

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

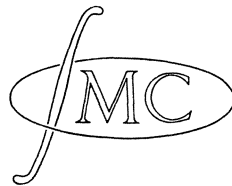
AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 309

Enige voordrachten over de zadelpuntmethode

door

W. Molenaar



Mei 1963

W. Molenaar

0. Inleiding en samenvatting.

De zadelpuntmethode is een techniek om asymptotische ontwikkelingen van zekere complexe integralen met parameter te vinden. Aan de hand van het boek van DE BRUYN [1] wordt in dit rapport een inleiding met eenvoudige voorbeelden gegeven over dit ook voor de waarschijnlijkheidsrekening nuttige hulpmiddel. Geringe voorkennis van analyse en functietheorie is wel, enige voorkennis van asymptotiek niet verondersteld.

Het is volstrekt onmogelijk het uitgebreide gebied van de asymptotische ontwikkelingen in dit korte bestek uitputtend te behandelen. Een uitvoerige toelichting op een beperkt gedeelte werd verkozen boven een korte opsomming van veel resultaten, omdat juist de rekentechniek in dit terrein van groot belang is. Het rapport is dan ook een eerste inleiding; voor meer details en voor dieper liggende stellingen wordt verwezen naar de literatuurlijst [1], [4] en [7].

Een opsomming van definities en eenvoudige eigenschappen vindt men in § 1. In § 2 wordt de methode van Laplace besproken om reële integralen asymptotisch te ontwikkelen naar een parameter, als de integrand voor toenemende parameterwaarden steeds meer een piek-vorm krijgt. § 3 begint met een intuïtieve inleiding over de keuze van een optimale integratieweg. Daarna wordt de integratie langs deze weg teruggebracht tot een toepassing van § 2. Tot slot volgen drie voorbeelden, waarvan het laatste op een statistisch probleem betrekking heeft.

W. Molenaar

1. O-symbool, asymptotische reeksen.

Definitie 1.1 (O-symbool van Landau-Bachmann). Als S een verzameling is, en f en g zijn reëel- of complexwaardige functies gedefinieerd op S , dan betekent

$$(1.1) \quad f(s) = O(g(s)) \quad (s \in S)$$

dat er een (van s onafhankelijke) constante $A > 0$ bestaat, zodat voor alle $s \in S$ $|f(s)| \leq A |g(s)|$ is.

Definitie 1.2. $f(s) = O(g(s)) \quad (s \rightarrow s_0)$ betekent: er is een omgeving U van s_0 zodat $f(s) = O(g(s)) \quad (s \in U)$.

Tenzij uitdrukkelijk anders is vermeld, zal het definitiegebied S van alle voortaan beschouwde functies (een deelverzameling van) de reële as zijn.

Voorbeeld 1: $e^{-x} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$, want

$$\exists_a \quad \exists_{A > 0} [a < x < \infty \implies e^{-x} < A \cdot 1],$$

neem n.l. a willekeurig positief, en $A = e^{-a}$: e^{-x} is monotoon dalend.

Opmerking 1: Als $g(s) \neq 0$ is voor alle $s \in S$, betekent (1.1) dat $\frac{f(s)}{g(s)}$ begrensd is op S . Als gegeven is $f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty)$, $f(x)$ en $g(x)$ continu en $g(x) \neq 0$ op $[0, \infty)$, dan is $f(x) = O(g(x)) \quad (0 < x < \infty)$, want er is een a zodat de bewering juist is voor $a < x < \infty$, en op $[0, a]$ is f/g continu dus begrensd.

Opmerking 2: Het gelijkteken is in de boven gegeven definities niet transitief: $e^{-x} = O(1)$ en $x^{-1} = O(1) \quad (x \rightarrow \infty)$ maar $e^{-x} \neq x^{-1}$.

Wel geldt: als (a) $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$) en (b) $g(x) = O(h(x))$ ($x \rightarrow \infty$), dan is (c) $f(x) = O(h(x))$ ($x \rightarrow \infty$).

Als hierbij $h(x) \neq O(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$), heet (c) een verfijning van (a).

Voorbeeld 2: $2x + x \sin x = O(x)$ ($0 \leq x < \infty$) kan niet verfijnd worden want het linkerlid schommelt tussen x en $3x$.

Voorbeeld 3: $e^{-x} = O(x^{-m})$, ($0 < x \rightarrow \infty$), voor gehele niet-negatieve m , is juist wegens: $\max_{[0, \infty)} e^{-x} x^m = m^m e^{-m}$; vervanging van m door $m+1$ geeft een verfijning.

Definitie 1.3. $f(x) = g(x) + O(h(x))$ ($x \in S$) betekent $f(x) - g(x) = O(h(x))$ ($x \in S$).

$f(x) = O(g(x)) + O(h(x))$ ($x \in S$) betekent:

er zijn positieve constanten A en B zodat voor alle $x \in S$ $|f(x)| \leq A |g(x)| + B |h(x)|$.

Soms wordt met " $O(g(x))$ " "een willekeurige functie $f(x)$ met $f(x) = O(g(x))$ " bedoeld; dit zal uit het verband duidelijk zijn.

Stelling 1.1. Als S een gesloten verzameling is en k een positief getal, dan is voor alle functies f en g gedefinieerd op S

$$|f(x)+g(x)|^k = O(|f(x)|^k) + O(|g(x)|^k) \quad (x \in S).$$

Bewijs-schets: $|f+g|^k \leq (2 \max(|f|, |g|))^k \leq 2^k \max(|f|^k, |g|^k) \leq 2^k (|f|^k + |g|^k)$, dus is

$$|f(x)+g(x)|^k \leq A |f(x)|^k + B |g(x)|^k \quad (x \in S);$$

merk op dat A en B van k afhangen.

Voorbeeld 4: Voor $k > 0$ is

$$\left\{ \frac{k}{x^2 + k^2} \right\}^k = O(x^{-k}) \quad (1 < x < \infty).$$

Immers $x^2 + k^2 = (x-k)^2 + 2kx \geq 2kx$, dus is

$$\left\{ \frac{k}{x^2 + k^2} \right\}^k \leq \frac{1}{(2x)^k} \ll x^{-k}.$$

Merk op dat deze O -relatie voor elke k met dezelfde constante $A=1$ geldt: zij is uniform voor alle $k > 0$. Spreken we bij Def. 1.2 van "uniform in de parameter k " dan moeten zowel de omgeving U als de constante A onafhankelijk van k zijn.

Definitie 1.4. $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) betekent: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
 $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) betekent: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Er gelden o.a. de volgende direct te controleren relaties, waarin de variabele x en de bepaling $x \rightarrow x_0$ resp. $x \in S$ gemakshalve zijn weggelaten:

$$O(O(g)) = O(g);$$

$$O(o(g)) = o(O(g)) = o(o(g)) = o(g);$$

$$O(g) + o(g) = O(g) + O(g) = O(g);$$

$$O(g) O(h) = O(gh);$$

$$O(g) o(h) = o(gh);$$

$$f = O(g) \Rightarrow f^a = O(g^a) \text{ voor alle } a > 0.$$

Definitie 1.5. $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ heet een asymptotische rij voor $x \rightarrow x_0$, als voor iedere gehele $k > 0$ geldt

$$g_{k+1}(x) = o(g_k(x)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Definitie 1.6. De formele reeks $\sum_{j=0}^{\infty} c_j g_j(x)$ heet een asymptotische ontwikkeling tot N termen voor $x \rightarrow x_0$ van de functie $f(x)$, als $\{g_j(x)\}$ een asymptotische rij is en bovendien:

$$f(x) = \sum_{j=0}^N c_j g_j(x) + O(g_{N+1}(x)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Geldt dit voor elke N, dan spreken we van een asymptotische reeks of asymptotische ontwikkeling^{*)} en noteren we:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j g_j(x) \quad (x \rightarrow x_0).$$

De coëfficiënten c_j zijn uniek: als ook $f(x) \approx \sum d_j g_j(x)$ en $k = \min \{j \mid c_j \neq d_j\}$, dan zou gelden

$$0 = (c_k - d_k) g_k(x) + o(g_{k+1}(x)),$$

in strijd met het gegeven $g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$.

De reeks behoeft niet te convergeren (vaste x_0 , $N \rightarrow \infty$); wij hebben voor elke N een uitspraak voor $x \rightarrow x_0$.

Voorbeeld 5: $\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \approx e^{-\frac{1}{2}x^2} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1 \cdot 3}{x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^7} + \dots \right\}$

($x \rightarrow \infty$).

Dit kan worden bewezen door partiële integratie. Merk op dat de reeks voor vaste x divergeert.

Zelfs als de asymptotische reeks convergeert kan de som ongelijk aan f(x) zijn: zo is

$$e^{-x} \approx 0.1 + 0.x^{-1} + 0.x^{-2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Wel is een machtreeks $\sum a_j z^j$ (z complex) met positieve convergentiestraal R steeds de asymptotische ontwikkeling van zijn som voor $z \rightarrow 0$: voor alle n is $|a_n R^n 2^{-n}| < A$, dus

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} a_j z^j \right| \leq |z|^{n+1} A \left(\frac{1}{2} R \right)^{-n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = O(z^{n+1})$$

($|z| \leq \frac{1}{4} R$).

*) De termen zijn van Poincaré. Vroeger sprak men van semi-convergente reeksen.

Is de functie $f(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar in $x=0$, dan is

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (x \rightarrow 0),$$

d.w.z. de Taylor-reeks is steeds de asymptotische ontwikkeling voor $x \rightarrow 0$. Immers de restterm van de Taylor-ontwikkeling die afbreekt na $n=N$ is $O(x^{n+1})$.

We kunnen voor asymptotische reeksen operaties invoeren: we beperken ons tot het type $\sum_0^{\infty} c_j x^j$, $x \rightarrow 0$.

De klassen van alle formele reeksen $A \equiv \sum a_j x^j$, $B \equiv \sum b_j x^j$ etc. vormt een commutatieve ring met een eenheidselement

$I \equiv 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$; als $a_0 \neq 0$ is, bestaat er precies één

$C \equiv A^{-1}$ met $AC = I$. Verder definiëren we $A(B)$, als $b_0 = 0$,

als volgt: stel in $a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_n B^n$ heeft x^k de coëfficiënt c_{kn} . Dan is $c_{k,k} = c_{k,k+1} = c_{k,k+2} = \dots$, noem dit c_k . Dan is

$$a_0 I + \dots + a_n B^n = \sum_{j=0}^n c_n x^n + c_{n+1,n} x^{n+1} + c_{n+2,n} x^{n+2} + \dots,$$

en we definiëren $A(B) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$. De formele reeks $A = \sum_0^{\infty} a_j x^j$

differentiërend vinden we $A' = \sum_1^{\infty} j a_j x^{j-1}$.

Stelling 1.2. Als voor de functies $A(x)$ en $B(x)$ geldt: $A(x) \approx A \equiv \sum a_j x^j$ en $B(x) \approx B \equiv \sum b_j x^j$ (beide voor $x \rightarrow 0$), dan is

$A(x) + B(x) \approx A+B$; $A(x) B(x) \approx AB$; als $a_0 \neq 0$ is geldt

$[A(x)]^{-1} \approx A^{-1}$; voor $b_0 = 0$ is $A(B(x))$ gedefinieerd

voor voldoende kleine x en is $A(B(x)) \approx A(B)$; alles voor $x \rightarrow 0$.

Bewijs: De beweringen over som en product zijn vrij triviaal.

We bewijzen het geval $A(B)$. Voor het inverse element kan men

daarna $A^{-1} = P(Q)$ stellen met $P \equiv a_0^{-1}(1+x+x^2+\dots)$ en

$Q = a_0^{-1}(a_0 - A)$.

Voor $A(B)$ is gegeven $b_0 = 0$, terwijl uit de gegevens van de stelling volgt:

$$(1.2) \quad A(y) = \sum_{k=0}^N a_k y^k + o(y^{N+1}) \quad (y \rightarrow 0)$$

en

$$(1.3) \quad B(x) = \sum_{j=1}^N b_j x^j + o(x^{N+1}) \quad (x \rightarrow 0),$$

immers $b_0 = 0$. Nu is $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N b_j x^j = 0$, terwijl uit de bewering over producten AB volgt dat voor elke N en $k \leq N$ geldt:

$$B^k(x) = \left[\sum_{j=1}^N b_j x^j \right]^k + o(x^{N+1}) \quad (x \rightarrow 0).$$

Dus is

$$\begin{aligned} A(B(x)) &= a_0 + a_1 \sum_{j=1}^N b_j x^j + a_2 \left[\sum_{j=1}^N b_j x^j \right]^2 + \dots + \\ &+ a_n \left[\sum_{j=1}^N b_j x^j \right]^n + (a_1 + \dots + a_n) o(x^{N+1}) + o(x^{N+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^N c_j x^j + o(x^{N+1}), \end{aligned}$$

waarin c_j de coëfficiënten van $A(B)$ zijn. Q.e.d.

Differentiëren is niet steeds geoorloofd: wel is

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \sin \exp \frac{1}{x} \approx 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots \quad (x \neq 0, x \rightarrow 0),$$

maar

$$\begin{aligned} x^{-2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \sin \exp \frac{1}{x} &- x^{-2} \cos \exp \frac{1}{x} \approx 0.1 + 0.2x + \\ &+ 0.3x^2 + \dots \quad (x > 0, x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Wel is juist dat als $A(x) \approx a_0 + a_1 x + \dots (x \rightarrow 0)$ en $\frac{dA}{dx} \approx$

$b_0 + b_1 x + \dots (x \rightarrow 0)$ geldt, daaruit volgt $b_j = (j+1) a_{j+1}$

($j=0, 1, 2, \dots$). Om dit te bewijzen voeren we in

$$g_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x) - b_0 x - \frac{1}{2} b_1 x^2 - \dots - \frac{1}{n} b_{n-1} x^n;$$

dan is $g'_n(x) = O(x^n)$ dus $g_n(x) - g_n(0) = O(x^{n+1})$ (beide: $x \rightarrow 0$),

dus $A(x) \approx A(0) + b_0 x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + \dots$ ($x \rightarrow 0$), en de coëfficiënten van de reeks voor $A(x)$ zijn uniek.

Integreren is zonder meer toegestaan: uit $A(x) \approx \sum_0^{\infty} a_j x^j$ ($x \rightarrow 0$) volgt

$$\int_0^x A(t) dt \approx a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots \quad (x \rightarrow 0).$$

Immers voor $|t| < k$ is

$$|A(t) - a_0 - a_1 t - \dots - a_{n-1} t^{n-1}| \leq K \cdot |t|^n,$$

waarna we voor $|x| < k$ links en rechts van 0 tot x mogen integreren.

2. Methode van Laplace.

We gebruiken in deze paragraaf de volgende bekende formules:

$$(2.1) \int_0^{\infty} e^{-tx} x^k dx = \Gamma(k+1) t^{-k-1} \quad (\text{Re } t > 0);$$

$$(2.2) \int_0^{\infty} |e^{-tx} x^k| dx = \Gamma(k+1) (\text{Re } t)^{-k-1} = O((\text{Re } t)^{-k-1})$$

($\text{Re } t > 0$);

$$(2.3) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^k dx = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ oneven is} \\ t^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! t^{n+\frac{1}{2}} 2^{2n}} & \text{als} \end{cases}$$

$$(2.4) \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-tx^2} x^k| dx = O((\text{Re } t)^{-\frac{1}{2}(k+1)}) \quad (\text{Re } t > 0);$$

$k=2n$ even is en $\text{Re } t > 0$;

Een asymptotische ontwikkeling voor een integraal, waarvan de integrand van een parameter t afhangt, kan dikwijls gevonden worden door herhaalde partiële integratie. Een uitvoerige bespreking van deze methode vindt men in hoofdstuk II van ERDÉLYI (zie literatuurlijst).

Wij laten dit gebied terzijde en bespreken nu ter voorbereiding van de zadelpuntmethode een andere techniek om asymptotische ontwikkelingen te krijgen.

Deze methode van Laplace geeft een schatting voor $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, x) dx$ die voor $t \rightarrow \infty$ steeds beter wordt, als $\phi(t, x)$ als functie van x met stijgende t steeds meer de vorm krijgt van een scherpe piek. De bijdrage van deze piek overheerst dan die van het verdere integratie-interval.

We geven eerst een voorbeeld:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \log(1+x+x^2) dx \quad (t \text{ reëel}).$$

Voor grote t is alleen de omgeving van $x=0$ van belang; laat nu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ en $(\frac{1}{2}, \infty)$ weg en ontwikkel de logaritmie op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

in een machtreeks. Na verwisselen van sommatie en integratie integreren we tenslotte toch weer over $(-\infty, \infty)$, omdat de toegevoegde stukken weer heel klein zijn. Een iets snellere aanpak is de volgende:

Voor $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ is $\log(1+x+x^2) = \log \frac{1-x^3}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + O(x^4)$.

Nu is

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log(1+x+x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 = O(x^4) \quad (-\infty < x < \infty),$$

want voor $|x| > \frac{1}{2}$ is b.v. $\log(1+x+x^2) < \log 7x^2 < 7x^2 < 28x^4$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3) e^{-tx^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-tx^2} dx;$$

Handwritten notes and calculations:

~~$\log(1+x+x^2) < \log \frac{4}{3} + \log \frac{4}{3}$~~

~~$\log(1+x+x^2) < \log \frac{4}{3} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{4}{3} < 12(\frac{4}{3})x^2 < \dots$~~

~~$\log(1+x+x^2) < \log \frac{4}{3} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{4}{3} < 16x^4$~~

~~$\frac{1}{4} < \log \frac{4}{3} < \frac{1}{3}$~~

\log is alleen negatief als $-1 < x < 0$, en dan is $x+x^2 \geq -\frac{1}{4}$. Pas nu

Als $|R(x)| \leq A x^4$ ($-\infty < x < \infty$) is, is de laatste integraal in absolute waarde kleiner dan $A \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-tx^2) dx$, dus met $-1 < \nu < 1$ is wegens (2.3) en (2.4):

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2} dx + \nu A \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-tx^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} t^{-\frac{3}{2}} + o(t^{-\frac{5}{2}}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Algemener: als voor $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ geldt $\log(1+x+x^2) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x^j$, dan zien we net als boven dat

$$\log(1+x+x^2) - \sum_{j=1}^{2M-1} c_j x^j = o(x^{2M}) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Hieruit volgt dan:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{M-1} c_{2n} t^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2}) + o(t^{-M-\frac{1}{2}}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

dus

$$F(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} t^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

is een asymptotische ontwikkeling van $F(t)$.

en δ
met $|z| > \delta$

Stelling 2.1 (Lemma van Watson). Als $f(z)$ analytisch is voor $z=0$, terwijl voor elke n $f(z) \cdot z^{-n}$ begrensd is voor alle reële z , dan geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} f(z) dz \approx \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} \Gamma(j+\frac{1}{2}) t^{-j-\frac{1}{2}} \quad (t \rightarrow \infty),$$

als a_k de coëfficiënten zijn van de machtreeks waarin $f(z)$ rondom $z=0$ kan worden ontwikkeld.

Bewijs. We hebben

$$f(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} a_j z^j + R_{2n}(z),$$

waarbij

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-2n} R_{2n}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (a_{2n} + a_{2n+1} z + \dots) = a_{2n}$$

een eindig getal is.

Nu is $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^{-2n} R_{2n}(z)$ op de gehele reële as begrensd door een constante M , want voor $z \leq \delta$ is er een bovengrens $a_{2n} + \varepsilon$, en daarbuiten een bovengrens

$$\sup |z|^{-2n} |f(z)| + \sum_{j=0}^{2n-1} |a_j| \delta^{j-2n}.$$

Dus is

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} \left\{ f(z) - \sum_{j=0}^{2n-1} a_j z^j \right\} dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} M z^{2n} dz = O(t^{-n-\frac{1}{2}}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

waarbij (2.4) is gebruikt. Met (2.3) volgt nu direct:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} \Gamma(j+\frac{1}{2}) t^{-j-\frac{1}{2}} +$$

$$+ O(t^{-n-\frac{1}{2}}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

waaruit het gestelde blijkt. We merken nog op dat de grootte van de fout bij afbreken na n termen afhangt van de bovengrens M .

Geval 2.1: inwendig maximum.

We onderzoeken het asymptotische gedrag voor $t \rightarrow \infty$ van

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} dx,$$

waarbij $h(x)$ reël en continu is, en maximaal voor $x=0$. We kunnen zonder beperking $h(0) = 0$ stellen: zo nodig gaat men over op $H(x) \stackrel{\text{def}}{=} h(x) - h(0)$ en voegt een constante factor $\exp(th(0))$ toe. We nemen aan: $x \neq 0 \Rightarrow h(x) < 0$ en

$$(2.5) \quad \exists_{b>0} \exists_{c>0} [|x| \geq c \Rightarrow h(x) < -b].$$

Verder eisen we dat de integraal convergeert voor voldoende grote t ; laat b.v. gegeven zijn dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp h(x) dx$$

onvergeert. Tenslotte moet $h'(x)$ bestaan in een zekere omgeving van $x=0$ en moet $h''(0)$ bestaan en negatief zijn.

Nu is $h'(0) = 0$. Verder is

$$\forall_{\delta>0} \exists_{\eta(\delta)>0} [\delta < |x| < \infty \Rightarrow h(x) < -\eta];$$

dit volgt uit (2.5) als $\delta \geq c$, en anders voegen we $[-c, -\delta]$ en $[\delta, c]$ toe waarop de continue functie h een (negatief) maximum aanneemt. Dus is voor $t > 1$

$$(2.6) \quad \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) e^{th(x)} dx = \left(\int_{+} \int_{-} \right) e^{(t-1)h(x)} e^{h(x)} dx < \\ < e^{-(t-1)\eta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{h(x)} dx = e^{-t\eta} e^{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{h(x)} dx.$$

Definiëer $g(x) = h(x) - \frac{1}{2} x^2 h''(0)$, dan is $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$; $g'(x)$ bestaat in een omgeving van $x=0$. Uit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = g''(0) = 0$$

volgt $g'(x) = o(x) \quad (x \rightarrow 0)$. Volgens de middelwaardstelling is $g(x) - g(0) = xg'(\xi) = x o(\xi) = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$. Kies nu ϵ zodat $0 < 3\epsilon < |h''(0)|$, dan is er op grond van het voorgaande een $\delta > 0$ zodat

$$|x| \leq \delta \Rightarrow \left| h(x) - \frac{1}{2} x^2 h''(0) \right| < \epsilon x^2.$$

Hieruit volgt

$$(2.7) \quad \int_{-\delta}^{\delta} \exp \left\{ \frac{1}{2} t x^2 (h''(0) - 2\varepsilon) \right\} dx < \int_{-\delta}^{\delta} \exp \{ t h(x) \} dx < \\ < \int_{-\delta}^{\delta} \exp \left\{ \frac{1}{2} t x^2 (h''(0) + 2\varepsilon) \right\} dx.$$

Wanneer we in (2.7) juist over $(-\infty, -\delta)$ en (δ, ∞) integreren, ontstaan voor $t > 1$ alleen bijdragen $O(\exp(-t\alpha))$, waarin $\alpha > 0$ wel van ε en δ maar niet van t afhangt. Voor het middelste lid volgt dit uit (2.6). Voor het rechterlid is wegens $h''(0) < -3\varepsilon$

$$\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} t x^2 (h''(0) + 2\varepsilon) \right\} dx < \\ < \left(\int + \int \right) \exp \left\{ -(t-1) \frac{1}{2} x^2 \varepsilon \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \varepsilon \right\} dx < \\ < \exp \left\{ -(t-1) \frac{1}{2} \delta^2 \varepsilon \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \varepsilon \right\} dx = \\ = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \delta^2 \varepsilon \right\} \exp \left\{ -t \frac{1}{2} \delta^2 \varepsilon \right\} = O(\exp(-t\alpha)) \quad (t > 1).$$

De afschatting van het linkerlid gaat analoog.

Uit (2.7) en (2.3) met $k=n=0$ blijkt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t h(x)} dx < (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-h''(0) - 2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} + O(e^{-t\alpha}) \quad (t > 1),$$

zodat voor voldoende grote t geldt

$$F(t) < (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-h''(0) - 3\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Natuurlijk is er een soortgelijke ondergrens voor $F(t)$. Omdat ε willekeurig klein mag zijn concluderen we:

$$(2.8) \quad F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t h(x)} dx \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-h''(0))^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Geval 2.2: randmaximum.

Wanneer het maximum van de integrand op de rand van het integratieinterval wordt aangenomen, mogen we niet concluderen dat $h'(0) = 0$ is, zoals in geval 2.1. We beschouwen nu

$$G(t) = \int_0^{\infty} e^{th(x)} dx,$$

waarbij $h(x)$ reël en continu is, $h'(0)$ bestaat en negatief is, terwijl voor alle $x > 0$ geldt $h(x) < h(0)$. Verder is gegeven: voor $x \rightarrow \infty$ $h(x) \rightarrow -\infty$, en $\int_0^{\infty} \exp h(x) dx$ convergeert.

Wegens het bestaan van $h'(0)$ is er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat

$$|x| \leq \delta \Rightarrow |h(x) - h(0) - xh'(0)| < \epsilon x.$$

Kies nu ϵ zodat $0 < 2\epsilon < -h'(0)$, dan is

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \exp\{th(0)\} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\{tx(h'(0) - \epsilon)\} dx < \int_{-\delta}^{\delta} \exp\{th(x)\} dx < \\ & < \exp\{th(0)\} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\{tx(h'(0) + \epsilon)\} dx; \end{aligned}$$

voor $t > 1$ leveren de integranden van (2.9) een bijdrage over $|x| \geq \delta$ $O(e^{-t^\alpha})$, met $\alpha > 0$ onafhankelijk van t en afhankelijk van δ en ϵ . Dit bewijst men analoog aan het geval van het inwendig maximum. Uit (2.9) blijkt:

$$G(t) < e^{th(0)} \{t^{-1}(-h'(0) - \epsilon)^{-1} + O(e^{-t^\alpha})\} \quad (t > 1);$$

dus is

$$G(t) < e^{th(0)} t^{-1} (-h'(0) - 2\epsilon)^{-1}$$

voor voldoende grote t . Er is een soortgelijke ondergrens voor

$G(t)$, en ε is willekeurig klein, dus geldt

$$(2.10) \quad G(t) \sim e^{th(0)} t^{-1} (-h'(0))^{-1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Geval 2.3: verdere ontwikkeling.

Wanneer het gedrag van de integrand nauwkeuriger bekend is dan in de gevallen 2.1 en 2.2, kunnen we proberen behalve de in (2.8) en (2.10) gegeven kop-term ook de volgende termen van de asymptotische ontwikkeling te bepalen. We zullen ons beperken tot een inwendig maximum; een randmaximum is nog iets gemakkelijker en komt ter sprake aan het eind van § 3.5 (Toelichting 2).

Beschouw

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx.$$

Laat voor zekere $\delta > 0$ gelden dat $h(x)$ voor $|x| \leq \delta$ de som is van een convergente machtreeks:

$$h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

met $a_2 < 0$, terwijl de integreerbare functie $g(x)$ voor $|x| \leq \delta$ de som is van een tweede convergente reeks:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots;$$

beide reeksen zijn voor $|x| \leq \delta$ absoluut convergent. Verder nemen we aan dat voor alle gehele positieve M geldt:

$$(2.11) \quad \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) g(x) e^{th(x)} dx = O(t^{-M}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Tenslotte kunnen we een positief getal η vinden zodat geldt:

$$(2.12) \quad |x| \leq \delta \Rightarrow h(x) < -\eta x^2.$$

Bij deling van de integrand door $\exp(ta_2 x^2)$ blijft over:

$$(2.13) \quad P(tx^3, x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x) \exp \{ tx^3 (a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + \dots) \};$$

we schrijven dit als een dubbele machtreeks in tx^3 en x , die zal convergeren voor $|x| \leq \delta$ en willekeurige tx^3 :

$$(2.14) \quad P(tx^3, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} (tx^3)^m x^n,$$

waarin de coëfficiënten c_{mn} niet van t of x afhangen. We willen P uniform benaderen door partiële sommen van de reeks en beperken ons daarom tot $|tx^3| \leq 1$. Voeren we in $\tau \stackrel{\text{def}}{=} t^{-\frac{1}{3}}$, dan is dus $|x| \leq \tau$. Laten we aannemen dat $t \geq \delta^{-3}$ is, dan geldt $\tau \leq \delta$.

Bij vaste gehele $N \geq 0$ en vaste $\eta > 0$ beschouwen we voor $t > 1$

$$\int_{\tau}^{\infty} \exp(-\eta tx^2) x^N dx.$$

Wegens $x \geq \tau = t^{-\frac{1}{3}}$ is $x \leq tx^2$, zodat triviaal geldt

$$(2.15) \quad x^N = O(\exp(\frac{1}{2} \eta x)) = O(\exp(\frac{1}{2} \eta tx^2)) \quad (\tau \leq x \leq \infty, t > 1).$$

Verder is $t(x^2 - \tau^2) > t(x - \tau)\tau \geq x - \tau$ voor $x \geq \tau$, zodat

$$(2.16) \quad \int_{\tau}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta t (x^2 - \tau^2) \right\} dx < \\ < \int_{\tau}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \eta (x - \tau) \right\} dx = 2 \eta^{-1}.$$

Uit (2.15) en (2.16) volgt:

$$(2.17) \quad \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta t x^2} x^N dx = O(\exp\{-\frac{1}{2}\eta t \tau^2\}) \times \\ \times \int_{\tau}^{\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\eta t(x^2 - \tau^2)\} dx = O(\exp\{-\frac{1}{2}\eta t^{\frac{1}{3}}\}) \quad (t > 1).$$

Evenzo is

$$(2.18) \quad \int_{-\infty}^{-\tau} e^{-\eta t x^2} x^N dx = O(\exp\{-\frac{1}{2}\eta t^{\frac{1}{3}}\}) \quad (t > 1);$$

Uit (2.12), (2.17) en (2.18) vinden we, omdat $g(x)$ op $[-\delta, \delta]$ begrensd is,

$$(2.19) \quad \left(\int_{-\delta}^{-\tau} + \int_{\tau}^{\delta} \right) g(x) e^{th(x)} dx = O(\exp\{-\frac{1}{2}\eta t^{\frac{1}{3}}\})$$

voor $t > \max(1, \delta^{-3})$.

Voor elke positieve gehele A definiëren we

$$P_A(tx^3, x) = \sum_A c_{mn} (tx^3)^m x^n,$$

waarin \sum_A de sommatie aanduidt over alle $m \geq 0$ en $n \geq 0$ met $m+n \leq A$. Voor elke dubbelsom $\sum c_{mn} y^m z^n$ die convergeert voor $|y| < 2R$, $|z| < 2S$, geldt $c_{mn} = O(R^{-m} S^{-n})$ uniform in m en n . Als nu $\sum_{A'} c_{mn}$ de sommatie is over $m \geq 0$ en $n \geq 0$ met $m+n > A$, dan geldt voor $|y| < \frac{1}{3}R$ en $|z| < \frac{1}{3}S$:

$$\begin{aligned} \sum_{A'} c_{mn} y^m z^n &= O\left(\sum_{A'} \left|\frac{y}{R}\right|^m \left|\frac{z}{S}\right|^n\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=A+1}^{\infty} \left\{\frac{|y|}{R} + \frac{|z|}{S}\right\}^k\right) = O\left(\left\{\frac{|y|}{R} + \frac{|z|}{S}\right\}^{A+1}\right) = \\ &= O\left(\{|y| + |z|\}^{A+1}\right) = O(y^{A+1}) + O(z^{A+1}); \end{aligned}$$

zie voor het laatste gelijkteken St. 1.1. We passen dit toe

voor $|x| < \delta$ en $|tx^3| < 1$:

$$(2.20) \quad P - P_A = O((tx^3)^{A+1}) + O(x^{A+1})$$

geldt dan eerst voor $|x| < \frac{1}{6}\delta$ en $|tx^3| < \frac{1}{6}$, maar wegens de continuïteit op compacte intervallen (Opm. 1, pag. 1) ook voor $|x| \leq \delta$ en $|tx^3| \leq 1$.

Op $-\tau \leq x \leq \tau$ willen we P door P_A benaderen. We merken nog op dat uit (2.17) en (2.18) met $\eta = -a_2$ volgt:

$$(2.21) \quad \left(\int_{-\infty}^{-\tau} + \int_{\tau}^{\infty} \right) P_A \exp(ta_2 x^2) dx = O(t^A \exp(\frac{1}{2}a_2 t^{\frac{1}{3}}))$$

($t \rightarrow \infty$).

Nu is

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx = \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) g(x) e^{th(x)} dx +$$

$$+ \left(\int_{-\delta}^{-\tau} + \int_{\tau}^{\delta} \right) g(x) e^{th(x)} dx + \int_{-\tau}^{\tau} (P - P_A) \exp(ta_2 x^2) dx +$$

$$- \left(\int_{-\infty}^{-\tau} + \int_{\tau}^{\infty} \right) P_A \exp(ta_2 x^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} P_A \exp(ta_2 x^2) dx.$$

Voor de eerste term zorgt (2.11) en voor de tweede (2.19). De derde is wegens (2.20)

$$O \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ta_2 x^2) (|tx^3|^{A+1} + |x|^{A+1}) dx \right) = O(t^{-\frac{1}{2}A-1})$$

($t \rightarrow \infty$),

zie ook (2.4). Voor de vierde term geldt (2.21), terwijl de vijfde wegens (2.3) gelijk is aan

$$(2.22) \quad \sum_A c_{mn} \alpha_{mn} t^{-\frac{1}{2}(m+n+1)} (-a_2)^{-\frac{1}{2}(3m+n+1)} \Gamma(\frac{1}{2}(3m+n+1)),$$

waarbij $\alpha_{mn} = 1$ is voor even $m+n$ en 0 voor oneven $m+n$. Het ver-

schil tussen $H(t)$ en (2.22) bestaat slechts uit orde-termen $O(t^{-M})$ en $O(t^{-\frac{1}{2}A-1})$ ($t \rightarrow \infty$), waarin A en M willekeurig groot mogen zijn. Dus geldt (met $m+n=2k$)

$$(2.23) \quad H(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{-\frac{1}{2}-k} \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$d_k = (-a_2)^{-k-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{2k} c_{m,2k-m} (-a_2)^{-m} \Gamma(m+k+\frac{1}{2})$$

is. Voor $g(0) \neq 0$ is de eerste term van (2.23)

$$(2.24) \quad (-a_2)^{-\frac{1}{2}} c_{00} \Gamma(\frac{1}{2}) t^{-\frac{1}{2}} = g(0) \sqrt{-\frac{2\pi}{th''(0)}}.$$

3. Zadelpuntmethode.

3.1. Intuitieve inleiding.

We integreren de functie $\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} g(z) \exp\{th(z)\}$ langs een weg K in het complexe vlak; g en h zijn analytische functies en t is een groot positief getal. In vele gevallen kunnen we het asymptotische gedrag vinden (voor $t \rightarrow \infty$) van de integraal, die we met $F(t)$ zullen aanduiden.

We omschrijven eerst ons doel in vage termen. Laten we proberen een bovengrens voor $|F(t)|$ aan te geven, b.v.

$$|F(t)| \leq l_K \max_K |\varphi(z)|,$$

waarin l_K de lengte van K is. Volgens de hoofdstelling van Cauchy mogen we de weg K vervormen, mits we binnen het gebied blijven waar φ analytisch is. We trachten nu een weg C te vinden die binnen dit gebied verloopt en $\max_C |\varphi(z)|$ zo klein mogelijk maakt. Bij de meeste door ons C beschouwde functies zal dit maximum bij vervorming van de weg veel

sterker veranderen dan de weglengte. Als we nu nog zorgen, dat het gedeelte van de weg C waarop $|\varphi|$ zijn maximum benadert zo kort mogelijk is, komen we tot een vrij goede schatting voor $|F(t)|$. Het zal blijken, dat $F(t)$ bij integratie langs deze speciale weg in vele gevallen een asymptotische ontwikkeling toelaat van de in § 2 beschreven soort.

Het zoeken van de speciale integratieweg is een kwestie van proberen en handig kiezen; daarna blijft een zuiver mathematisch probleem over. Bij elke toepassing van de zadelpuntmethode zijn deze twee stadia te onderscheiden. In navolging van DE BRUIJN [1] lichten we het eerste stadium toe aan de hand van een meetkundige interpretatie.

In een driedimensionale x - y - w -ruimte beschouwen we het oppervlak $w = |\varphi(x+iy)|$. Het triviale geval van constante φ wordt bij deze uitgesloten; verder beperken we ons tot punten $z=x+iy$ waar $\varphi(z) \neq 0$ is. Het oppervlak heeft een horizontaal raakvlak dan en slechts dan als

$$\frac{\partial |\varphi|}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial |\varphi|}{\partial y} = 0.$$

Uit $\log \varphi = \log |\varphi| + i \arg \varphi$ volgt:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \operatorname{Re} \log \varphi}{\partial x} = \frac{1}{|\varphi|} \frac{\partial |\varphi|}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial \operatorname{Re} \log \varphi}{\partial y} = \frac{1}{|\varphi|} \frac{\partial |\varphi|}{\partial y}.$$

Voor de wegens $\varphi \neq 0$ analytische functie $\log \varphi$ gelden de vergelijkingen van Cauchy-Riemann :

$$(3.2) \quad \frac{d \log \varphi}{dz} = \frac{\partial \operatorname{Re} \log \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \operatorname{Re} \log \varphi}{\partial y}.$$

Uit (3.1) en (3.2) volgt voor $\varphi \neq 0$:

$$\frac{d \varphi}{dz} = 0 \iff \left(\frac{\partial |\varphi|}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial |\varphi|}{\partial y} = 0 \right).$$

We gebruiken nu de volgende hulpstelling uit de functie-theorie:

Stelling 3.1. (maximum modulus principe). Als $f(z)$ analytisch in in een gebied G , en voor alle z in een tot G behorende omgeving van een punt $\alpha \in G$ geldt $|f(z)| \leq |f(\alpha)|$, dan is $f(z)$ constant op G . Dezelfde conclusie geldt als in de genoemde omgeving $|f(z)| \geq |f(\alpha)| > 0$ is.

Het bewijs van deze stelling vindt men b.v. in [8], pag. 78-79. Omdat wij het geval van constante φ hebben uitgesloten, kan een horizontaal raakvlak in een punt ζ met $\varphi(\zeta) \neq 0$ en $\varphi'(\zeta) = 0$ niet betrekking hebben op een relatief maximum of minimum van $w = |\varphi(z)|$: ζ is een zadelpunt (saddlepoint, col) van dit oppervlak. Wanneer daarentegen $\varphi(\zeta) = 0$ is, heeft de niet-negatieve grootheid w uiteraard een minimum.

We kunnen ons een man voorstellen, die door een bergachtig landschap van A naar B moet reizen, maar die wegens zijn gezondheid zo min mogelijk op grote hoogten wil vertoeven. Hij heeft daarentegen geen bezwaar tegen grote omwegen of tegen herhaalde klimpartijen op lager niveau. Zo'n wandelaar zal een pad zoeken, waarvan het hoogste punt zo laag mogelijk ligt. Is er een pad waarvan één der eindpunten het hoogste is, dan voldoet dit aan zijn eisen, omdat hij deze hoogte in elk geval niet kan vermijden. Maar het kan zijn dat A en B in verschillende dalen liggen; hij moet nu via een zo laag mogelijke pas (zadelpunt) reizen.

Het zou denkbaar zijn dat een steeds grotere omweg hem steeds verdere besparing van hoogte zou opleveren; in dat geval is er geen optimaal pad. Als het hoogste der beide eindpunten A en B op een niveau h_0 ligt, kan onze wandelaar voor elke $h \geq h_0$ het gebied G_h van alle punten niet hoger dan h beschouwen. We weten dan $A \in G_h$ en $B \in G_h$; de vraag is of er een pad tussen A en B is dat geheel tot G_h behoort. Zo nee, dan stijgt het optimale pad tot boven h ; zo ja, dan is een hoogte $\leq h$ voldoende. Elk pad dat hoort bij de kleinste h waar-

voor het antwoord bevestigend is, heet een optimaal pad.

Zo'n optimaal pad van A naar B zal zeker een zadelpunt of eindpunt tot hoogste punt hebben: anders kon een omweg de maximale hoogte van het pad nog doen afnemen. Een eventueel zadelpunt zal inderdaad overschreden worden, d.w.z. de wandelaar ziet in een omgeving van de pas zowel links als rechts van zijn pad hogere punten dan de pashoogte.

Het optimaliseren van een pad, of zelfs het minimaliseren van een hoogte h , is in het wiskundige probleem niet steeds uitvoerbaar. Maar het zal blijken dat het opzoeken van de hoogten van een aantal zadelpunten in de omgeving vaak al voldoende is om het probleem op te lossen.

Ons berglandschap $w = |\varphi(x+iy)|$ kent wegens St. 3.1 geen "toppen". Een gesloten pad dat een zadelpunt overschrijdt en ter plaatse geen dubbelpunt heeft, kent steeds punten die hoger liggen dan het zadelpunt (we beperken ons tot paden binnen het gebied waar φ analytisch is). Immers binnen het gesloten pad, waarvan we triviaal kunnen aannemen dat het helemaal geen dubbelpunten heeft, is elk punt niet hoger dan het hoogste punt op het pad. Er is dus een omgeving van dit hoogste punt H die aan één kant van het pad geen hogere punten bevat. Zou H een zadelpunt zijn dan komen we nu in strijd met het begrip "overschrijden" van twee alinea's terug.

Laat een pad zonder dubbelpunten van A naar B, nog steeds in een landschap zonder toppen of singulariteiten, een zadelpunt overschrijden en geen hogere punten bevatten dan dit zadelpunt. Dan is dit pad optimaal; immers keren we langs een ander pad van B naar A terug dan hebben we een gesloten weg, zodat dit andere pad minstens één punt van minstens de gegeven hoogte bevat - zelfs van meer dan die hoogte als het andere pad ons zadelpunt vermijdt. We behoeven ons dus maar met één pad bezig te houden: een pad zonder

dubbelpunten van A naar B waarvan het hoogste punt óf een eindpunt is óf een zadelpunt dat wordt overschreden. Dit pad is dan zeker optimaal, tenzij het niet binnen het gebied van analyticiteit in de oorspronkelijke integratieweg valt over te voeren; dan moeten we óf residuen bepalen óf een beter pad zoeken.

3.2. Steilste afdaling vanaf een inwendig punt.

Gegeven is een pad van A naar B, waarvan het tussen A en B gelegen zadelpunt ζ het hoogste punt is. In een omgeving van ζ is $\varphi(z) \neq 0$, zodat we daar mogen stellen $\log \varphi(z) = \psi(z)$, waarbij we een willekeurige tak van de logaritme kiezen. Het gegeven $\varphi'(\zeta) = 0$ is dan equivalent met $\psi'(\zeta) = 0$. We nemen als "hoogte van het landschap" nu niet meer $|\varphi(z)|$ maar $\operatorname{Re} \psi(z)$. Omdat dit een monotone functie van $|\varphi(z)|$ is blijven de argumenten van de vorige paragraaf juist. $\operatorname{Re} \psi(z)$ is eenwaardig, tenzij $\varphi(z)$ meerwaardig is.

Als $\psi(z)$ niet constant is, bestaat er een kleinste $m \geq 2$ waarvoor $\psi^{(m)}(\zeta) \neq 0$ is. Wij zullen steeds $m=2$ veronderstellen. De situatie $m > 2$ treedt zelden op en is niet essentieel lastiger; er zijn dan alleen meer dan twee "dalen" die in het zadelpunt beginnen. Voor $m=2$ dus geldt in een omgeving van ζ

$$\psi'(z) = \psi'(\zeta) + \frac{1}{2} \psi''(\zeta) (z-\zeta)^2 + \dots$$

We definiëren de as van het zadelpunt ζ als

$$V = \{z \mid \operatorname{Re} \psi''(\zeta) (z-\zeta)^2 \text{ reëel en } \leq 0\}.$$

Triviaal is $\zeta \in V$. Verder zijn

$$\arg \psi''(\zeta) + 2 \arg(z-\zeta) = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ geheel})$$

en

$$\arg(z-\zeta) = \frac{1}{2} \{ \pi - \arg \psi''(\zeta) \} + k\pi$$

equivalent, zodat de as een rechte lijn door ζ is. Het argument van de as is $\frac{1}{2} \{ \pi - \arg \psi''(\zeta) \}$, afgezien van een veelvoud van π . De punten z waarvoor $\psi''(\zeta)(z-\zeta)^2$ reëel en ≥ 0 is, vormen blijkbaar een rechte lijn door ζ loodrecht op de as.

Op de curven $\text{Re } \psi(z) = \text{Re } \psi(\zeta)$ is $\psi''(\zeta)(z-\zeta)^2$ nagenoeg zuiver imaginair, dus $\arg(z-\zeta) = \pm \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arg \psi''(\zeta)$; zij maken hoeken $\pm \frac{\pi}{4}$ met de as. Zij verdelen de omgeving van ζ in vier gebieden: in de gearceerde gedeelten is $\text{Re } \psi(z) > \text{Re } \psi(\zeta)$, in de overige is $\text{Re } \psi(z) < \text{Re } \psi(\zeta)$. Op

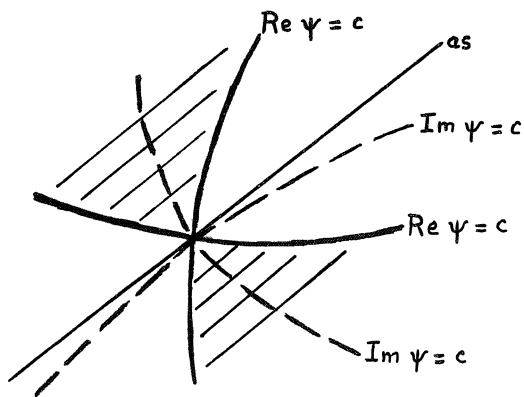


Fig. 1

de curven $\text{Im } \psi(z) = \text{Im } \psi(\zeta)$, in de figuur met stippellijnen aangegeven, is $\psi''(\zeta)(z-\zeta)^2$ nagenoeg reëel. Zij raken in ζ aan de as of aan de loodlijn op de as.

Wanneer de integratieweg niet één der curven $\text{Re } \psi(z) = \text{Re } \psi(\zeta)$ is, kunnen we hem vervormen tot hij in een ζ omvattend gebied langs de as loopt; in het verder van ζ verwijderde gebied zal $\text{Re } \psi(z)$ meestal veel kleiner zijn. Wanneer we vanaf het zadelpunt langs de as gaan lopen, daalt $\text{Re } \psi(z)$ sneller dan bij enige andere wandeling vanuit ζ ; we noemen de as daarom een pad met steilste afdaling (steepest descent). Meestal is het niet nodig de as zelf als integratieweg te kiezen; elke weg die met de as een

hoek $\mathcal{J} < \frac{\pi}{4}$ maakt voldoet, als \mathcal{J} maar niet nadert tot $\frac{\pi}{4}$ voor onbeperkt toenemende parameterwaarde t .

Verloopt de integratieweg langs een curve $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(\zeta)$, dan kan men de door ons niet besproken methode van de stationaire fase gebruiken. Dikwijls is het eenvoudiger om de weg te veranderen op een in § 3.4 te bespreken manier.

3.3. Steilste afdaling vanaf een eindpunt.

Laat het eindpunt A het hoogste punt van de weg zijn. In het geval $\psi'(A) = 0$ is A een zadelpunt en gebruiken we het zojuist besprokene. Als $\psi'(A) \neq 0$ is, geldt in een omgeving van A

$$\psi(z) = \psi(A) + (z-A) \psi'(A) + \dots$$

We definiëren de as als $\{z \mid (z-A) \psi'(A) \text{ reëel en } \leq 0\}$; dit is nu een halve lijn door A . De curve $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(A)$ staat loodrecht op de as en verdeelt de omgeving van A in een gebied $\operatorname{Re} \psi(z) < \operatorname{Re} \psi(A)$, aan de kant van de as, en een gebied $\operatorname{Re} \psi(z) > \operatorname{Re} \psi(A)$ aan de andere kant. Ons pad betreedt dit laatste gebied niet omdat A zijn hoogste punt is. De steilste afdaling is weer langs de as.

3.4. Pad op constante hoogte.

Wanneer alle punten van een zeker pad tussen A en B dezelfde hoogte hebben, is het pad in elk geval optimaal. We verdelen zo'n pad in trajecten, zo dat elk traject begint en eindigt in een zadelpunt (of in A of B), terwijl binnen één traject geen zadelpunten optreden. Laat $A_k A_{k+1}$ zo'n traject zijn, met parametervoorstelling $z = f(s)$, $0 \leq s \leq 1$, f continudifferentieerbaar, $f'(s) \neq 0$ voor $0 \leq s \leq 1$, $f(0) = A_k$, $f(1) = A_{k+1}$.

Wanneer we de intergrand weer door $\varphi(z) = \exp \psi(z)$

voorstellen, geldt voor $0 < s < 1$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dz} \cdot f'(s) \neq 0,$$

Omdat er geen zadelpunten zijn. Volgens het gegeven is de hoogte $\operatorname{Re} \psi$ constant, dus is $i \frac{d\psi}{ds}$ reëel, continu en ongelijk aan nul op $0 < s < 1$. Het teken van $i \frac{d\psi}{ds}$ is daarom constant, laten we zeggen steeds een min-teken. Maar dan is $\frac{d \operatorname{Im} \psi}{ds} > 0$. Als we nu in een willekeurig inwendig punt van het traject een positieve u -as loodrecht op de boog naar links kiezen, volgt uit de vergelijkingen van Cauchy-Riemann voor de variabele $s+iu$ dat geldt:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \psi}{\partial u} = - \frac{\partial \operatorname{Im} \psi}{\partial s} < 0.$$

Aan de "linkerzijde" van ons pad is $\operatorname{Re} \psi$ dus kleiner dan de constante waarde die op het pad wordt aangenomen; we noemen de linkerzijde de lage zijde van het pad. We kiezen nu een nieuw pad van A_k naar A_{k+1} , dat bij de eindpunten volgens de steilste afdaling het lage gebied in gaat en daartussen dicht bij het gegeven pad in het lage gebied loopt. We zeggen "dicht bij" omdat de negatieve afgeleide in de u -richting alleen dan garandeert dat $\operatorname{Re} \psi$ kleiner is dan op het gegeven pad.

Als we zo bij elk traject de lage zijde bepalen, ontstaat er een nieuw pad, dat het gegeven pad bij elk zadelpunt ontmoet en tussen de zadelpunten links of rechts van dit oude pad verloopt al naar gelang het lage gebied links of rechts ligt. De oorspronkelijke ^{integraal} is nu asymptotisch gelijk aan de som van de "bijdragen" van $A=A_0, A_1, \dots, A_n = B$. Immers op de tussengelegen delen is de integrand exponentieel klein; dit wordt in de volgende paragraaf toegelicht.

3.5. Tweede stadium.

Wanneer we een optimale weg hebben gevonden en we hebben deze zo vervormd dat in eindpunten en zadelpunten de steilste afdaling wordt gevormd, dan zullen we proberen van de integraal een asymptotische ontwikkeling te geven. Dit zal alleen slagen als $\psi''(\zeta)$ -resp. $\psi'(\zeta)$ voor eindpunten - groot is, zodat we op onze weg alleen grote waarden van $|\varphi(z)| = \exp \operatorname{Re} \psi(z)$ aantreffen in de directe omgeving van zadel- en eindpunten. De integrand is in deze omgeving ongeveer van het type $\exp(-cs^2)$ resp. $\exp(-cs)$; hier is c een constante met een groot en positief reëel deel en s een reële parameter die de integratieweg langs de as beschrijft. De in § 2 beschreven methode van Laplace leidt dan tot een asymptotische reeks.

Toelichting 1.

Gegeven is een enkelvoudig samenhangend gebied \mathcal{D} in het complexe vlak. De niet van t afhankelijke functies $g(z)$ en $h(z)$ zijn analytisch binnen \mathcal{D} . In \mathcal{D} zijn drie niet van t afhankende punten A, B en ζ gegeven, zodat er een optimaal pad voor de functie $\exp\{th(z)\}$ van A via ζ naar B bestaat, waarvan ζ het hoogste punt is. Daarbij is $h'(\zeta) = 0$, $h''(\zeta) \neq 0$, en t is een reële positieve parameter. Gevraagd wordt het asymptotische gedrag van

$$F(t) = \int_A^B g(z) e^{th(z)} dz \quad (t \rightarrow \infty).$$

Hoewel ζ geen zadelpunt is van $g \exp(th)$ maar van $\exp(th)$, zal blijken dat het punt toch beschikbaar is. De situatie voor $|\exp(th)|$ is zoals in § 3.3: er is bij elke van t onafhankelijke δ met $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ een getal $\rho > 0$ zodat er rondom de as van ζ symmetrische cirkelsectoren met hoek

$\frac{1}{2}\pi - 2\delta$ en straal ρ bestaan, waarbinnen geldt $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(\zeta)$. Immers in de gebieden

- (i) $0 < |z - \zeta| < \rho, \left| \arg(z - \zeta) + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \arg h''(\zeta) \right| < \frac{1}{4}\pi - \delta,$
(ii) $0 < |z - \zeta| < \rho, \left| \arg(z - \zeta) - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} \arg h''(\zeta) \right| < \frac{1}{4}\pi - \delta,$

geldt

$$\left| \arg \left\{ -(z - \zeta)^2 h''(\zeta) \right\} \right| < \frac{1}{2}\pi - 2\delta,$$

dus

$$\operatorname{Re} \left\{ -(z - \zeta)^2 h''(\zeta) \right\} > |z - \zeta|^2 |h''(\zeta)| \sin 2\delta,$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h(z) - \operatorname{Re} h(\zeta) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} h''(\zeta) (z - \zeta)^2 + o((z - \zeta)^3) < \\ &< -\frac{1}{2} |z - \zeta|^2 |h''(\zeta)| \sin 2\delta + o((z - \zeta)^3), \end{aligned}$$

en dit laatste is negatief als ρ voldoende klein is. De keuze van δ en ρ is onafhankelijk van t .

Wij kiezen nu δ zo groot dat het gegeven pad binnen de sectoren (i) en (ii) komt. Laat A_1 op het pad en in (i) liggen, B_1 op het pad in (ii). We vervangen nu het via ζ en binnen \mathcal{D} verlopende weggedeelte $A_1 B_1$ door het volgende pad: A_1 wordt verbonden met een punt A_2 dat binnen (i) op de as ligt, vandaar gaan we langs de as naar een punt B_2 binnen (ii) en van B_2 naar B_1 . Op $A_1 A_2$ en $B_2 B_1$ heeft $\operatorname{Re}\{h(z) - h(\zeta)\}$ een negatieve bovengrens $-c$, en de analytische functie $g(z)$ is begrensd; de bijdrage van deze stukken aan de integraal is

$$o(e^{-ct + t \operatorname{Re} h(\zeta)}).$$

Op $A_2 B_2$ stellen we $z = \zeta + \alpha x$, $a \leq x \leq b$, waarin $\alpha = \exp \frac{1}{2} i(\pi - \arg h''(\zeta))$ en $-\rho < a < 0 < b < \rho$ is - de tekenen van a en b zijn bepaald omdat A_2 in (i) ligt en B_2 in (ii). We moeten nu berekenen

$$\alpha \int_a^b g(\zeta + \alpha x) e^{\text{th}(\zeta + \alpha x)} dx.$$

Nu is $h(\zeta + \alpha x) = h(\zeta) + \frac{1}{2} h''(\zeta) \alpha^2 x^2 + \dots$, waarbij $h''(\zeta) \alpha^2 < 0$ is. We kunnen dus de methode van Laplace toepassen en vinden volgens (2.23)

$$\alpha e^{\text{th}(\zeta)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{-\frac{1}{2}-k}.$$

We noemen dit de bijdrage van het zadelpunt. Uiteraard keert deze bijdrage om van teken als we het zadelpunt van B_2 naar A_2 overschrijden. Als $\dot{g}(\zeta) \neq 0$ is, wordt de eerste term van de asymptotische ontwikkeling, volgens (2.24),

$$(3.3) \quad \alpha e^{\text{th}(\zeta)} g(\zeta) [-\alpha^2 h''(\zeta) t]^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} = \\ = \alpha \sqrt{2\pi} g(\zeta) |h''(\zeta)|^{-\frac{1}{2}} e^{\text{th}(\zeta)} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Wanneer het gegeven pad het zadelpunt ζ overschrijdt in de richting $A_1 B_1$, en het maximum van $\text{Re } h(z)$ is voor z op de trajecten AA_1 en $B_1 B$ kleiner dan $\text{Re } h(\zeta)$, dan is de laatste uitdrukking asymptotisch gelijk aan de gegeven integraal $F(t)$ voor $t \rightarrow \infty$.

Toelichting 2.

Voor dezelfde integrand beschouwen we nu het geval, dat A het hoogste punt van de integratieweg is. Laat gegeven zijn $g(A) \neq 0$ en $h'(A) \neq 0$, terwijl het pad in een omgeving van A langs de as loopt (steilste afdaling). In deze omgeving geldt

$$h(z) = h(A) + (z-A) h'(A) + \dots$$

Voor punten $\neq A$ op de as is de tweede term van de reeks reëel en negatief, op een zeer klein imaginair deel na , dat ontstaat doordat we de as volgen en niet de curve $\text{Im } h = c$. We voeren

nu in $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(i\pi - i \arg h'(A))$; dan zal $\eta \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha h'(A)$ positief zijn. Voor een later te kiezen $\rho > 0$ nemen we nu als parametervoorstelling van het pad nabij A aan $z = A + \alpha x$ ($0 \leq x \leq \rho$). Dan is

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^{A+\alpha\rho} g(z) e^{th(z)} dz = \alpha \int_0^\rho g(A + \alpha x) e^{th(A + \alpha x)} dx;$$

d.w.z. $F(t) = \alpha \exp\{th(A)\} J$ als we invoeren $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(A + \alpha x)$, $H(x) \stackrel{\text{def}}{=} h(A + \alpha x) - h(A) = \alpha th'(A) + \alpha^2 x^2 h''(A) + \dots$ en $J \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\rho G(x) \exp\{tH(x)\} dx$.

Voor de asymptotische ontwikkeling van J gebruiken we een vereenvoudigde versie van Geval 2.3. We schrijven n.l.

$$J = \int_0^\rho e^{-tx\eta} P(tx^2, x) dx,$$

met

$$P(tx^2, x) = G(x) \exp\left\{tx^2 \alpha^2 \left(\frac{h''(A)}{2} + \frac{\alpha x h'''(A)}{6} + \dots\right)\right\}.$$

Er bestaat nu een $\delta > 0$ zodat voor $0 \leq x \leq \delta$ geldt

$$(3.4) \quad P(tx^2, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} (tx^2)^m x^n.$$

Wanneer we ons beperken tot $tx^2 \leq 1$ en tot $t > \delta^{-2}$, geldt analoog aan (2.20) voor $0 \leq x \leq \delta$ en $0 \leq tx^2 \leq 1$

$$P - P_A = O((tx^2)^{A+1}) + O(x^{A+1}),$$

Als P_A weer de partiële som van (3.4) is beperkt tot alle m en n met $m+n \leq A$. We splitsen nu als volgt

$$J = \int_0^\rho (P - P_A) e^{-tx\eta} dx - \int_\rho^\infty P_A e^{-tx\eta} dx + \int_0^\infty P_A e^{-tx\eta} dx.$$

Wegens de schatting voor $P - P_A$ is de eerste term voor vaste

positieve $\rho \leq \delta$ van de orde van

$$\begin{aligned} & \int_0^{\rho} \{(tx^2)^{A+1} + x^{A+1}\} e^{-tx\eta} dx \leq \\ & \leq t^{A+1} \int_0^{\infty} x^{2A+2} e^{-tx\eta} dx + \int_0^{\infty} x^{A+1} e^{-tx\eta} dx = \\ & = \Gamma(2A+3) \eta^{-2A-3} t^{-A-2} + \Gamma(A+2) \eta^{-A-2} t^{-A-2} = O(t^{-A-2}) \\ & \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Wanneer we t zo groot kiezen dat $t^{-\frac{1}{2}} < \rho$ en $t > 1$ is, wordt de tweede term een eindige som van bijdragen

$$\begin{aligned} t^m t^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} x^N e^{-tx\eta} dx & \leq t^A t^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-(t-1)x\eta} e^{-x\eta} x^N dx \leq \\ & \leq t^A \exp(-\eta t^{\frac{1}{2}} + \eta t^{-\frac{1}{2}}) \Gamma(N+1) \eta^{-N-1} = O\{\exp(-\eta t^{\frac{1}{2}})\} \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

want m en N zijn begrensd: $m \leq A$ en $N \leq 2A$. Als we sommatie over alle m en n met $m+n \leq A$ met \sum_A aangeven, geldt dus

$$J = \sum_A c_{mn} t^m \int_0^{\infty} x^{2m+n} e^{-tx\eta} dx + O(t^{-A-2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Omdat dit juist is voor elke A , concluderen we:

$$J \approx \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \Gamma(2m+n+1) \eta^{-2m-n-1} t^{-m-n-1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

De eerste term van J is $c_{00} \Gamma(1) \eta^{-1} t^{-1}$, zodat de eerste term van $F(t) = \alpha \exp\{th(A)\} J$ wordt

$$(3.4) \quad -g(A) e^{th(A)} \{h'(A)\}^{-1} t^{-1}.$$

3.6. Voorbeelden.

Voorbeeld 1: $\int_0^{\infty} \exp t(z+iz-z^3) dz.$

Voor $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} z+iz-z^3$ is $h'(z) = 1+i-3z^2$ en $h''(z) = -6z$. Aan $h'(z) = 0$ voldoen twee zadelpunten ζ en $-\zeta$, waarin

$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} (1+i)^{\frac{1}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} 3^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{\pi i}{8}$. Omdat $+\zeta$ dichterbij de integratieweg ligt zullen we eerst dit punt onderzoeken.

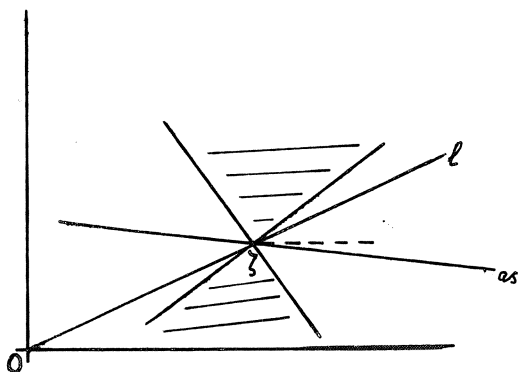


Fig. 2

Uit $\arg \zeta = \frac{\pi}{8}$ en $h''(\zeta) = -6\zeta$ volgt $\arg h''(\zeta) = \frac{9\pi}{8}$. Het argument van de as is $\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{16} \pm k\pi = -\frac{\pi}{16} \pm k\pi$. Als l de lijn is die 0 met ζ verbindt, dan is $\arg l = \frac{\pi}{8}$, zodat l een hoek $\frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$ met de as maakt. Een parameterrepresentatie van l is $z = x \exp \frac{\pi i}{8}$, $-\infty < x < \infty$; in elk punt van l is

$$h(z) = (x\sqrt{2} - x^3) \exp \frac{3\pi i}{8},$$

dus

$$\operatorname{Re} h(z) = (x\sqrt{2} - x^3) \cos \frac{3\pi}{8}.$$

Uit $\frac{d}{dx} (x\sqrt{2} - x^3) = \sqrt{2} - 3x^2 = 0$ volgt $x_0 = \pm 2^{\frac{1}{4}} 3^{-\frac{1}{2}}$, d.w.z. de punten $\pm \zeta$.

$$\frac{d^2}{dx^2} (x\sqrt{2} - x^3) = -6x$$

is voor positieve x_0 negatief, zodat $\operatorname{Re} h(z)$ op de lijn l zijn maximum aanneemt in $z = \zeta$ en zijn minimum in $z = -\zeta$.

We mogen de reële as als integratieweg vervangen door l .
Immers

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_R^R \exp \frac{i}{8} \exp \{th(z)\} dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{8}} \exp \left\{ t(\operatorname{Re}^{i\varphi} + \operatorname{Re}^{i\varphi} + \frac{1}{2}\pi i - R^3 e^{3i\varphi}) i \operatorname{Re}^{i\varphi} d\varphi \right\} \right| \leq$$

$$\frac{\pi}{8} R \exp \left\{ tR \max_{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}} (\cos \varphi - \sin \varphi - R^2 \cos 3\varphi) \right\}.$$

Voor $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}$ is $\cos \varphi - \sin \varphi \leq 1$ en $\cos 3\varphi \geq \cos \frac{3\pi}{8} \geq 0,36$;
dus is voor $R > \frac{5}{3}$

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\varphi} (R^2 \cos 3\varphi - \cos \varphi + \sin \varphi) \geq 0,36 R^2 - 1 > 0,$$

en η nadert niet tot 0 voor $R \rightarrow \infty$. Dus is

$$\lim_{R \rightarrow \infty} B \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{8} R e^{-tR\eta} = 0.$$

Het gedeelte van de weg l waar b.v. $x > x_0 + 1$ geldt, levert een exponentieel kleine bijdrage vergeleken met het zadelpunt, ook al is de weg oneindig lang. De integraal zal asymptotisch gelijk zijn aan de bijdrage van het zadelpunt bij overschrijding van links naar rechts. Nu is

$$h(\zeta) = 2^{\frac{7}{4}} 3^{-\frac{3}{2}} \exp \frac{3\pi i}{8};$$

$$h''(\zeta) = -6\zeta = -2^{\frac{5}{4}} 3^{\frac{1}{2}} \exp \frac{\pi i}{8};$$

en $\alpha = \exp(-\frac{\pi i}{16})$. Volgens (3.3) van § 3.5 is de bijdrage dan

$$2^{-\frac{1}{8}} 3^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\pi i}{16} + 2^{\frac{7}{8}} 3^{-\frac{3}{4}} t \exp \frac{3\pi i}{8} \right\}.$$

Voorbeeld 2:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,t) dz, \text{ met } f(z,t) = \exp \{ it(3z-z^3) \}.$$

Langs de hele integratieweg is $|f(z,t)|$ constant; we zullen § 3.4 toepassen. Voor $h(z) = i(3z-z^3)$ is $h'(z) = 3i - 3iz^2$, zodat de zadelpunten in ± 1 liggen. Op de trajecten $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ en $(1, \infty)$ moeten we onderzoeken wat de lage zijde is. Substitutie $z=x+iy$ geeft

$$\operatorname{Re}\{it(3z-z^3)\} = t(-3y-y^3+3yx^2) = t\{3y(x^2-1)-y^3\}.$$

Voor $|x| < 1$ is dit negatief voor kleine positieve y en voor $|x| > 1$ is het negatief voor kleine negatieve y . We zullen ons nieuwe pad tussen -1 en 1 even boven de reële as leggen en elders even er onder.

Uit $h''(z) = -6iz$ volgt $\arg h''(1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg h''(-1) = \frac{\pi}{2}$. De as van het zadelpunt 1 heeft dus een argument $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$, en die van -1 een argument $\frac{\pi}{4}$.

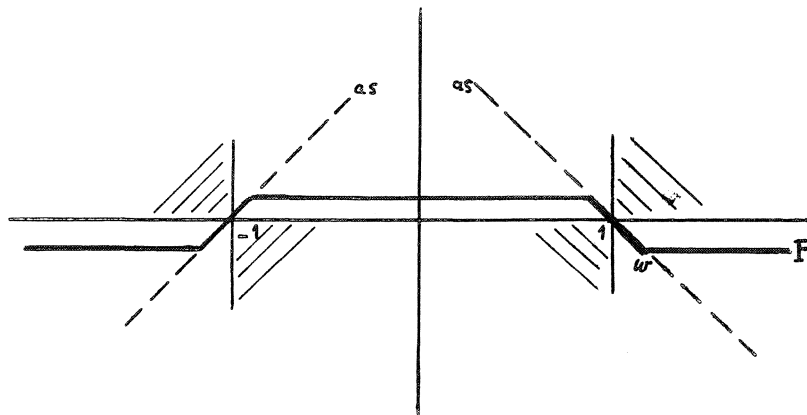


Fig. 3

We kiezen nu voor vaste $\epsilon > 0$ een pad P van $-1-\epsilon-i\epsilon$ naar $-1+\epsilon+i\epsilon$ en van $1-\epsilon+i\epsilon$ naar $1+\epsilon-i\epsilon$; het pad wordt afge-
maakt met lijnen evenwijdig aan de reële as (zie fig. 3).
Wanneer we afkorten $w \stackrel{\text{def}}{=} 1+\epsilon-i\epsilon$, dan is voor alle $x > 1+\epsilon$

$$\left| \frac{f(x-i\epsilon, t)}{f(w, t)} \right| = \exp(-3\epsilon t \{x^2 - (1+\epsilon)^2\}) \leq \\ \leq \exp\{-6\epsilon t(x-1-\epsilon)\}.$$

Daarom is

$$\left| \int_w^{\infty-i\epsilon} f(z, t) dz \right| \leq |f(w, t)| (6\epsilon t)^{-1}$$

Nu is $\text{Re}\{i(3w-w^3)\} < 0$, zodat $|f(w, t)|$ exponentiëel klein is vergeleken met $|f(1)|$. Soortgelijke redeneringen gelden voor de andere trajecten, waaruit volgt dat de integraal langs de weg P convergeert en dat zijn gedrag voor $t \rightarrow \infty$ alleen bepaald wordt door de som van de bijdragen.

Bij constante $t > 0$ gaan we na of het geoorloofd is de reële as als integratieweg door P te vervangen. Kies een groot positief getal M, dan geldt volgens de stelling van Cauchy

$$\int_P = \int_{-\infty-i\epsilon}^{-M-i\epsilon} + \int_{-M-i\epsilon}^{-M} + \int_{-M}^M + \int_M^{M-i\epsilon} + \int_{M-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon}.$$

Wegens de convergentie van \int_P naderen de eerste en de laatste integraal tot nul als $M \rightarrow \infty$. Voor $M^2-1 > \epsilon^2$ is, na substitutie $u = -\text{Im } z$,

$$\left| \int_M^{M-i\epsilon} \right| \leq \int_0^\epsilon \exp(-t\{3u(M^2-1)-u^3\}) du < \frac{1}{2t(M^2-1)},$$

dus de vierde integraal convergeert naar nul voor $M \rightarrow \infty$.
Dezelfde redenering geldt voor de tweede integraal; dus con-

vergeert de integraal langs de reële as en is gelijk aan de integraal langs P.

We moeten nu alleen nog de bijdragen van de zadelpunten berekenen. In $z = -1$ volgt uit $h(z) = i(3z - z^3)$, $h''(-1) = -6i$, $\alpha = \exp \frac{\pi i}{4}$ voor (3.3) van § 3.5:

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} (6t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-2it) \exp \frac{\pi i}{4} ;$$

in $z = 1$ ontstaat juist de toegevoegd complexe uitdrukking. Dus is

$$F(t) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3t}} \cos \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) + O(t^{-\frac{3}{2}}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Het zou onjuist zijn te schrijven

$$F(t) \sim 2 \sqrt{\frac{\pi}{3t}} \cos \left(2t - \frac{\pi}{4} \right) \quad (t \rightarrow \infty),$$

want de nulpunten van de cosinus vallen niet noodzakelijk samen met die van $F(t)$, zodat het quotient van linker- en rechterlid niet naar 1 behoeft te convergeren voor $t \rightarrow \infty$. Alleen als we van deze nulpunten verwijderd zijn, domineert de eerste term de rest van de asymptotische ontwikkeling.

Voorbeeld 3.

Toepassing van de zadelpuntmethode op statistische problemen vindt men o.a. in [2], [3], [5], en [6].

Wij bespreken hier in het kort het voorbeeld van DANIELS [2].

Gegeven is een stochastische variabele \underline{x} met verdelingsfunctie $F(x)$ en verdelingsdichtheid $f(x)$, zodanig dat de momenten - genererende functie

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} e^{tx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

convergeert voor alle reële t in een zeker de oorsprong be-

vattend interval van positieve lengte. Laat $(-c_1, c_2)$ het grootste open interval met deze eigenschap zijn; dan geldt $0 \leq c_i \leq \infty$ ($i=1,2$) en $c_1 + c_2 > 0$.

Gevraagd wordt, een asymptotische ontwikkeling voor $n \rightarrow \infty$ op te stellen voor de dichtheid $g_n(y)$ van het gemiddelde \underline{m}_n van n onderling onafhankelijke waarnemingen van de variabele \underline{x} .

De karakteristieke functie $\psi(t)$ van \underline{m}_n is

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \mathcal{E} \exp(it \underline{m}_n) = \mathcal{E} \exp \frac{it}{n} \sum \underline{x}_j = \\ &= \prod_{j=1}^n \mathcal{E} \exp \frac{it}{n} \underline{x}_j = M^n \left(\frac{it}{n} \right). \end{aligned}$$

Volgens een bekende omkeerstelling is dan de dichtheid

$$\begin{aligned} g_n(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \psi(t) dt = \quad \left(\frac{it}{n} = z \right) \\ &= \frac{n}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} M^n(z) e^{-nyz} dz = \\ (3.5) \quad &= \frac{n}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{n\{K(z)-yz\}} dz, \end{aligned}$$

als we de kumulanten-genererende functie $K(z) = \log M(z)$ invoeren. We bestuderen het gedrag van deze integraal, als y een vast reël getal is en n onbeperkt toeneemt. Voer daar-
toe in

$$h(z) \stackrel{\text{def}}{=} K(z) - yz;$$

voor de zadelpunten is $h'(z) = K'(z) - y = 0$.

Stellen we $z = u+iv$, dan is voor elke vaste $u \in (-c_1, c_2)$

$$\begin{aligned} \lim_{|v| \rightarrow \infty} |e^{h(z)}| &= \lim_{|v| \rightarrow \infty} |M(u+iv)| e^{-yu} = \\ &= e^{-yu} \lim_{|v| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} e^{ux} f(x) dx = 0, \end{aligned}$$

volgens het lemma van Riemann-Lebesgue, immers $e^{ux} f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$. Dit geldt ook voor $u = 0$, al zou c_1 of c_2 nul zijn. Verder is triviaal $|M(u+iv)| \leq M(u)$. Zou voor zekere $u \in (-c_1, c_2)$ en zekere $v \neq 0$ gelden $|M(u+iv)| = M(u)$, dan was er een reële α met

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(u+iv)x} dF(x) = e^{i\alpha} M(u),$$

d.w.z.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \{1 - \cos(yx - \alpha)\} dF(x) = 0.$$

Dit kan niet het geval zijn, aangezien er een dichtheid $f(x)$ bestaat. Dus is voor alle $u \in (-c_1, c_2)$ en alle $v \neq 0$ $|\exp h(u+iv)| < |\exp h(u)|$. Dit geldt ook weer voor $u = 0$. Bij het zoeken naar relevante zadelpunten kunnen we ons daarom beperken tot reële wortels z van $K'(z) = y$.

Voer in a en b (eventueel $-\infty$ resp ∞), zo dat $F(x) = 0$ voor $x < a$, $0 < F(x) < 1$ voor $a < x < b$ en $F(x) = 1$ voor $x > b$. DANIELS bewijst nu dat $K'(z) = y$ voor elke $y \in (a, b)$ precies één enkelvoudige reële wortel ζ heeft, en dat bovendien $K''(\zeta) > 0$ en $-c_1 < \zeta < c_2$ geldt. Voor $c_1 < \infty$ (dit impliceert $a = -\infty$) resp. $c_2 < \infty$ (impliceert $b = \infty$) moeten we als extra eis opleggen

$$\lim_{t \rightarrow -c_1} K'(t) = a \text{ resp } \lim_{t \rightarrow c_2} K'(t) = b.$$

Wij zullen dit bewijs overslaan (zie [2] p. 637-639).

Het argument van de as in het zadelpunt ζ is $\frac{\pi}{2} - \arg h''(\zeta) = \frac{\pi}{2}$, wegens $K''(\zeta) > 0$. De imaginaire as wordt nu als integratieweg in (3.5) vervangen door de verticaal $\operatorname{Re} z = \zeta$. Dit is geoorloofd omdat geldt

$$\left| \int_{iv}^{\zeta+iv} M^n(z) e^{-nyz} dz \right| \leq \int_0^{\zeta} |M^n(u+iv)| e^{-nyu} du ;$$

voor vaste n en vaste $\zeta \in (-c_1, c_2)$ convergeert de laatste integraal naar nul voor $|v| \rightarrow \infty$ (lemma van Riemann-Lebesgue voor de integrand en stelling der gemajoreerde convergentie; gebruikt $|M(u+iv)| \leq M(u)$).

Uit bovenstaande overwegingen volgt, dat de integraal (3.5) asymptotisch gelijk is aan de bijdrage van het zadelpunt ζ ¹⁾. Substitutie van $z = \zeta + is$ in

$$h(z) = h(\zeta) + (z-\zeta)^2 \frac{h''(\zeta)}{2!} + (z-\zeta)^3 \frac{h'''(\zeta)}{3!} + \dots$$

geeft:

$$\frac{n}{2\pi i} \int_{\zeta-i\delta}^{\zeta+i\delta} e^{nh(z)} dz = \frac{n}{2\pi} e^{nh(\zeta)} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-ns^2} \frac{K''(\zeta)}{2} P ds,$$

met

$$(3.6) \quad P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} (ns^3)^m s^n =$$

$$= 1 - \frac{iK''''}{3!} ns^3 + \frac{K^{(4)}}{4!} ns^3 s + \frac{iK^{(5)}}{5!} ns^3 s^2 - \frac{K^{(6)}}{6!} ns^3 s^3 - \frac{(K''')^2 (ns^3)^2}{2! (3!)^2} + \dots$$

1) DANIELS gebruikt bij het motiveren van deze conclusie dat $M(u+iv) = O(v^{-1})$ ($|v| \rightarrow \infty$). Dit is echter onjuist: voor de Γ -verdeling met vrijheidsgraad $\frac{1}{2}$, d.w.z. $f(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}$ ($0 < x < \infty$) en $f(x) = 0$ ($x \leq 0$), is $c_1 = \infty$, $c_2 = 1$, maar $M(u+iv) = (1-u-iv)^{-\frac{1}{2}} = O(v^{-\frac{1}{2}})$ ($|v| \rightarrow \infty$). Ik dank prof. RUNNENBURG, die mij op dit tegenvoorbeeld attent maakte.

het argument ζ van de afgeleiden van K is gemakshalve weggelaten. Volgens (3.3) van § 3.5 is (3.5) voor $n \rightarrow \infty$ asymptotisch gelijk aan

$$\frac{ne^{nh(\zeta)}}{2} \sqrt{\frac{2}{nK''}} \{f_0 + f_1 n^{-1} + o(n^{-2})\} \quad (n \rightarrow \infty),$$

substitutie van de uit (3.6) gevonden coëfficiënten c_{mn} geeft

$$\begin{aligned} f_0 &= c_{00} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \\ f_1 &= c_{11} 2^2 (K'')^{-2} \Gamma\left(2\frac{1}{2}\right) + c_{20} 2^3 (K'')^{-3} \Gamma\left(3\frac{1}{2}\right) = \\ &= K^{(4)} (K'')^{-2} \frac{3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}}{4!} - K^{(6)} (K'')^{-3} \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}}{(3!)^2 2!}. \end{aligned}$$

Na invoering van $\lambda_j(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} K^{(j)}(\zeta) (K''(\zeta))^{-\frac{j}{2}}$ vinden we

$$\begin{aligned} (3.7) \quad g_n(y) &\sim e^{n[K(\zeta) - \zeta y]} \sqrt{\frac{n}{2\pi K''(\zeta)}} \left\{ 1 + n^{-1} \left(\frac{\lambda_4(\zeta)}{8} - \frac{5\lambda_3(\zeta)}{24} \right) + \right. \\ &\left. + o(n^{-2}) \right\} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Noemen we het gedeelte van het rechterlid vóór de accoladen $\gamma_n(y)$, dan is nu bewezen

$$\left| \frac{g_n(y)}{\gamma_n(y)} - 1 \right| < \frac{A(y)}{n}.$$

De fout bij vervanging van g_n door γ_n is dus $O(n^{-1})$, en niet $O(n^{-\frac{1}{2}})$ zoals bij de centrale limietstelling. De grootte $A(y)$ is immers onafhankelijk van n ; via de bepaling van uit $K'(\zeta) = y$ hangt A van y af. DANIELS onderzoekt nu, voor welke typen verdelingen een vaste keuze van A voor alle $y \in (a, b)$ mogelijk is. Ook bepaalt hij met de zadelpuntmethode de omkeerintegraal van de karakteristieke functie (a) voor het gemiddelde van een discreet verdeelde grootte en (b)

voor het quotiënt van twee stochastische variabelen.

In de artikelen [5], [6] van GOOD die op het werk van DANIELS aansluiten, wordt o.a. een dubbele omkeerintegraal asymptotisch ontwikkeld om een simultane verdelingsdichtheid van twee variabelen te benaderen.

Literatuur.

- [1] N.G. DE BRUYN, Asymptotic methods in analysis, Noord-hollandse Uitgeversmij, Amsterdam 1958.
- [2] H.E. DANIELS, Saddlepoint approximations in statistics, Ann. Math.Stat. 25 (1954) 630-650.
- [3] D.A. DARLING, On a class of problems related to the random division of an interval, Ann. Math. Stat. 24 (1953) 239-253.
- [4] A. ERDÉLYI, Asymptotic expansions, Dover Publications, 1956.
- [5] I.J. GOOD, Saddlepoint methods for the multinomial distribution, Ann. Math.Stat. 28 (1957) 861-881.
- [6] I.J. GOOD, The multivariate method and chi-squared for the multinomial distribution, Ann. Math. Stat. 32 (1961) 535-548.
- [7] H. JEFFREYS, Asymptotic approximations, Oxford University Press, 1962.
- [8] H. KNESER, Funktionentheorie, Vandenhoeck & Rupprecht, Göttingen 1958.