

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 320 *a*

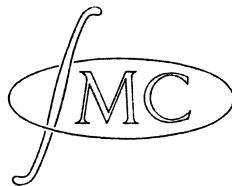
Planning, Markov-ketens en Regeltechniek

syllabus bij voordrachten door

Prof.ir. W. Monhemius

Drs. F.W. Steutel

Ir. R.N. van Hees



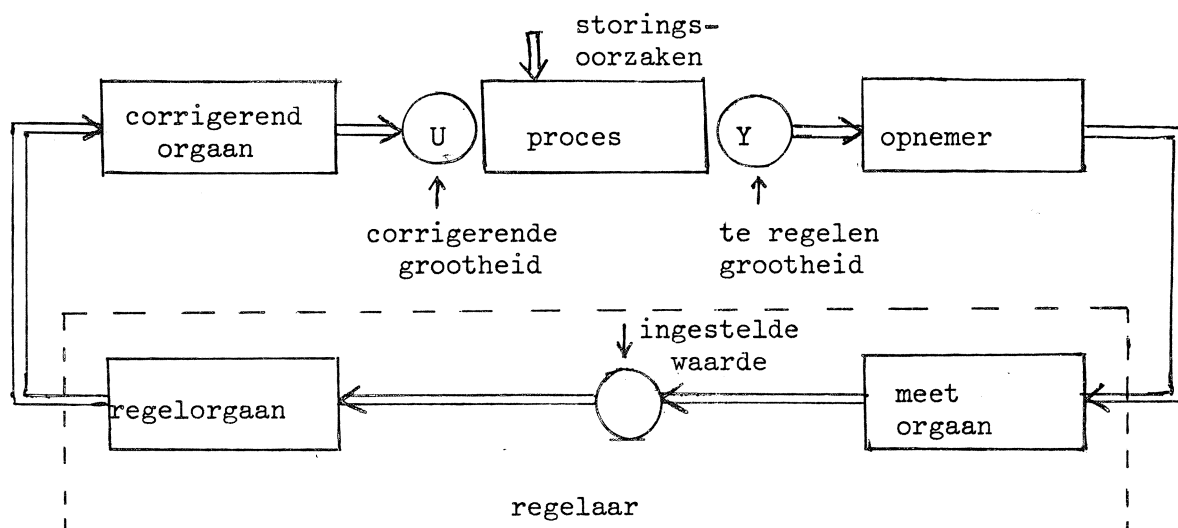
I Presentatie rapport "Wat kan planning van regeltechniek leren"

door

Prof.Ir. W. Monhemius

Regelmechanismen komen niet alleen in de techniek voor. Op vele andere gebieden van het leven, ook in de bedrijfsorganisatie en met name bij de planning treffen wij regelmechanismen aan. De studies over "Industrial Dynamics" van J.W. Forrester vestigen hier nog eens extra de aandacht op.

Men kan het blokschema van een (enkelvoudige) regelkring, dat hieronder is geschetst, ook toegepast denken op bijv. een probleem van voorraadbeheer



De regeltechniek past systematisch het begrip terugkoppeling toe. Classificaties van regelsystemen zijn op verschillende wijze mogelijk, n.l. lettend op

- het proces zelf (continu, discontinu)
- stand corrigerend orgaan (continu?)
- ingangssignalen
- open of gesloten.

Kernproblemen in de regeltechniek zijn:

- proceskennis
- kennis van ingangs- en stoorsignalen
- stabiliteit
- kwaliteit
- begrenzing

Bij planning kunnen we onderscheiden:

- 1) het plannen maken
- 2) het doen verlopen van het werk volgens het plan.

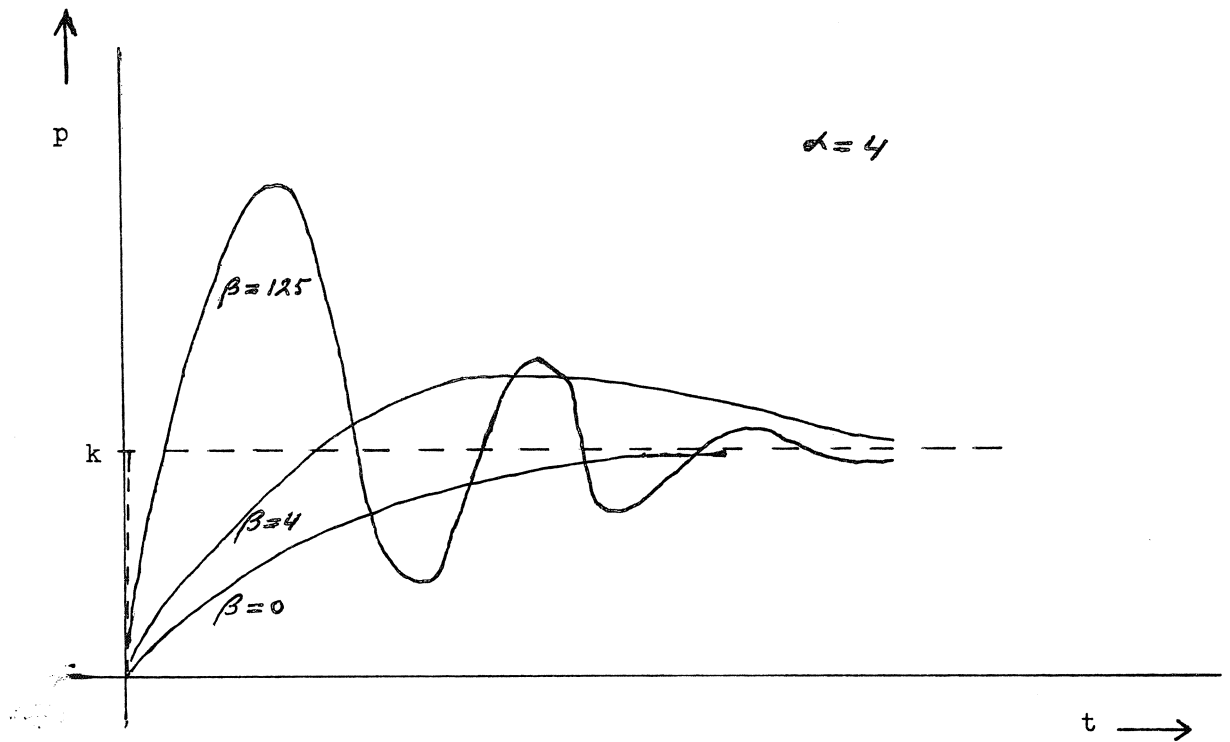
In de 1<sup>e</sup> fase wordt het doel ontleed in subdoelen.

In de 2<sup>e</sup> fase wordt door terugkoppeling gezorgd, dat het doel inderdaad bereikt wordt.

De analogie tussen planningsysteem en regelsysteem bestaat daarin, dat bij regelsystemen en bij de tweede fase van planningsystemen een essentiële rol wordt gespeeld door terugkoppeling. Ook onderscheiden wij dezelfde classificaties en dezelfde kernproblemen.

Conclusies:

- a) goede planning is slechts mogelijk als de gemaakte plannen tijdens de uitvoering ervan kunnen worden herzien met behulp van een regel "mechanisme" dat de resultaten voortdurend toetst aan de gestelde doeleinden en dat bovendien die doeleinden zelf voortdurend opnieuw bepaalt door toetsing aan doeleinden van hogere orde met behulp van alle tot dan ter beschikking gekomen informatie.
- b) Wil men bij de planning besparen op menselijke inspanning of wil men de met planning te behalen resultaten verbeteren, dan zal men het onder a bedoelde regelmechanisme als zodanig moeten herkennen en analyseren. Daarbij zal gebruik moeten worden gemaakt van de inzichten en methodiek van de regeltechniek.
- c) De meer exacte benaderingswijze van de regeltechniek op zichzelf werkt bij kennisname op zichzelf reeds verhelderend.



Figuur behorende bij

voorbeeld "kwaliteit van een productiebesturing"

(naar Howard/ v.d. Veen)

## II Markov-ketens en terugkoppeling door F.W. Steutel

1 Markov-ketens

Het begrip Markov-keten ontleent zijn naam aan de russische wiskundige A.A. Markov, die dit begrip invoerde bij zijn studie betreffende de opeenvolging van klinkers en medeklinkers in het gedicht "Jewgenii Onegin" van Poesjkin.

Een Markov-keten kan men opvatten als een generalisatie van een rij onafhankelijke experimenten. De uitkomst van zo'n rij onafhankelijke experimenten is een rij onafhankelijke gebeurtenissen  $A_1, A_2, \dots$ , waarvoor geldt

$$(1) \quad P\{A_n | A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} = P\{A_n\}, \quad 1)$$

d.w.z. de uitkomst van het  $n^{\text{de}}$  experiment hangt niet af van de uitkomsten van de voorafgaande  $n-1$  experimenten.

Het is duidelijk, dat in de door Markov beschouwde situatie de opeenvolging van letters (klinker of medeklinker) niet kan worden beschouwd als het resultaat van een rij onafhankelijke experimenten, zoals bijvoorbeeld een rij worpen met een (al of niet zuivere) munt. Het optreden van een klinker hangt sterk af van de aard van de voorafgaande letter: een klinker wordt (in het russisch) veel vaker voorafgegaan door een medeklinker dan door een klinker.

Men kan zich voorstellen, dat de situatie beter beschreven wordt door een rij experimenten, waarbij de uitkomst van het  $n^{\text{de}}$  experiment afhangt van de uitkomst van het  $n-1^{\text{ste}}$ , maar niet van de uitkomsten van de overige  $n-2$  experimenten. Als generalisatie van (1) hebben we dan dus

$$(2) \quad P\{A_n | A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\} = P\{A_n | A_{n-1}\}.$$

Een rij gebeurtenissen, die aan (2) voldoet, heet een Markov-keten, de gebeurtenissen heten Markov-afhankelijk.

1) Met  $P\{A\}$  geven we aan: "de kans dat gebeurtenis A optreedt" en met  $P\{A|B\}$ : "de keus dat A optreedt, gegeven dat B optreedt".

Men noemt een Markov-keten wel een "proces zonder geheugen" en schrijft (2) symbolisch als

$$(2') \quad P\{\text{toekomst}|\text{verleden en heden}\} = P\{\text{toekomst}|\text{heden}\}.$$

Als voorbeeld van een Markov-keten geven we nu een rij experimenten aan, waarmee de opeenvolging van klinkers en medeklinkers beschreven zou kunnen worden: Geef het optreden van klinker of medeklinker aan met respectievelijk K of M en kies de klinkers en medeklinkers als volgt: gooi met een (zuivere) munt en geef de uitslagen kruis en munt aan met respectievelijk K (klinker) en M (medeklinker). Is de uitslag M, gooi dan weer met de munt. Is de uitslag echter K, gooi dan met een (zuivere) dobbelsteen en geef "zes ogen" aan met K en "minder dan zes ogen" met M. Is de uitslag M (K), gooi dan weer met de munt (dobbelssteen), etc. We hebben nu

$$P(M|M) = P(K|M) = \frac{1}{2}, \quad P(K|K) = \frac{1}{6} \quad \text{en} \quad P(M|K) = \frac{5}{6}.$$

In plaats van rijen willekeurige gebeurtenissen  $A_1, A_2, \dots$  beschouwt men dikwijls rijen stochastische variabelen  $x_1, x_2, \dots$  en daarbij de gebeurtenissen  $A_n$ : " $x_n = x$ " of " $x_n \leq x$ ". Een algemeen type Markov-keten kan men als volgt beschrijven: een "systeem" (dit kan een machine zijn of een rij mensen voor een loket), dat in aftelbaar veel toestanden  $S_1, S_2, \dots$  kan verkeren, gaat op discrete tijdstippen  $t_1, t_2, \dots$  van de ene toestand in een volgende over. Als het systeem in de toestand  $S_i$  is, dan is er een kans  $p_{ij}$ , overgangswaarschijnlijkheid genaamd, dat het systeem bij de volgende overgang in de toestand  $S_j$  komt, ongeacht de toestanden, die het vóór die tijd doorlopen heeft. Geven we de gebeurtenis "het systeem is op tijdstip  $t_n$  in de toestand  $S_i$ " aan met  $x_n = i$ , dan geldt dus

$$(3) \quad p_{ij} = P\{x_n = j | x_1 = i_1, x_2 = i_2, \dots, x_{n-1} = i\} = P\{x_n = j | x_{n-1} = i\}.$$

Als, zoals hier, de overgangswaarschijnlijkheden niet van  $n$  afhangen, dan noemt men deze overgangswaarschijnlijkheden stationair. Men spreekt

1) Stochastische variabelen worden met onderstreepte letters aangegeven.

ook wel van Markov-ketens die homogeen in de tijd zijn. Wij zullen ons beperken tot Markov-ketens met stationaire overgangswaarschijnlijkheden, dus tot Markov-ketens, waarvan de overgangswaarschijnlijkheden niet van de tijd afhangen.

Voor de  $p_{ij}$  geldt natuurlijk

$$(4) \quad \begin{cases} 0 \leq p_{ij} \leq 1 \\ \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

Om een Markov-keten volledig te beschrijven, moeten we behalve de overgangswaarschijnlijkheden nog een beginverdeling geven, d.i. een kansverdeling, die de toestand op het begintijdstip  $t_0$  karakteriseert.

$$p_j^{(0)} = P\{x_0 = j\}.$$

De overgangswaarschijnlijkheden worden dikwijls als volgt in een matrix, meestal aangeduid met  $P$ , samengevat:

naar van	$S_1$	$S_2$	.....	$S_N$	...
$S_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	.....	$p_{1N}$	...
$S_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	.....	$p_{2N}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$S_N$	$p_{N1}$	$p_{N2}$	.....	$p_{NN}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

In ons voorbeeld hebben we met  $S_1=K$  en  $S_2=M$

$$(5) \quad \begin{cases} P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ p_1^{(0)} = p_2^{(0)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Voor de toestanden op latere tijdstippen geldt

$$p_j^{(1)} = P\{\underline{x}_1=j\} = \sum_k P\{\underline{x}_1=j | \underline{x}_0=k\} P\{\underline{x}_0=k\} = \sum_k p_k^{(0)} p_{kj}$$

en algemeen

$$(6) \quad p_j^{(n)} = P\{\underline{x}_n=j\} = \sum_k p_k^{(0)} p_{kj}^{(n)},$$

waarin  $p_{kj}^{(n)}$ , de kans om in  $n$  stappen van  $S_k$  naar  $S_j$  te gaan, voldoet aan

$$(7) \quad \begin{cases} p_{kj}^{(1)} = p_{kj} \\ p_{kj}^{(n+1)} = \sum_l p_{kl}^{(n)} p_{lj} \end{cases}$$

Men gaat gemakkelijk na, dat voor alle  $n \geq 1$  weer geldt

$$(8) \quad \begin{cases} 0 \leq p_{ij}^{(n)} \leq 1 \\ \sum_j p_{ij}^{(n)} = 1, \end{cases}$$

waaruit met (6) volgt, dat  $p_j^{(n)}$  voor alle  $n \geq 1$  weer een kansverdeling voorstelt.

In veel praktische gevallen komt het systeem lange tijd na het begintijdstip, d.w.z. na een groot aantal overgangen, in een stadium, waar de verdelingen, die het proces beschrijven, niet meer van de tijd (d.w.z. het aantal overgangen) afhangen. Men zegt dan, dat het systeem stationair (of ook wel: in de stationaire toestand) is. Het is daarom van belang te weten, hoe de  $p_j^{(n)}$  zich gedragen voor grote  $n$ . We beperken ons hier tot het geval, dat het systeem inderdaad op den duur <sup>1)</sup> stationair wordt, d.w.z. tot het geval, dat

1) Wiskundig gezien duurt dit oneindig lang; in de praktijk echter wordt de stationaire toestand dikwijls na vrij korte tijd al voldoende benadert.



$$(9) \quad \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j^{(n)}$$

bestaat en nemen aan, dat deze limiet onafhankelijk is van de beginverdeling, terwijl bovendien de  $\pi_j$  een kansverdeling vormen, de zgn. stationaire verdeling:

$$(10) \quad \sum_j \pi_j = 1.$$

Markov-ketens, die aan deze voorwaarden voldoen noemt men ergodisch.

Kiezen we speciaal

$$p_j^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{als } j=i \\ 0 & \text{als } j \neq i, \end{cases}$$

dan volgt uit (6), dat  $p_j^{(n)} = p_{ij}^{(n)}$  is, zodat onafhankelijk van  $i$  wegens (9) ( $\pi_j$  hangt niet van de beginverdeling af)

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

Volgens (7), (10) en (11) vinden we de  $\pi_j$  dus uit de vergelijkingen

$$(12) \quad \begin{cases} \pi_j = \sum_l \pi_l p_{lj} \\ \sum_j \pi_j = 1. \end{cases}$$

Deze vergelijkingen zijn eenduidig oplosbaar, als de Markov-keten ergodisch is.

Men kan de stationaire kans  $\pi_j$  enerzijds opvatten als de kans om het systeem lange tijd na het begintijdstip in de toestand  $S_j$  aan te treffen, anderzijds als de fractie van het aantal malen, dat het systeem in de toestand  $S_j$  geweest is. Er geldt namelijk, dat met kans één

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_j(n)}{n},$$

waarbij  $u_j(n)$  het aantal malen is, dat het systeem de toestand  $S_j$  heeft aangenomen in  $n$  overgangen.

In ons voorbeeld hebben we (zie (5) en (12))

$$(13) \quad \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{5}{6}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases},$$

waaruit volgt, dat  $\pi_1 = \frac{3}{8}$  en  $\pi_2 = \frac{5}{8}$ . De fracties klinkers en medeklinkers bedragen dan dus respectievelijk  $\frac{3}{8}$  en  $\frac{5}{8}$ .

Behalve Markov-ketens met eindig of aftelbaar veel toestanden kan men Markov-ketens <sup>1)</sup> met meer dan aftelbaar veel toestanden beschouwen. Men spreekt dan wel van Markov-ketens met een continue toestandsruimte, in tegenstelling tot een discrete toestandsruimte bij eindig of aftelbaar veel toestanden.

In het geval van een continue toestandsruimte is voor "bijna alle"  $y$  de kans  $P\{x_n=y|x_{n-1}=x\}$  gelijk aan nul. We gebruiken daarom in dat geval geen overgangswaarschijnlijkheden, maar overgangsverdelingsfuncties, ook wel transitiefuncties genoemd:

$$F(y|x) = P\{x_n \leq y | x_{n-1} = x\}.$$

Als  $F(y|x)$  voor alle  $x$  een dichtheid heeft dan spreken we van een overgangsdichtheid  $f(y|x)$ :

-----  
1) Over de terminologie bestaat geen overeenstemming: sommige auteurs (Doob, Chung) spreken in dit geval niet van Markov-ketens, maar van Markov-processen. De hier gebruikte terminologie is die van Takács.

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y|x) = f(y|x).$$

Is verder nog een beginverdeling  $F^{(0)}(x)$  gegeven, dan hebben we geheel analoog aan de formules (6) en (7)

$$(14) \quad F^{(n)}(y) = \int F^{(n)}(y|x) dF^{(0)}(x)$$

en

$$(15) \quad \begin{cases} F^{(1)}(y|x) = F(y|x) \\ F^{(n+1)}(y|x) = \int F(y|z) dF^{(n)}(z|x) \end{cases}$$

In het ergodische geval, d.w.z. als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}(y|x) = G(y)$$

bestaat, onafhankelijk van  $x$ , terwijl

$$\int dG(y) = 1,$$

dan vindt men analoog aan (12) de stationaire verdeling  $G$  uit de relaties

$$(16) \quad \begin{cases} G(y) = \int F(y|x) dG(x) \\ \int dG(y) = 1 \end{cases}$$

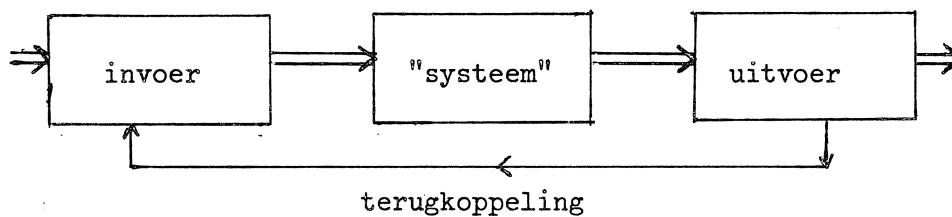
Als de dichtheden bestaan, dan kunnen de relaties (14), (15) en (16) ook met dichtheden worden geschreven, bijv. in plaats van (16)

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy} G(y) = g(y) = \int f(y|x) g(x) dx \\ \int g(x) dx = 1. \end{cases}$$

Voor details betreffende Markov-ketens verwijzen we naar [1], [3], en [5].

## 2 Terugkoppeling

De term terugkoppeling (engels: feedback) wordt in de techniek gebruikt voor situaties van het volgende type: een "systeem" ontvangt energie van een bepaalde soort, de "invoer". (engels: input), en zet deze om in energie van een andere soort, de uitvoer (engels: output). Het essentiële aspect van de terugkoppeling is nu, dat een deel van de uitvoer wordt gebruikt om de invoer te beïnvloeden. Schematisch wordt dit wel als in onderstaande figuur aangegeven.



Een bekend voorbeeld van een dergelijk terugkoppelingsmechanisme is een thermostaat, die de olie toevoer van een centrale verwarming regelt. In veel gevallen, zoals ook in dit voorbeeld, werkt de terugkoppeling regulerend: als de uitvoer een gegeven bovengrens overschrijdt, dan wordt de invoer verkleind,<sup>1)</sup> wordt de uitvoer te klein, dan wordt de invoer vergroot. Men spreekt in dat geval van een negatieve terugkoppeling. Zo'n negatieve terugkoppeling treedt bijvoorbeeld op bij een stabiel evenwicht: een verstoring van het evenwicht geeft aanleiding tot krachten, die het evenwicht herstellen. Bij een labiel evenwicht leidt verstoring van het evenwicht tot krachten, die de uitwijking uit de evenwichtsstand vergroten: hier is sprake van een positieve terugkoppeling.

Bij de bovengenoemde voorbeelden treedt duidelijk invoer en uitvoer van energie op. Bij de thermostaat bestaat die energie in beide gevallen uit warmte, bij de evenwichtsituaties bestaat de invoer uit kinetische = de uitvoer uit potentiële energie. De term terugkoppeling wordt tegenwoordig echter gebruikt voor situaties, waar van een in- en uitvoer kan worden gesproken, zonder dat van energie sprake is.

---

1) We nemen hierbij aan, dat in- en uitvoer zo gedefinieerd zijn, dat een vergroting (verkleining) van de invoer de uitvoer vergroot (verkleind).

In- en uitvoer kan men dan vaak beter interpreteren als oorzaak en gevolg of als experiment en resultaat, met dien verstande, dat het resultaat, van het ene experiment de aard van het volgende experiment beïnvloed. Het is duidelijk, dat een dergelijke rij experimenten niet onafhankelijk zal zijn, mogelijk echter wel Markov-afhankelijk.

Voorbeelden van een dergelijke meer abstracte terugkoppeling zijn de zogenaamde lonen-prijzen-spiraal (positieve terugkoppeling) en de situatie in een postkantoor, waar men bij grote toeloop (soms) een extra loket opent (negatieve terugkoppeling).

### 3 Markov-ketens en terugkoppeling

In deze paragraaf zullen we een aantal problemen schetsen, waarbij terugkoppeling een essentiële rol speelt en die kunnen worden opgelost met behulp van de theorie der Markov-ketens. We zullen geen expliciete oplossingen geven, doch slechts kort aanduiden hoe een oplossing gevonden kan worden.

#### Voorbeeld 1 (wachttijdprobleem)

Bij een loket komen klanten aan voor de één of andere vorm van bediening. Als het loket bezet is, wachten de klanten (in volgorde van aankomst) tot ze aan de beurt zijn. Er is slechts ruimte voor  $M$  klanten (één aan het loket,  $M-1$  in een wachtkamer). Als een aankomende klant de wachtkamer vol aantreft, dan gaat hij weg zonder terug te komen, hetgeen een verlies van  $c_1$  gulden betekent voor de gene, die het loket exploiteert. Om dit verlies tegen te gaan, kan voordat de wachtkamer vol is een tweede loket worden geopend, bijvoorbeeld zodra  $N \leq M$  klanten aanwezig zijn. Als het aantal tot  $n \leq N$  is teruggelopen, wordt één van de loketten weer gesloten. De exploitatie van een tweede loket kost echter  $c_2$  gulden per uur. De vraag is nu, hoe  $N$  en  $n$  gekozen moeten worden om de gemiddelde kosten per uur zo klein mogelijk te maken.

We hebben hier te maken met een negatieve terugkoppeling: als de uitvoer, d.i. het aantal aanwezige klanten tot  $N$  stijgt (of bij ge-

opend tweede loket tot n daalt) dan wordt de invoer, d.i. de toevoer van klanten naar de wachtkamer verminderd met de afvoer naar het loket verkleind (vergroot).

Om het probleem te kunnen oplossen doen we de volgende veronderstellingen: de klanten komen onafhankelijk van elkaar aan met exponentieel verdeelde tussenruimte met gemiddelde lengte  $\frac{1}{\lambda}$  en de bedienings-tijden zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met gemiddelde  $\frac{1}{\mu}$ .

We beschrijven de toestand van het systeem met het aantal klanten dat aanwezig is op de tijdstippen, dat dit aantal verandert, d.w.z. op tijdstippen dat een klant aankomt of vertrekt, terwijl bovendien wordt aangegeven of één of twee loketten open zijn. Op grond van deze veronderstellingen vormt het aantal klanten op dergelijke tijdstippen een eindige Markov-keten, waar van de overgangsmatrix de volgende vorm heeft.

	$S_0$	$S_1$	$\dots$	$S_n$	$\dots$	$S_{N-1}$	$S'_{n+1}$	$\dots$	$S'_N$	$\dots$	$S'_{M-1}$	$S'_M$
$S_0$	0	1	0									
$S_1$	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	0	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$									
$\vdots$												
$S_n$			$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	0	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$							
$\vdots$												
$S_{n-1}$				$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	0	$\dots$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$					
$S'_{n+1}$					$\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$	$\dots$	0	$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$				
$\vdots$												
$S'_N$							$\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$	0	$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$			
$\vdots$												
$S'_{M-1}$									$\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}$	0	$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$	
$S'_M$										0	1	0

Hierbij geeft  $S_j$  de toestand met j klanten aan, terwijl een accent er op duidt, dat twee loketten open zijn.

We kunnen nu met behulp van deze matrix de stationaire kansen uitrekenen en daaruit berekenen de fractie  $f_1(N,n)$  van de tijd dat de wachtkamer vol is en de fractie  $f_2(N,n)$  van de tijd, dat beide loketten

open zijn. De gemiddelde kosten per uur in de stationaire toestand worden dan gegeven door

$$(18) \quad \lambda f_1(n, N) C_1 + f_2(n, N) C_2.$$

De getallen  $n$  en  $N$  moeten dan zo gekozen worden, dat deze uitdrukking minimaal is. Hierbij kan het voorkomen, dat  $c_2$  zo groot is, dat het openstellen van een tweede loket altijd nadelig is.

### Voorbeeld 2 (voorraadprobleem)

In een magazijn wordt een voorraad grondstof beheert, waarvan op elk gewenst ogenblik in iedere gewenste hoeveelheid kan worden verkocht en bijbesteld. Als op een gegeven moment de vraag groter is dan de voorraad, dan wordt door een onmiddellijke noodinkoop aan de vraag voldaan. Een dergelijke noodinkoop brengt echter extra kosten met zich mee. De voorraad moet dus zo groot gehouden worden, dat noodinkopen maar zelden voorkomen. Anderzijds kost ook het in voorraad houden van de grondstof geld, zodat de voorraad ook weer niet te groot mag zijn. We beschouwen het volgende model:

- 1) kopers komen aan met exponentieel verdeelde tussenpozen,
- 2) een willekeurige koper neemt een stochastische hoeveelheid (met bekende verdeling) af
- 3) als de voorraad beneden een gegeven peil  $s$  zakt, wordt een hoeveelheid  $S$  bijbesteld (z.g.n.  $s$ - $S$ -politiek).
- 4) de levertijd is exponentieel verdeeld.

Op grond van de veronderstellingen doerloopt de voorraad op tijdstippen, waarop hetzij gekocht, hetzij afgeleverd wordt een Markov-keten met continue toestandruimte. Het is mogelijk om de stationaire verdeling  $G(y)$  te bepalen en de gemiddelde kosten  $c(y; s, S)$ , die gemaakt worden bij een overgang van de toestand  $y$  uit. De gemiddelde stationaire kosten bedragen dan

$$(19) \quad c(s, S) = \int_0^{S+s} c(y; s, S) dG(y).$$

Minimaliseren van  $c(s,S)$  levert de optimale waarden van  $s$  en  $S$ .

De (negatieve) terugkoppeling zorgt er hier voor, dat de voorraad kleiner dan  $s+S$  blijft en niet te vaak negatief wordt. Evenals bij het vorige voorbeeld garandeert de terugkoppeling niet, dat de toestand tussen twee grenzen blijft, zoals bij een (goede) thermostaat; slechts de kans op het overschrijden van de grenzen wordt beperkt. De terugkoppeling heeft een stochastisch karakter.

### Voorbeeld 3 (verzekeringsprobleem)

Een automobilist heeft zijn auto verzekerd onder de volgende voorwaarden:

- 1) De premie bedraagt  $c_4$  gulden per jaar, tenzij
- 2) hij het afgelopen jaar geen claims heeft ingediend, in welk geval de premie  $c_3$  gulden bedraagt, tenzij
- 3) hij de afgelopen twee jaar geen claims heeft ingediend, in welk geval de premie  $c_2$  gulden bedraagt, tenzij
- 4) hij de afgelopen drie jaar geen claims heeft ingediend, in welk geval de premie  $c_1$  gulden bedraagt.
- 5) Claims moeten direct na optreden van de schade worden ingediend.
- 6) Het "eigen risico" bedraagt  $a$  gulden,

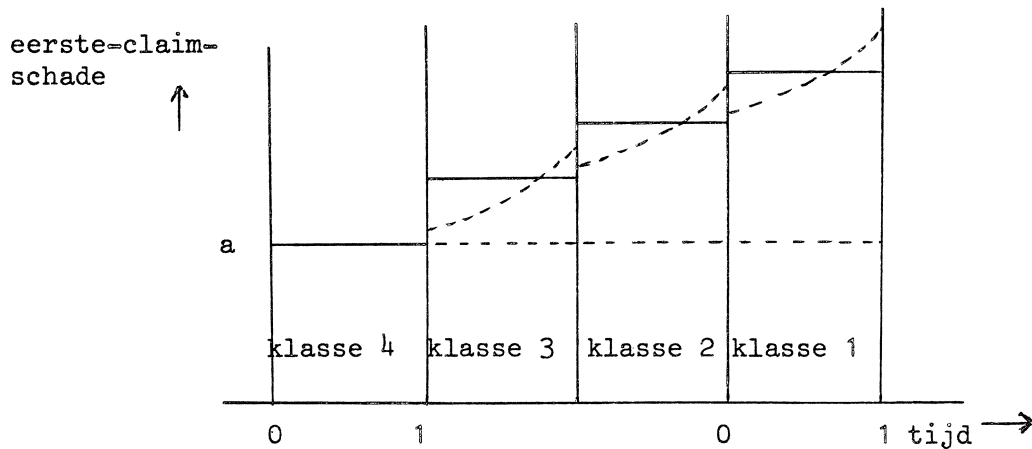
De automobilist claimt uiteraard nooit schaden beneden  $a$  gulden. In verband met de premieverlaging zal hij ook schaden, die weinig hoger zijn dan  $a$  gulden niet claimen, tenzij hij dat jaar al claims heeft ingediend. Bovendien zal hij in verband met eventuele volgende schaden in het begin van het jaar bij kleinere schaden zijn eerste claim indienen, dan aan het eind van het jaar. Het probleem is: bij welke schade dient de automobilist zijn eerste claim in. Deze schade zal afhangen van de tijd en van de premie-klasse, waarin de automobilist zich het volgende jaar dent te bevinden. Als de automobilist een premie  $c_i$  verwacht, dan zal de eerste - claim - schade een niet dalende functie  $\phi_i(t)$  van de tijd zijn.

We veronderstellen, dat schaden elkaar onafhankelijk opvolgen met exponentieel verdeelde tussenpozen, terwijl de grootte van de



schade (uitgedrukt in guldens) een stochastische variabele is met verdelingsfunctie  $F(x)$ .

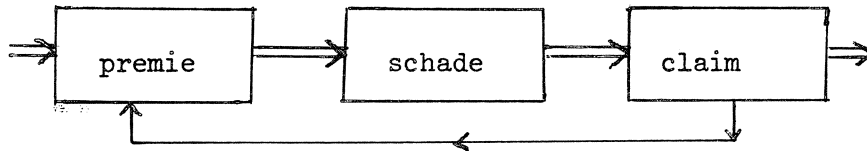
We beschouwen als toestandsgrootte de premieklasse (1,2,3 of 4 bij premie  $c_1, c_2, c_3$  of  $c_4$ ) waarin de automobilist het komende jaar denkt te zijn. d.w.z. in klasse 4, als al een claim is ingediend en (zo mogelijk) één klasse lager dan de huidige, als nog geen claim is ingediend. Als we deze grootte aan het einde van de premie-jaren beschouwen, dan is het uit de veronderstellingen duidelijk, dat we te maken hebben met een Markov-keten met 4 toestanden. De overgangswaarschijnslijkscheden en dus ook de stationaire kansen zijn voor willekeurige functies  $\phi_i(t)$  en  $F(x)$  te berekenen. De moeilijkheid is nu echter om de gemiddelde kosten, die tussen twee overgangen worden gemaakt uit te rekenen. Alleen als  $\phi_i(t) = a_i$  is, dus voor constante eerste-claim-schade is dit eenvoudig mogelijk. In plaats van de beste functies  $\phi_i(t)$  vinden we nu door minimaliseren van de kosten (de premie enerzijds en de ongeclaimde schade anderzijds) de beste constanten  $a_i$ . Het resultaat zal er als volgt uitzien:



In de figuur is met een stippellijn aangegeven hoe de beste functies er ongeveer uitzien. Voor een methode om deze functies te vinden zie men [4].

Hier bestaat een positieve terugkoppeling tussen de geclaimde schade en de te betalen premie. Als een claim wordt ingediend, heeft dat tot gevolg, dat het volgend jaar meer (of althans minstens evenveel) premie betaald moet worden. Deze premieverhoging heeft weer tot gevolg,

dat meer claims zullen worden ingediend. Omgekeerd leidt niet-claimen van schaden tot premieverlaging, waardoor het het volgend jaar nog minder aantrekkelijk wordt om te claimen, omdat dan een groter verlies aan premiereductie optreedt. De terugkoppeling wordt beperkt door de boven- en benedengrens van de premie. Schematisch hebben we hier



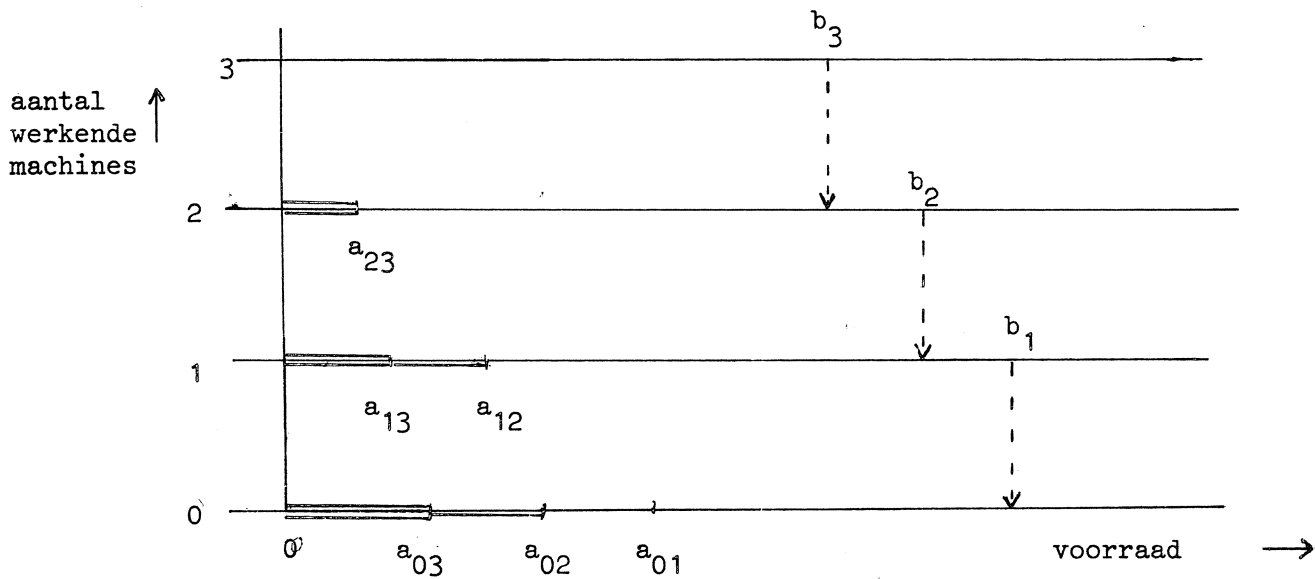
#### Voorbeeld 4 (productieprobleem)

In een fabriek staan 3 machines, die alle het zelfde product kunnen maken. Afhankelijk van de grootte van de voorraad, waarvan op elk gewenst moment in elke gewenste hoeveelheid door afnemers kan worden gekocht, werken 0,1,2 of 3 machines. De kosten die hierbij optreden zijn de volgende:

- 1) productiekosten
- 2) voorraadkosten
- 3) kosten voor noodinkopen bij te kleine voorraad
- 4) kosten voor in- en uitschakelen van machines.

We nemen aan, dat afnemers met exponentiële tussenpozen aankomen en een stochastische hoeveelheid (verdelingsfunctie  $F$ ) kopen. De productie wordt geregeld door het volgende terugkoppelingssysteem:

Als  $i$  machines werken en de voorraad boven  $b_i$  stijgt, dan wordt één machine uitgeschakeld. Als de voorraad beneden  $a_{ij}$  daalt, dan worden  $j-i$  machines ingeschakeld. Schematisch kan men dit als volgt aangeven:



Het probleem is nu om de niveaus  $b_i$  en  $a_{ij}$  zo te kiezen, dat de gemiddelde kosten zo laag mogelijk worden.

De voorraad op de overschakeltijdstippen is nu een Markov-keten met het interval  $[0, b_1]$  als toestandsruimte, als we daarbij nog aangeven hoeveel machines er in bedrijf zijn. De toestand van het systeem wordt nu gekarakteriseerd door twee variabelen  $y$  en  $i$  ( $0 \leq y \leq b_1; 0 \leq i \leq 3$ ). De overgangsverdeling  $P\{y_n \leq y \text{ en } x_n = i \mid y_{n-1} = x \text{ en } x_{n-1} = j\}$  kan, althans voor speciale keuze van de verdelingsfunctie  $F$  expliciet bepaald worden. Ook de gemiddelde kosten tussen twee overgangen kunnen in speciale gevallen worden uitgerekend, zodat dan de gemiddelde stationaire kosten kunnen worden uitgerekend en -althans in theorie- geminimaliseerd. In het algemeen echter zal het niet mogelijk zijn de stationaire kosten expliciet te berekenen en (naar 9 variabelen  $b_i$  en  $a_{ij}$ ) te minimaliseren. Men zal gebruik moeten maken van iteratiemethoden, zoals die beschreven zijn in [2] en [4].

Litteratuur

- [1] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications (part I), Wiley, New York.
- [2] R.A. Howard, Dynamic Programming and Markov Processes, Technology Press M.I.T. and Wiley, New York, 1960.
- [3] J.G. Kemeny and J.L. Snell, Finite Markov Chains, Van Nostrand, 1960.
- [4] G. de Leve, Stochastic  $\infty$ -stage decision problems, report S302 (VP 19), afd. Stat., Mathematisch Centrum, 1962.
- [5] L. Takács, Stochastic Processes, Methuen, London, 1960.

III Een toepassing van de regeling van produktieniveaus.

door Ir. R.N. van Hees

N.V. Philips Gloeilampenfabrieken

Eindhoven

Ter illustratie van de voordracht voor de S.O.R. op 29 nov. 1963 te Utrecht volgen hier enkele opmerkingen en grafieken die betrekking hebben op een toepassing van de regeling van produktieniveaus. De gebruikte produktie-regels zijn opgesteld met behulp van de theorie der Markow-ketens. Voor de theoretische achtergrond hiervan wordt o.a. verwezen naar de voordracht van Drs. F.W. Steutel.

Probleemstelling:

Een afdeling maakt onderdelen ten behoeve van een montageafdeling en ten behoeve van andere montageafdelingen in het buitenland.

Tussen onderdelenproduktie en montageafdeling ligt een buffervoorraad van waaruit direct aan de montageafdeling wordt geleverd. De montageafdelingen uit het buitenland sturen regelmatig orders die direct geleverd moeten worden.

Gevraagd werd een produktieregeling voor onderdelen te ontwerpen waarbij een goede service aan de montageafdelingen gegarandeerd is terwijl onnodige schommelingen in de produktieniveaus der onderdelen zoveel mogelijk vermeden werden.

Uitgangspunt:

De aard van het produktieproces der onderdelen bracht met zich mee dat een eenmaal gekozen produktieniveau zolang mogelijk gehandhaafd dient te blijven. Voorts werd een eenvoudige planningregel verlangd die eenmaal per week gehanteerd kon worden; ook de voorraadopname vond wekelijks plaats.

Het aantal onderdelen bedroeg  $\pm$  160 terwijl het aantal stuks per codenummer varieerde van 100 tot ruim 10.000 stuks per week.

Oplossing:

Bij de oplossing is er naar gestreefd om, meer dan voorheen, de voorraad als buffer dienst te laten doen en door middel van een

gedempte terugkoppeling het aantal veranderingen in het produktie-niveau te beperken. Hiertoe werd onderstaande beslissingsregel gehanteerd:

- $P_{i+1} = \bar{X}$  indien  $I_l < I_i < I_u$
- $P_{i+1} = \bar{X} + R$  indien  $I_l > I_i$
- $P_{i+1} = \bar{X} - R$  indien  $I_i > I_u$

hierin is:  $P_{i+1}$  = produktieniveau eerstvolgende week

$\bar{X}$  = gemiddeld verwachte afname per week

R = verschil tussen  $I^*$  en  $I_l$  resp.  $I_u$

$I_l$  = ondergrens van de voorraad

$I_u$  = bovengrens van de voorraad.

Deze regel geeft géén optimale oplossing; er is namelijk een compromis gezocht tussen de eenvoud van de regel en het minimum der voorraad- en omstelkosten.

De gang van zaken bij het hanteren der regel is als volgt:

1. Wanneer de voorraad binnen de grenzen blijft, dan wordt steeds de hoeveelheid geproduceerd, die aan het begin van elke maand gepland wordt, als "gemiddeld per week".
2. Daalt de voorraad beneden de ondergrens, dan wordt de gemiddelde weekplanning verhoogd met het aantal dat gelijk is aan de helft van de ideale voorraad, i.c. met de hoeveelheid die bij de ondergrens staat.
3. Ligt de voorraad boven de bovengrens, dan wordt de gemiddelde weekplanning verminderd met de in punt 2 genoemde hoeveelheid, dus "de ondergrens".

In figuur 3 "Bepaling van gemiddelde voorraad en boven- en ondergrens" kan worden afgelezen hoe de grenzen liggen wanneer de gemiddelde weekproduktie berekend is.

Deze tabel is gebaseerd op een berekening waaruit bleek dat

$$I_{\perp} = 1,25 \sigma_D$$

$$I^* = 2,5 \sigma_D$$

$$I_u = 3,75 \sigma_D$$

Voorts is bekend dat  $\sigma_D = c \cdot \bar{X}^P$  waarbij voor dit geval geldt:

$$c = 27 \text{ en } p = 0,53 \text{ (zie grafiek 2.)}$$

Het resultaat:

In figuur 4 is weergegeven hoe de leveranties aan de verschillende afdelingen zijn verlopen.

Als maatstaf voor het goed functioneren van het systeem is genomen:

- 1) Het aantal directe afleveringen aan het magazijn.  
Dit aantal is teruggelopen van 18% naar 2.5%.
- 2) Het aantal veranderingen van het produktieniveau.  
Na invoering bedroeg dit ongeveer 30%. Voorheen is dit aantal nooit gemeten.

Het onder punt 1) genoemde is op duidelijke wijze op grafiek 4 weergegeven.

De voorraadnorm.

Naast de voorraadnorm per codenummer is nog berekend hoe de voorraad van het gehele assortiment zich zal gedragen als functie van afname. In figuur 5 is dit verband weergegeven.

Voor het gebied waarin deze concrete situatie zich afspeelde gold nog dat de betrouwbaarheidsgrenzen (95%) van de norm voor het totale assortiment lagen op + 15%.