappa$)

<u>P2</u> $\qquad \varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}\ \varphi_{\varkappa_2}^{\varkappa_3} = \varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_3} \quad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2 \subset \varkappa_3)$

<u>P3</u> $\qquad \varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}\ \Omega_{\varkappa_2} = \Omega_{\varkappa_1} \quad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2)$

<u>P4</u> Zij $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$. Stel $\varkappa' = \sup_{\varkappa\in\mathscr{K}'} \varkappa$. Bij iedere $\varkappa \in \mathscr{K}'$ is een $\omega_\varkappa \in \Omega_\varkappa$ gegeven met

$$(\varkappa_1 \in \mathscr{K}', \varkappa_2 \in \mathscr{K}', \varkappa'' = \varkappa_1 \cap \varkappa_2 \neq 0) \Longrightarrow \varphi_{\varkappa''}^{\varkappa_2}\ \omega_{\varkappa_2} = \varphi_{\varkappa''}^{\varkappa_1}\ \omega_{\varkappa_1}.$$

Dan is er, voor iedere $\bar{\varkappa} \supset \varkappa'$ een $\omega \in \Omega_{\bar{\varkappa}}$ met

$$\varphi_\varkappa^{\bar{\varkappa}}\ \omega = \omega_\varkappa \text{ voor alle } \varkappa \in \mathscr{K}'.$$

Als $\bar{\varkappa} = \varkappa'$ dan is ω eenduidig bepaald.

P1 t/m P4 volgen vrijwel direct uit de definitie van φ. We laten het bewijs achterwege. Op grond van P3 induceert $\varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}$ de afbeelding ($\mathscr{H}_\varkappa$ is de σ-algebra van alle deelvzn van $\Omega_\varkappa$)

$$\gamma_{\varkappa_2}^{\varkappa_1} : \mathscr{H}_{\varkappa_1} \longrightarrow \mathscr{H}_{\varkappa_2},$$

die aan een deelvz van $\Omega_{\varkappa_1}$ de vz van alle originelen in $\Omega_{\varkappa_2}$ (de <u>cilindervz</u> met <u>basis</u> in $\Omega_{\varkappa_1}$, <u>asrichting</u> $\Omega_{\varkappa_2-\varkappa_1}$) toevoegt:

$$\gamma_{\varkappa_2}^{\varkappa_1}\Lambda = \{\omega \mid \varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}\omega \in \Lambda\} \qquad (\Lambda \subset \Omega_{\varkappa_1}),$$

of

<u>c1</u> $$\varphi_{\varkappa_1}^{\varkappa_2}\ \gamma_{\varkappa_2}^{\varkappa_1} = \iota_{\varkappa_2} \qquad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2).$$

Op grond van de constructie van de σ-algebra's $\mathcal{G}_\varkappa$ ($\varkappa \in \mathscr{K}_0$) geldt:

<u>P5</u> $$\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}\,\mathcal{G}_{\varkappa_1} \subset \mathcal{G}_{\varkappa_2} \qquad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2 \in \mathcal{K}_0)$$

We voeren nog de volgende notaties in:

$$\Lambda_\omega \overset{\text{def}}{=} \{\omega' \mid \exists_{\omega''\in\Lambda}\ \varphi^{\varkappa}_{\varkappa_1}\omega''=\omega' \text{ en } \varphi^{\varkappa}_{\varkappa-\varkappa_1}\omega''=\omega\}\ (\varkappa_1 \subset \varkappa\,;\ \Lambda \subset \Omega_\varkappa\,;\ \omega \in \Omega_{\varkappa-\varkappa_1});$$

$$\mathcal{H}_\Lambda \overset{\text{def}}{=} \{\varkappa \mid \gamma^{\varkappa}_{\varkappa'}\,\varphi^{\varkappa'}_{\varkappa}\,\Lambda = \Lambda\}\ (\Lambda \subset \Omega_{\varkappa'});\ \mathcal{H}^0_\Lambda \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H}_\Lambda \cap \mathcal{K}^0.$$

$\mathcal{H}_\Lambda$ is de vz van alle indexvzn $\varkappa$ waarvoor Λ een cilinder is met basis in $\Omega_\varkappa$. We geven nu een opsomming van eigenschappen van φ, γ en snijding. Waar de bewijzen zonder complicaties zijn zullen we ze soms weglaten. Deze eigenschappen kunnen alle bewezen worden met P1 t/m P5, zonder een beroep op de definitie van φ.

<u>c2</u> $$\gamma^{\varkappa}_{\varkappa} = \iota_\varkappa$$

<u>c3</u> $$\gamma^{\varkappa_2}_{\varkappa_3}\,\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2} = \gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_3} \qquad (\varkappa_1 \subset \varkappa_2 \subset \varkappa_3)$$

<u>c4</u> a) $\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}$ is een σ-homomorfisme

b) $\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}$ is éénéénduidig

c) $\varphi^{\varkappa_2}_{\varkappa_1}$ gereduceerd tot de klasse van cilindervzn, $\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}\,\mathcal{H}_{\varkappa_1}$ is een éénéénduidig σ-homomorfisme.

<u>Bewijs</u>:

a) direct uit def. (zie opm. op blz.11).

b) $\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}\Lambda = 0 \implies \Lambda = \varphi^{\varkappa_2}_{\varkappa_1}\,0 = 0$ en $\gamma^{\varkappa_1}_{\varkappa_2}\,0 = 0$.

c) direct uit b).

<u>c5</u> a) als $\varphi^{\varkappa}_{\varkappa_\nu}\,\omega = \varphi^{\varkappa}_{\varkappa_\nu}\,\omega'$ $(\nu = 1,2)$ dan is $\varphi^{\varkappa}_{\varkappa_1\cup\varkappa_2}\,\omega = \varphi^{\varkappa}_{\varkappa_1\cup\varkappa_2}\,\omega'$

b) als $\{\varkappa_n\}$ een stijgende rij indexvzn is en in iedere $\Omega_{\varkappa_n}$ is een punt ω_n gegeven met

$$m \geq n \implies \varphi^{\varkappa_m}_{\varkappa_n}\,\omega_m = \omega_n\,,$$

dan is er in $\Omega_\varkappa$, met $\varkappa \supset \varkappa' = \sup_n \varkappa_n$ een punt ω met

$$\forall_n\ \varphi^{\varkappa}_{\varkappa_n}\,\omega = \omega_n.$$

Als $\varkappa = \varkappa'$, dan is ω eenduidig bepaald.

<u>Bewijs</u>: direct uit P4.

c6

$$\varphi^{X}_{X_1}\gamma^{X_2}_{X}\Lambda = \begin{cases} \varphi^{X_2}_{X_1}\Lambda & \text{als } X_1 \subset X_2 \subset X \quad \text{(a)} \\ \gamma^{X_2}_{X_1}\Lambda & \text{als } X_2 \subset X_1 \subset X \quad \text{(b)} \\ \gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\Lambda & \text{als } X' = X_1 \cap X_2 \neq 0 \text{ en } X_1 \cup X_2 \subset X. \quad \text{(c)} \\ \Omega_{X_1} & \text{als } X_1 \cap X_2 = 0,\ X_1 \cup X_2 \subset X, \Lambda \neq 0. \quad \text{(d)} \end{cases}$$

Bewijs van de derde bewering:

1) $\omega \in \varphi^{X}_{X_1}\gamma^{X_2}_{X}\Lambda \iff \exists_{\omega'}\ \varphi^{X}_{X_2}\omega' \in \Lambda ; \varphi^{X}_{X_1}\omega' = \omega$. Dus, voor $\omega'' = \varphi^{X}_{X_2}\omega'$ geldt,

$$\varphi^{X_2}_{X'}\omega'' = \varphi^{X}_{X'}\omega' = \varphi^{X_1}_{X'}\varphi^{X}_{X_1}\omega' = \varphi^{X_1}_{X'}\omega \quad \text{en} \quad \omega'' \in \Lambda. \text{ Dus}$$

$$\omega \in \gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\omega'' \subset \gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\Lambda ,$$

dus

$$\varphi^{X}_{X_1}\gamma^{X_2}_{X}\Lambda \subset \gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\Lambda .$$

2) $\omega \in \gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\Lambda \iff \varphi^{X_1}_{X'}\omega \in \varphi^{X_2}_{X'}\Lambda \iff \exists_{\omega''\in\Lambda}\ \varphi^{X_1}_{X'}\omega = \varphi^{X_2}_{X'}\omega''$.

Volgens P4 is er dus een $\omega' \in \Omega_X$, met

$$\varphi^{X}_{X_1}\omega' = \omega \quad \text{en} \quad \varphi^{X}_{X_2}\omega' = \omega''.$$

Deze ω' voldoet aan:

$$\omega'' = \varphi^{X}_{X_2}\omega' \in \Lambda \quad \text{en} \quad \varphi^{X}_{X_1}\omega' = \omega$$

dus:

$$\omega \in \varphi^{X}_{X_1}\gamma^{X_2}_{X}\Lambda ,$$

dus

$$\gamma^{X'}_{X_1}\varphi^{X_2}_{X'}\Lambda \subset \varphi^{X}_{X_1}\gamma^{X_2}_{X}\Lambda .$$

3) uit 1) en 2) volgt de gelijkheid direct.

c7 a) X' en $X'' \in \mathcal{H}_\Lambda \Rightarrow (X' \cap X'' \neq 0$ en $X' \cap X'' \in \mathcal{H}_\Lambda)$ of $(X' \cap X'' = 0$ en $\Lambda = 0$ of $\Omega_X)$.

b) $X' \in \mathcal{H}_\Lambda$ en $X' \subset X_1 \subset X'' \Rightarrow X_1 \in \mathcal{H}_\Lambda$. $(\Lambda \subset \Omega_{X''})$.

c) $(X_1 \in \mathcal{H}_\Lambda ; \omega' \in \Lambda ; \varphi^{X}_{X_1}\omega = \varphi^{X}_{X_1}\omega') \Rightarrow \omega \in \Lambda$.

Bewijs van de eerste bewering:

$$\Lambda = \gamma^{X'}_{X}\varphi^{X}_{X'}\Lambda = \gamma^{X'}_{X}\varphi^{X}_{X'}\gamma^{X''}_{X}\varphi^{X}_{X''}\Lambda \quad \text{, dus als } X' \cap X'' \neq 0,$$

dan is volgens c6 (c):

$$\Lambda = \gamma^{X'}_{X}\gamma^{X'\cap X''}_{X'}\varphi^{X''}_{X'\cap X''}\varphi^{X}_{X''}\Lambda = \gamma^{X'\cap X''}_{X}\varphi^{X}_{X'\cap X''}\Lambda \Rightarrow X' \cap X'' \in \mathcal{H}_\Lambda .$$

Als $X' \cap X'' = 0$, volgens c6 (d):

$$\Lambda = \gamma_{x}^{x'} \Omega_{x'} = \Omega_{x} \text{ als } \Lambda \neq 0.$$

c8 Voor $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}_x$ en $x' \supset x$ geldt: ${}^{B}(\gamma_{x'}^{x} \mathcal{J}) = \gamma_{x'}^{x}\, {}^{B}\mathcal{J}$.

Bewijs: direct uit c4 (a en c).

c9 a) $\omega_\nu \in \Omega_{x_\nu} (\nu=1,2)$; $x_1 \cup x_2 = x$; $x_1 \cap x_2 = 0$; $\omega \in \Omega_x$ met $\varphi_{x_\nu}^{x} \omega = \omega_\nu$; $\Lambda \subset \Omega_{x'}$ met $x \subset x'$. Nu geldt:

$$\Lambda_\omega = (\Lambda_{\omega_1}) _{\omega_2} = (\Lambda_{\omega_2}) _{\omega_1} .$$

b) $\Lambda \subset \Omega_x$; $\omega \in \Omega_{x'}$; $x' \subset x$ en $\Lambda_\omega \neq 0 \Longrightarrow \omega \in \varphi_{x'}^{x} \Lambda$.

Bewijs van a):

1) $\omega' \in \Lambda_\omega \Longleftrightarrow \exists_{\rho \in \Lambda}\, \varphi_{x}^{x'} \rho = \omega$ en $\varphi_{x'-x}^{x'} \rho = \omega'$. Dan is dus met $\rho' = \varphi_{x'-x_1}^{x'} \rho$:

$\rho \in \Lambda$; $\varphi_{x_1}^{x'} \rho = \varphi_{x_1}^{x} \varphi_{x}^{x'} \rho = \varphi_{x_1}^{x} \omega = \omega_1$; $\varphi_{x'-x_1}^{x'} \rho = \rho' \Longrightarrow \rho' \in \Lambda_{\omega_1}$

en dus, op dezelfde manier: $\omega' = \varphi_{x'-x}^{x'-x_1} \rho' \in (\Lambda_{\omega_1})_{\omega_2}$.

Dus: $$\Lambda_\omega \subset (\Lambda_{\omega_1})_{\omega_2} .$$

2) $\omega' \in (\Lambda_{\omega_1})_{\omega_2} \Longrightarrow \exists_{\rho \in \Lambda_{\omega_1}}\, \varphi_{x_2}^{x'-x_1} \rho = \omega_2$ $\varphi_{x'-x}^{x'-x_1} \rho = \omega' \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists_{\rho' \in \Lambda} \exists_{\rho}\, \varphi_{x_1}^{x'} \rho' = \omega_1$; $\varphi_{x'-x_1}^{x'} \rho' = \rho$; $\varphi_{x_2}^{x'-x_1} \rho = \omega_2$; $\varphi_{x'-x}^{x'-x_1} \rho = \omega'$.

Dan geldt voor $\rho'' = \varphi_{x}^{x'} \rho'$:

$\varphi_{x_1}^{x} \rho'' = \varphi_{x_1}^{x'} \rho' = \omega_1$ en $\varphi_{x_2}^{x} \rho'' = \varphi_{x_2}^{x'} \rho' = \varphi_{x_2}^{x'-x_1} \varphi_{x'-x_2}^{x'} \rho' = \varphi_{x_2}^{x'-x_1} \rho = \omega_2$,

dus, volgens c5 (a) is $\rho'' = \omega$. Verder: $\varphi_{x-x'}^{x'} \rho' = \varphi_{x'-x}^{x'-x_1} \varphi_{x'-x_1}^{x'} \rho' = \varphi_{x'-x}^{x'-x_1} \rho = \omega'$. Dus, samenvattend:

$$\rho' \in \Lambda ;\ \varphi_{x}^{x'} \rho' = \omega ;\ \varphi_{x-x'}^{x'} \rho' = \omega' .$$

Daaruit volgt: $\omega' \in \Lambda_\omega$, dus $(\Lambda_{\omega_1})_{\omega_2} \subset \Lambda_\omega$.

3) De gelijkheid volgt nu direct.

c10 a) $(x_1 \in \mathcal{H}_\Lambda$; $\omega' \in \Lambda$; $\varphi_{x_1}^{x} \omega = \varphi_{x_1}^{x} \omega') \Longrightarrow \omega \in \Lambda$.

b) $(\Lambda = \gamma_{x}^{x_1} \Lambda'$; $\omega \in \Omega_{x_2}$; $x_1 \cap x_2 = 0$; $x_\nu \subset x\ (\nu=1,2) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Lambda_\omega = \gamma_{x-x_2}^{x_1} \Lambda'$.

c) $(\varphi_{x_1}^{x_2} \Lambda)_\omega = \varphi_{x_1-x'}^{x_2-x'} \Lambda_\omega$; $(\gamma_{x_2}^{x_1} \Lambda')_\omega = \gamma_{x_2-x'}^{x_1-x'} \Lambda'_\omega$,

als: $x' \subset x_1 \subset x_2$; $\omega \in \Omega_{x'}$; $\Lambda \subset \Omega_{x_2}$; $\Lambda' \subset \Omega_{x_1}$.

Bewijs van b):

$$\omega' \in \Lambda_\omega \Longleftrightarrow \exists_{\rho\in\Lambda}\ \varphi^x_{x_2}\rho = \omega\ ;\ \varphi^x_{x-x_2}\rho = \omega' \Longrightarrow \exists_{\rho\in\Lambda}\ \varphi^x_{x_1}\rho =$$
$$= \varphi^{x-x_2}_{x_1}\omega' \Longrightarrow \omega' \in \gamma^{x_1}_{x-x_2}\varphi^x_{x_1}\Lambda = \gamma^{x_1}_{x-x_2}\Lambda' \Longrightarrow \Lambda_\omega \subset \gamma^{x_1}_{x-x_2}\Lambda'.$$

Anderzijds:

$$\omega' \in \gamma^{x_1}_{x-x_2}\Lambda' \Longleftrightarrow \exists_{\rho\in\Lambda}\ \varphi^x_{x_1}\rho = \varphi^{x-x_2}_{x_1}\omega'$$. Kies dan,

met P4, een $\rho'' \in \Omega_x$, met:

$$\varphi^x_{x-x_2}\rho'' = \omega' \text{ en } \varphi^x_{x_2}\rho'' = \omega ,$$

dan is, volgens a):

$$\varphi^x_{x_1}\rho = \varphi^{x-x_2}_{x_1}\omega' = \varphi^x_{x_1}\rho'' \text{ en } \rho \in \Lambda \Longrightarrow \rho'' \in \Lambda$$

en dus:

$$\omega' \in \Lambda_\omega$$

Dus:

$$\Lambda_\omega \supset \gamma^{x_1}_{x-x_2}\Lambda' .$$

We herhalen nu het procédé om σ algebra's in $\mathcal{H}_x$ ($x \notin \mathcal{K}_0$) in te voeren (zie pag. 6 t/m 10).

Def.2.5.1.

$$\mathcal{G}^{(x')}_x \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{x'}_x \mathcal{G}_{x'} \qquad x' \in \mathcal{K}^x_0$$
$$\mathcal{G}'_x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x'\in\mathcal{K}^x_0} \mathcal{G}^{(x')}_x \qquad x \in \mathcal{K}$$
$$\mathcal{G}_x \stackrel{\text{def}}{=} {}^B\mathcal{G}'_x \qquad x \in \mathcal{K} - \mathcal{K}_0$$
$$\mathcal{G}^{(x')}_x \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{x'}_x \mathcal{G}_{x'} \qquad x' \in \mathcal{K}^x .$$

Opmerking: $\mathcal{G}_x$ ($x \in \mathcal{K}_0$) voldoet, met deze definities ook aan

$$\mathcal{G}_x = {}^B\mathcal{G}'_x ,$$

zodat deze gelijkheid nu geldt voor alle x .

St.2.5.1. a) $\mathcal{G}^{(x')}_x$ is een σ-algebra en $\mathcal{G}^{(x')}_x = {}^B\bigcup_{x''\in\mathcal{K}^{x'}_0} \mathcal{G}^{(x'')}_x$.

b) $\mathcal{G}^{(x_1)}_x \subset \mathcal{G}^{(x_2)}_x \qquad (x_1 \subset x_2 \subset x)$.

c) $\mathcal{G}'_x$ is een algebra.

d) $\mathcal{G}_x = \bigcup_{x'\in\mathcal{K}^x_\infty} \mathcal{G}^{(x')}_x$.

Bewijs:

a) $\mathcal{G}^{(x')}_x$ is een σ-algebra volgens c4. Verder, met c8 en c3:

$$\mathcal{G}^{(x')}_x = \gamma^{x'}_x \mathcal{G}_{x'} = \gamma^{x'}_x\, {}^B\mathcal{G}'_{x'} = {}^B\Big(\gamma^{x'}_x \bigcup_{x''\in\mathcal{K}^{x'}_0} \mathcal{G}^{(x'')}_{x'}\Big) = {}^B\Big(\gamma^{x'}_x \bigcup_{x''\in\mathcal{K}^{x'}_0} \gamma^{x''}_{x'}\mathcal{G}_{x''}\Big) =$$

$$= {}^{B}\bigcup_{x''\in\mathcal{K}_0^{x'}} \gamma_x^{x''}\, \mathcal{G}_{x''} = {}^{B}\bigcup_{x''\in\mathcal{K}_0^{x'}} \mathcal{G}_x^{(x'')} .$$

b) direct uit a) en $\mathcal{K}_0^{x_1} \subset \mathcal{K}_0^{x_2}$.

c) st. 1.2.6 (zie ook bewijs van d, 3° hieronder).

d) Stel $\bigcup_{x'\in\mathcal{K}_\infty^x} \mathcal{G}_x^{(x')} = \mathcal{H}$. Dan geldt:

1°. $\mathcal{G}_x^{(x')} = {}^B\bigcup_{x''\in\mathcal{K}_0^{x'}} \mathcal{G}_x^{(x'')} \subset {}^B\bigcup_{x''\in\mathcal{K}_0^{x}} \mathcal{G}_x^{(x'')} = {}^B\mathcal{G}'_x = \mathcal{G}_x$,
dus $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}_x$.

2°. $\mathcal{G}'_x \subset \mathcal{H}$,want: $\mathcal{G}'_x = \bigcup_{x'\in\mathcal{K}_0^x}\mathcal{G}_x^{(x')} \subset \bigcup_{x'\in\mathcal{K}_\infty^x}\mathcal{G}_x^{(x')} = \mathcal{H}$.

3°. $\mathcal{H}$ is een σ-algebra:

i) $\Lambda\in\mathcal{H} \Longrightarrow \exists_{x'\in\mathcal{K}_\infty^x}\ \Lambda\in\mathcal{G}_x^{(x')} \Longrightarrow \bar\Lambda \in \mathcal{G}_x^{(x')} \Longrightarrow \bar\Lambda\in\mathcal{H}$.

ii) $\Lambda_n \in\mathcal{H}\ (n=1,2,\dots) \Longrightarrow \forall_n \exists_{x_n\in\mathcal{K}_\infty^x}\ \Lambda_n\in\mathcal{G}_x^{(x_n)} \Longrightarrow \forall_n\ \Lambda_n\in\mathcal{G}_x^{(x')}$,
$x'=\sup_n x_n \in \mathcal{K}_\infty^x \Longrightarrow \bigcup_n\Lambda_n\in\mathcal{G}_x^{(x')} \Longrightarrow \bigcup_n\Lambda_n\in\mathcal{H}$.

Nu volgt uit 2° en 3°: $\mathcal{G}_x\subset\mathcal{H}$,

dus, volgens 1°: $\mathcal{G}_x=\mathcal{H}$.

Opmerking: Uit de definitie van $\mathcal{G}'$ volgt direct dat $\Lambda\in\mathcal{G}'_x$ impliceert dat $\mathcal{H}_\Lambda^\circ$ niet leeg is. Want: $\Lambda\in\mathcal{G}'_x \Longrightarrow \exists_{x'}\ x'\in\mathcal{K}_0^x$ en $\exists_{\Lambda'}\ \Lambda'\in\mathcal{G}_{x'}$ met $\Lambda=\gamma_x^{x'}\Lambda' \Longrightarrow \Lambda'=\varphi_{x'}^x\Lambda \Longrightarrow \Lambda=\gamma_x^{x'}\varphi_{x'}^x\Lambda \Longrightarrow x'\in\mathcal{H}_\Lambda$ dus $x'\in\mathcal{H}_\Lambda^\circ$.

De productmaten μ_x ($x\in\mathcal{K}_0$) voldoen volgens par.2.2 en par. 2.3 aan:

<u>M1</u>

$$\mu_{x_1}(\Lambda)=\mu_{x_2}(\gamma_{x_2}^{x_1}\Lambda) \qquad (\Lambda\in\mathcal{G}_{x_1};\ x_1\subset x_2\in\mathcal{K}_0)$$

en

<u>M2</u>

$$\mu_x(\Lambda)=\int\mu_{x_1}(\Lambda_\omega)\,d\mu_{x-x_1} \qquad (\Lambda\in\mathcal{G}_x;\ x_1\subset x\in\mathcal{K}_0).$$

In het volgende zullen we onderscheid maken tussen het geval dat we M2 niet en het geval dat we M2 wel gebruiken. Als we van de ingevoerde maten alleen M1 eisen dan spreken we over <u>consistente</u> maten. Als op $\mathcal{G}_{x_0}$ aanvankelijk een maat μ_{x_0} gegeven zou zijn en we construeren met behulp daarvan maten op $\mathcal{G}_x$ $(x\in\mathcal{K})$ door projectie: $\mu_x(\Lambda)=\mu_{x_0}(\gamma_{x_0}^{x}\Lambda)$, dan is onmiddellijk in te zien dat deze maten consistent zijn.

Bij de volgende eigenschappen zullen we steeds expliciet vermelden als voor het bewijs M2 gebruikt moet worden. Voor de maten geldt:

<u>m1</u> $\quad \mu_{x'}(\varphi^{x}_{x'}\Lambda) = \mu_{x''}(\varphi^{x}_{x''}\Lambda) \qquad (\Lambda \in \mathcal{G}'_{x}\ ;\ x'$ en $x'' \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda})$.

Bewijs:

Stel $x' \cap x'' = x_1$. Met c7(b) vinden we dan: als $x_1 \neq 0$ dan is $x_1 \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda}$,

dus: $\Lambda = \gamma^{x_1}_{x}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda \Longrightarrow \varphi^{x}_{x'}\Lambda = \varphi^{x}_{x'}\gamma^{x_1}_{x}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda = \gamma^{x_1}_{x'}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda$ en analoog $\varphi^{x}_{x''}\Lambda = \gamma^{x_1}_{x''}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda$, dus, met M1:

$$\mu_{x'}(\varphi^{x}_{x'}\Lambda) = \mu_{x'}(\gamma^{x_1}_{x'}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda) = \mu_{x_1}(\varphi^{x}_{x_1}\Lambda) = \mu_{x''}(\gamma^{x_1}_{x''}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda) = \mu_{x''}(\varphi^{x}_{x''}\Lambda).$$

Als $x_1 = 0$, dan is volgens c7(b) $\Lambda = 0$ of $\Omega_{x'}$, dus zijn linker en rechterlid van de te bewijzen identiteit beide 0 of 1.

Op grond hiervan wordt door onderstaande Def. 2.5.2 de vz functie m_{x} op $\mathcal{G}'_{x}$ eenduidig vastgelegd:

<u>Def 2.5.2</u> $\quad$ Voor $\Lambda \in \mathcal{G}'_{x}\ ;\ x' \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda}$ is

$$m_{x}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{x'}(\varphi^{x}_{x'}\Lambda).$$

Dan geldt nog:

<u>m2</u> $\quad m_{x}(\Lambda) = m_{x'}(\gamma^{x}_{x'}\Lambda) = m_{x''}(\varphi^{x}_{x''}\Lambda)$ met $\Lambda \in \mathcal{G}'_{x}\ ;\ x \subset x'\ ;\ x'' \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda}$.

Bewijs:

Stel $\Lambda' = \gamma^{x}_{x'}\Lambda$ en kies $x_1 \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda}$, dan geldt ook $x_1 \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda'}$: $\gamma^{x_1}_{x'}\varphi^{x'}_{x_1}\Lambda' =$

$= \gamma^{x_1}_{x'}\varphi^{x'}_{x_1}\gamma^{x}_{x'}\Lambda = \gamma^{x_1}_{x'}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda = \gamma^{x}_{x'}\gamma^{x_1}_{x}\varphi^{x}_{x_1}\Lambda = \gamma^{x}_{x'}\Lambda = \Lambda'$. Dus met de def.:

$$m_{x'}(\gamma^{x}_{x'}\Lambda) = \mu_{x_1}(\varphi^{x'}_{x_1}\gamma^{x}_{x'}\Lambda) = \mu_{x_1}(\varphi^{x}_{x_1}\Lambda) = m_{x}(\Lambda).$$

De tweede bewering volgt vrijwel direct uit de definitie als we weer de gevallen $x_1 \cap x'' = 0$ en $\neq 0$ onderscheiden.

<u>m3</u> (met M2). $\quad m_{x}(\Lambda) = \int m_{x-x'}(\Lambda_{\omega})\, d\mu_{x'} \qquad (\Lambda \in \mathcal{G}'_{x}\ ;\ x' \in \mathcal{K}^{x}_{0})$.

Bewijs:

Kies een $x'' \in \mathcal{H}^{\circ}_{\Lambda}$. We bewijzen de bewering eerst in twee bijzondere gevallen:

1) $x' \cap x'' = 0$. Dan is, volgens c10(b), $\Lambda_{\omega} = \gamma^{x''}_{x-x'}\varphi^{x}_{x''}\Lambda$ voor alle $\omega \in \Omega_{x'}$, dus, volgens m2,

$$\int m_{x-x'}(\Lambda_{\omega})\, d\mu_{x'} = m_{x-x'}(\gamma^{x''}_{x-x'}\varphi^{x}_{x''}\Lambda) = m_{x'}(\varphi^{x}_{x''}\Lambda) = m_{x}(\Lambda).$$

2) $x' \subset x''$ Dan is, volgens achtereenvolgens M2 en c10(c) :

$$m_x(\Lambda) = \mu_{x''}(\varphi^x_{x''}\Lambda) = \int \mu_{x''-x'}((\varphi^x_{x''}\Lambda)_\omega)\, d\mu_{x'} = \int \mu_{x''-x'}(\varphi^{x-x'}_{x''-x'}\Lambda_\omega)\, d\mu_{x'} =$$
$$= \int m_{x-x'}(\Lambda_\omega)\, d\mu_{x'},$$

omdat $x''-x' \in \mathcal{H}^\circ_{\Lambda_\omega}$, zoals men onmiddellijk kan verifiëren met c10(c).

3) Stel in het algemene geval $x_2 = x' \cap x'' \neq 0$. Dan geldt dus, als hierboven: $x''-x_2 \in \mathcal{H}^\circ_{\Lambda_{\omega_2}}$ voor alle $\omega_2 \in \Omega_{x_2}$ en dus, door toepassing van de hierboven bewezen bijzondere gevallen (eerst 2), dan 1)), de stelling van Fubini en c9 (a) :

$$m_x(\Lambda) = \int m_{x-x_2}(\Lambda_{\omega_2})\, d\mu_{x_2} = \int d\mu_{x_2}\left\{\int m_{x-x'}((\Lambda_{\omega_2})_{\bar\omega})\, d\mu_{x'-x_2}\right\} = \int m_{x-x'}(\Lambda_\omega)\, d\mu_{x'}$$

m4 $\qquad m_x$ is een inhoud op $\mathcal{G}'_x$.

Bewijs:

Stel $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n \in \mathcal{G}'_x$, met $k \neq j \Rightarrow \Lambda_k \cap \Lambda_j = 0$. Kies een $x_j \in \mathcal{H}^\circ_{\Lambda_j}$ (j=1,...,n). Dan is volgens c7(b)

$$x' = \bigcup_{j=1}^n x_j \in \mathcal{H}^\circ_{\Lambda_k} \quad \text{voor } k = 1,\ldots,n.$$

Stel

$$\Lambda'_j = \varphi^x_{x'}\Lambda_j \;;\; \Lambda = \bigcup_{j=1}^n \Lambda_j \;;\; \Lambda' = \bigcup_{j=1}^n \Lambda'_j .$$

Volgens c4(c) is dus:

$$\Lambda' = \varphi^x_{x'}\Lambda \quad \text{en} \quad \Lambda'_k \cap \Lambda'_j = 0 \qquad \text{voor } k \neq j,$$

dus:

$$\sum_{j=1}^n m_x(\Lambda_j) = \sum_{j=1}^n \mu_{x'}(\Lambda'_j) = \mu_{x'}(\Lambda') = m_x(\Lambda).$$

We formuleren en bewijzen nu de twee belangrijkste resultaten:

St 2.5.2. Als voldaan is aan P1 t/m P5 en M1 en M2, dan is m_x σ-additief op $\mathcal{G}'_x$. Dan is er dus een maat μ_x op $\mathcal{G}_x$ die een voortzetting is van m_x. Deze μ_x voldoen weer aan M1 en M2.

Bewijs:
We zullen de aan het begin van deze paragraaf bewezen hulpstelling gebruiken. Veronderstel dus, dat $\{\Lambda^n\}$ een dalende rij elementen van $\mathcal{G}'_x$ is, met $m_x(\Lambda^n) \geq \varepsilon > 0$ voor alle n . Kies, voor n= 1,2,... een $x'_n \in \mathcal{H}^o_{\Lambda_n}$ en stel $x_n = \bigcup_{j=1}^{n} x'_n$; $\overline{x}_n = x - x_n$; $x''_n = x_n - x_{n-1}$ $(n>1)$; $x''_1 = x'_1 = x_1$.
Dan is dus $x_n \in \mathcal{H}^o_{\Lambda_n}$ voor alle n. Stel verder:

$$\Gamma_j = \{\omega \mid m_{\overline{x}_1}(\Lambda^j_\omega) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\},$$

dan is volgens M3:

$$\varepsilon \leq m_x(\Lambda^j) = \int m_{\overline{x}_1}(\Lambda^j_\omega)\, d\mu_{x_1} = \int_{\Gamma_j} + \int_{\overline{\Gamma_j}} \leq \mu_{x_1}(\Gamma_j) + \tfrac{\varepsilon}{2},$$

dus:

$$\mu_{x_1}(\Gamma_j) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ voor alle j.}$$

$\{\Gamma_j\}$ is een dalende rij elementen van $\mathcal{G}_{x_1}$, want $\Lambda^{j+1} \subset \Lambda^j$, dus $\Lambda^{j+1}_\omega \subset \Lambda^j_\omega$, dus $m_{\overline{x}_1}(\Lambda^{j+1}_\omega) \leq m_{\overline{x}_1}(\Lambda^j_\omega)$, dus $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$. Volgens de hulpstelling is dus $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \neq 0$. Er is dus een ω_1 zodat $\omega_1 \in \Gamma_j$ voor alle j, dus:

$$\exists_{\omega_1} \forall_n \; m_{\overline{x}_1}(\Lambda^n_{\omega_1}) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

$\{\Lambda^n_{\omega_1}\}$ is weer een dalende rij, dus we kunnen de voorgaande redenering herhalen met $\{\Lambda^n_{\omega_1}\}, \overline{x}_1, \frac{\varepsilon}{2}, x''_2, \overline{x}_2$ in plaats van respectievelijk $\{\Lambda^n\}, x, \varepsilon, x_1, \overline{x}_1$ en vinden dan:

$$\exists_{\omega'_2} \forall_n \; m_{\overline{x}_2}((\Lambda^n_{\omega_1})_{\omega'_2}) \geq \tfrac{\varepsilon}{4},$$

dus, met c9(a):

$$\exists_{\omega_2} \forall_n \; m_{\overline{x}_2}(\Lambda^n_{\omega_2}) \geq \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ en } \varphi^{x_2}_{x_1}\omega_2 = \omega_1.$$

Zo voortgaande:

$$\forall_m \exists_{\omega_m} \forall_n \; m_{\overline{x}_m}(\Lambda^n_{\omega_m}) \geq \tfrac{\varepsilon}{2^m} \text{ en } m \geq n \Longrightarrow \varphi^{x_m}_{x_n}\omega_m = \omega_n.$$

Volgens c 5(b) is er dus een $\omega \in \Omega_x$ met $\varphi^x_{x_n}\omega = \omega_n$ voor alle n.
Dan geldt:
$m_{\overline{x}_n}(\Lambda^n_{\omega_n}) \geq \frac{\varepsilon}{2^n} > 0 \Longrightarrow \Lambda^n_{\omega_n} \neq 0$. Dus volgens c9(b) $\omega_n \in \varphi^x_{x_n}\Lambda^n$. Maar $x_n \in \mathcal{H}^o_{\Lambda_n}$, dan volgens c10(a)

$$\varphi^x_{x_n}\omega \in \varphi^x_{x_n}\Lambda^n \Longrightarrow \omega \in \Lambda^n.$$

Dus $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \neq 0$, dus m_x is σ-additief.
Dat de door m_x voortgebrachte μ_x inderdaad aan M1 en M2 voldoen volgt uit M2 en M3, door μ_x te approximeren met m_x, volgens par. 1.4.

Gevolg:
In het geval dat de $(\Omega_{\varkappa}, \mathcal{G}_{\varkappa}, \mu_{\varkappa})$ productmaatruimten zijn (voor $\varkappa \in \mathcal{K}_0$, $\mu_{\varkappa} = \prod_{\rho \in \varkappa} \mu_{\rho}$) is zeker aan de voorwaarden voldaan. Dus geldt:
Als $(\Omega_{\rho}, \mathcal{G}_{\rho}, \mu_{\rho})$ maatruimten zijn voor $\rho \in \varkappa_0$ met $\mu_{\rho}(\Omega_{\rho}) = 1$, dan bestaat op $\Omega_{\varkappa_0} = \prod'_{\rho \in \varkappa_0} \Omega_{\rho}$ een maat μ die voor de cylinder vzn met "eindig dimensionale" basis gelijk is aan de maat van de basis.

Voor de nu volgende stelling veronderstellen we dat de Ω_{ρ} $(\rho \in \varkappa_0)$ exemplaren van de reële as zijn, terwijl de $\mathcal{G}_{\rho}$ σ-algebra's zijn waartoe alle Borel vzn behoren. Dan geldt nog voor de projecties $\varphi^{\varkappa}_{\varkappa'}$:

<u>P6</u> Voor $\varkappa \subset \varkappa' \in \mathcal{K}_0$ is $\varphi^{\varkappa}_{\varkappa'}$ continu.

en voor de maten $\mu_{\varkappa}$:

<u>M3</u> Voor $\varkappa \in \mathcal{K}_0$; $\Lambda \in \mathcal{G}_{\varkappa}$; $\varepsilon > 0$ is er een compacte vz Γ met $\Gamma \subset \Lambda$ en

$$\mu_{\varkappa}(\Gamma) > \mu_{\varkappa}(\Lambda) - \varepsilon .$$

P6 is triviaal en M3 volgt uit het feit dat er een gesloten vz is met deze eigenschappen (zie par 1.5 blz. 35 en 36) en dat er een eindig interval $[a,b]$ is, zodat voor alle $\varepsilon' > 0$

$$\mu_{\varkappa}(\Lambda - [a,b]) < \varepsilon'.$$

We komen nu tot het tweede resultaat:

<u>St 2.5.3</u> (<u>Kolmogorov</u>). Als de $\Omega_{\varkappa}$ eindig dimensionale Euclidische ruimten zijn en de $\mu_{\varkappa}$ zijn intervalmaten (zodat dus alle Borel vzn van $\Omega_{\varkappa}$ tot $\mathcal{G}_{\varkappa}$ behoren), terwijl de projecties $\varphi^{\varkappa}_{\varkappa'}$ en de maten $\mu_{\varkappa}$ voldoen aan P1 t/m P6, respectievelijk M1 en M3, dan is $m_{\varkappa}$ voor alle $\varkappa \in \mathcal{K}$ σ-additief en brengt dus een maat $\mu_{\varkappa}$ op $\mathcal{G}_{\varkappa}$ voort. Deze $\mu_{\varkappa}$ voldoen weer aan M1.

Bewijs:
We gebruiken weer de hulpstelling en veronderstellen dus dat $\{\Lambda_n\}$ een krimpende rij elementen van $\mathcal{G}'_{\varkappa}$ is, met $m_{\varkappa}(\Lambda_n) \geq \varepsilon > 0$ voor alle n. Kies, als in het bewijs van st 2.5.2 een stijgende rij $\{\varkappa_n\}$ met

$x_n \in \mathcal{H}^o_{\Lambda_n}$ en stel $\Lambda^*_n = \varphi^x_{x_n}\Lambda_n$ (Λ^*_n is dus een basis van Λ_n), dan is:

$$m_x(\Lambda_n) = \mu_{x_n}(\Lambda^*_n) \geqq \varepsilon > 0.$$

Op grond van M.? is er dus een compacte $\Delta^*_n \in \mathcal{G}_{x_n}$ met

$$\Delta^*_n \subset \Lambda^*_n \text{ en } \mu_{x_n}(\Delta^*_n) \geqq \mu_{x_n}(\Lambda^*_n) - \frac{\varepsilon}{4^n}.$$

Stel verder:

$$\Delta_n = \gamma^{x_n}_x \Delta^*_n \,;\; \Gamma_n = \bigcap_{k=1}^{n} \Delta_k \quad;\quad \Gamma^*_n = \varphi^x_{x_n}\Gamma_n .$$

Dan geldt:

(1) $$\Gamma^*_n \subset \Delta^*_n$$

(2) $$\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$$

(3) $$\Gamma_n = \Delta_n - \bigcup_{k=1}^{n-1}(\Lambda_k - \Delta_k),$$

dit laatste wegens $\Delta_n \subset \Lambda_k$ voor $k \leqq n$. ($\Gamma_n = \bigcap_1^n \Delta_k = \Delta_n \cap \bigcap_1^{n-1}\Delta_k = \Delta_n - \overline{\bigcap_1^{n-1}\Delta_k} = \Delta_n - \bigcup_1^{n-1}\overline{\Delta_k} = \Delta_n - \bigcup_1^{n-1}(\Lambda_k - \Delta_k)$). Uit (3) volgt (wegens de eindige additiviteit van m_x):

$$m_x(\Gamma_n) \geqq m_x(\Delta_n) - \sum_{j=1}^{n-1} m_x(\Lambda_j - \Delta_j) = \mu_{x_n}(\Delta^*_n) - \sum_{j=1}^{n-1}\mu_{x_j}(\Lambda^*_j - \Delta^*_j) \geqq$$

$$\geqq \mu_{x_n}(\Lambda^*_n) - \frac{\varepsilon}{4^n} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{4^j} \geqq \varepsilon - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{4^j} = \frac{2}{3}\varepsilon > 0.$$

Dus ook $\mu_{x_n}(\Gamma^*_n) = m_x(\Gamma_n) \geqq \frac{2}{3}\varepsilon > 0$ en dus $\Gamma^*_n \neq 0$. Kies dus, voor iedere n, een $\omega^n_n \in \Gamma^*_n$ en stel voor $m > n$

$$\omega^m_n = \varphi^{x_m}_{x_n}\omega^m_m ,$$

dan geldt volgens (2), voor $m \geqq n$:

$$\omega^m_n \in \varphi^{x_m}_{x_n}\Gamma^*_m = \varphi^{x_m}_{x_n}\varphi^x_{x_m}\Gamma_m = \varphi^x_{x_n}\Gamma_m \subset \varphi^x_{x_n}\Gamma_n = \Gamma^*_n \subset \Delta^*_n .$$

Dus $\{\omega^m_n\}$ (m=n,n+1, ...) is een rij punten in de compacte vz Δ^*_n en heeft dus een verdichtingspunt in Δ^*_n. We construeren een deelrij n(k) van de natuurlijke getallen met de eigenschap dat alle rijen $\{\omega^{n(k)}_n\}$ voor $k \to \infty$ convergent zijn en wel op de volgende manier:
Bepaal een rij $n_1(k)$, zodat $\{\omega_1^{n_1(k)}\}$ convergent is en dan, voor l>1 een deelrij $\{n_l(k)\}$ van $\{n_{l-1}(k)\}$ zodat $\{\omega_l^{n_l(k)}\}$ convergent is. Men ziet dan direct dat de rij

$$n(k) = n_k(k)$$

de genoemde eigenschappen heeft. Stel nu

$$\omega^0_n = \lim_{k\to\infty}\omega^{n(k)}_n \in \Delta^*_n .$$

Op grond van de continuiteit van $\varphi^x_{x'}$ (F5) volgt nu, voor $m \geqq n$:

$$\varphi_{x_n}^{x_m}\omega_m^0=\lim_{k\to\infty}\varphi_{x_n}^{x_m}\omega_m^{n(k)}=\lim_{k\to\infty}\varphi_{x_n}^{x_m}\varphi_{x_m}^{x_{n(k)}}\omega_{n(k)}^{n(k)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\varphi_{x_n}^{x_{n(k)}}\omega_{n(k)}^{n(k)}=\lim_{k\to\infty}\omega_n^{n(k)}=\omega_n^0 .$$

Volgens c5(b) is er dus een $\omega^0\in\Omega_{\varkappa}$ met $\varphi_{x_n}^{\varkappa}\omega^0=\omega_n^0\in\Delta_n^*$ voor alle n. Dus geldt:

$$\omega^0\in\gamma_{\varkappa}^{x_n}\Delta_n^*=\Delta_n\subset\Lambda_n .$$

Dus $\bigcap\Lambda_n\neq 0$. De rest van het bewijs is analoog met dat van st.2.5.2.

In termen van de bij de intervalmaten $\mu_{\varkappa}(\varkappa\in\mathcal{K}_0)$ behorende verdelingsfuncties $F_{\varkappa}(x_{\varkappa})=\mu_{\varkappa}(I_{-\infty,x_{\varkappa}})$ (zie par. 1.5) luidt de consistentie-eis M1:

voor $\varkappa\subset\varkappa'\in\mathcal{K}_0$ is $F_{\varkappa}(x_{\varkappa})=F_{\varkappa'}(\xi_{\rho_1},\xi_{\rho_2},\dots,\xi_{\rho_{n_\varkappa}},\infty,\dots,\infty)$,
als $\varkappa=\{\rho_1,\dots,\rho_{n_\varkappa}\}$.

De stelling van Kolmogorov zegt dus dat verdelingsfuncties die aan deze consistentie-voorwaarde voldoen een maat in $\Omega_{\varkappa}$ $(\varkappa\in\mathcal{K})$ bepalen waarvan de "projectie" op de eindigdimensionale producruimten samenvalt met de gegeven intervalmaten.

Ten aanzien van de meetbare functies geldt nog het volgende:

St. 2.5.4 Als $(\Omega_{\varkappa},\mathcal{G}_{\varkappa})$, verbonden door $\varphi_{\varkappa'}^{\varkappa}$, voldoen aan P1 t/m P5, dan is bij iedere aftelbare vz $\mathcal{G}_{\varkappa}$-meetbare functies $\{f_1,f_2,\dots\}$ een indexvz $\varkappa'\in\mathcal{K}_{\infty}^{\varkappa}$ te vinden zodat voor alle reële α en natuurlijke n geldt

$$\{\omega\mid f_n(\omega)<\alpha\}\in\mathcal{G}_{\varkappa}^{(\varkappa')} .$$

Bewijs:

Stel $\Lambda_{j,r}=\{\omega\mid f_j(\omega)<r\}$. Dus $\Lambda_{j,r}\in\mathcal{G}_{\varkappa}$. Volgens st.2.5.1 (d) is er een $\varkappa_{j,r}\in\mathcal{K}_{\infty}^{\varkappa}$ met $\Lambda_{j,r}\in\mathcal{G}_{\varkappa}^{(\varkappa_{j,r})}$. Als $\varkappa'=\bigcup_{j,r}\varkappa_{j,r}$, waarbij r de rationale getallen doorloopt dan is $\varkappa'$ de vereniging van aftelbaar veel aftelbare vzn, dus aftelbaar, dus $\varkappa'\in\mathcal{K}_{\infty}^{\varkappa}$.

Dan geldt dus volgens st.2.5.1 (b) voor alle j en rationale r dat $\Lambda_{j,r}\in\mathcal{G}_{\varkappa}^{(\varkappa')}$ en dus voor alle reële α en natuurlijke n:

$$\{\omega\mid f_n(\omega)<\alpha\}=\bigcup_{\substack{r<\alpha\\ r\text{ rationaal}}}\Lambda_{n,r}\in\mathcal{G}_{\varkappa}^{(\varkappa')} .$$

Als $\overline{\mathcal{G}_{\varkappa}}$ de σ-algebra van alle $\mu_{\varkappa}$- meetbare vzn is (dus $\mathcal{G}_{\varkappa}\subset\overline{\mathcal{G}_{\varkappa}}$), dan geldt nog de volgende stelling.

<u>St.2.5.5.</u> Bij iedere $\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{X}}$-meetbare functie f bestaat een rij functies $\{f_n\}$ zo dat

a) f_n $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{(\mathcal{X}_n)}$-meetbaar met $\mathcal{X}_n \in \mathcal{K}_o^{\mathcal{X}}$

b) $f = \lim f_n$ $\mu_{\mathcal{X}}$- b.o.

Anders geformuleerd: iedere $\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{X}}$-meetbare functie kan geapproximeerd worden door functies die van slechts eindig veel argumenten afhangen.

Het bewijs van deze stelling wordt aanzienlijk vereenvoudigd door gebruik te maken van het begrip convergentie in maat.

<u>Def.A.</u> De rij μ-meetbare functies $\{f_n\}$ heet <u>convergent in maat</u> naar f als geldt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \forall_{\varepsilon'>0} \ \exists_N \ n > N \Longrightarrow \mu(\{\omega \mid |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon'\}) < \varepsilon.$$

We hebben de volgende eigenschappen nodig:

<u>St.A.</u> Als $\mu(\Omega) < \infty$ is en f_n convergeert μ-b.o. naar f, dan convergeert f_n in maat naar f.

<u>St.B.</u> Als f_n in maat naar f convergeert dan is er een deelrij $\{f_n\}$ die μ-b.o. naar f convergeert.

Het bewijs van deze twee beweringen zullen we hier niet geven.

Bewijs van st.2.5.5:

Zij $\mathcal{H}$ de klasse van die $\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{X}}$-meetbare functies waarvoor de stelling geldt en zij $\{h_n\}$ een rij functies uit $\mathcal{H}$ met $\lim h_n = h$ $\mu_{\mathcal{X}}$-b.o. en $h \in M^*(\mu_{\mathcal{X}})$. Dus er zijn rijen $\{g_{n,k}\}$ waarbij iedere $g_{n,k}$ een $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}$-meetbare functie is die van slechts eindig veel argumenten afhangt, en zo dat

$$\lim_{k\to\infty} g_{n,k} = h_n \quad \mu_{\mathcal{X}}\text{-b.o.}$$

Nu zijn, volgens st.A alle rijen $\{g_{n,k}\}$ en $\{h_n\}$ ook convergent in maat (naar resp. h_n en h). Dus:

$$\mu_{\mathcal{X}}(\{\omega \mid |h(\omega) - h_n(\omega)| > \varepsilon'\}) < \varepsilon \quad \text{en} \quad \mu_{\mathcal{X}}(\{\omega \mid |h_n(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > \varepsilon'\}) < \varepsilon$$

als

$$n > N(\varepsilon, \varepsilon') \quad \text{en} \quad k > N(\varepsilon, \varepsilon'; n).$$

Maar:

$$|h(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > 2\varepsilon' \Longrightarrow |h(\omega) - h_n(\omega)| > \varepsilon' \text{ of } |h_n(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > \varepsilon',$$

dus

$$\{\omega \mid |h(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > 2\varepsilon'\} \subset \{\omega \mid |h(\omega) - h_n(\omega)| > \varepsilon'\} \cup$$
$$\cup \{\omega \mid |h_n(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > \varepsilon'\},$$

dus, voor $n > N(\varepsilon, \varepsilon')$ en $k > N(\varepsilon, \varepsilon'; n)$ geldt

$$\mu_{\varkappa}(\{\omega \mid |h(\omega) - g_{n,k}(\omega)| > 2\varepsilon'\}) < 2\varepsilon .$$

Kies een rij k_n met $k_n > N(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}; n)$, dan convergeert $g_n = g_{n,k_n}$ dus in maat naar h. Dus volgens st.B is er een deelrij g_{n_k} die μ-b.o. naar f convergeert. Dus $f \in \mathcal{H}$. Dus $\mathcal{H}$ is gesloten. Verder is direct in te zien dat $\mathcal{H}$ een lineaire ruimte is. Tenslotte tonen we aan dat alle karakteristieke functies van $\overline{\mathcal{G}}_{\varkappa}$-meetbare vzn tot $\mathcal{H}$ behoren: Zij $\Lambda \in \overline{\mathcal{G}}_{\varkappa}$, dan zijn er volgens par.1.4 vzn $\Lambda_n \in \mathcal{G}'_{\varkappa}$ (dus cilindervzn met eindig dimensionale basis) zo dat

$$\mu_{\varkappa}(\Lambda \vartriangle \Lambda_n) < \frac{1}{n} .$$

Voor de karakteristieke functies χ_{Λ} en χ_{Λ_n} geldt, voor $\varepsilon' < 1$:

$$\{\omega \mid |\chi_{\Lambda}(\omega) - \chi_{\Lambda_n}(\omega)| > \varepsilon'\} = \Lambda \vartriangle \Lambda_n ,$$

waaruit dus volgt dat χ_{Λ_n} in maat naar χ_{Λ} convergeert. Volgens St.B is er dus een deelrij die $\mu_{\varkappa}$-b.o. naar χ_{Λ} convergeert, zodat dus $\chi_{\Lambda} \in \mathcal{H}$.
Uit deze drie resultaten volgt dat alle $\mu_{\varkappa}$-meetbare functies tot $\mathcal{H}$ behoren, waarmee de stelling bewezen is.

Opmerkingen:

1) Als $\Omega_{\varkappa} (\varkappa \in \mathcal{K}_0)$ Euclidische ruimten zijn, terwijl $\mathcal{G}_{\varkappa}$ de σ-algebra is van alle Borelvzn in $\Omega_{\varkappa}$, dan noemen we een $\Lambda \in \mathcal{G}_{\varkappa'} (\varkappa' \notin \mathcal{K}_0)$ weer een (oneindig-dimensionale) Borelvz, terwijl de $\mathcal{G}_{\varkappa'}$-meetbare functies (oneindig-dimensionale) Baire-functies heten. St.2.5.5 zegt dus voor dit geval dat een oneindig-dimensionale Bairefunctie $\mu_{\varkappa}$-b.o. gelijk is aan de limiet van een rij eindig-dimensionale Baire-functies.

2) Uit het voorafgaande blijkt dat we voor het bewijs van de stellingen 2.5.1 t/m 2.5.5 nergens direct gebruik hebben gemaakt van het feit dat de $\Omega_{\varkappa}$ productruimten zijn, behalve voor het bewijs van P1 t/m P6 en M1 t/m M3. Deze stellingen blijven dan ook geldig als we uitgaan van een stelsel $(\Omega_{\varkappa}, \mathcal{G}_{\varkappa}, \mu_{\varkappa})$ waarin $\varkappa$ een partiëel geordende indexvz $\mathcal{K}_0$ doorloopt, met de eigenschap dat er bij ieder tweetal $\varkappa' \in \mathcal{K}_0$ en $\varkappa'' \in \mathcal{K}_0$ een bovengrens van $\varkappa'$ en $\varkappa''$ in $\mathcal{K}_0$ is

(een dergelijke partiëel geordende vz heet een <u>gerichte</u> vz), terwijl een projectieve afbeelding $\varphi_{x}^{x'}$ $(x' \supset x,\ x' \in \mathcal{K}_0,\ x \in \mathcal{K}_0)$ gegeven is met de eigenschappen (nu axiomatisch voorgeschreven) P1 t/m P5, M1,M2 (resp. voor st.2.5.3: P1 t/m P6, M1, M3). Men kan dan eerst $\mathcal{K}_0$ uitbreiden tot een volledig tralie $\mathcal{K}$ dat bestaat uit alle gerichte deelvzn $\bar{x} \subset \mathcal{K}_0$ (zie b.v. G. Birkhoff, Lattice Theory, p.58). We definiëren dan de ruimte $\Omega_{\bar{x}}$ $(\bar{x} \in \mathcal{K})$ als de vz van alle $\bar{\omega} = \{\omega_{x'} \mid x' \in \bar{x}\ ;\ x' \subset x'' \in \bar{x} \Longrightarrow \varphi_{x'}^{x''}\,\omega_{x''} = \omega_{x'}\}$. Men kan dan $\varphi_{\bar{x}}^{\bar{x}'}$ definiëren als $\varphi_{\bar{x}}^{\bar{x}'}\bar{\omega} = \{\omega_{x} \mid \omega_{x} \in \bar{\omega}$ en $x \in \bar{x}\}$ en verder verloopt de theorie als hiervoor. Zie hiervoor S. Bochner, Harmonic Analysis and the Theory of Probability, in het bijzonder p. 118 e.v..

3) C.T. Ionescu Tulcea (Rend.Lincei VII, 208-211) heeft een stelling bewezen die zowel st.2.5.2 als st.2.5.3 impliceert. Hij bewijst de σ-additiviteit van m_{x} door uit te gaan van P1 t/m P5, M1 en een verzwakte vorm van M2 die erop neerkomt dat er consistente voorwaardelijke waarschijnlijkheden bestaan die de maten μ_{x} voortbrengen, precies geformuleerd: $M2^{*}$. Er zijn functies $\nu(\omega,\Lambda)$ $(\omega \in \Omega_{x-x'},\ \Lambda \in \mathcal{G}_{x},\ x' \subset x \in \mathcal{K}_0)$ zo dat ν sommeerbaar is voor vaste Λ en zo dat ν een maat is voor vaste ω , terwijl $\nu(\omega, \Omega_{x}) = 1$, met

$$\mu_{x}(\Lambda) = \int \nu(\omega, \Lambda)\, d\mu_{x-x'} .$$

Het bewijs van deze stelling is in grote trekken analoog aan het bewijs van st.2.5.2. St.2.5.2 is dan een direct gevolg omdat voor het geval van productmaten dergelijke voorwaardelijke waarschijnlijkheden evident bestaan, neem nl. $\nu(\omega, \Lambda) = \mu_{x}(\Lambda_{\omega})$. St.2.5.3 volgt uit de stelling van Tulcea omdat onder de veronderstellingen van st.2.5.3 de existentie van voorwaardelijke waarschijnlijkheden juist gewaarborgd is (vergelijk ook de slotopmerking van par.2.4).

4) De veronderstellingen van st.2.5.3 kunnen verzwakt worden door uit te gaan van topologische ruimten Ω_{x}, met σ-algebra's $\mathcal{G}_{x}$ die alle open vzn bevatten, terwijl de μ_{x} en $\varphi_{x'}^{x}$ voldoen aan M3 en P6. Zie hiervoor ook het hierboven geciteerde boek van Bochner.

5) E.Sparre Andersen en B. Jessen (Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 25 (1948) no.4) hebben met het volgende tegenvoorbeeld aangetoond dat $m_\varkappa$ niet σ-additief hoeft te zijn onder P1 t/m P5 en M1.

Zij C een cirkel met lengte 1, die, als in de constructie van een niet L- meetbare vz volgens Vitali (zie p. 25-26), gesplitst is in aftelbaar veel disjuncte onderling congruente vzn $C_1, C_2, \ldots$ m^* is de uitwendige L-maat; $\mathcal{G}^\varkappa$ is de klasse van alle Borel-vzn in $C^\varkappa$ ($\varkappa$ een eindige vz natuurlijke getallen); $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\{1\}}$ is de klasse van alle Borel-vzn in C.
Verder is $C_\varkappa = \bigcup_{\varrho\in\varkappa} C_\varrho$; $\Omega_\varrho = C - C_\varrho$. Voor $\mathcal{G}_\varrho$ nemen we:

$$\mathcal{G}_\varrho = \{\Lambda \cap \Omega_\varrho \mid \Lambda \in \mathcal{G}\}.$$

Men kan dan vrij gemakkelijk aantonen (bedenkend dat $\mathcal{G}_\varrho$ een σ- homomorf beeld is van $\mathcal{G}$) dat

$$\mathcal{G}_\varkappa = \{\Lambda \cap \Omega_\varkappa \mid \Lambda \in \mathcal{G}^\varkappa\}.$$

Verder beschouwen we nog de afbeelding ψ die aan deelverzamelingen $\Lambda \subset C^\varkappa$ deelverzamelingen van C toevoegt:

$$\psi\Lambda = \{\omega \mid (\omega, \ldots, \omega) \in \Lambda\}.$$

Deze ψ is de projectie op C^1 van de doorsnede van Λ met de "diagonaal" van $\Omega_\varkappa$. Van deze ψ is direct in te zien dat het een σ- homomorfisme is en dat bovendien

$$\psi\mathcal{G}^\varkappa \subset \mathcal{G}.$$

We stellen voor $\Lambda \in \mathcal{G}_\varkappa$

$$\mu_\varkappa(\Lambda) = m^*(\psi\Lambda).$$

We tonen eerst aan dat $\mu_\varkappa$ een maat is voor eindige $\varkappa$:

$$\Lambda \in \mathcal{G}_\varkappa \Longrightarrow \exists_{\Lambda' \in \mathcal{G}^\varkappa}\ \Lambda = \Lambda' \cap \Omega_\varkappa \Longrightarrow \psi\Lambda = \{\omega \mid (\omega, \ldots, \omega) \in \Lambda' \cap \Omega_\varkappa\} =$$
$$= \{\omega \mid (\omega, \ldots, \omega) \in \Lambda'\} \cap \{\omega \mid (\omega, \ldots, \omega) \in \Omega_\varkappa\} = \psi\Lambda' \cap \Delta_\varkappa, \quad \text{met} \quad \Delta_\varkappa = \psi\Omega_\varkappa,$$

dus

$$\Delta_\varkappa = \{\omega \mid (\omega, \ldots, \omega) \in \prod_{\varrho\in\varkappa} (C - C_\varrho)\} = \bigcap_{\varrho\in\varkappa} (C - C_\varrho) = C - C_\varkappa.$$

Dus,

$$\mu_\varkappa(\Lambda) = m^*(\psi\Lambda' \cap \Delta_\varkappa).$$

Voor de σ- additiviteit van $\mu_\varkappa$ hoeven we dus alleen nog maar aan te tonen dat $m^*(\Lambda \cap \Delta_\varkappa)$ σ-addititief is voor $\Lambda \in \mathcal{G}^\varkappa$.
Nu geldt wegens de sub-additiviteit van m^*, als $\Lambda = \bigcup \Lambda_n$ $(\Lambda, \Lambda_n \in \mathcal{G}^\varkappa, k \neq j \Rightarrow \Lambda_k \cap \Lambda_j = 0)$:

$$m^*(\Lambda \cap \Delta_\varkappa) \leq \sum_n m^*(\Lambda_n \cap \Delta_\varkappa).$$

Anderzijds, omdat Λ, Λ_n meetbare vzn zijn:

$$m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa)=m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa\cap\Lambda_1)+m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa\cap\bar\Lambda_1)=$$
$$=m^*(\Lambda_1\cap\Lambda_\varkappa)+m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa\cap\Lambda_2)+m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa\cap\bar\Lambda_1\cap\bar\Lambda_2)=$$
$$=\dots=\sum_{k=1}^{n}m^*(\Lambda_k\cap\Delta_\varkappa)+m^*(\Delta_\varkappa\cap\Lambda\cap\bigcap_{k=1}^{n}\bar\Lambda_k),$$

dus

$$\sum_{k=1}^{n}m^*(\Lambda_k\cap\Delta_\varkappa)\leqq m^*(\Lambda\cap\Delta_\varkappa)\qquad\text{voor alle } n,$$

zodat de σ- additiviteit direct volgt.
Verder is $m_*(C_\varkappa)=0$ omdat er oneindig veel vzn zijn die disjunct met en congruent met $C_\varkappa$ zijn; dus volgt uit

$$m^*(\Delta_\varkappa)=1-m_*(C_\varkappa)$$

dat $m^*(\Delta_\varkappa)=1$, zodat

$$\mu_\varkappa(\Omega_\varkappa)=1.$$

Dat de $\mu_\varkappa$ aan de consistentievoorwaarde M_1 voldoen volgt uit

$$\psi(\gamma_\varkappa^{\varkappa'}\Lambda)=\{\omega|(\omega,\dots,\omega)\in\gamma_\varkappa^{\varkappa'}\Lambda\}=$$
$$=\{\omega|\varphi_{\varkappa'}^{\varkappa}(\omega,\dots,\omega)\in\Lambda\}=\{\omega|(\omega,\dots,\omega)\in\Lambda\}=\psi\Lambda.$$

De ruimten $(\Omega_\varkappa,\mathcal{G}_\varkappa,\mu_\varkappa)$ ($\varkappa$ eindig) voldoen dus aan P1 t/m P5, M1.
Beschouw nu in $\Omega_{\varkappa_0}$($\varkappa_0$ is de vz van alle natuurlijke getallen) de cilindervz met basis $\Lambda_\varkappa$, in $\Omega_\varkappa$($\varkappa$ eindig) , die bestaat uit alle punten die niet op de diagonaal van $\Omega_\varkappa$ liggen:

$$\Lambda_\varkappa=\{\omega|\exists_{\nu\in\varkappa}\exists_{\lambda\in\varkappa}\ \omega_\nu\neq\omega_\lambda\}.$$

Dan is dus

$$\psi\Lambda_\varkappa=0\ ,$$

dus

$$m_{\varkappa_0}(\gamma_{\varkappa_0}^{\varkappa}\Lambda_\varkappa)=\mu_\varkappa(\Lambda_\varkappa)=m^*(\psi\Lambda_\varkappa)=0,$$

terwijl

$$\bigcup_{\varkappa\text{ eindig}}\gamma_{\varkappa_0}^{\varkappa}\Lambda_\varkappa=\Omega_{\varkappa_0},$$

want een punt in $\Omega_{\varkappa_0}$ kan niet uitsluitend gelijke coördinaten hebben (wegens $\bigcap_{\rho\in\varkappa_0}\Omega_\rho=0$). Hieruit volgt dat $m_\varkappa$ niet σ-additatief is omdat $m_{\varkappa_0}(\Omega_{\varkappa_0})=1$ moet zijn.