STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 300

De methoden van DE WOLFF en VAN HEERDEN voor het nemen van aselecte steekproeven bij accountantscontroles

door

J. Kriens

mei 1962

1. Inleiding. [1)]

Sinds enige jaren is de vraag of bij accountantscontroles al dan niet steekproeven genomen mogen worden weer uitvoerig ter discussie gesteld. Er werden o.a. twee steekproef-methoden beschreven, speciaal ontworpen ten behoeve van de accountantscontroles, n.l. door resp. P. DE WOLFF ([1] en [2]) en door A. VAN HEERDEN [3] .

Beide methoden hebben betrekking op de zogenaamde positieve controles, dat zijn controles, waarbij nagegaan wordt of het totaal opgegeven bedrag volledig door boekingsbescheiden kan worden verantwoord. Om de gedachten te bepalen kan men bijv. denken aan de controle van de lijst van door een schadeverzekeringsmaatschappij in een bepaald jaar uitbetaalde schaden. Bij de uitbetaling kan fraude gepleegd worden door het opvoeren van een hoger bedrag op de lijst dan in werkelijkheid door schade-claims wordt gedekt.

De door DE WOLFF voorgestelde controlemethode is gebaseerd op het aanwijzen van posten, terwijl de methode van VAN HEERDEN het aanwijzen van guldens als uitgangspunt heeft.

Zowel bij de methode van DE WOLFF als bij de methode van VAN HEERDEN gaat men tot controle van alle posten over wanneer men in de steekproef een ernstige fout vindt. Hoewel de methoden uiteraard ook van toepassing zijn bij een andere handelwijze, zullen wij alleen dit belangrijke, bijzondere geval beschouwen. De conclusies worden door DE WOLFF geformuleerd in de vorm van betrouwbaarheidsintervallen en door VAN HEERDEN met behulp van de fout van de tweede soort.

In § 2 wordt een beknopte beschrijving van beide methoden gegeven. De derde paragraaf behandelt het voorwaardelijk opgeven van betrouwbaarheidsintervallen en de vierde het verwerken van eventueel aanwezige a priori informatie omtrent de onbekende fractie fouten. In § 5 wordt de bepaling van de omvang van de steekproef besproken en § 6 bevat de conclusies. Tenslotte wor-

----

1) De voor de tabellen en grafieken van § 5 vereiste berekeningen zijn uitgevoerd door K.J. ARWERT en M. VRUGT, assistenten van de statistische afdeling.

den de methoden in de appendix vergeleken vanuit het oogpunt van de eenzijdige binomiale toetsen.

2. Beschrijving van de methoden.

2.1. De methode van DE WOLFF.

Wij beperken ons hier tot de in het eerste artikel beschreven procedure, waarbij de populatie van alle posten gesplitst wordt in twee lagen, een laag van de grote posten die alle gecontroleerd worden en een laag van kleine posten waaruit een steekproef genomen wordt. De in het tweede artikel ingevoerde uitbreiding tot meer dan twee lagen leidt wel tot grotere besparingen, doch is voor onze bespreking niet van essentieel belang. Vindt men hetzij bij de grote posten, hetzij in de steekproef van de kleine posten een (ernstige)fout, dan gaat men over tot het controleren van alle posten, zodat slechts tot op een steekproef gebaseerde uitspraken wordt overgegaan, indien in ieder geval alle grote posten juist zijn en evenzo de kleine, in de steekproef onderzochte posten. Zij $f(x)$ de verdelingsdichtheid van de posten in de te controleren populatie, $F(x)$ de cumulatieve verdeling, x_o de grens waarboven alles gecontroleerd wordt, N het totale aantal posten en n de omvang van de steekproef uit de posten tussen o en x_o. Het totale aantal te controleren posten is dan $n + N.\left\{1-F(x_o)\right\}$. Wanneer men de controlekosten per post constant onderstelt en deze C bedragen, dan zijn de totale controlekosten K gelijk aan

$$K=\left[n + N\left\{1-F(x_o)\right\}\right]\cdot C \quad . \qquad (2.1)$$

Het aantal fouten in de steekproef uit de kleine posten wordt aangegeven met $\underline{k}$. Men eist nu dat in het geval, waarin men in de steekproef geen fouten vindt, gezegd kan worden, dat behoudens een kans α, het totale niet gedekte bedrag hoogstens gelijk is aan een fractie φ van het totaal opgegeven

bedrag B. Volgens de auteur kan dit als volgt worden bereikt.
Als men in de steekproef uit de kleine posten geen fouten vindt, dan ligt de fractie p van niet(volledig) gedekte posten uit de populatie van posten $\leq x_0$ behoudens een kans α in het interval

$$0 \leq p \leq 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}. \qquad (2.2)$$

Wij onderstellen dat n voldoende klein is om de binomiale benadering van de hypergeometrische verdeling te rechtvaardigen. Het totaal aantal onjuiste posten $\leq x_0$ is dus behoudens een kans α: $\leq NF(x_0)(1-\alpha^{\frac{1}{n}})$ en aangezien ondersteld is dat alleen fouten gemaakt kunnen worden door het opgeven van te hoge bedragen, is het totale niet verantwoorde bedrag dus behoudens een kans α in ieder geval

$$\leq Nx_0 \, F(x_0)(1-\alpha^{\frac{1}{n}}).$$

Zorgt men nu dat voldaan is aan de betrekking

$$Nx_0 \, F(x_0) \, (1-\alpha^{\frac{1}{n}}) \leq \varphi B, \qquad (2.3)$$

dan zou aan de voorwaarde dat bij het niet vinden van een fout in de steekproef, de totale fout behoudens een kans α kleiner dan een fractie φ van het totaal bedrag B is, zijn voldaan.
De vrijheid in de keuze van n en x_0 kan nu gebruikt worden door de totale controlekosten K te minimaliseren onder de voorwaarde (2.3). Het probleem (2.1) minimaliseren onder de voorwaarde (2.3) kan men oplossen met de methode van LAGRANGE.

2.2. De methode van VAN HEERDEN.

VAN HEERDEN beschouwt de lijst met het totaal bedrag B niet als een populatie bestaande uit N posten, maar als een populatie bestaande uit B guldens. Er wordt een aselecte steekproef van n guldens genomen, nadat de guldens, in volgorde van voorkomen op de lijst alle een nummer hebben gekregen. Hij spreekt dan ook van de "guldenrangnummermethode".

Aanvaardt men een lijst alleen in die gevallen waarin alle guldens in de steekproef door stukken worden gedekt, dan bedraagt de kans β om de lijst ten onrechte te accepteren, als er een fractie φ van het totaalbedrag B niet gedekt is

$$\beta(\varphi) = (1 - \varphi)^n . \qquad (2.4)$$

Ook hier is ondersteld dat de steekproefomvang voldoende klein is om de binomiale benadering te rechtvaardigen.

Men kan nu n bepalen door een eis van de volgende vorm: als er een fractie φ_0 of meer van B onjuist is, dan mag de kans dat dit niet gemerkt wordt hoogstens β_0 bedragen. De steekproefomvang n moet dus zodanig zijn, dat voldaan is aan

$$(1 - \varphi_0)^n \leq \beta_0 . \qquad (2.5)$$

Deze methode om n te bepalen is nog min of meer subjectief doordat de grenzen φ_0 en β_0 vrij willekeurig worden vastgelegd. Aan het eind van het artikel geeft de auteur nog een andere wijze aan om n te bepalen, welke op de zogenaamde minimax-methode neerkomt. In § 4 komen wij hierop terug.

3. Het voorwaardelijk opgeven van betrouwbaarheidsintervallen.

Bij de methode van DE WOLFF wordt een interval opgegeven, waarin de fractie p van onjuiste posten kleiner of gelijk aan x_0 vermoedelijk ligt, wanneer er geen foute posten in de steekproef gevonden zijn. Deze voorwaardelijk opgegeven intervallen, welke op de in de theorie der betrouwbaarheidsintervallen gebruikelijke wijze worden afgeleid, zijn in werkelijkheid echter geen gewone betrouwbaarheidsintervallen. Hierdoor zou verwarring kunnen ontstaan, reden waarom wij verder op dit punt ingaan. Daarbij zal blijken, dat de beschreven methode aan strengere eisen voldoet dan men op het eerste gezicht zou denken.

Teneinde na te gaan wat er precies gebeurt kan men de situatie vanuit twee standpunten bezien. Men kan

a) de onbekende fractie p beschouwen als een onbekende constante.

b) de onbekende fractie p beschouwen als een stochastische grootheid met een al dan niet bekende a priori verdeling.

Het eerste standpunt wordt nader onderzocht in deze paragraaf, het tweede in § 4.

Stelt men zich op het onder a) genoemde standpunt, dan bezit p dus een bepaalde, onbekende waarde p_0. Vindt men in de steekproef k=0, dan wordt als bovengrens p^* van het interval voor p opgegeven: $p^* = 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$. Nu zijn er twee mogelijkheden: òfwel $p_0 \leq 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$, in welk geval iedere op deze wijze gedane uitspraak juist is, òfwel $p_0 > 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$, in welk geval alle in deze vorm gedane uitspraken onjuist zijn. Het is derhalve niet geheel juist om de intervallen (2.2) die dus alleen opgegeven worden voor k=0, betrouwbaarheidsintervallen met een onbetrouwbaarheid α te noemen. Bij de gebruikelijke hantering van de methode der betrouwbaarheidsintervallen worden voor alle mogelijke steekproefresultaten k, intervallen voor p_0 opgegeven. Is dan in een bepaald geval $p_0 > 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$, dan staan tegenover de onjuiste uitspraken bij het steekproefresultaat $k=0$, juiste uitspraken voor andere waarden van k. Kiest men de op te geven bovengrenzen p^* als functie van α , n en k op de bij betrouwbaarheidsintervallen gebruikelijke wijze (zodat voor $k > 0$

$p^* > 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$ wordt), dan kan men stellen, dat de methode een onbetrouwbaarheid α bezit, dat wil zeggen dat bij het gebruik van deze methode in een fractie α van alle uitspraken een onjuiste uitspraak wordt gedaan.

Het voorwaardelijk opgeven van betrouwbaarheidsintervallen met een gekozen onbetrouwbaarheid α kan in dit geval echter gerechtvaardigd worden door als populatie van uitspraken zowel de uitspraken bij $k=0$ als die bij $k \neq 0$ te beschouwen en dan in die gevallen, waarin een $k > 0$ gevonden wordt, bij het volledige onderzoek alle onjuiste posten te verbeteren, zodat een populatie met $p=0$ ontstaat. Voor een bepaalde $p_o > 0$, wordt dan een fractie $1-(1-p_o)^n$ van de populaties vervangen door foutloze populaties, waardoor het opgegeven interval $0 \leq p \leq 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ de (nieuwe) werkelijke waarde van p inderdaad bevat. Er ontstaan dan alleen onjuiste uitspraken, wanneer in de steekproef niets gevonden wordt, terwijl $p_o > 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$ is. De fractie onjuiste uitspraken is dan 0, wanneer de vaste (maar onbekende) waarde p_o van $p \leq 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ is en gelijk aan $(1-p_o)^n$, wanneer geldt $p_o > 1-\alpha^{\frac{1}{n}}$. De onbetrouwbaarheid van de methode bezit dan een bovengrens, welke gelijk is aan α en willekeurig dicht benaderd wordt voor waarden van p_o, die rechts liggen van $1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ en voldoende dicht bij $1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ (vgl. fig. 3.1).

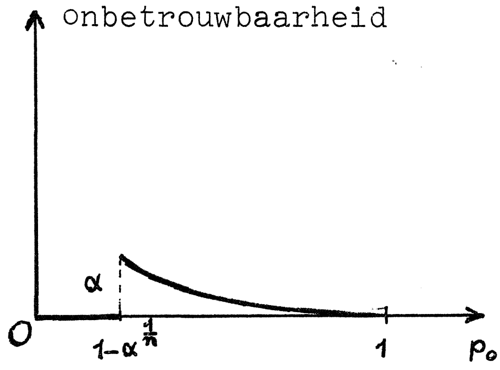

fig. 3.1

Onbetrouwbaarheid bij de gewijzigde interpretatie van de methode van DE WOLFF

Uit deze beschouwingen blijkt wel dat de bij deze methode behorende voorzorgen strenger zijn dan alleen het opgeven van α zou doen vermoeden. Want alleen als p_0 net iets groter dan $1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ is, is de onbetrouwbaarheid bijna gelijk aan α, terwijl deze in alle andere gevallen kleiner is. Bovendien wordt (vgl. § 2.1) voor iedere niet(geheel) verantwoorde en niet ontdekte post nog rekening gehouden met het maximaal mogelijke niet gedekte bedrag x_0, hetgeen ook een uiterst voorzichtige aanname is. De voorwaarde, dat behoudens een kans α het totale niet gedekte bedrag hoogstens een fractie φ van het totale geboekte bedrag B bedraagt, is dus zowel wat α als wat φ betreft ruimschoots vervuld.

4. Het gebruiken van a priori informatie.

Onderstelt men dat $\underline{p}$ een a priori verdeling heeft met b.v. een continue verdelingsfunctie $G(p)$[1], dan kan men bij een gegeven steekproefresultaat k de a posteriori verdeling van $\underline{p}$ berekenen met behulp van de regel van BAYES. Aangezien de a posteriori verdelingsfunctie van $\underline{p}$ afhangt van k, zullen wij deze aangeven met $G_k(p)$; $g(p)$ resp. $g_k(p)$ stellen de bij $G(p)$ en $G_k(p)$ behorende verdelingsdichtheden voor. Zij verder $P[\underline{k} = k \mid p]$ de voorwaardelijke kans op $\underline{k} = k$, wanneer $\underline{p}$ de waarde p bezit, dan is de a posteriori verdelingsdichtheid $g_k(p)$ volgens de regel van BAYES

$$g_k(p) = \frac{P[\underline{k} = k \mid p] \cdot g(p)}{\int_0^1 P[\underline{k}=k \mid p]\, g(p)dp} . \qquad (4.1)$$

Is $g(p)$ bekend, dan kan met behulp van (4.1) een interval worden opgegeven, waarin $\underline{p}$ behoudens een kans α ligt. Het is dan eveneens mogelijk de onbetrouwbaarheid van de in § 2.1 beschreven methode te berekenen. Immers, onder de voorwaarde $\underline{k} = 0$, wordt een onjuiste uitspraak gedaan, wanneer $\underline{p}$ een waarde $> 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$ bezit. De a priori kans hierop bedraagt

$$\frac{P[\underline{p} > 1 - \alpha^{\frac{1}{n}} \wedge \underline{k}=0]}{P[\underline{k} = 0]} = \frac{\int_{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}^{1} (1-p)^n\, g(p)dp}{\int_0^1 (1-p)^n\, g(p)dp} .$$

Dit is dus de voorwaardelijke onbetrouwbaarheid voor al die controles waarbij k=0 gevonden wordt, een grootheid die geheel onbekend blijft als niets bekend is over de a priori verdeling van $\underline{p}$ of als p geen a priori verdeling

---

1) De onderstelling dat $\underline{p}$ een continue verdeling heeft is in het betoog niet essentieel en kan op eenvoudige wijze door een andere onderstelling worden vervangen.

bezit.
De onvoorwaardelijke onbetrouwbaarheid van de methode, waarvoor in § 3 een bovengrens α is afgeleid, wordt gegeven door de fractie van onjuiste uitspraken van het totale aantal uitspraken, welke fractie a priori een waarde α^* heeft, gelijk aan

$$\alpha^* = \int_{1-\alpha^{\frac{1}{n}}}^{1} (1-p)^n \, g(p)dp. \qquad (4.2)$$

Gemakkelijk is in te zien dat $\alpha^* < \alpha$, terwijl het verschil tussen α en α^* groter wordt naarmate de a priori verdeling van p minder geconcentreerd ligt in het gebied vlak rechts van het punt $1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$.
In werkelijkheid bestaan er bij accountantscontroles veel gevallen, waarin a priori informatie in een min of meer vage vorm aanwezig is. Zo staat het reeds bij voorbaat vast dat het in zeer veel gevallen vrijwel uitgesloten is dat men een fraude van meer dan 1% van het totaalbedrag heeft gepleegd. Conclusies in de vorm: behoudens een onbetrouwbaarheid van 0,01 is de totale fraude niet meer dan 1% van het gecontroleerde totaal, zijn in die gevallen dan ook bijzonder onbevredigend, daar de marges nog zo groot zijn dat men ze ook zonder het nemen van steekproeven wel had kunnen geven. Hetzij een kleinere onbetrouwbaarheid, hetzij een lagere bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval, hetzij beide kunnen alleen verkregen worden door de reeds aanwezige informatie in de uitspraken te betrekken. Vanzelfsprekend zal men hierbij zeer voorzichtig te werk moeten gaan.
Op welke wijze dit soort informatie gebruikt kan worden om bij dezelfde bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval te komen tot een kleinere onbetrouwbaarheid van de methode is boven reeds aangegeven. Het ligt echter meer voor de hand na

te gaan wat bij een gegeven onbetrouwbaarheid α de invloed van de a priori informatie is op de bovengrens van het betrouwbaarheidsinterval. Wanneer de steekproef 0 fouten bevat, volgt de a posteriori verdelingsdichtheid van $\underline{p}$ uit (4.1) voor k=0 en dan is dus a posteriori $\underline{p} \leq p^*$ behoudens een kans α als voldaan is aan

$$\int_{p^*}^{1} g_0(p)dp \leq \alpha . \tag{4.3}$$

Nu ligt het voor de hand hetzij te onderstellen dat de a priori verdeling van $\underline{p}$ behoort tot de klasse van de β-verdelingen, hetzij te onderstellen dat er een positieve kans h_o is op $\underline{p} = 0$, terwijl de overige waarden van $\underline{p}$ verdeeld zijn volgens een β-verdeling. Daar de eerste situatie een bijzonder geval is van de laatste, zullen wij alleen voor deze laatste de formules geven. Stel derhalve dat de a priori verdeling van $\underline{p}$ de volgende vorm bezit

$$g(p)= \begin{cases} h_o & \text{voor } p=o \\ (1-h_o) \, . \, h(p) & \text{voor } p \neq 0 \end{cases} , \tag{4.4}$$

waarin

$$h(p)=h(p;\, r,\, s)= \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\,\Gamma(s)} \; p^{r-1}(1-p)^{s-1}, \qquad (r > 0,\; s > 0) \tag{4.5}$$

De a posteriori verdeling van $\underline{p}$ voor k=0 wordt dan bepaald door

$$g_o(p) = \frac{(1-p)^n \; g(p)}{\int_0^1 (1-p)^n \; dG(p)}, \tag{4.6}$$

of uitgeschreven

$$g_o(p)=\begin{cases} \dfrac{h_o}{h_o + (1-h_o)\int_0^1 (1-p)^n\, h(p;r,s)dp} & \text{voor } p=0 \\[2ex] \dfrac{(1-p)^n\,(1-h_o)\, h(p)}{h_o + (1-h_o)\int_0^1 (1-p)^n\, h(p;r,s)dp} & \text{voor } p\neq 0 \end{cases} \qquad (4.7)$$

hetgeen na substitutie van (4.5) overgaat in

$$g_o(p)=\begin{cases} \dfrac{h_o}{h_o + (1-h_o)\dfrac{\Gamma(r+s)\cdot\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(r+n+s)}} & \text{voor } p=0 \\[3ex] \dfrac{(1-h_o)\dfrac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(s)}\cdot\dfrac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(r+n+s)}\, h(p;\, r,n+s)}{h_o + (1-h_o)\dfrac{\Gamma(r+s)\ \ \Gamma(n+s)}{\Gamma(s)\ +\ \Gamma(r+n+s)}} & \text{voor } p\neq 0\,. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Zou men onderstellen dat h(p) j-vormig is (vgl.fig 4.1) en bv. r=1 kiezen,

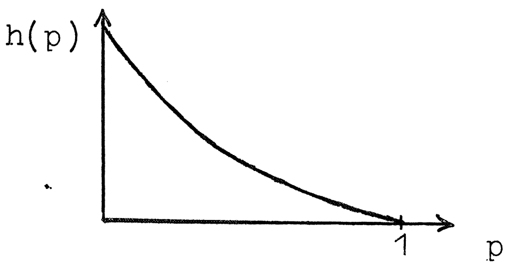

fig. 4.1

<u>j-vormige a priori-verdeling van p</u>

dan worden de formules (4.8) vereenvoudigd tot

$$g_o(p)=\begin{cases} \dfrac{h_o}{h_o + (1-h_o).\dfrac{s}{n+s}} = \dfrac{h_o(n+s)}{h_o\ n+s} & \text{voor } p=0 \\[3ex] \dfrac{(1-h_o).\dfrac{s}{n+s}\,.\,h(p;1,n+s)}{h_o + (1-h_o).\dfrac{s}{n+s}} = \dfrac{s(1-h_o).h(p;1,n+s)}{h_o\ n + s} & \text{voor } p\neq 0\,. \end{cases} \qquad (4.9)$$

Behoudens een kans α is $\underline{p}$ dus a posteriori $\leq p^*$, wanneer

$$\int_{p^*}^{1} \frac{s(1-h_o)}{h_o\ n+s}\ h(p;1,n+s)\ dp = \alpha \ ,$$

of

$$\frac{s(1-h_o)}{h_o\ n+s}\ (1-p^*)^{n+s} = \alpha \ . \tag{4.10}$$

Voor gegeven waarden α, h_o, s en n is p^* hieruit numeriek te bepalen. Neemt men aan dat de kansverdeling van $\underline{p}$ over het gehele gesloten interval $[0,1]$ een j-vormige β-verdeling heeft met r=1, dan gaat (4.10) over in

$$(1-p^*)^{n+s} = \alpha \ . \tag{4.11}$$

In tal van situaties zal men de a priori verdeling niet exact kennen, doch wel enig idee hebben over de vorm van de verdeling, dus de klasse waartoe de verdeling behoort. Men kan dan de in deze paragraaf besproken methoden toepassen, rekening houdende met de ongunstigste situatie die zich in de betreffende klasse kan voordoen.

5. De omvang van de te nemen steekproef.

Bij de methode van DE WOLFF wordt de omvang van de steekproef bepaald door de totale kosten K van de steekproef te minimaliseren onder de voorwaarde dat in het ongunstigste geval (alle niet ontdekte fouten maximaal, evenals de onbetrouwbaarheid) het niet gedekte bedrag behoudens een kans α een fractie φ van het totale bedrag B vormt.
Bij de methode van VAN HEERDEN, zoals deze beschreven is in § 2.2. wordt niet geoptimaliseerd, doch worden de waarden φ_0 en β_0 in (2.5) min of meer willekeurig gekozen. Uit gegeven waarden φ_0 en β_0 volgt dan ondubbelzinnig de minimaal vereiste omvang van de steekproef.
De door VAN HEERDEN in zijn Tabel I opgegeven waarden zijn niet alle correct, Tabel 5.I bevat de kleinste gehele waarden van n, waarvoor aan de ongelijkheid (2.5) voor de bijbehorende waarden van φ_0 en β_0 is voldaan.

Tabel 5.I

Kleinste gehele waarden van n, waarvoor aan $(1-\varphi_0)^n \leq \beta_0$ voldaan is voor de opgegeven waarden van φ_0 en β_0 .

φ_0 \ β_0	0,05	0,02	0,01	0,001
0,05	59	77	90	135
0,02	149	194	228	342
0,01	299	390	459	688
0,001	2995	3911	4603	6905

Heeft men eenmaal een bepaalde omvang van de steekproef gekozen, dan is het uiteraard niet alleen van belang te weten hoe groot β is voor een bepaalde waarde φ_0 van φ , maar dan is men ook geïnteresseerd in het verdere verloop van β als functie van φ . Voor de meest gebruikte waarde van n, nl. n = 459 is dit verloop geschetst in fig. 5.1, terwijl tabel 5.II de β's bevat voor enkele karakteristieke waarden van φ . In de grafiek is langs beide assen een logaritmische schaalindeling gebruikt; men dient derhalve ook logaritmisch te interpoleren

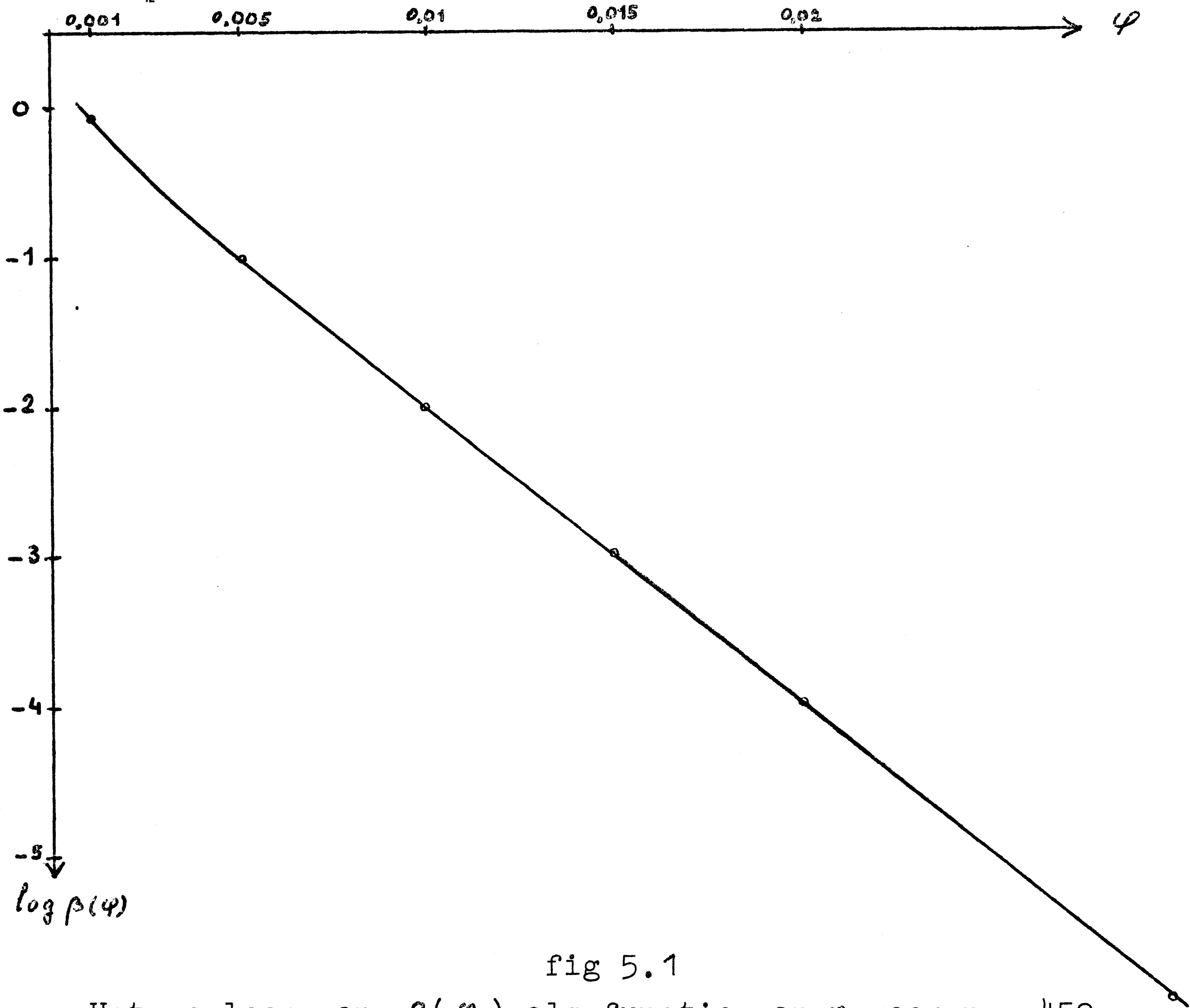

fig 5.1

Het verloop van $\beta(\varphi)$ als functie van φ voor n = 459

Tabel 5.II

Waarden van $\beta(\varphi_0)$ voor n = 459 en verschillende φ_0

φ_0	$\beta(\varphi_0)$
0,001	0,63178
0,005	0,10019
0,01	0,00992
0,015	0,00097
0,02	0,000094
0,05	$0,6.10^{-10}$

Teneinde over een methode te beschikken, waarmee n op een meer objectieve wijze bepaald kan worden, gebruikt VAN HEERDEN een methode die in enigszins andere bewoordingen op het volgende neerkomt.
Laten de controlekosten c per post bedragen, dan zijn de totale controlekosten bij een steekproef van de omvang n gelijk aan c n. Er ontstaat alleen schade, wanneer ten onrechte geconcludeerd wordt dat er geen fouten zijn. Bij een totale fout, gelijk aan een fractie φ van het bedrag B is de kans hierop $(1-\varphi)^n$. Laat de schade S bij het niet ontdekken van een dergelijke fout alleen afhankelijk zijn van φ en gegeven worden door de functie $S(\varphi)$, dan is de schadeverwachting bij het nemen van een steekproef van de omvang n voor een vaste φ gelijk aan $(1-\varphi)^n\, S(\varphi)$. Onderstel verder dat $\underline{\varphi}$ een stochastische grootheid is met een a priori verdelingsfunctie $G(\varphi)$. De verwachting R van het totale risico, dus van kosten en schadeverwachting tezamen bedraagt dan

$$R = \int_0^1 (1-\varphi)^n\, S(\varphi)\, dG(\varphi) + c\, n\,. \qquad (5.1)$$

In de meeste gevallen zal $G(\varphi)$ niet of niet volledig bekend zijn. Men kan nu, om er zeker van te zijn aan de veilige kant te zitten de zogenaamde <u>minimaxmethode</u> toepassen. Hierbij gaat men na voor welke verdelingsfunctie $G(\varphi)$ de risicoverwachting maximaal is, terwijl vervolgens n zodanig gekozen wordt, dat dit maximale risico zo klein mogelijk is.
Het maximum van R over alle verdelingsfuncties $G(\varphi)$ wordt bereikt voor de verdelingsfunctie $\Gamma(\varphi)$, die een kans 1 geeft aan de waarde φ_M van φ waarvoor $(1-\varphi)^n\, S(\varphi)$ maximaal is en een kans 0 aan alle andere waarden. De maximale risicoverwachting R_M bedraagt dan

$$R_M = (1-\varphi_M)^n\, S(\varphi_M) + c\, n. \qquad (5.2)$$

Wij kiezen nu n zodanig dat R_M als functie van n minimaal is, welke waarde bij gegeven functie $S(\varphi)$ door differentiatie van

R_M naar n gevonden kan worden.
VAN HEERDEN stelt: "het "nut" van het vinden van een fout bij de accountantscontrole is (maximaal) gelijk aan het bedrag van die fout", en kiest derhalve

$$S(\varphi) = \varphi B . \tag{5.3}$$

Bij deze keuze van $S(\varphi)$ is $(1-\varphi)^n S(\varphi)$ maximaal voor $\varphi_M = \frac{1}{n+1}$, zodat

$$R_M = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \frac{B}{n+1} + c\,n . \tag{5.4}$$

De bijbehorende, dus ongunstigste a priori verdeling van φ heeft de verdelingsfunctie

$$\Gamma(\varphi) = \begin{cases} 0 \text{ voor } \varphi < \frac{1}{n+1} \\ 1 \text{ voor } \varphi \geq \frac{1}{n+1} \end{cases} . \tag{5.5}$$

Differentiatie van (5.4) en het gebruik van de benaderingen $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \approx e^{-1}$, of $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \approx -\frac{1}{n+1}$ en $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{c\,e}{B}} \approx 0$ leidt dan tot de optimale waarde n_m van n:

$$n_m = \sqrt{\frac{B}{c\,e}} - \tfrac{1}{2} . \tag{5.6}$$

De bijbehorende risicoverwachting R_m is

$$R_m = c(2\,n_m + 1) = 2\sqrt{\frac{B\,c}{e}} . \tag{5.7}$$

Wanneer men de steekproefomvang bepaalt door het maximale verlies te minimaliseren, dus door formule (5.6) te gebruiken, of in iets grover benadering

$$n_m = \sqrt{\frac{B}{c\,e}} \tag{5.8}$$

dan kan men zich weer afvragen, hoe groot de kans β is om een lijst met een fractie van 0,01 of meer fouten toch goed te keuren. Deze kans bedraagt (vgl. (2.4))

$$\beta(0{,}01) = (1-0{,}01)^{n_m} = (1-0{,}01)^{\sqrt{\frac{B}{ce}}} . \qquad (5.9)$$

In fig.5.2 is deze kans getekend als functie van het quotient $\frac{B}{c}$, waarbij langs de horizontale as een logaritmische schaalindeling is gebruikt.

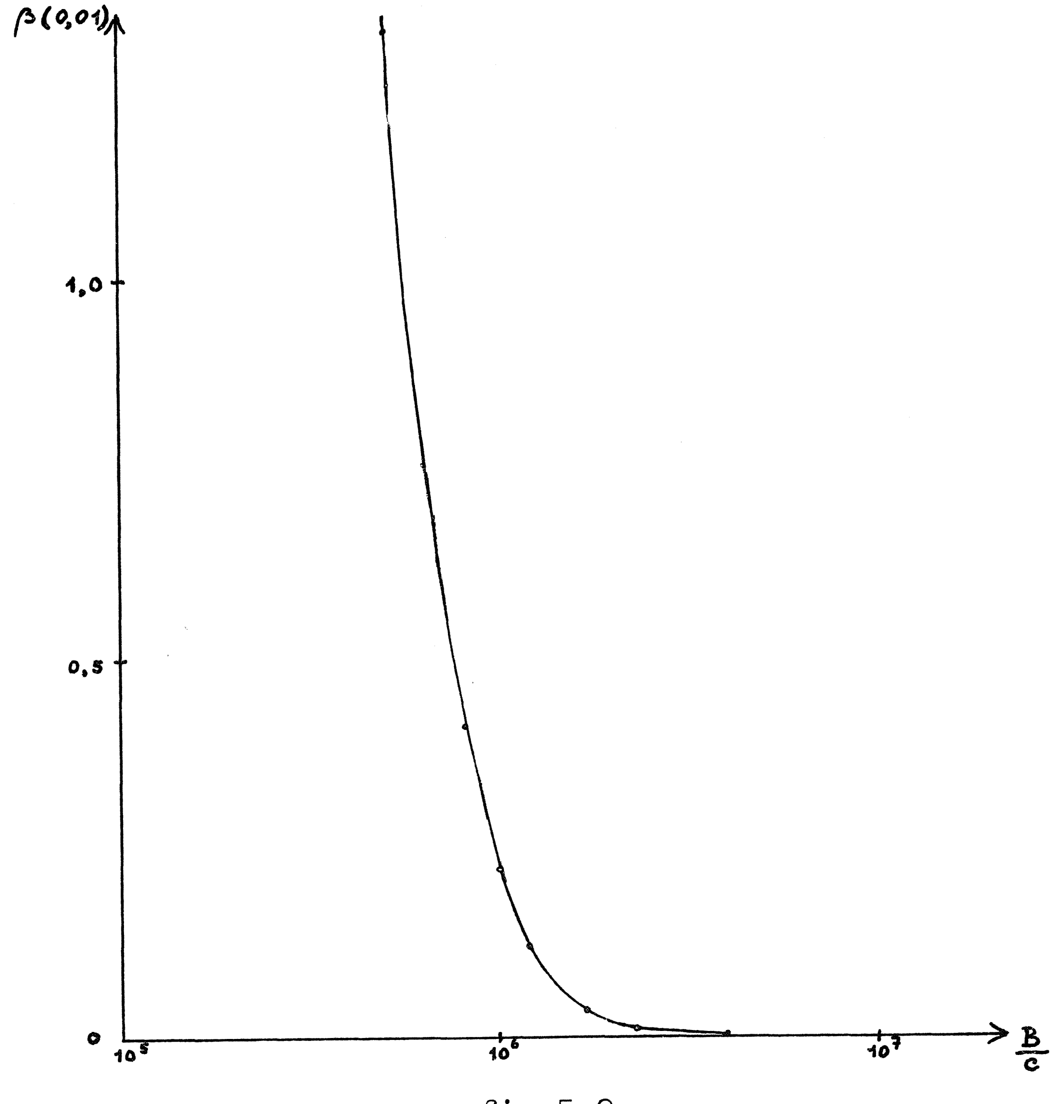

fig.5.2

De kans $\beta(0{,}01)$ als functie van $\frac{B}{c}$

Tabel 5.III bevat voor een aantal waarden van $\frac{B}{c}$ de bijbehorende waarden van n, $\beta(0,05)$, $\beta(0,01)$, $\beta(0,001)$ en $\beta(0,0001)$. Bij de berekening is uitgegaan van formule (5.6), waarna de gevonden waarde van n_m werd afgerond naar het dichtst bij gelegen gehele getal $> n_m$; de waarden van $\beta(\varphi)$ behoren bij deze afgeronde waarden van n_m.

Tabel 5.III

Waarden van n en β voor gegeven verhouding $\frac{B}{c}$ en gegeven φ

$\frac{B}{c}$	n	φ				
		0,05	0,01	0,005	0,001	0,0001
100.000	192	$0,5.10^{-4}$	0,145	0,382	0,825	0,981
200.000	271	$0,9.10^{-6}$	0,066	0,257	0,763	0,973
300.000	332	$0,4.10^{-7}$	0,036	0,189	0,717	0,967
400.000	384	$0,3.10^{-8}$	0,021	0,146	0,681	0,962
500.000	429	$0,3.10^{-9}$	0,013	0,116	0,651	0,958
1.000.000	607	$0,3.10^{-13}$	0,002	0,048	0,545	0,941
2.000.000	1356	$0,6.10^{-30}$	10^{-6}	0,001	0,258	0,873

Men kan zich bij het bepalen van het maximum van de risicoverwachting ook beperken tot een bepaalde klasse van a priori verdelingen, bijvoorbeeld tot de klasse van a priori verdelingen, waarbij de kans op $\varphi = 0$ gelijk is aan h_o.
De toegelaten verdelingsfuncties $G(\varphi)$ bezitten dan de vorm

$$G(\varphi) = \begin{cases} h_o & \text{voor } \varphi = 0 \\ (1-h_o)\, H(\varphi) & \varphi \neq 0 \end{cases} , \qquad (5.10)$$

waarin $H(\varphi)$ weer een verdelingsfunctie is (met $H(0)=0$).

De maximale risicoverwachting R'_M bij gegeven n bedraagt dan

$$R'_M = (1-h_o)(1-\varphi_M)^n\, S(\varphi_M) + c.n\,, \qquad (5.11)$$

of, als weer ondersteld wordt $S(\varphi) = \varphi B$

$$R'_M = (1-h_o)(1-\varphi_M)^n\, \varphi_M B + cn = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{(1-h_o)\,B}{n+1} + c\,n\,. \qquad (5.12)$$

De met (5.6) t/m (5.9) gelijkwaardige formules volgen dan uit deze formules, door B te vervangen door $(1-h_o).B$. Zo gaat (5.8) over in

$$n'_m \approx \sqrt{\frac{(1-h_o)\,B}{c.e}}\,, \qquad (5.13)$$

welke formule overeenkomt met formule (F) van VAN HEERDEN. Figuur 5.2 en tabel 5.III kan men blijven gebruiken mits men overal $\frac{B}{c}$ vervangt door

$$\frac{(1-h_o)B}{c}$$

Analoge transformaties ondergaan de formules, wanneer het door (5.3) gegeven verlies met een constante wordt vermenigvuldigd.

6. Conclusies.

Aan de methode van DE WOLFF zijn verschillende bezwaren verbonden. In de eerste plaats is het voorwaardelijk opgeven van betrouwbaarheidsintervallen theoretisch gezien onjuist. Dit bezwaar is echter te ondervangen door een bijzondere, zij het enigszins ongebruikelijke interpretatie van de resultaten. Praktisch gezien leidt de door de auteur gebruikte formulering in het algemeen tot te grote marges omdat de onbetrouwbaarheid betrekking heeft op alle uitspraken en de opgegeven intervallen te breed zijn. Bovendien kan men alleen dan de kosten minimaliseren wanneer de frequentieverdeling van de posten bekend is. Wanneer het geen bezwaar is, dat een fractie α van alle uitspraken onjuist kan zijn en bovendien geen of vrijwel geen a priori informatie omtrent de onbekende fractie aanwezig is, dan kunnen er situaties bestaan, waarin de methode met de gewijzigde interpretatie met vrucht kan worden toegepast; vergelijk [4] .

VAN HEERDEN concentreert de aandacht op de fout van de tweede soort, dus op het ten onrechte accepteren van populaties met een bepaalde fractie fouten. Dit leidt tot uitspraken, die in situaties, zoals deze bij accountantscontroles meestal voorkomen, zeer bevredigend zijn .

De formulering van VAN HEERDEN is echter niet overal geheel juist, doch de methode ondervindt daarvan geen schade (vgl. [3], blz. 464). Het belangrijkste bezwaar dat tegen zijn methode kan worden aangevoerd is een praktisch bezwaar, n.l. dat er situaties bestaan, waarin het bijzonder moeilijk kan zijn om de aselect aangewezen guldens op te zoeken. Een bijkomend voordeel van de methode is dat behalve fouten in posten ook fouten in optellingen en transporten worden gecontroleerd.

De door VAN HEERDEN aangegeven methode om de steekproefomvang n op een meer objectieve wijze te bepalen is een in-

teressante toepassing van de minimaxmethode, die in tegenstelling tot de meeste toepassingen op "statistische spelen" niet tot een onbruikbaar pessimistische strategie leidt.
De vergelijking van beide methoden is echter met de boven gegeven conclusies niet volledig. Immers ook bij de methode van DE WOLFF kan men zijn aandacht richten op de fout van de tweede soort en dan nagaan bij welke van de twee methoden deze het grootst is. Eenvoudigheidshalve onderstellen wij dat de grote posten allemaal gecontroleerd worden en dat een steekproef van de omvang n wordt genomen uit de posten van een bedrag $\leq x_0$. Bij de methode van DE WOLFF wordt de steekproef bepaald door aselect posten te kiezen en bij de methode van VAN HEERDEN door dit te doen met guldens.
In beide gevallen worden posten gecontroleerd.
Is de fractie niet gedekte guldens weer φ , dan is de kans op een fout van de tweede soort gelijk aan de kans geen enkele van de φB ongedekte guldens in de steekproef aan te treffen. Deze kans hangt af van de frequentieverdeling van de posten en van de wijze waarop de fouten zijn gemaakt, bv. hoofdzakelijk in de grote posten of grotendeels in de kleine, door volledig ongedekte posten op te schrijven of door posten te hoog op te geven. Daar hierover a priori weinig te zeggen valt, kan men de vergelijking beter maken door de ongunstigste situaties die voor beide methoden op kunnen treden, met elkaar te vergelijken.
De ongunstigste situaties ontstaan wanneer bij een gegeven totale fout van φB guldens, de kans op het aanwijzen van een foute post zo klein mogelijk is. Bij de methode van DE WOLFF is dit het geval wanneer het niet gedekte bedrag φB zit in posten van de grootst mogelijke waarde en deze posten geheel ongedekt zijn. Er zijn dan $\frac{\varphi B}{x_0}$ ongedekte posten en bij een totaal aantal van N posten is de kans dat een aangewezen post ongedekt is dus $\frac{\varphi B}{x_0 N}$. De ongunstigste situatie voor de

methode van VAN HEERDEN ontstaat, wanneer iedere post hetzij volledig gedekt is, hetzij in het geheel niet. Men trekt er dan geen profijt van dat behalve de aangewezen gulden ook de andere tot de betreffende post behorende guldens gecontroleerd worden. De kans op het vinden van een fout bij het aanwijzen van een gulden is dus φ .

In de ongunstigste situatie loopt men bij de methode van VAN HEERDEN minder risico dan bij die van DE WOLFF, wanneer geldt $\varphi > \frac{\varphi B}{x_o N}$, of, met $\frac{B}{N} = \bar{x}$, wanneer $x_o > \bar{x}$. Afgezien van het geval, waarin alle posten x_o bedragen is de ongunstigste situatie voor de methode van VAN HEERDEN dus altijd minder riskant dan de ongunstigste situatie voor de methode van DE WOLFF. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat de extreme situatie bij VAN HEERDEN in meer gevallen optreedt dan de extreme situatie bij DE WOLFF. Maakt men de situatie minder extreem voor de methode van DE WOLFF door nog wel uit te gaan van volledig foute en geheel juiste posten, maar toe te laten dat er foute posten $< x_o$ zijn, dan is de kans een foute post aan te wijzen gelijk aan $\frac{\varphi B}{\bar{x}_F . N}$, waarin $\bar{x}_F$ de gemiddelde waarde van de niet gedekte posten is. Voor de methode van VAN HEERDEN blijft de situatie extreem en dus is de kans op een fout van de tweede soort bij deze methode kleiner dan bij de methode van DE WOLFF, wanneer geldt $\varphi > \frac{\varphi B}{\bar{x}_F . N}$, of $\bar{x}_F > \frac{B}{N} = \bar{x}$. Met andere woorden: het aselect aanwijzen van posten geeft gemiddeld een grotere kans een totaalfout φB te ontdekken dan het aselect aanwijzen van guldens, wanneer de gemiddelde waarde van de niet gedekte posten kleiner is dan de gemiddelde waarde van alle geboekte posten.

7. Literatuur.

[1] P. DE WOLFF, Steekproeven bij administratieve contrôle, Statistica Neerlandica 10 (1956) 35 - 44 .

[2] P. DE WOLFF, Produktiviteitsverhoging bij accountantscontrole door toepassing van gelaagde steekproeven, Statistica Neerlandica 13 (1959) 215 - 232.

[3] A. VAN HEERDEN, Steekproeven als middel van accountantscontrole, Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde 35 (1961) 453 - 475 .

[4] J. FABIUS, Een methode van accountantscontrole met behulp van steekproeven, Rapport S 260 van het Mathematisch Centrum (1959), 7 blz.

Appendix

Vergelijking van de methoden als toepassingen van eenzijdige binomiale toetsen.

Naast de bekende tweezijdige binomiale toets bestaan er twee eenzijdige binomiale toetsen, de rechtseenzijdige binomiale toets en de linkseenzijdige binomiale toets, waarbij als volgt te werk wordt gegaan.
Bij de rechtseenzijdige binomiale toets is de nulhypothese H_0: $p \leq p_0$ en de alternatieve hypothese $p > p_0$. Het kritieke gebied bestaat uit de hoge waarden van $\frac{\underline{k}}{n}$ en is dus een rechter kritiek gebied Z_r. De kans op een fout van de eerste soort wordt gegeven door $\alpha = P[\underline{k} \in Z_r \mid H_0]$ en die op een fout van de tweede soort door $\beta = P[\underline{k} \notin Z_r \mid H_1]$.
Men kan uit deze eenzijdige toets voor een gevonden waarde k van $\underline{k}$ een eenzijdig begrensd betrouwbaarheidsinterval afleiden voor p, welk interval dan bestaat uit die waarden van p, waarvoor de gevonden k niet ligt in het kritieke gebied. Aangezien de linkergrens van Z_r toeneemt bij groter wordende p, zal het betrouwbaarheidsinterval van de vorm $p_* < p \leq 1$ zijn, waarin p_* afhangt van n, k en α.
Bij de linkseenzijdige binomiale toets luidt de nulhypothese H_0: $p \geq p_0$, terwijl de alternatieve hypothese is H_1: $p < p_0$. Het kritieke gebied bestaat nu uit de kleine waarden van $\frac{\underline{k}}{n}$; het is een linker kritiek gebied Z_l. De kans α op een fout van de eerste soort is $\alpha = P[\underline{k} \in Z_l \mid H_0]$ en de kans β op een fout van de tweede soort $\beta = P[\underline{k} \notin Z_l \mid H_1]$. Ook uit deze toets kan een betrouwbaarheidsinterval voor de onbekende kans p afgeleid worden en wel een rechtseenzijdig begrensd interval van de vorm $0 \leq p < p^*$. Dit interval bevat bij een gevonden steekproefresultaat k alle waarden van p met de eigenschap dat het bij die p behorende kritieke

gebied de gevonden waarde van k niet bevat. De bovengrens p^* is weer afhankelijk van α , n en k.
Vergelijken wij nu de twee besproken methoden met deze eenzijdige toetsen, dan zien wij dat bij de methode van DE WOLFF een betrouwbaarheidsinterval wordt opgegeven van de vorm (vgl. (2.2))

$$0 \leqq p \leqq 1 - \alpha^{\frac{1}{n}} ,$$

welk interval wordt opgegeven als er in de steekproef geen fouten voorkomen, m.a.w. als k=0 is. Het is een interval met een bovengrens, wat correspondeert met een <u>linkseenzijdige</u> binomiale toets, terwijl als kritiek gebied is gekozen $Z_l = \{0\}$. Zou men verder bv. stellen H_o: $p \geqq 0{,}01$; $\alpha = 0{,}01$ en $n = 459$, dan zou als betrouwbaarheidsinterval voor p worden gevonden : $0 \leqq p \leqq 0{,}01$.
De methode VAN HEERDEN is gebaseerd op een <u>rechtseenzijdige</u> toets, namelijk H_o: p=0. Als kritiek gebied wordt gekozen $Z_r = \{1, \ldots, n\}$ en als steekproefomvang bv. n = 459. De kans op een fout van de eerste soort is dan $\alpha = P[\underline{k} \in Z_r \mid p=0]$, welke kans uiteraard 0 is ! De kans op een fout van de tweede soort is $\beta = P[\underline{k} = 0 \mid H_1] = (1-p)^n$; deze kans is dus een functie van p, welke voor $p \geqq 0{,}01$ en $n = 459$ een waarde $< 0{,}01$ bezit.