STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 326

Een voorraadprobleem

(Intern rapport)

door

J. van de Lune

juni 1964

Inleiding

Naar aanleiding van het artikel "Bestelniveau en serie-grootte" van Ir. R.N. VAN HEES, in het Tijdschrift voor Efficiëntie en Documentatie (T.E.D.), is een nogal levendige discussie ontstaan tussen Ir. R.N. VAN HEES en Prof.Ir. W. MONHEMIUS enerzijds en Prof.Dr.Ir. J. GOUDRIAAN anderzijds [1].

Wij zullen eerst de betreffende gepubliceerde artikelen in kort bestek weergeven om daarna een korte bespreking te laten volgen.

1. "Bestelniveau en serie-grootte"
   door Ir. R.N. VAN HEES (zie T.E.D., februari 1961).

VAN HEES schrijft in zijn inleiding: "Het is de bedoeling van dit artikel op de volgende punten nader in te gaan:

- onder welke omstandigheid kan de klassieke formule voor de optimale seriegrootte worden toegepast ?
- hoe moet het bestelniveau bepaald worden ?"

In het artikel wordt dan eerst een uiteenzetting gegeven van het z.g. B-Q systeem, waarna aangegeven wordt aan welke voorwaarden in het algemeen voldaan moet zijn, wil het B-Q systeem van toepassing kunnen zijn. (Het B-Q systeem is dus niet "universeel" toepasbaar.)
Wordt door zeker bedrijf toch besloten dit systeem te gebruiken bij het beheren van zijn voorraden, dan is het om vanzelfsprekende redenen noodzakelijk zowel B (=bestelniveau) als Q (= optimale serie-grootte) te bepalen.[2]

---

1) Dr. A.M. GROOT en Drs. A.R. VAN DER BURG waren slechts zijdelings bij deze polemiek betrokken.

2) In dit verband moet onder "voorraad" worden verstaan: de aanwezige voorraad plus de in bestelling zijnde goederen.

In paragraaf 3 wordt ingegaan op de kwestie hoe het bestelniveau B bepaald kan worden.
Als eerste punt komt hierbij het gedrag van de vraag aan de orde. Voor de bepaling van B is het in ieder geval noodzakelijk de verwachting (= gemiddelde) μ en de spreiding (= standaardafwijking) σ van de vraag te kennen; in verband met de kans op buiten-voorraad-raken is het daarnaast nog van belang te weten welke gedaante de kansverdeling van de vraag heeft.

De berekening van μ zal geen grote moeilijkheden met zich meebrengen; de berekening van σ, daarentegen, is doorgaans nogal tijdrovend.
Naar aanleiding hiervan wordt in paragraaf 3.3. opgemerkt: "Wanneer het noodzakelijk is zowel de gemiddelde vraag als de spreiding in de vraag te kennen, dan is het nuttig te zoeken naar methoden om deze eenvoudig vast te stellen, om vervolgens het juiste bestelniveau ermee te berekenen".

Met betrekking tot de situatie waarin de voorraad uit een groot aantal verschillende (overigens gelijksoortige) produkten bestaat, stelt VAN HEES dan, dat de mogelijkheid om de waarden van σ op eenvoudige wijze rechtstreeks uit de bijbehorende waarden van μ te kunnen schatten of berekenen, een niet geringe vereenvoudiging van het rekenwerk zou betekenen.

Hebben wij b.v. een assortiment artikelen, zodanig dat de verkoop per maand van elk der artikelen Poisson verdeeld is, dan kan de spreiding in de verkoop van een der artikelen direct berekend worden uit de gemiddelde verkoop per maand van het betreffende artikel. Hiervoor behoeven we slechts gebruik te maken van de formule

$$\sigma = \sqrt{\mu} \tag{1.1}$$

In de praktijk blijkt dat de Poisson-verdeling in tal van situaties niet gebruikt mag worden en dit brengt met zich mee dat formule (1.1) in die gevallen niet zonder meer gehandhaafd mag worden. In verband hiermee is door VAN HEES empirisch vastgesteld dat in vele situaties het verband

$$\sigma = c \, . \, \mu^{p} \tag{1.2}$$

geldig is.
Indien de waarden van de constanten c en p bekend zijn, dan is uit de gemiddelde verkoop μ de bijbehorende standaardafwijking σ rechtstreeks af te leiden, terwijl het tevens mogelijk is met behulp van de getallen c en p het gedrag van de verkoop van een groep gelijksoortige produkten te karakteriseren.

Omtrent de gedaante van de verdeling van de vraag wordt nog opgemerkt:
"Helaas is het niet mogelijk een universele frequentieverdeling voor de vraag op te stellen, maar zeker is, dat het onjuist is om te veronderstellen dat deze verdeling altijd Poisson of Normaal zou zijn. Een mogelijkheid die theoretisch niet bewezen kan worden, maar praktisch goede resultaten biedt, is de aanname dat de vraag per tijdseenheid een gamma-verdeling volgt".

2. "Statisti che bepaling van de veiligheidstoeslag in het bestelniveau", door Prof.Dr.Ir. J. GOUDRIAAN (zie T.E.D., juli 1962)

In paragraaf I wijst GOUDRIAAN erop dat "elke toepassing van de Poisson-verdeling op verkopen gedurende een zeker tijdvak, die gemeten zijn in (continue) hoeveelheden of in geldbedragen volstrekt ontoelaatbaar is".
De Poisson-verdeling heeft alleen betrekking op aantallen.

Het toepassingsgebied van de Poisson-verdeling wordt verder nog beperkt door de eis dat bij elke verkoop slechts één eenheid verkocht mag worden.

De eis dat bij elke verkoop slechts één eenheid verkocht mag worden kan komen te vervallen, als we overgaan op het gebruik van een door GOUDRIAAN behandelde "variant" op de Poisson-verdeling.

GOUDRIAAN construeert met betrekking tot de mogelijk nogal uiteenlopende verkoopgrootten (betrekking hebbend op één bepaald artikel) een eindig aantal verkoopklassen: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$;
in de k-de verkoopklasse A_k worden uitsluitend verkopen van de grootte a_k afgehandeld.

Het aantal verkopen per klasse (per maand) blijft bij veronderstelling Poisson-verdeeld. Het totaal aantal verkopen per maand zal dan ook Poisson-verdeeld zijn (tenminste als de aantallen verkopen in de diverse verkoopklassen onderling onafhankelijk zijn).

Wij voeren nu een aantal grootheden in om enkele door GOUDRIAAN gegeven formules op eenvoudige wijze weer te kunnen geven.[1]

$\underline{n}_k$ = het aantal verkopen per maand in de k-de verkoopklasse A_k.[2]

---

1) GOUDRIAAN gebruikt een enigszins andere notatie.

2) Stochastische grootheden worden onderstreept.

$n_k = \mathcal{E}(\underline{n}_k)$ = het gemiddelde aantal verkopen in de verkoopklasse A_k = de verwachting van $\underline{n}_k$.

$n = \sum\limits_k n_k$ = de verwachting van het totaal aantal verkopen per maand.

$s_k = \sqrt{\mathcal{E}(\underline{n}_k - n_k)^2}$ = de spreiding van het aantal verkopen in de verkoopklasse A_k = de spreiding van $\underline{n}_k$.

a_k = de verkoopgrootte in de klasse A_k.

$$a = \frac{\sum\limits_k n_k . a_k}{\sum\limits_k n_k} .$$

De grootheid a kan, om enig praktisch houvast te hebben, desnoods geïnterpreteerd worden als de gemiddelde verkoopgrootte, berekend over alle verkoopklassen, rekening houdend met het gemiddeld aantal verkopen per klasse.

$\underline{S} = \sum\limits_k \underline{n}_k . a_k$ = de totale verkoop per maand.

$\mu = \mathcal{E}(\underline{S})$ = de verwachting van $\underline{S}$ = het gemiddelde van de totale verkoop per maand.

$\sigma = \sqrt{\mathcal{E}(\underline{S} - \mu)^2}$ = spreiding in de totale verkoop per maand.

Gaan we uit van de veronderstelling dat alle grootheden $\underline{n}_k$ onderling onafhankelijk Poisson verdeeld zijn, dan gelden voor de totale verkoop per maand de volgende betrekkingen:

$$\mu = \mathcal{E}(\underline{S}) = \mathcal{E}(\sum\limits_k \underline{n}_k . a_k) =$$

$$= \sum\limits_k n_k . a_k = n . \frac{\sum\limits_k n_k . a_k}{\sum\limits_k n_k} = n . a \qquad (2.1)$$

$$\sigma^2 = \sum_k \mathrm{Var}\,(a_k.\underline{n}_k) =$$

$$= \sum_k a_k^2 .\ \mathrm{Var}\,(\underline{n}_k) = \sum_k a_k^2.n_k =$$

$$= n.a^2. \frac{\sum_k a_k^2.t_k}{\left(\sum_k a_k.t_k\right)^2} = {}^{3)}$$

$$= n.a^2. \left[\frac{\sum_k a_k^2.t_k - \left(\sum_k a_k.t_k\right)^2}{\left(\sum_k a_k.t_k\right)^2} + 1 \right] =$$

$$= n.a^2. \left[1 + \frac{\sum_k t_k.(a_k - a)^2}{\left(\sum_k t_k.a_k\right)^2} \right] =$$

$$= n.a^2. (1+v^2), \tag{2.2}$$

waarbij

$$v^2 = \frac{\sum_k t_k.(a_k - a)^2}{\left(\sum_k t_k.a_k\right)^2} . \tag{2.3}$$

Vatten we de getallen a_k op als de waarden die een stochastische variabele $\underline{a}$ kan aannemen volgens de kansverdeling

$$P\left[\underline{a} = a_k\right] = t_k = \frac{n_k}{n} , \tag{2.4}$$

dan kunnen we voor v ook schrijven

$$v = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\underline{a})}}{\mathcal{E}(\underline{a})} = \frac{\sigma_{\underline{a}}}{\mu_{\underline{a}}} , \tag{2.5}$$

en deze grootheid is niets anders dan de variatiecoëfficient van de stochastische variabele $\underline{a}$.
Voor de spreiding van $\underline{S}$ vinden we dus

$$\sigma = a.\ \sqrt{n.(1+v^2)}. \tag{2.6}$$

----

3) We stellen $\frac{n_k}{n} = t_k$

Over de gedaante van de verdeling van $\underline{S}$ is in het algemeen weinig te zeggen; als n klein is en de waarden a_k onderling nogal in grootte verschillen, dan zal de frequentie-verdeling van $\underline{S}$ "een aantal heuvels en dalen vertonen - als de kammen op de rug van een mannetjes salamander", terwijl deze verdeling in andere gevallen met voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid benaderd kan worden door een of andere continue verdeling. Dit laatste is vooral dan het geval als n zeer groot is.

Als kritiek op de door VAN HEES gedane suggestie, de frequentie-verdeling van de vraag te benaderen door een Γ-verdeling, merkt GOUDRIAAN op dat dit een voor hem niet aantrekkelijke methode is, alleen al omdat Γ-verdelingen nooit meertoppig zijn; daarbij komt dan nog het bezwaar dat men zich bij het hanteren van een Γ-verdeling "gemakkelijk kan gaan verbeelden dat men een graad van exactheid bereikt die in bedrijfseconomische berekeningen niet mogelijk en dus ook niet wenselijk is".

Tenslotte keert GOUDRIAAN zich tegen die van VAN HEES afkomstige formule

$$\sigma = c.\mu^p.$$

Ter vergelijking stelt GOUDRIAAN

$$\sigma = c.\mu^p = c.n^p.a^p = a\sqrt{n.(1 + v^2)}$$

en merkt daarbij op dat de vormen $c.n^p.a^p$ en $a.\sqrt{n.(1 + v^2)}$ beide drie grootheden bevatten en dat het hierdoor mogelijk is "dat VAN HEES voor een beperkt aantal gegevens tot een matig bevredigende aanpassing aan de in concreto gegeven en beperkte werkelijkheid komt".

Verder "is deze aanpassing zuiver empirisch; zij geldt niet buiten het beperkte aantal gegevens, waar zij uit afgeleid is; zij is niet reproduceerbaar en dus niet geschikt voor toepassing buiten het zeer beperkte gebied waarvoor zij is afgeleid."

Daarnaast heeft de formule van VAN HEES het bezwaar "dat dezelfde spreiding in de vraag aanvaardt wordt, ongeacht de manier waarop de vraag is ontstaan. Anders gezegd: of een maandverbruik van bijvoorbeeld 1000 kg ontstaat doordat één klant 1000 kg afneemt of doordat 200 klanten gemiddeld 5 kg afnemen, maakt in de rekenwijze van VAN HEES geen verschil".

De formule van VAN HEES maakt ook geen onderscheid tussen gevallen waarin alle klanten één eenheid per verkoop afnemen en gevallen waarin de per klant afgeleverde hoeveelheden onderling hemels breed in grootte verschillen.

Daarna wijst GOUDRIAAN erop, dat men niet op de ene plaats in het betoog de Γ-verdeling kan kiezen terwijl op een andere plaats de formule $\sigma = c.\mu^p$ wordt aanbevolen.

Neemt men, aldus GOUDRIAAN, de Γ-verdeling

$$f(x) = \frac{e^{-x}.x^n}{n!},$$

dan bestaat tussen de verwachting μ en de spreiding σ van de betreffende stochastische variabele het verband

$$\sigma = \mu^{\frac{1}{2}},$$

en dus heeft het geen zin om in dit geval de exponent van μ nog empirisch te bepalen.

3. "Open brief aan Prof.Dr.Ir. J. GOUDRIAAN", door Ir. R.N. VAN HEES en Prof.Ir. W. MONHEMIUS (zie T.E.D., augustus 1962).

De schrijvers van de brief wijzen GOUDRIAAN erop dat VAN HEES zich niet beperkt heeft tot het gebruiken van de éne Γ-verdeling

$$f(x) = \frac{e^{-x}\ x^n}{n\ !} ,$$

maar dat hij veelmeer gewerkt heeft met een klasse Γ-verdelingen van de vorm

$$f(x) = \frac{x^{\gamma-1} \,.\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\gamma} \,.\, \Gamma(\gamma)} . \tag{3.1}$$

De betrekking $\sigma = c.\mu^p$ is nu heel goed mogelijk; stel dat men een klasse Γ-verdelingen $\{\Gamma_i;\ (i=1,2,3,.....)\}$ heeft, zodanig dat de parameters β_i en γ_i van de verdeling Γ_i $(i=1,2,3,.....)$ voldoen aan de relaties

$$\begin{aligned} \beta_i &= c^2.\mu_i^{\,2p-1} \\ \gamma_i &= \frac{1}{c^2}\cdot\mu_i^{\,2-2p} \end{aligned} \tag{3.2}$$

waarbij de getallen μ_i willekeurige positieve getallen zijn. Dan geldt n.l.

$$\sigma_i = \beta_i \sqrt{\gamma_i} = c.\mu_i^p , \tag{3.3}$$

waardoor het gerechtvaardigd is in de genoemde klasse Γ-verdelingen te spreken van het verband $\sigma = c.\mu^p$.

Het is haast overbodig nog op te merken dat de getallen c en p volkomen willekeurig gekozen kunnen worden ($c > 0$).
Verder wordt de mogelijkheid van dit verband tussen de spreidingen en de bijbehorende verwachtingen nog nader aangetoond op grond van "een vrij algemene veronderstelling".

Als de frequentieverdeling van de totale verkoop $\underline{S}$ van een bepaald produkt per maand bepaald wordt door de frequentieverdeling van het aantal orders per maand ($\underline{A}$) en die van de ordergrootte ($\underline{B}$) zodanig dat

$$\mathcal{E}(\underline{A}) = \mu_{\underline{A}}\ , \quad \text{Var}\ (\underline{A}) = \sigma^2_{\underline{A}}$$
$$\mathcal{E}(\underline{B}) = \mu_{\underline{B}}\ , \quad \text{Var}\ (\underline{B}) = \sigma^2_{\underline{B}}$$

dan geldt

$$\mu_{\underline{S}} = \mu_{\underline{A}} \cdot \mu_{\underline{B}}$$

en

$$\sigma^2_{\underline{S}} = \mu_{\underline{A}} \cdot \sigma^2_{\underline{B}} + \mu^2_{\underline{B}} \cdot \sigma^2_{\underline{A}}. \tag{3.4}$$

Als $\underline{A}$ Poisson verdeeld is dan geldt

$$\mu_{\underline{A}} = \sigma^2_{\underline{A}}.$$

Wanneer we nu overgaan op de notatie van GOUDRIAAN, dan kunnen we schrijven:

$$\mu_{\underline{B}} = a, \ \frac{\sigma_{\underline{B}}}{\mu_{\underline{B}}} = V_{\underline{a}} \text{ en } \mu_{\underline{A}} = n,$$

waaruit met behulp van (3.4) volgt, dat

$$\sigma^2_{\underline{S}} = n\ a^2\ (1 + v^2_{\underline{a}}). \tag{3.5}$$

De vrij algemene veronderstelling waarop de rest van het betoog der schrijvers berust luidt nu, dat met betrekking tot de verkoop van een homogeen assortiment artikelen het gemiddeld aantal orders per artikel evenredig is met een zekere macht van de gemiddelde totale verkoop van dat artikel, terwijl voor elk artikel een soortgelijk verband bestaat tussen de gemiddelde totale verkoop en de gemiddelde ordergrootte.

Er wordt dus aangenomen dat er constanten α, β, C_1 en C_3 bestaan zodanig dat

$$\mu_{\underline{A}} = C_1 \cdot \mu^{\alpha}_{\underline{S}} \text{ en } \mu_{\underline{B}} = C_3 \cdot \mu^{\beta}_{\underline{S}}, \tag{3.6}$$

voor elk artikel uit het genoemde assortiment. Is verder de variatiecoëfficient van $\underline{B}$ niet afhankelijk van $\mu_{\underline{S}}$, dan zal gelden

$$\sigma_{\underline{B}} = C_2 \cdot \mu^{\beta}_{\underline{S}} \tag{3.7}$$

Door formule (3.4) toe te passen, tegelijk met de veronderstelling dat $\underline{A}$ Poisson verdeeld is, kan nu gemakkelijk worden aangetoond dat

$$\sigma_{\underline{S}} = c \,.\, \mu_{\underline{S}}^{\,1 - \frac{\alpha}{2}}$$

of $\sigma_{\underline{S}} = c \,.\, \mu_{\underline{S}}^{p}$ met $p = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Deze formule geldt voor elk artikel, zodat binnen het homogene assortiment geldt

$$\sigma = c \,.\, \mu^{p}.$$

Dit verband volgt op grond van dezelfde veronderstellingen ook uit de formule van GOUDRIAAN.

Tenslotte wordt nog opgemerkt "dat de beschreven rekenwijze natuurlijk niet voor alle gevallen opgaat". Men wordt daarvoor automatisch gewaarschuwd, als de in (3.6) genoemde betrekkingen niet meer met voldoende nauwkeurigheid gelden.

4. "Een tegen drie in een discussie over de methode", door Prof.Dr.Ir. J. GOUDRIAAN (zie het op de Statistische Dag 1963 uitgereikte nummer van T.E.D.).

Na enkele algemene opmerkingen gemaakt te hebben over het al dan niet economisch verantwoord zijn van bepaalde rekentechnieken, komt de schrijver terug op de formules

$$\sigma = a\sqrt{n(1+v^2)} \quad \text{en} \quad \sigma = c\,.\,\mu^p.$$

De eerste formule is opgebouwd uit drie onderling onafhankelijke grootheden, terwijl in de tweede de grootte van σ bepaald wordt door de ene variabele μ.

Reeds eerder was er door GOUDRIAAN op gewezen dat de formule $\sigma = c\,.\,\mu^p$ onverenigbaar is met een Γ-verdeling met slechts één parameter; daaraan wordt nu toegevoegd dat deze formule ook "onverenigbaar is met een Γ-verdeling met twee parameters." "Men ziet dit het vlugste in als men de variatiecoëfficient van $\underline{S}$ uitrekent. Voor de Γ-verdeling met $\mu = \beta.\gamma$ en $\sigma = \beta\sqrt{\gamma}$ vindt men dan

$$V_{\underline{S}} = \frac{\sigma}{\mu} = \gamma^{-\frac{1}{2}}; \qquad (4.1)$$

Uit de formule van VAN HEES volgt

$$V_{\underline{S}} = c\,.\,\mu^{p-1} = c\,.\,\beta^{p-1}\,.\,\gamma^{p-1}. \qquad (4.2)$$

Door gelijkstelling vindt men dus:

$$\gamma^{-\frac{1}{2}} = c\,.\,\beta^{p-1}\,.\,\gamma^{p-1} \qquad (4.3)$$

Aangezien wij de parameters β en γ als onderling onafhankelijk beschouwen volgt hier volstrekt dwingend uit

$$p = \tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad c\,.\,\beta^{-\frac{1}{2}} = 1.$$

De schrijvers van de Open Brief kunnen hun formule dus alleen maar handhaven als zij de onderlinge onafhankelijkheid van de parameters β en γ prijs geven."

"Met het aanvaarden van het verband (4.3) komt men niet alleen in strijd met het tot dusver algemeen aanvaarde en zeer goed gemotiveerde spraakgebruik in de wiskundige statistiek, dat onder een verdeling met twee parameters steeds heeft verstaan een verdeling met twee onderling onafhankelijke parameters, men legt ook een verband tussen twee geheel heterogene grootheden: de essentiële vormparameter en de bijkomstige schaalparameter β. Dit verband is m.i. op zuiver logische gronden à priori verwerpelijk."

Hierna komt de "vrij algemene veronderstelling"

$$n = C_1 \mu^{\alpha} \quad \text{en} \quad a = C_3 \mu^{\beta}$$

ter sprake.

GOUDRIAAN zegt:"Deze manier om het vraagstuk te formuleren vind ik principiëel verwerpelijk. Men gaat dan een verband zoeken dat men tevoren al heeft ingevoerd".

De juiste manier om empirisch een eventueel verband tussen twee grootheden u en v te onderzoeken is, voor de diverse objecten waarop u en v betrekking hebben, deze grootheden paarsgewijze te meten en dan te kijken of er enig verband bestaat.

"Men kan er zich niet van afmaken door te schrijven:"Het is nu een vrij algemene veronderstelling aan te nemen dat enz."!"
Wanneer VAN HEES een verband zoekt tussen σ en μ en daartoe log σ en log μ met elkaar gaat vergelijken, dan kan hij haast onmogelijk een kleine correlatie coëfficient vinden tussen beide laatstgenoemde grootheden.

Het een en ander komt n.l. neer op de berekening van de correlatie coëfficiënt van $\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{y}$ en $\underline{x} + \underline{y}$.
Immers voor een Γ-verdeling geldt

$$\log \sigma = \log \beta + \tfrac{1}{2} \log \gamma \quad \text{en} \quad \log \mu = \log \beta + \log \gamma \quad .$$

Als verondersteld wordt dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onderling onafhankelijk zijn dan is de minimum-waarde van de correlatiecoëfficient van log σ en log μ gelijk aan $\frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}943$.
"Men behoeft zich daarom niet te verheugen over de inderdaad zeer hoge waarden voor de correlatie coëfficient die men bij het empirisch onderzoek meestal vindt.

Men vindt er slechts de bevestiging in van de juistheid van de formule waarvan men is uitgegaan; het maakt geen enkel verschil of dit een Γ - of een Poisson-verdeling is".

In het betreffende artikel wordt de methode van VAN HEES nog nader beproefd, door, uitgaande van het door VAN HEES verstrekte cijfermateriaal, de β's en γ's uit te rekenen en de gevonden waarden tegen elkaar uit te zetten op logaritmisch papier.

Het "gemis aan verband" wordt weergegeven in een figuur.

5. Nabeschouwing

In deze paragraaf zullen wij ons bezighouden met een aantal zaken die om verschillende redenen nadere aandacht verdienen.

Wanneer men bij het beheren van zijn voorraden gebruik maakt van een z.g. B - Q systeem (zie T.E.D. 31 (1961) 2, pag 62, 63), dan wil dat o.m. zeggen dat voor elk produkt dat van de voorraad deel uitmaakt, een B - Q systeem wordt toegepast.
Men heeft zich hiermee automatisch voor de verplichting gesteld, voor elk produkt de grootheden B en Q te bepalen.

Voor de berekening hiervan is het een eerste vereiste te beschikken over voldoende kennis van het gedrag van de vraag naar de betreffende produkten.

Van doorslaggevende betekenis zijn in dit verband

a de vorm van de vraag-verdelingen (dit in verband met de kans op buiten-voorraad-raken),

b de verwachtingen (gemiddelden),

c de spreidingen (standaardafwijkingen).

Over de bepaling van de verwachtingen bestaat in genoemde polemiek geen verschil van mening.

De overige punten zijn daarentegen het onderwerp van een uitvoerige discussie geweest.

Wat betreft de door VAN HEES toegepaste methode ter bepaling van de spreidingen uit de reeds bekende waarden van de verwachtingen, willen wij het volgende opmerken.

Wanneer VAN HEES op grond van een aantal experimenten tot de conclusie komt, dat de verkoop van een bepaalde (homogene) klasse van goederen, op voor hem bevredigende wijze beschreven kan worden met behulp van een aantal Γ-verdelingen, zodanig dat voor de bijbehorende verwachtingen en spreidingen de betrekking

$$\sigma = c \cdot \mu^{p} \quad (c \text{ en } p \text{ constant})$$

geldt, dan is dat, in tegenstelling tot de mening van GOUDRIAAN, an sich een allerminst laakbare zaak.

Het door VAN HEES gevonden verband tussen de waarden van μ en de bijbehorende waarden van σ is beslist niet ondenkbaar en evenmin in strijd met de eigenschappen van Γ-verdelingen; wij menen in dit verband te kunnen volstaan met een verwijzing naar de formules (3.2) en (3.3).

Dat deze methode alleen toegepast mag worden als de nodige voorzichtigheid betracht wordt, is vanzelfsprekend. Een waarschuwing in deze richting werd trouwens door VAN HEES nog geuit aan het eind van zijn artikel in het februari-nummer van T.E.D. (1961).

Wanneer GOUDRIAAN opmerkt, dat er over de gedaante van de verdeling van de vraag $\underline{S}$ in het algemeen weinig te zeggen is, dan is dat volkomen terecht; deze opmerking is evenwel niet geschikt om als kritiek te dienen op de werkmethode van VAN HEES, alleen al om de reden dat VAN HEES slechts spreekt over een bijzonder geval, in plaats van een stelling te poneren over het algemene.

Bovengenoemde opmerking van GOUDRIAAN is overigens zeer waardevol, omdat men in de praktijk niet zelden de neiging heeft bepaalde verschijnselen zonder de vereiste kritiek te generaliseren

Over de verdeling van $\underline{S}$ nog het volgende.
De totale maandverkoop $\underline{S}$ van zeker produkt kunnen we met GOUDRIAAN opvatten als een stochastische variabele van de gedaante

$$\underline{S} = \sum_k \underline{n}_k \cdot a_k \quad ^{1)}$$

(zie de in paragraaf 2 ingevoerde notatie).

Als de variabelen $\underline{n}_k$ onderling onafhankelijk Poisson verdeeld zijn, dan kan de verdeling van $\underline{S}$ in het ene geval heel behoorlijk door een Γ-verdeling benaderd worden, terwijl deze benadering in het andere geval vrijwel onmogelijk is. Hierbij dient opgemerkt te worden dat het voor de toepassing van een B - Q systeem niet nodig is dat de werkelijke en de aangepaste verdeling over de gehele range goed met elkaar overeenstemmen, daar het in dit verband voornamelijk gaat om het gedrag van

---

1) Hierbij is verondersteld dat de verkopen uitsluitend van de grootte a_k zijn ($k=1,2,\ldots\ldots$).

de verdeling in de "rechter staart".

Laten wij overgaan tot de bespreking van de omstreden formule $\sigma = c \cdot \mu^p$.

Volgens GOUDRIAAN is deze betrekking niet reproduceerbaar en daarom ook niet geschikt voor verdere toepassing buiten het gebied waarvoor zij is afgeleid.

VAN HEES en MONHEMIUS hebben er al op gewezen dat "de ervaring leert, dat genoemd verband voor een bepaalde groep produkten goed reproduceerbaar en stabiel is"; met betrekking tot de mogelijkheden voor verdere toepassing zijn wij van mening dat het wel wat al te scherp gesteld is, wanneer er gezegd wordt: "... en dus niet geschikt voor toepassing buiten het zeer beperkte gebied waarvoor zij is afgeleid."

De tegenwerping, dat deze methode ter berekening van de σ's uit de μ's aanvechtbaar is, omdat geen rekening gehouden wordt met de wijze waarop de totale vraag ontstaat, is ons inziens niet helemaal steekhoudend; immers, met afnemers die slechts af en toe een grote order plaatsen sluit men al gauw een leveringscontract en daardoor zullen de "uitschieters" onder de orders weinig of geen invloed hebben op de toepassing van het B - Q systeem.

Dat de formule $\sigma = c \cdot \mu^p$ niet in strijd is met de eigenschappen van Γ-verdelingen werd reeds aangetoond.

Toch willen wij in dit verband nog enkele opmerkingen maken.

Als VAN HEES inderdaad alleen maar gewerkt zou hebben met Γ-verdelingen van de vorm

$$f(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^n}{n\,!}$$

dan zou de redenering van GOUDRIAAN volkomen juist geweest zijn.

Wanneer VAN HEES tenslotte expliciet te kennen geeft dat hij gewerkt heeft met een klasse Γ-verdelingen van de vorm (3.1), dan poneert GOUDRIAAN, dat de betrekking $\sigma = c \cdot \mu^p$ ook in dit geval onhoudbaar is.

Als GOUDRIAAN uit de formule

$$\gamma^{-\frac{1}{2}} = c\ \beta^{\,p-1}\ \gamma^{\,p-1}$$

de conclusie meent te mogen trekken, dat er "volstrekt dwingend uit volgt"

$$p = \tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad c\ .\ \beta^{-\frac{1}{2}} = 1$$

dan maakt hij daarmee een haast onbegrijpelijke fout. "Als we β en γ als onderling onafhankelijk" beschouwen in de (algebraïsche) zin van GOUDRIAAN, dan zou toch ook moeten gelden $p = 1$. Als GOUDRIAAN hier tegen in brengt dat er een essentiëel verschil bestaat tussen de parameters β en γ , dan moeten wij zeggen dat dit bij de wiskundige behandeling van de Γ-verdeling geen relevante zaak is.

Het is ons overigens niet bekend in welk goed boek over mathematische statistiek aan de parameters van één- of meerdimensionale kansverdelingen de eis van onderlinge onafhankelijkheid wordt opgelegd.

Een belangwekkend punt in de discussie was tenslotte de mate van correlatie tussen log μ en log σ enerzijds en log β en log γ anderzijds.

GOUDRIAAN geeft onomwonden te kennen dat hij weinig of geen waarde hecht aan de door VAN HEES gevonden grote correlatiecoëfficient van log μ en log σ .

Er met VAN HEES, voor een ogenblik, van uitgaande dat de vraagverdelingen Γ-verdelingen zijn met de parameters β_i en γ_i (zodanig dat $\sigma_i = c\,.\,\mu_i^p$), berekent GOUDRIAAN deze parameters uit de door VAN HEES gegeven waarden van μ_i en σ_i, met behulp van de formule

$$\mu_i = \beta_i\ \gamma_i \qquad \text{en} \qquad \sigma_i = \beta_i\ \sqrt{\gamma_i}\,.$$

Door VAN HEES was gevonden dat de getallen log μ_i en log σ_i hoog gecorreleerd zijn.

Worden de getallen log β_i en log γ_i nu tegen elkaar uitgezet op dubbel-logaritmisch papier dan ziet men, ook zonder enig rekenwerk uit de voeren, dat er geen sprake is van een hoge correlatie tussen log β_i en log γ_i, terwijl toch, op grond van het uitgangspunt het verband

$$\beta_i^{1-p} = c \, . \, \gamma_i^{p-\frac{1}{2}} \quad \text{of} \quad (1-p) \log \beta_i = \log c + (p-\tfrac{1}{2}) \log \gamma_i$$

moet bestaan. Het verband $\sigma_i = c \, . \, \mu_i^p$ zou dus wel bestaan en het verband $\beta_i^{1-p} = c \, . \, \gamma_i^{p-\frac{1}{2}}$ niet.

Op grond hiervan hecht GOUDRIAAN slechts weinig waarde aan de grote correlatiecoëfficient van log μ en log σ .

Daar komt dan nog bij, aldus GOUDRIAAN, dat men voor de correlatie coëfficient tussen log μ en log σ onmogelijk een lage waarde kan vinden.

Men zoekt het verband tussen log μ_i en log σ_i, wat wegens de veronderstelling dat de vraag-verdelingen Γ -verdelingen zijn, neer komt op het zoeken naar het verband tussen

$$\log \beta_i \, \gamma_i \quad \text{en} \quad \log \beta_i \sqrt{\gamma_i} .$$

De minimum-waarde van de correlatie-coëfficient tussen deze grootheden bedraagt $\frac{2}{3} \sqrt{2} = 0{,}943$. "Men behoeft zich dus niet te verheugen over de inderdaad zeer hoge waarden voor de correlatiecoëfficient die men bij het empirisch onderzoek meestal vindt".

Laten wij deze kwestie eens nader bestuderen. Veronderstel dat $\underline{\mu}$ en $\underline{\sigma}$ positieve stochastische grootheden zijn, terwijl $\underline{\beta}$ en $\underline{\gamma}$ gedefinieerd zijn met behulp van de relaties

$$\underline{\mu} = \underline{\beta} \, . \, \underline{\gamma} \quad \text{en} \quad \underline{\sigma} = \underline{\beta} \sqrt{\underline{\gamma}}$$

of, wat op hetzelfde neerkomt, door

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{\sigma}^2}{\underline{\mu}} \quad \text{en} \quad \underline{\gamma} = \frac{\underline{\mu}^2}{\underline{\sigma}^2} \tag{5.1}$$

Uit deze relaties volgt

$$\begin{cases} \log \underline{\beta} = - \log \underline{\mu} + 2 \log \underline{\sigma} \\ \log \underline{\gamma} = 2 \log \underline{\mu} - 2 \log \underline{\sigma} \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \log \underline{\mu} = \log \underline{\beta} + \log \underline{\gamma} \\ \log \underline{\sigma} = \log \underline{\beta} + \tfrac{1}{2} \log \underline{\gamma} \end{cases} \tag{5.3}$$

Schrijven we nu

$$\left.\begin{array}{llll} \log \underline{\mu} = \underline{x} & , & \log \underline{\sigma} = \underline{y}, & \\ \log \underline{\beta} = \underline{u} & , & \log \underline{\gamma} = \underline{v}, & \\ \rho(\underline{x},\underline{y}) = \rho_1 & , & \rho(\underline{u},\underline{v}) = \rho_2 & \\ \mathrm{Var}\ (\underline{x}) = \sigma_x^2 & , & \mathrm{Var}\ (\underline{y}) = \sigma_y^2 & \\ \mathrm{Var}\ (\underline{u}) = \sigma_u^2 & , & \mathrm{Var}\ (\underline{v}) = \sigma_v^2 & \\ \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = t & \text{en} & \dfrac{\sigma_v}{\sigma_u} = s, & \end{array}\right] \qquad (5.4)$$

dan geldt

$$\rho_2 = \frac{-2t^2 + 3\rho_1 t - 1}{\sqrt{(4t^2-4\rho_1 t+1)(t^2-2\rho_1 t+1)}} \qquad (5.5)$$

Dit kan als volgt worden aangetoond:

$$\left[\begin{array}{l} \underline{u} = -\underline{x} + 2\underline{y} \\ \underline{v} = +2\underline{x} - 2\underline{y} \end{array}\right. \qquad (5.6)$$

dus:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_u^2 = 4\sigma_y^2 + \sigma_x^2 - 4\rho_1\sigma_x\sigma_y \\ \sigma_v^2 = 4\sigma_y^2 + 4\sigma_x^2 - 8\rho_1\sigma_x\sigma_y \\ \mathrm{Cov}\ (\underline{u},\underline{v}) = -4\sigma_y^2 + 6\rho_1\sigma_x\sigma_y - 2\sigma_x^2 \end{array}\right] (5.7)$$

Met behulp van

$$\rho_2 = \frac{\mathrm{Cov}(\underline{u},\underline{v})}{\sigma_u\sigma_v} \qquad (5.8)$$

vinden we vervolgens de bovenstaande formule voor ρ_2.

Op soortgelijke wijze kan aangetoond worden dat

$$\rho_1 = \frac{s^2+3\rho_2 s+2}{\sqrt{(s^2+2\rho_2 s+1)(s^2+4\rho_2 s+4)}} \qquad (5.9)$$

De formules voor ρ_1 en ρ_2 zijn direct van toepassing op de discussie tussen VAN HEES en GOUDRIAAN.

Uitgaande van het door VAN HEES gepubliceerde cijfermateriaal, berekenen we de correlatiecoëfficient van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ op $\rho_1=0,9626$; voor t vinden we de waarde 0,8080.

Uit het een en ander volgt dat ρ_2 gelijk moet zijn aan $\rho_2 = 0,1252$.

De uitkomst zou nog verrassender geweest zijn als ρ_1 en t respectievelijk gelijk waren geweest aan 0,95 en 0,8. ρ_2 zou in dat geval n.l. exact gelijk aan nul geweest zijn.

Hoe ρ_2 van ρ_1 en t afhangt moge nader blijken uit de tabellen I A en I B.

Bij de transformatie van ($\underline{x}$,$\underline{y}$) naar ($\underline{u}$,$\underline{v}$) gedraagt de correlatiecoëfficient zich dus allerminst als een constante grootheid.

Wanneer GOUDRIAAN poneert dat het groot zijn van ρ_1 van weinig waarde is omdat ρ_2 klein is, dan is dat een zeer aanvechtbare stelling.

Dat ρ_1 wel groot moet zijn, omdat door VAN HEES verondersteld wordt dat de vraagverdelingen Γ-verdelingen zijn, is een ongefundeerde mening. Metingen zijn nu eenmaal niet afhankelijk van veronderstellingen. Ook al had VAN HEES op dit punt van zaken een andere veronderstelling gehad, dan zou hij toch voor ρ_1 een waarde van ruim 0,96 gevonden hebben. De waarde van ρ_1 an sich pleit overigens noch voor noch tegen de door VAN HEES gemaakte veronderstelling. Genoemd verschijnsel zou zich kunnen voordoen in diverse klassen van kansverdelingen met twee parameters.

Tabel I B

t \ ρ_1	+ .900	+ .910	+ .920	+ .930	+ .940	+ .950	+ .960	+ .970	+ .980	+ .990	+1.000
+ .100	- .998	- .998	- .999	- .999	- .999	- .999	- .999	- .999	-1.000	-1.000	-1.000
+ .200	- .987	- .988	- .989	- .990	- .991	- .993	- .994	- .995	- .997	- .998	-1.000
+ .300	- .943	- .945	- .948	- .952	- .956	- .961	- .966	- .973	- .981	- .989	-1.000
+ .400	- .809	- .809	- .809	- .811	- .815	- .822	- .832	- .849	- .875	- .920	-1.000
+ .500	- .567	- .546	- .522	- .496	- .467	- .433	- .394	- .347	- .289	- .208	+ .000
+ .600	- .357	- .313	- .263	- .204	- .136	- .053	+ .048	+ .175	+ .346	+ .591	+1.000
+ .700	- .283	- .231	- .172	- .104	- .025	+ .068	+ .181	+ .318	+ .489	+ .708	+1.000
+ .800	- .325	- .278	- .224	- .161	- .088	+ .000	+ .107	+ .240	+ .412	+ .648	+1.000
+ .900	- .436	- .400	- .360	- .313	- .258	- .192	- .110	- .005	+ .144	+ .385	+1.000
+1.000	- .567	- .546	- .522	- .496	- .467	- .433	- .394	- .347	- .289	- .208	+ .000
+1.100	- .684	- .675	- .665	- .656	- .646	- .639	- .633	- .634	- .648	- .702	-1.000
+1.200	- .774	- .772	- .770	- .770	- .771	- .775	- .784	- .799	- .828	- .881	-1.000
+1.300	- .838	- .839	- .841	- .844	- .849	- .857	- .868	- .884	- .907	- .943	-1.000
+1.400	- .882	- .884	- .887	- .892	- .897	- .905	- .915	- .928	- .945	- .968	-1.000
+1.500	- .912	- .914	- .918	- .922	- .928	- .934	- .942	- .952	- .964	- .980	-1.000
+1.600	- .932	- .935	- .938	- .942	- .947	- .952	- .959	- .966	- .976	- .987	-1.000
+1.700	- .947	- .950	- .953	- .956	- .960	- .964	- .970	- .976	- .982	- .991	-1.000
+1.800	- .958	- .960	- .963	- .966	- .969	- .973	- .977	- .981	- .987	- .993	-1.000
+1.900	- .966	- .968	- .970	- .973	- .975	- .978	- .982	- .986	- .990	- .995	-1.000
+2.000	- .972	- .974	- .976	- .978	- .980	- .983	- .985	- .989	- .992	- .996	-1.000
+2.100	- .977	- .978	- .980	- .982	- .984	- .986	- .988	- .991	- .993	- .997	-1.000
+2.200	- .980	- .981	- .983	- .985	- .986	- .988	- .990	- .992	- .995	- .997	-1.000
+2.300	- .983	- .984	- .985	- .987	- .988	- .990	- .992	- .994	- .996	- .998	-1.000
+2.400	- .985	- .986	- .988	- .989	- .990	- .991	- .993	- .994	- .996	- .998	-1.000
+2.500	- .987	- .988	- .989	- .990	- .991	- .993	- .994	- .995	- .997	- .998	-1.000
+2.600	- .989	- .990	- .991	- .991	- .992	- .994	- .995	- .996	- .997	- .999	-1.000
+2.700	- .990	- .991	- .992	- .992	- .993	- .994	- .995	- .996	- .998	- .999	-1.000
+2.800	- .991	- .992	- .993	- .993	- .994	- .995	- .996	- .997	- .998	- .999	-1.000
+2.900	- .992	- .993	- .993	- .994	- .995	- .996	- .996	- .997	- .998	- .999	-1.000
+3.000	- .993	- .993	- .994	- .995	- .995	- .996	- .997	- .997	- .998	- .999	-1.000
+3.100	- .994	- .994	- .995	- .995	- .996	- .996	- .997	- .998	- .998	- .999	-1.000
+3.200	- .994	- .995	- .995	- .996	- .996	- .997	- .997	- .998	- .999	- .999	-1.000
+3.300	- .995	- .995	- .996	- .996	- .997	- .997	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000
+3.400	- .995	- .996	- .996	- .996	- .997	- .997	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000
+3.500	- .996	- .996	- .996	- .997	- .997	- .998	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000
+3.600	- .996	- .996	- .997	- .997	- .997	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000	-1.000
+3.700	- .996	- .996	- .997	- .997	- .998	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000	-1.000
+3.800	- .996	- .997	- .997	- .997	- .998	- .998	- .998	- .999	- .999	-1.000	-1.000
+3.900	- .997	- .997	- .997	- .998	- .998	- .998	- .999	- .999	- .999	-1.000	-1.000
+4.000	- .997	- .997	- .997	- .998	- .998	- .998	- .999	- .999	- .999	-1.000	-1.000

ρ_2 als funktie van ρ_1 en t.

Tabel I A

t \ ρ_1	− .900	− .800	− .700	− .600	− .500	− .400	− .300	− .200	− .100	+ .000	+ .100	+ .200	+ .300	+ .400	+ .500	+ .600	+ .700	+ .800	+ .900
+ .100	− .999	− .999	− .998	− .998	− .997	− .997	− .996	− .996	− .996	− .995	− .995	− .995	− .995	− .995	− .995	− .995	− .996	− .997	− .998
+ .200	− .999	− .997	− .995	− .994	− .992	− .990	− .989	− .987	− .985	− .983	− .981	− .980	− .978	− .977	− .976	− .976	− .977	− .981	− .987
+ .300	− .998	− .996	− .993	− .990	− .988	− .984	− .981	− .977	− .973	− .969	− .964	− .959	− .954	− .948	− .942	− .936	− .932	− .931	− .943
+ .400	− .997	− .995	− .991	− .988	− .984	− .980	− .975	− .970	− .964	− .957	− .949	− .940	− .929	− .917	− .901	− .882	− .859	− .832	− .809
+ .500	− .997	− .994	− .990	− .986	− .982	− .977	− .971	− .965	− .957	− .949	− .938	− .926	− .910	− .891	− .866	− .832	− .783	− .707	− .567
+ .600	− .997	− .994	− .990	− .986	− .981	− .976	− .969	− .962	− .954	− .944	− .932	− .918	− .900	− .876	− .845	− .800	− .732	− .614	− .357
+ .700	− .997	− .993	− .990	− .985	− .981	− .975	− .969	− .962	− .953	− .943	− .931	− .915	− .896	− .871	− .838	− .789	− .714	− .581	− .283
+ .800	− .997	− .994	− .990	− .986	− .981	− .975	− .969	− .962	− .954	− .944	− .932	− .917	− .898	− .874	− .842	− .795	− .724	− .600	− .325
+ .900	− .997	− .994	− .990	− .986	− .981	− .976	− .970	− .963	− .955	− .946	− .934	− .921	− .904	− .882	− .852	− .812	− .751	− .648	− .436
+1.000	− .997	− .994	− .990	− .986	− .982	− .977	− .971	− .965	− .957	− .949	− .938	− .926	− .910	− .891	− .866	− .832	− .783	− .707	− .567
+1.100	− .997	− .994	− .991	− .987	− .983	− .978	− .973	− .967	− .960	− .952	− .943	− .931	− .918	− .901	− .881	− .853	− .816	− .763	− .684
+1.200	− .997	− .994	− .991	− .988	− .984	− .979	− .974	− .969	− .963	− .955	− .947	− .937	− .926	− .912	− .895	− .873	− .846	− .812	− .774
+1.300	− .997	− .995	− .992	− .988	− .985	− .980	− .976	− .971	− .965	− .959	− .951	− .943	− .933	− .921	− .907	− .891	− .872	− .850	− .838
+1.400	− .998	− .995	− .992	− .989	− .985	− .982	− .977	− .973	− .968	− .962	− .955	− .948	− .939	− .930	− .919	− .906	− .893	− .880	− .882
+1.500	− .998	− .995	− .992	− .989	− .986	− .983	− .979	− .975	− .970	− .965	− .959	− .953	− .945	− .937	− .929	− .919	− .910	− .904	− .912
+1.600	− .998	− .995	− .993	− .990	− .987	− .984	− .980	− .976	− .972	− .967	− .962	− .957	− .951	− .944	− .937	− .930	− .924	− .922	− .932
+1.700	− .998	− .996	− .993	− .991	− .988	− .985	− .981	− .978	− .974	− .970	− .965	− .961	− .955	− .950	− .944	− .939	− .935	− .935	− .947
+1.800	− .998	− .996	− .994	− .991	− .988	− .986	− .983	− .979	− .976	− .972	− .968	− .964	− .960	− .955	− .951	− .947	− .945	− .946	− .958
+1.900	− .998	− .996	− .994	− .992	− .989	− .987	− .984	− .981	− .978	− .974	− .971	− .967	− .963	− .960	− .956	− .953	− .952	− .955	− .966
+2.000	− .998	− .996	− .994	− .992	− .990	− .987	− .985	− .982	− .979	− .976	− .973	− .970	− .967	− .964	− .961	− .959	− .958	− .962	− .972
+2.100	− .998	− .996	− .994	− .992	− .990	− .988	− .986	− .983	− .981	− .978	− .975	− .972	− .970	− .967	− .965	− .963	− .964	− .967	− .977
+2.200	− .998	− .997	− .995	− .993	− .991	− .989	− .987	− .984	− .982	− .979	− .977	− .974	− .972	− .970	− .968	− .967	− .968	− .971	− .980
+2.300	− .998	− .997	− .995	− .993	− .991	− .989	− .987	− .985	− .983	− .981	− .979	− .976	− .974	− .973	− .971	− .971	− .972	− .975	− .983
+2.400	− .998	− .997	− .995	− .994	− .992	− .990	− .988	− .986	− .984	− .982	− .980	− .978	− .976	− .975	− .974	− .974	− .975	− .978	− .985
+2.500	− .999	− .997	− .995	− .994	− .992	− .990	− .989	− .987	− .985	− .983	− .981	− .980	− .978	− .977	− .976	− .976	− .977	− .981	− .987
+2.600	− .999	− .997	− .996	− .994	− .993	− .991	− .989	− .988	− .986	− .984	− .983	− .981	− .980	− .979	− .978	− .978	− .980	− .983	− .989
+2.700	− .999	− .997	− .996	− .994	− .993	− .991	− .990	− .988	− .987	− .985	− .984	− .983	− .981	− .980	− .980	− .980	− .982	− .985	− .990
+2.800	− .999	− .997	− .996	− .995	− .993	− .992	− .990	− .989	− .988	− .986	− .985	− .984	− .983	− .982	− .982	− .982	− .983	− .986	− .991
+2.900	− .999	− .998	− .996	− .995	− .994	− .992	− .991	− .990	− .988	− .987	− .986	− .985	− .984	− .983	− .983	− .983	− .985	− .987	− .992
+3.000	− .999	− .998	− .996	− .995	− .994	− .993	− .991	− .990	− .989	− .988	− .987	− .986	− .985	− .984	− .984	− .985	− .986	− .989	− .993
+3.100	− .999	− .998	− .997	− .995	− .994	− .993	− .992	− .991	− .990	− .988	− .987	− .987	− .986	− .985	− .985	− .986	− .987	− .990	− .994
+3.200	− .999	− .998	− .997	− .996	− .994	− .993	− .992	− .991	− .990	− .989	− .988	− .987	− .987	− .986	− .986	− .987	− .988	− .990	− .994
+3.300	− .999	− .998	− .997	− .996	− .995	− .994	− .993	− .992	− .991	− .990	− .989	− .988	− .988	− .987	− .987	− .988	− .989	− .991	− .995
+3.400	− .999	− .998	− .997	− .996	− .995	− .994	− .993	− .992	− .991	− .990	− .989	− .989	− .988	− .988	− .988	− .989	− .990	− .992	− .995
+3.500	− .999	− .998	− .997	− .996	− .995	− .994	− .993	− .992	− .992	− .991	− .990	− .989	− .989	− .989	− .989	− .990	− .991	− .993	− .996
+3.600	− .999	− .998	− .997	− .996	− .995	− .994	− .994	− .993	− .992	− .991	− .991	− .990	− .990	− .990	− .990	− .990	− .991	− .993	− .996
+3.700	− .999	− .998	− .997	− .996	− .996	− .995	− .994	− .993	− .992	− .992	− .991	− .991	− .990	− .990	− .990	− .991	− .992	− .994	− .996
+3.800	− .999	− .998	− .997	− .997	− .996	− .995	− .994	− .993	− .993	− .992	− .991	− .991	− .991	− .991	− .991	− .991	− .992	− .994	− .996
+3.900	− .999	− .998	− .998	− .997	− .996	− .995	− .994	− .994	− .993	− .992	− .992	− .991	− .991	− .991	− .991	− .992	− .993	− .994	− .997
+4.000	− .999	− .998	− .998	− .997	− .996	− .995	− .995	− .994	− .993	− .993	− .992	− .992	− .992	− .992	− .992	− .992	− .993	− .995	− .997

ρ_2 als funktie van ρ_1 en t.

Het verkoopmodel van GOUDRIAAN

Het mathematische model van de verkoop van zeker produkt, zoals dat door GOUDRIAAN is geschetst, is ondanks al het voorgaande de moeite van een nadere bestudering waard.

Wij willen dan ook niet nalaten enkele essentiële trekken van dit model hier in enigszins gewijzigde vorm weer te geven.

Het totaal aantal orders (betrekking hebbend op één en hetzelfde artikel) dat per maand in het magazijn M van zeker bedrijf wordt afgehandeld, geven wij aan met $\underline{n}$. Omtrent deze stochastische grootheid zal alleen worden verondersteld dat ze Poisson verdeeld is met de parameter λ:

$$\text{Prob}\left[\underline{n} = n\right] = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{n}}{n\,!} \qquad (5.10)$$

Het magazijn M verdelen we in gedachten in een aantal onderafdelingen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, zodanig dat op de afdeling M_i alleen orders van de grootte a_i zullen worden afgehandeld.

De $\underline{n}$ orders worden met behulp van een lotingsmechanisme over de diverse afdelingen verdeeld, zodanig dat elke order met de kans p_i op de afdeling M_i terecht komt ($\sum_i p_i = 1$).

Geven we het aantal orders dat per maand op de afdeling M_i terecht komt aan met $\underline{n}_i$, dan is, zoals we zullen aantonen, $\underline{n}_i$ Poisson verdeeld.

Bewijs:

$$P\left[\underline{n}_i = n_i\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P\left[\underline{n}_i = n_i \,\middle|\, \underline{n} = k\right] . P\left[\underline{n} = k\right] =$$

$$= \sum_{k=n_i}^{\infty} \binom{k}{n_i} p_i^{\,n_i} (1 - p_i)^{k-n_i} . \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{k}}{k\,!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda\, p_i} . (\lambda\, p_i)^{n_i}}{n_i\,!} . \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (5.11)$$

De stochastische variabele $\underline{n}_i$ is dus Poisson verdeeld met de parameter λp_i.

Verder zijn de variabelen $\underline{n}_i$ onderling onafhankelijk verdeeld.

Bewijs: $P\left[\underline{n}_i=n_1 \wedge \underline{n}_2=n_2 \wedge \dots \wedge \underline{n}_m=n_m\right] =$

$$= P\left[\underline{n}_1=n_1 \wedge \underline{n}_2=n_2 \wedge \dots \wedge \underline{n}_m=n_m \,\middle|\, \underline{n}= \sum_{i=1}^m n_i\right] . P\left[\underline{n}= \sum_{i=1}^m n_i\right] =$$

$$= \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)!}{\prod_{i=1}^m (n_i)!} \circ \prod_{i=1}^m p_i^{n_i} \right) \circ \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{\sum_{i=1}^m n_i}}{\left(\sum_{i=1}^m \quad i\right)!} =$$

$$= \prod_{i=1}^m \frac{e^{-\lambda p_i} (\lambda p_i)^{n_i}}{n_i\,!} \qquad (5.12)$$

en dit produkt is gelijk aan het produkt van de marginale kansen $P\left[\underline{n}_i = n_i\right]$, waaruit het gestelde volgt.

De totale verkoop per maand van het beschouwde artikel is nu

$$\underline{S} = a_1 . \underline{n}_1 + a_2 . \underline{n}_2 + \dots + a_m . \underline{n}_m = \sum_{i=1}^m a_i \underline{n}_i \qquad (5.13)$$

Voor de verwachting $\underline{S}$ vinden we

$$\mathcal{E}(\underline{S}) = \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^m a_i \, \underline{n}_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i \, \mathcal{E}(\underline{n}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i (\lambda p_i) = \lambda \sum_{i=1}^m a_i \, p_i = \lambda \cdot \mathcal{E}(\underline{a}) \qquad (5.14)$$

waarbij $\underline{a}$ de (stochastische) verkoopgrootte per klant is, met de verdeling

$$P\left[\underline{a} = a_i\right] = p_i . \qquad (5.15)$$

De variantie van $\underline{S}$ is dan gelijk aan

$$\text{Var}(\underline{S}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m a_i \, \underline{n}_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i^2 \, \text{Var}(\underline{n}_i) \;\; ^{1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i^2 \, (\lambda \, p_i) = \lambda . \mathcal{E}(\underline{a}^2). \qquad (5.16)$$

---

1) Deze stap is geoorloofd omdat de variabelen $\underline{n}_i$ onderling onafhankelijk verdeeld zijn.

Bij deze laatste formule willen we nog opmerken dat het ons niet duidelijk is, wat GOUDRIAAN bedoelt met de opmerking, dat de variantie van $\underline{S}$ is opgebouwd uit drie onafhankelijke grootheden (vergelijk (2.2)).
In het hier besproken model (van GOUDRIAAN) is n.l. zowel $\mathcal{E}(\underline{S})$ als Var ($\underline{S}$) afhankelijk van λ en de verdeling van $\underline{a}$. Er is dus alle reden om te spreken van een afhankelijkheid van $1+(m-1)=m$ parameters.