STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 347

Syllabus van het

Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof.dr. J.Th. Runnenburg

MARTINGALEN

juni 1965

<u>Inhoud van rapport S 347</u>

Inleiding 1

Enige fundamentele eigenschappen van sub-martingalen 6

Asymptotisch gedrag van sub-martingalen 17

Toepassingen 27

Errata bij rapport S 347

bladzij	regel	staat	moet staan
17	1	Asymptotische	Asymptotisch
21	5	$\lvert \underline{x}_n \rvert$	$\lvert \underline{x}_n \rvert^r$
	12 v.o.	$\lvert \underline{x}_m - \underline{x}_n \rvert$	$\lvert \underline{x}_m - \underline{x}_n \rvert^r$
23	10	$\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$	$\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x} \in L_r$
	10 v.o.	$(\underline{x}, B)$	$(\underline{x}, B_\infty)$
24	8	$\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$	$\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x} \in L_r$
27	2 v.o.	$B(\underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \ldots)$	$B(\underline{y}_n, \underline{y}_{n+1}, \ldots)$
28	3	$\underline{n}_o$	$\underline{n}_1$
30	3 v.o.	$\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots)$	$\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$

1. Inleiding

In het volgende wordt stilzwijgend verondersteld dat alle stochastische grootheden op een niet nader gespecificeerd kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zijn gedefiniëerd. Als $\underline{x}$ een stochastische grootheid of een collectie stochastische grootheden is, dan duidt $\mathcal{B}(\underline{x})$ de σ-algebra aan die door $\underline{x}$ in Ω geïnduceerd wordt, d.w.z. de σ-algebra van alle verzamelingen van de vorm $\{\underline{x} \in S\}$, waarin S de Borel verzamelingen doorloopt in de ruimte, waarin $\underline{x}$ zijn waarden aanneemt.

Het begrip martingaal laat zich intuïtief het best beschrijven in de taal der kansspelen. Stel dat een bezoeker aan een casino uitsluitend deelneemt aan kansspelen met de eigenschap dat de verwachte winst (d.w.z. het eventueel uitbetaalde bedrag verminderd met de inzet) nul is. Stel bovendien dat hij op elk moment de keuze van het volgend spel waaraan hij deelneemt, en het tijdstip daarvan, bepaalt, afhankelijk van zijn ervaringen in het verleden. Als nu $\underline{x}_t$ het vermogen van deze speler op het tijdstip t is, dan zegt men dat de stochastische grootheden $\underline{x}_t$ een martingaal vormen.

Algemener en exacter, doch wellicht minder instructief, is de volgende abstracte definitie.

<u>Definitie 1.1</u>: Een collectie integreerbare stochastische grootheden $\{\underline{x}_t, t \in T\}$, waarbij in de index-verzameling T een (partiële) ordening $\prec$ gedefiniëerd is, is

een sub-martingaal als $\mathcal{E}(\underline{x}_t \mid \underline{x}_r, r \preccurlyeq s) \geq \underline{x}_s$ b.o.

een martingaal als $\mathcal{E}(\underline{x}_t \mid \underline{x}_r, r \preccurlyeq s) = \underline{x}_s$ b.o.

een super-martingaal als $\mathcal{E}(\underline{x}_t \mid \underline{x}_r, r \preccurlyeq s) \leq \underline{x}_s$ b.o.

steeds voor alle $s, t \in T$ met $s \prec t$.

Terugkerend tot de bovengeschetste situatie van een bezoeker aan een casino zien we, dat we te doen hebben met een sub-martingaal als deze speler uitsluitend aan voor hem gunstige, althans niet ongunstige, spelen deelneemt, en met een super-martingaal als hij uitsluitend aan voor hem ongunstige, althans niet gunstige, spelen meedoet.

Ook zien we dat Definitie 1.1 er van uitgaat dat de speler op elk moment zijn strategie alleen van de evolutie van zijn vermogen tot dat moment laat afhangen. Willen we toelaten dat hij zich daarnaast ook door andere factoren laat beïnvloeden, dan zullen we de definitie enigszins moeten wijzigen.

Definitie 1.2: Een collectie paren $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ van integreerbare stochastische grootheden $\underline{x}_t$ en σ-algebra's van eventualiteiten $\mathcal{B}_t$, waarbij in de index-verzameling T een (partiële) ordening $\prec$ gedefiniëerd is met de eigenschap dat $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$ voor alle $s,t \in T$ met $s \prec t$ en $\mathcal{B}_t \supset \mathcal{B}(\underline{x}_s, s \preccurlyeq t)$ voor alle $t \in T$, is

een sub-martingaal als $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_t \mid \mathcal{B}_s) \geq \underline{x}_s$ b.o.

een martingaal als $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_t \mid \mathcal{B}_s) = \underline{x}_s$ b.o.

een super-martingaal als $\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_t \mid \mathcal{B}_s) \leq \underline{x}_s$ b.o.

steeds voor alle $s,t \in T$ met $s \prec t$.

Het is zonder meer duidelijk dat deze definitie overgaat in de vorige als we, voor alle $t \in T$, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\underline{x}_s, s \preccurlyeq t)$ nemen. Ook is gemakkelijk in te zien dat aan de voorwaarden van Definitie 1.1 voldaan is zodra aan de voorwaarden van Definitie 1.2 voldaan is. Het is daarom mogelijk en nuttig de volgende conventie in te voeren. Steeds wanneer in het volgende sprake is van een (sub- of super-) martingaal, dient dit geïnterpreteerd te worden in de zin van Definitie 1.1, tenzij expliciet een passende collectie σ-algebra's $\{\mathcal{B}_t, t \in T\}$ gespecificeerd wordt, in welk geval Definitie 1.2 van toepassing is.

Volledigheidshalve wijzen we nog op de volgende mogelijkheid tot generalisatie van het begrip martingaal. Indien we voor iedere $t \in T$ een verzamelingsfunctie ϕ_t op $\mathcal{B}_t$ definiëren door, voor alle $B \in \mathcal{B}_t$, $\phi_t(B) = \mathcal{E}(\underline{\chi}_B\, \underline{x}_t)$ te stellen, dan is volgens Definitie 1.2 $\{(x_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ dan en dan alleen een sub-martingaal, martingaal of super-martingaal als, voor alle $s,t \in T$ met $s \prec t$ en alle $B \in \mathcal{B}_s$, $\phi_s(B) \leq \phi_t(B)$, resp. $\phi_s(B) = \phi_t(B)$ of $\phi_s(B) \geq \phi_t(B)$. Hiervan uitgaande kan men vervolgens het begrip (sub- of super-)martingaal invoeren als betrekking hebbende op collecties $\{\phi_t, t \in T\}$ van σ-additieve verzamelingsfuncties, gedefiniëerd op σ-algebra's $\{\mathcal{B}_t, t \in T\}$ in Ω met de eigenschap dat $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$ als $s < t$. Bij een dergelijke aanpak komen in het geheel geen stochastische grootheden meer ter sprake, en zelfs de aanwezigheid van de waarschijnlijkheid P en de σ-algebra $\mathcal{A}$ is hierbij niet meer essentiëel.

Deze generalisatie van het begrip martingaal is van belang gebleken in de theorie van differentiatie van verzamelingsfuncties. Wij gaan hier niet verder op in en volstaan met een verwijzing naar Loève (3rd ed.) pp. 408, 409 en 524 en naar K. Krickeberg en C. Pauc, Martingales et dérivation, Bull. Soc. Math. de France 91 (1963), pp. 455-544.

We zeggen dat een (sub- of super-)martingaal links resp. rechts gesloten is als hij een eerste resp. laatste element heeft, d.w.z. als de index-verzameling T een eerste resp. laatste element heeft. Ook zeggen we dat een (sub- of super-)martingaal $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ links resp. rechts wordt afgesloten door een stochastische grootheid $\underline{x}$ als $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ voorafgegaan resp. gevolgd door $\underline{x}$ wederom een (sub- of super-)martingaal is.

Wij zullen in het volgende super-martingalen buiten beschouwing laten. Dit is geen wezenlijke beperking, want iedere super-martingaal kan door vermenigvuldiging met -1 tot een sub-martingaal herleid worden.

Voorts zullen wij ons beperken tot gevallen waarin de index-verzameling T volledig geordend en bovendien eindig of aftelbaar is. In het bijzonder zullen we (sub-)martingalen $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ beschouwen waarvoor $T = \{1,2,\ldots,N\}$ of $T = \{1,2,\ldots\}$ met hetzij de natuurlijke ordening, hetzij de ordening in tegengestelde zin. In het eerste geval spreken we van (sub-)martingalen $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots,N\}$ of $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ zonder meer, in het tweede geval van achteruitlopende (sub-)martingalen (reversed (sub-)martingales) $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots,N\}$ of $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$. Anders gezegd, een eindige of aftelbare collectie stochastische grootheden $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ is dan en dan alleen een achteruitlopende (sub-)martingaal als de rij $\{\ldots,\underline{x}_2,\underline{x}_1\}$ een (sub-)

martingaal is. We zeggen dan ook dat een dergelijke achteruitlopende (sub-)martingaal rechts wordt afgesloten door $\underline{x}_1$.

Voor deze speciale gevallen kunnen we Definitie 1.1 als volgt vereenvoudigen.

Stelling 1.1: Een eindige of aftelbare collectie integreerbare stochastische grootheden $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ is dan en dan alleen

a) een martingaal als, voor alle n,
$$\mathcal{E}(\underline{x}_{n+1} \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = \underline{x}_n \qquad \text{b.o.;}$$
b) een achteruitlopende martingaal als, voor alle n,
$$\mathcal{E}(\underline{x}_n \mid \underline{x}_{n+1},\underline{x}_{n+2},\ldots) = \underline{x}_{n+1} \qquad \text{b.o.;}$$
c) een sub-martingaal als, voor alle n,
$$\mathcal{E}(\underline{x}_{n+1} \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \geq \underline{x}_n \qquad \text{b.o.;}$$
d) een achteruitlopende sub-martingaal als, voor alle n,
$$\mathcal{E}(\underline{x}_n \mid \underline{x}_{n+1},\underline{x}_{n+2},\ldots) \geq \underline{x}_{n+1} \qquad \text{b.o.}$$

Bewijs: De noodzakelijkheid van deze voorwaarden volgt rechtstreeks uit Definitie 1.1. We bewijzen hier dat de onder a) en b) gegeven voorwaarden ook voldoende zijn. Voor de gevallen c) en d) verloopt het bewijs geheel analoog.

a) Zij m > n. Dan impliceert de gegeven voorwaarde:
$$\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = \mathcal{E}\{\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{m-1}) \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n\} =$$
$$= \mathcal{E}(\underline{x}_{m-1} \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \qquad \text{b.o.}$$
Hieruit volgt door iteratie
$$\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = \underline{x}_n \qquad \text{b.o.}$$
hetgeen te bewijzen was.

b) Onder de gegeven voorwaarde geldt, voor m < n,
$$\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_n,\underline{x}_{n+1},\ldots) = \mathcal{E}\{\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_{m+1},\underline{x}_{m+2},\ldots) \mid \underline{x}_n,\underline{x}_{n+1},\ldots\} =$$
$$= \mathcal{E}(\underline{x}_{m+1} \mid \underline{x}_n,\underline{x}_{n+1},\ldots) \qquad \text{b.o.,}$$
zodat
$$\mathcal{E}(\underline{x}_m \mid \underline{x}_n,\underline{x}_{n+1},\ldots) = \underline{x}_n \qquad \text{b.o.,} \qquad \text{q.e.d.}$$

Uiteraard kan Definitie 1.2 op overeenkomstige wijze gespecialiseerd worden. Wij zullen de exacte formulering echter achterwege laten.

We besluiten deze paragraaf met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1.1: Zij $\underline{x}_n = \sum_1^n \underline{y}_i$, waarin de $\underline{y}_i$ al dan niet afhankelijke integreerbare stochastische grootheden zijn met $\mathcal{E}(\underline{y}_{n+1} \mid \underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n) = 0$ b.o. voor $n = 1,2,\ldots$. Dan is $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een martingaal.

Voorbeeld 1.2: Zij $\{\mathcal{B}_n, n=1,2,\ldots\}$ een monotoon niet-dalende rij σ-algebra's van eventualiteiten, en zij $\underline{x}$ een integreerbare stochastische grootheid. Als nu $\underline{x}_n = \mathcal{E}(\underline{x} \mid \mathcal{B}_n)$ b.o. voor $n=1,2,\ldots$, dan is $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een martingaal, welke rechts wordt afgesloten door $\underline{x}$. In het bijzonder is, voor elke rij stochastische grootheden $\{\underline{y}_n, n=1,2,\ldots\}$ en elke integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$, de collectie $\{\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n), n=1,2,\ldots\}$ een martingaal, die rechts wordt afgesloten door $\underline{x}$.

Voorbeeld 1.3: Zij $\underline{x}$ wederom een integreerbare stochastische grootheid, doch zij $\{\mathcal{B}_n, n=1,2,\ldots\}$ nu een monotoon niet-stijgende rij σ-algebra's van eventualiteiten. Als weer $\underline{x}_n = \mathcal{E}(\underline{x} \mid \mathcal{B}_n)$ b.o. voor $n=1,2,\ldots$, dan is $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ nu een achteruitlopende martingaal die links wordt afgesloten door $\mathcal{E}(\underline{x} \mid \bigcap_1^\infty \mathcal{B}_n)$. Zo is dus, voor elke rij stochastische grootheden $\{\underline{y}_n, n=1,2,\ldots\}$ en elke integreerbare stochastische grootheid $\underline{x}$, de collectie $\{\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_n, \underline{y}_{n+1},\ldots) \mid n=1,2,\ldots\}$ een achteruitlopende martingaal die links wordt afgesloten door $\mathcal{E}(\underline{x} \mid \mathcal{B})$, waarin $\mathcal{B} = \bigcap_1^\infty \mathcal{B}(\underline{y}_n, \underline{y}_{n+1},\ldots)$.

2. Enige fundamentele eigenschappen van sub-martingalen

Stelling 2.1:

a) Als $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal is, dan is ook $\{(\underline{x}_n^+, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal.

b) Als $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een martingaal of een niet-negatieve sub-martingaal is, dan is, voor alle $r \geq 1$, $\{(|\underline{x}_n|^r, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal.

Bewijs:

a) De definitie $x^+ = \max(x,0)$ impliceert

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1}^+ \mid \mathcal{B}_n) \geq \{\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)\}^+ \quad \text{b.o.}$$

voor alle n. Omdat x^+ een niet-dalende functie van x is, volgt hieruit

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1}^+ \mid \mathcal{B}_n) \geq \underline{x}_n^+ \quad \text{b.o.}$$

voor alle n, waarmee het bewijs geleverd is.

b) Zij $g(x) = |x|^r$ met $r \geq 1$. Dan is g een convexe functie met $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \quad = +\infty$, zodat, wegens Stelling 3.5.13 in Rapport S 295,

$$\underline{\mathcal{E}}(|\underline{x}_{n+1}|^r \mid \mathcal{B}_n) \geq |\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)|^r \quad \text{b.o.}$$

Als nu $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een martingaal is, dan geldt

$$|\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)|^r = |\underline{x}_n|^r \quad \text{b.o.}$$

voor alle n, en als we te doen hebben met een niet-negatieve sub-martingaal, dan is

$$|\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)|^r \geq |\underline{x}_n|^r \quad \text{b.o.}$$

voor alle n omdat g niet-dalend is op het interval $[0,\infty)$.
In beidegevallen geldt dus

$$\underline{\mathcal{E}}(|\underline{x}_{n+1}|^r \mid \mathcal{B}_n) \geq |\underline{x}_n|^r \quad \text{b.o.}$$

voor alle n, waaruit het gestelde volgt.

Bij het bestuderen van (sub-)martingalen is het soms nuttig stochastische tijdstippen te beschouwen. We voeren dit begrip hier in voor stochastische processen in het algemeen.

Als men een stochastisch proces beschouwt, d.w.z. een collectie stochastische grootheden $\{\underline{x}_t, t \in T\}$, waarbij we gemakshalve zullen veronderstellen dat T een verzameling reële getallen is, dan ligt het voor de hand een stochastische grootheid $\underline{\tau}$ met waarden in T een stochastisch tijdstip te noemen. Van bijzonder belang is daarbij het geval dat $\{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}(\underline{x}_s, s \leq t)$ voor alle $t \in T$. We noemen $\underline{\tau}$ dan een stochastisch tijdstip van $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ (ook: optional time, stopping time, martingale time, Markov time). Het bijzondere van deze situatie is gelegen in het feit dat, voor elk tijdstip t, het al dan niet optreden van de eventualiteit $\{\underline{\tau} \leq t\}$ alleen van de waarden van de $\underline{x}_s$ met $s \leq t$ afhangt, en dus niet afhangt van grootheden die pas na hettijdstip t waargenomen kunnen worden. Sommige auteurs spreken daarom ook wel van een stochastisch tijdstip dat onafhankelijk van de toekomst is. De volgende definitie is iets algemener dan de voorgaande uiteenzetting doordat rekening wordt gehouden met de mogelijkheid dat men niet alleen de $\underline{x}_t$, doch ook andere verschijnselen kan waarnemen.

Definitie 2.1: Een stochastische grootheid $\underline{\tau}$, met waarden in een verzameling reële getallen T, is een stochastisch tijdstip van een collectie paren $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ van stochastische grootheden $\underline{x}_t$ en σ-algebra's van eventualiteiten $\mathcal{B}_t$ met de eigenschap dat $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$ voor alle $s,t \in T$ met $s < t$ en dat $\mathcal{B}(\underline{x}_s, s \leq t) \subset \mathcal{B}_t$ voor alle $t \in T$, als $\{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$ voor alle $t \in T$. Als dit het geval is, dan schrijven we

$$\mathcal{B}_{\underline{\tau}} = \{B \mid B \cap \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t \text{ voor alle } t \in T\}.$$

Het is duidelijk dat in het bijzonder elke ontaarde stochastische grootheid $\underline{\tau}$, met $P\{\underline{\tau} = t\} = 1$ voor zekere $t \in T$, als een stochastisch tijdstip van $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ beschouwd kan worden, waarbij dan $\mathcal{B}_{\underline{\tau}} = \mathcal{B}_t$.

In overeenstemming met de op blz. 2 ingevoerde conventie zullen wij ook bij de toepassing van Definitie 2.1 soms de σ-algebra's $\mathcal{B}_t$, $t \in T$ niet expliciet noemen. Dit betekent dan dat $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\underline{x}_s, s \leq t)$.

Stelling 2.2:

a) Als $\underline{\tau}$ een stochastisch tijdstip van $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ is, dan is $\mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ een σ-algebra en $\mathcal{B}(\underline{\tau}) \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}} \subset \mathcal{A}$. Als bovendien T eindig of aftelbaar is, dan is $\underline{x}_{\underline{\tau}}$ een stochastische grootheid met $\mathcal{B}(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$.

b) Als $\underline{\sigma}$ en $\underline{\tau}$ stochastische tijdstippen van $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ zijn, dan zijn ook $\min(\underline{\sigma},\underline{\tau})$ en $\max(\underline{\sigma},\underline{\tau})$ stochastische tijdstippen van $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$. Als bovendien $\underline{\sigma} \leq \underline{\tau}$, dan geldt $\mathcal{B}_{\underline{\sigma}} \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$.

Bewijs:

a) Omdat $\{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$ voor alle $t \in T$, geldt $\overline{B} \cap \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$ zodra $B \cap \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$. Hieruit volgt dat $\overline{B} \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ als $B \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$. Ook geldt $\cup B_n \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ als $B_n \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ voor $n=1,2,\ldots$, daar $(\cup B_n) \cap \{\underline{\tau} \leq t\} = \cup \{B_n \cap \{\underline{\tau} \leq t\}\}$. Derhalve is $\mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ een σ-algebra.

Om aan te tonen dat $\mathcal{B}(\underline{\tau}) \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ moeten we laten zien dat $\{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$ voor alle $t \in T$. Dit nu volgt uit het feit dat, voor alle $t, t' \in T$,

$\{\underline{\tau} \leq t\} \cap \{\underline{\tau} \leq t'\} = \{\underline{\tau} \leq \min(t,t')\} \in \mathcal{B}_{\min(t,t')} \subset \mathcal{B}_{t'}$.

Als $b = \sup T \in T$, dan geldt, voor elke $B \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$, $B = B \cap \{\underline{\tau} \leq b\} \in \mathcal{B}_b \subset \mathcal{A}$. Als $b \notin T$, dan is er een rij $\{t_n, n=1,2,\ldots\} \subset T$ met $\lim t_n = b$, zodat, wederom voor alle $B \in \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$, $B = \cup \{B \cap \{\underline{\tau} \leq t_n\}\} \in \mathcal{A}$. In beide gevallen geldt dus dat $\mathcal{B}_{\underline{\tau}} \subset \mathcal{A}$.

Als T eindig of aftelbaar is, dan geldt, voor elke $t \in T$ en elke Borel verzameling S,

$\{\underline{x}_{\underline{\tau}} \in S\} \cap \{\underline{\tau} \leq t\} = \bigcup_{t' \leq t} \{\underline{x}_{t'} \in S, \underline{\tau} = t'\} \in \bigcup_{t' \leq t} \mathcal{B}_{t'} =$
$= \mathcal{B}_t \subset \mathcal{A}$, en dus is $\underline{x}_{\underline{\tau}}$ dan een stochastische grootheid met $\mathcal{B}(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$.

b) Onder de gemaakte veronderstellingen geldt, voor alle $t \in T$,

$\{\min(\underline{\sigma},\underline{\tau}) \leq t\} = \{\underline{\sigma} \leq t\} \cup \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$

$\{\max(\underline{\sigma},\underline{\tau}) \leq t\} = \{\underline{\sigma} \leq t\} \cap \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$,

zodat $\min(\underline{\sigma},\underline{\tau})$ en $\max(\underline{\sigma},\underline{\tau})$ stochastische tijdstippen van $\{(\underline{x}_t, \mathcal{B}_t), t \in T\}$ zijn.

Als $\underline{\sigma} \leq \underline{\tau}$, dan geldt, voor alle $B \in \mathcal{B}_{\underline{\sigma}}$ en alle $t \in T$,
$B \cap \{\underline{\tau} \leq t\} = B \cap \{\underline{\sigma} \leq t\} \cap \{\underline{\tau} \leq t\} \in \mathcal{B}_t$, zodat $\mathcal{B}_{\underline{\sigma}} \subset \mathcal{B}_{\underline{\tau}}$.

Verreweg de belangrijkste eigenschap van stochastische tijdstippen van eindige of aftelbare sub-martingalen is, dat we in de regel weer een sub-martingaal krijgen als we een sub-martingaal waarnemen op opeenvolgende stochastische tijdstippen $\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2, \ldots$ van die sub-martingaal in plaats van de vaste tijdstippen $1, 2, \ldots$. Voor een exacte formulering van deze eigenschap kunnen we zonder beperking volstaan met het beschouwen van twee opeenvolgende stochastische tijdstippen.

<u>Stelling 2.3:</u>

a) Zij $\underline{\nu}$ een stochastisch tijdstip van een sub-martingaal $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots,N\}$. Als $\mathcal{E}\underline{x}_1 > -\infty$ of $\mathcal{E}\underline{x}_N < \infty$, dan bestaat $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}$, en als $\mathcal{E}\underline{x}_N < +\infty$, dan geldt bovendien $\mathcal{E}|\underline{x}_{\underline{\nu}}| \leq 2\mathcal{E}\underline{x}_N^+ - \mathcal{E}\underline{x}_1$.

b) Laten $\underline{\mu}$ en $\underline{\nu}$ twee stochastische tijdstippen van een (sub-)martingaal $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots,N\}$ zijn met de eigenschap dat $\underline{\mu} \leq \underline{\nu}$. Als $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\mu}}$ en $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}$ bestaan, dan is $\{(\underline{x}_{\underline{\mu}}, \mathcal{B}_{\underline{\mu}}), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ weer een (sub-)martingaal.

<u>Bewijs:</u>

a) Als $\mathcal{E}\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \geq n\}} > -\infty$ voor een $n \in \{1,2,\ldots,N-1\}$, dan geldt ook dat $\mathcal{E}\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} > -\infty$ en $\mathcal{E}\underline{x}_{n+1}\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \geq n+1\}} \geq \mathcal{E}\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \geq n+1\}} > -\infty$, omdat $\{\underline{\nu} \geq n+1\} \in \mathcal{B}_n$. Door iteratie volgt hieruit dat $\mathcal{E}\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} > -\infty$ voor alle $n \in \{1,2,\ldots,N\}$ als $\mathcal{E}\underline{x}_1 = \mathcal{E}\underline{x}_1\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \geq 1\}} > -\infty$, zodat dan de verwachting van

$$\underline{x}_{\underline{\nu}} = \sum_{n=1}^{N} \underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}}$$ bestaat.

Als $\mathcal{E}\underline{x}_N < \infty$, dan volgt de existentie van $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}$ uit het feit dat $\mathcal{E}\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} \leq \mathcal{E}\underline{x}_N\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} < \infty$ voor alle n. Vooruitlopend op het bewijs van b) kunnen we dan bovendien stellen dat $\{(\underline{x}_1, \mathcal{B}_1), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ en $\{(\underline{x}_{\underline{\nu}}^+, \mathcal{B}_{\underline{\nu}}), (\underline{x}_N^+, \mathcal{B}_N)\}$ sub-martingalen zijn, zodat $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}} \geq \mathcal{E}\underline{x}_1$ en $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}^+ \leq \mathcal{E}\underline{x}_N^+ < \infty$.

Hieruit volgt $\quad \mathcal{E}\,|x_\nu| = 2\,\mathcal{E}x_\nu^+ - \mathcal{E}x_\nu \leq 2\,\mathcal{E}x_N^+ - \mathcal{E}x_1$.

b) Als $1 \leq m \leq N$ en $B \in \mathcal{B}_m$, dan geldt

$$(2.1) \qquad \mathcal{E}\, x_\nu\, \chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} \geq \mathcal{E}\, x_m\, \chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} \text{ .}$$

Immers, voor $m = N$ is dit triviaal omdat $\nu \leq N$, en als deze bewering juist is voor een $m > 1$ en als $B \in \mathcal{B}_{m-1}$, dan geldt $B \cap \{\nu \geq m\} \in \mathcal{B}_{m-1}$, en dus

$$\mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} \geq \mathcal{E}\,x_m\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} \geq \mathcal{E}\,x_{m-1}\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} \text{ ,}$$

waaruit volgt dat

$$\mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m-1\}} = \mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m\}} + \mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_{B \cap \{\nu = m-1\}} \geq$$

$$\geq x_{m-1}\,\chi_{B \cap \{\nu \geq m-1\}} \text{ ,}$$

zodat de bewering dan ook geldt voor $m-1$.

Zij nu $B \in \mathcal{B}_\mu$, en laat $B_m = B \cap \{\mu = m\}$. Dan geldt $B_m \in \mathcal{B}_m$ en $B_m = B_m \cap \{\nu \geq m\}$ voor alle m.

Op grond van (2.1) volgt nu

$$\mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_B = \sum_{m=1}^{N} \mathcal{E}\,x_\nu\,\chi_{B_m} \geq \sum_{m=1}^{N} \mathcal{E}\,x_m\,\chi_{B_m} = \mathcal{E}\,x_\mu\,\chi_B \text{ .}$$

Hiermee is bewezen dat $\{(x_\mu, \mathcal{B}_\mu), (x_\nu, \mathcal{B}_\nu)\}$ een sub-martingaal is. Als $\{(x_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots,N\}$ een martingaal is, dan kunnen we alle ongelijkheden in dit bewijs door gelijkheden vervangen, zodat dan $\{(x_\mu, \mathcal{B}_\mu), (x_\nu, \mathcal{B}_\mu)\}$ eveneens een martingaal is.

<u>Stelling 2.4:</u>

a) Zij ν een stochastisch tijdstip van een sub-martingaal $\{(x_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$. Als $\mathcal{E}x_1 > -\infty$ en $\sup \mathcal{E}x_n^+ < \infty$, dan bestaat $\mathcal{E}x_\nu$ en $\mathcal{E}\,|x_\nu| \leq 2 \sup \mathcal{E}x_n^+ - \mathcal{E}x_1 < \infty$.

b) Laten μ en ν twee stochastische tijdstippen van een sub-martingaal $\{(x_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ zijn met de eigenschap dat $\mu \leq \nu$ en dat $\mathcal{E}x_\mu$ en $\mathcal{E}x_\nu$ bestaan. Als $\liminf \mathcal{E}x_n^+\,\chi_{\{\nu > n\}} = 0$, dan is

$\{(\underline{x}_{\underline{\mu}}, \mathcal{B}_{\underline{\mu}}), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ weer een sub-martingaal, en als bovendien $\liminf \mathcal{E}\,\underline{x}_n\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > n\}} = 0$, dan is $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}} \leq \sup \mathcal{E}\,\underline{x}_n$.
Als in het bijzonder $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een martingaal is, dan is $\{(\underline{x}_{\underline{\mu}}, \mathcal{B}_{\underline{\mu}}), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ dat ook als $\liminf \mathcal{E}\,|\underline{x}_n|\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > n\}} = 0$.

Bewijs:

a) Als $\underline{\nu}_m = \min(\underline{\nu}, m)$ met $m=1,2,\ldots$, dan is $\underline{\nu}_m \leq m$ en $\{\underline{\nu}_m \leq n\} \in \mathcal{B}_n$ voor alle $n \leq m$, zodat $\underline{\nu}_m$ een stochastisch tijdstip van $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots,m\}$ is. Stelling 2.3a) is dus van toepassing en $\mathcal{E}\,|\underline{x}_{\underline{\nu}_m}| \leq 2 \sup \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+ - \mathcal{E}\,\underline{x}_1 < \infty$. Aangezien $\underline{x}_{\underline{\nu}_m}$ naar $\underline{x}_{\underline{\nu}}$ convergeert als $m \to \infty$, volgt hieruit, met behulp van de stelling van Fatou, dat ook $\mathcal{E}\,|\underline{x}_{\underline{\nu}}| \leq 2 \sup \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+ - \mathcal{E}\,\underline{x}_1 < \infty$, hetgeen de existentie van $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}$ impliceert.

b) De voorwaarde $\liminf \mathcal{E}\,\underline{x}_n^+\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > n\}} = 0$ houdt in dat er een oneindige verzameling $I \subset \{1,2,\ldots\}$ is met de eigenschap dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_n^+\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > n\}}$ eindig is voor alle $n \in I$ en naar 0 convergeert als $n \in I$, $n \to \infty$.
Als nu $\underline{\mu}_m = \min(\underline{\mu}, m)$ en $\underline{\nu}_m = \min(\underline{\nu}, m)$ met $m=1,2,\ldots$, dan zijn $\underline{\mu}_m$ en $\underline{\nu}_m$ stochastische tijdstippen van $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots,m\}$ met $\underline{\mu}_m \leq \underline{\nu}_m$. Om Stelling 2.3b) te kunnen toepassen tonen we nu aan dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}_m}$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m}$ bestaan voor alle $m \in I$. Daartoe merken we op dat

$$\underline{x}_{\underline{\mu}_m} = \underline{x}_{\underline{\mu}}\, \underline{\chi}_{\{\underline{\mu} \leq m\}} + \underline{x}_m\, \underline{\chi}_{\{\underline{\mu} > m\}}$$

en

$$\underline{x}_{\underline{\nu}_m} = \underline{x}_{\underline{\nu}}\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \leq m\}} + \underline{x}_m\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > m\}},$$

zodat $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}_m}$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m}$ bestaan en gegeven worden door

$$(2.2)\qquad \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}_m} = \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}}\, \underline{\chi}_{\{\underline{\mu} \leq m\}} + \mathcal{E}\,\underline{x}_m\, \underline{\chi}_{\{\underline{\mu} > m\}}$$

en

$$(2.3)\qquad \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m} = \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} \leq m\}} + \mathcal{E}\,\underline{x}_m\, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > m\}}$$

als deze uitdrukkingen gedefiniëerd zijn. Nu geldt, voor alle $m \in I$,

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\mu}>m\}} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+\,\chi_{\{\underline{\mu}>m\}} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}} < \infty$$

en

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}} < \infty .$$

Als verder $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\chi_{\{\underline{\mu}\leq m\}} = \infty$ of $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_{\{\underline{\nu}\leq m\}} = \infty$, dan is $\mathcal{E}\,\underline{x}_k = \infty$ voor $k \leq m$, hetgeen impliceert dat ook $\mathcal{E}\,\underline{x}_m = \infty$, zodat $\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\mu}>m\}} > -\infty$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}} > -\infty$. Hieruit volgt dat de uitdrukkingen (2.2) en (2.3) zinvol zijn voor alle $m \in I$.
Laat nu $B \in \mathcal{B}_{\underline{\mu}}$. Dan geldt $B \cap \{\underline{\mu} \leq m\} \in \mathcal{B}_{\underline{\mu}_m}$, zodat wegens Stelling 2.3b), voor $m \in I$,

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}} = \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}_m}\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m}\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}} =$$

$$= \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_{B\cap\{\underline{\nu}\leq m\}} + \mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}\cap\{\underline{\nu}>m\}} .$$

Als nu $m \to \infty$, $m \in I$, dan krijgen we

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_B + \limsup_{m\in I}\,\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}\cap\{\underline{\nu}>m\}} .$$

Omdat $\mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{B\cap\{\underline{\mu}\leq m\}\cap\{\underline{\nu}>m\}} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_m^+\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}}$ voor alle m, volgt hieruit dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_B$ voor alle $B \in \mathcal{B}_{\underline{\mu}}$, zodat $\{(\underline{x}_{\underline{\mu}}, \mathcal{B}_{\underline{\mu}}), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ een sub-martingaal is.
Als bovendien $\liminf \mathcal{E}\,\underline{x}_n\,\chi_{\{\underline{\nu}>n\}} = 0$, dan is er een oneindige verzameling $I' \subset \{1,2,\ldots\}$ met de eigenschap dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_n\,\chi_{\{\underline{\nu}>n\}}$ eindig is voor alle $n \in I'$ en naar 0 convergeert als $n \in I'$, $n \to \infty$.
Voor alle $m \in I'$ bestaat dan $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m} = \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_{\{\underline{\nu}\leq m\}} + \mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}}$, zodat, op grond van Stelling 2.3b)

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\chi_{\{\underline{\nu}\leq m\}} + \mathcal{E}\,\underline{x}_m\,\chi_{\{\underline{\nu}>m\}} = \mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}_m} \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_m \leq \sup \mathcal{E}\,\underline{x}_n$$

voor alle $m \in I'$. Als hierin $m \in I'$, $m \to \infty$, dan krijgen we $\mathcal{E}\,\underline{x}_{\underline{\nu}} \leq \sup \mathcal{E}\,\underline{x}_n$.
In het speciale geval dat $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ een martingaal is met $\liminf \mathcal{E}\,|\underline{x}_n|\,\chi_{\{\underline{\nu}>n\}} = 0$, kunnen we een oneindige verzameling

$I'' \subset \{1,2,\ldots\}$ construeren met de eigenschap dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\underline{\chi}_{\{\underline{\nu} > n\}}$ eindig is voor alle $n \in I''$ en naar 0 convergeert als $n \in I''$, $n \to \infty$. Geheel als boven volgt dan, voor alle $n \in I''$, $B \in \mathcal{B}_{\underline{\mu}}$,

$$\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\underline{\chi}_{B \cap \{\underline{\mu} \leq m\}} = \mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\underline{\chi}_{B \cap \{\underline{\nu} \leq m\}} + \mathcal{E}\underline{x}_m\,\underline{\chi}_{B \cap \{\underline{\mu} \leq m\} \cap \{\underline{\nu} > m\}}.$$

Als nu $m \in I''$, $m \to \infty$, dan volgt $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\mu}}\,\underline{\chi}_B = \mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}}\,\underline{\chi}_B$ voor alle $B \in \mathcal{B}_{\underline{\mu}}$, zodat $\{(\underline{x}_{\underline{\mu}}, \mathcal{B}_{\underline{\mu}}), (\underline{x}_{\underline{\nu}}, \mathcal{B}_{\underline{\nu}})\}$ een martingaal is.

Vergelijking van de laatste twee stellingen leert ons, dat het een essentiëel verschil uitmaakt of bij een martingaal de tijd eindig of aftelbaar oneindig veel waarden doorloopt. In het eindige geval krijgen we bij de overgang op stochastische tijdstippen van de martingaal steeds weer een martingaal, in het oneindige geval kunnen we op deze wijze zeer wel een sub-martingaal krijgen die niet tevens een martingaal is. Ter illustratie het volgende voorbeeld

Zij $\{\underline{x}_n, n=0,1,2,\ldots\}$ de gebruikelijke symmetrische stochastische wandeling met $\underline{x}_0 = 0$, en zij $\underline{\nu}_k = \min\{n \mid \underline{x}_n = k\}$ voor $k=1,2,\ldots$. De $\underline{x}_n$ vormen dan een martingaal, en de $\underline{\nu}_k$ zijn met waarschijnlijkheid 1 gedefiniëerd en vormen een stijgende rij stochastische tijdstippen van $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$. Het is duidelijk dat $\underline{x}_{\underline{\nu}_k} = k$, zodat $\{\underline{x}_{\underline{\nu}_k}, k=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal maar geen martingaal is. Hieruit volgt dat, voor elke k, $\liminf \mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\underline{\chi}_{\{\underline{\nu}_k > n\}} > 0$. Aan de voorwaarde $\liminf \mathcal{E}\underline{x}_n^+\,\underline{\chi}_{\{\underline{\nu}_k > n\}} = 0$ is echter voor elke k voldaan, omdat

$$0 \leq \mathcal{E}\underline{x}_n^+\,\underline{\chi}_{\{\underline{\nu}_k > n\}} \leq (k-1)\,P\{\underline{\nu}_k > n\} \to 0$$

als $n \to \infty$.

<u>Stelling 2.5</u>:

a) Zij $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal die rechts wordt afgesloten door een stochastische grootheid $\underline{y}$. Dan geldt, voor elke $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon P\{\sup \underline{x}_n > \varepsilon\} \leq \mathcal{E}\underline{y}\,\underline{\chi}_{\{\sup \underline{x}_n > \varepsilon\}}.$$

b) Als de $\underline{x}_n$ bovendien niet-negatief zijn of een martingaal vormen die rechts wordt afgesloten door $\underline{y}$, dan geldt, voor elke $r \geq 1$ en elke $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon^r \, P\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\} \leq \mathcal{E}|\underline{y}|^r \, \underline{\chi}_{\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\}} .$$

Bewijs:

a) Als $\varepsilon > 0$ en

$$\underline{\nu} = \begin{cases} \min\{n \mid \underline{x}_n > \varepsilon\} & \text{als } \sup|\underline{x}_n| > \varepsilon, \\ +\infty & \text{als } \sup \underline{x}_n \leq \varepsilon, \end{cases}$$

dan geldt $\{\underline{\nu} = n\} \in \mathcal{B}(\underline{x}_m, m \leq n)$ voor alle n, en $\{\sup \underline{x}_n > \varepsilon\} = \{\underline{\nu} < \infty\} = \bigcup_1^\infty \{\underline{\nu} = n\}$. Hieruit volgt

$$\mathcal{E}\underline{y} \, \underline{\chi}_{\{\sup \underline{x}_n > \varepsilon\}} = \sum_1^\infty \mathcal{E}\underline{y} \, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} \geq \sum_1^\infty \mathcal{E}\underline{x}_n \, \underline{\chi}_{\{\underline{\nu} = n\}} \geq \varepsilon \, P\{\sup \underline{x}_n > \varepsilon\}.$$

b) Als de $\underline{x}_n$ een martingaal vormen die rechts wordt afgesloten door $\underline{y}$, dan is $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ volgens Stelling 2.1b) voor elke $r \geq 1$ een sub-martingaal die rechts wordt afgesloten door $|\underline{y}|^r$, zodat het gestelde uit a) volgt.

Als de $\underline{x}_n$ een niet-negatieve sub-martingaal vormen die rechts wordt afgesloten door $\underline{y}$, dan kunnen we, in het geval dat $\underline{y} \geq 0$, wederom Stelling 2.1b) toepassen, waarna de te bewijzen ongelijkheid uit a) volgt. Als echter niet voldaan is aan de voorwaarde $\underline{y} \geq 0$, dan gaan we als volgt te werk.

Zij $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\underline{x}_n, n=1,2,\ldots)$ en zij $\underline{z} = \underline{\mathcal{E}}(\underline{y} \mid \mathcal{B})$. Dan geldt $\mathcal{E}\underline{z} \, \underline{\chi}_B = \mathcal{E}\underline{y} \, \underline{\chi}_B \geq \mathcal{E}\underline{x}_n \, \underline{\chi}_B \geq 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}(\underline{x}_m, m \leq n)$ en alle $n=1,2,\ldots$. De sub-martingaal $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ wordt dus rechts ook door $\underline{z}$ afgesloten. Bovendien blijkt nu dat $\underline{z} \geq 0$ gekozen kan worden, omdat $\mathcal{E}\underline{z} \, \underline{\chi}_B \geq 0$ voor alle $B \in \bigcup_1^\infty \mathcal{B}(\underline{x}_m, m \leq n)$. Maar nu volgt

$$\varepsilon^r \, P\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\} \leq \mathcal{E}|\underline{z}|^r \, \underline{\chi}_{\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\}} .$$

Nu is $|\underline{z}|^r \leq \underline{\mathcal{E}}(|\underline{y}|^r \mid \mathcal{B})$ b.o., omdat de functie $g(x) = |x|^r$ convex is. Hieruit volgt tenslotte

$$\varepsilon^r \, P\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\} \leq \mathcal{E}\{\underline{\mathcal{E}}(|\underline{y}|^r \mid \mathcal{B})\} \underline{\chi}_{\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\}} = \mathcal{E}|\underline{y}|^r \underline{\chi}_{\{\sup|\underline{x}_n| > \varepsilon\}} .$$

We zeggen dat een rij reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ een interval $[a,b]$ h keer van links naar rechts kruist, als we precies h paren (m_i, n_i) kunnen vinden met de eigenschap dat $1 \leq m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots < m_h < n_h \leq N$ en $x_{m_i} \leq a$, $x_{n_i} \geq b$ voor $i=1,2,\ldots,h$. Het is gemakkelijk in te zien dat dit aantal h bij vaste a en b een Borel functie van $x_1, x_2, \ldots, x_N$ is. Het aantal malen dat een rij stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_N$ een interval $[a,b]$ van links naar rechts kruist is dus een stochastische grootheid.

<u>Stelling 2.6</u>: Als $\underline{h}$ het aantal malen is dat een sub-martingaal $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots,N\}$ een interval $[a,b]$ van links naar rechts kruist, dan geldt

$$\mathcal{E}\,\underline{h} \leq \frac{\mathcal{E}(\underline{x}_N - a)^+}{b-a} .$$

<u>Bewijs</u>: Zij $\underline{y}_n = (\underline{x}_n - a)^+$ voor $n=1,2,\ldots,N$, zodat $\{\underline{y}_n, n=1,2,\ldots,N\}$ wegens Stelling 2.1a) weer een sub-martingaal is en $\underline{h}$ gelijk is aan het aantal malen dat deze sub-martingaal het interval $[0,b-a]$ van links naar rechts kruist.
Als $\mathcal{E}(\underline{x}_N - a)^+ = \infty$, dan is er niets te bewijzen, zodat we zonder beperking mogen veronderstellen dat $\mathcal{E}(\underline{x}_N - a)^+$ eindig is. Zij nu $\underline{\nu}_0 = 1$ en laat

$$\underline{\mu}_i = \begin{cases} \min\{n \mid n \geq \underline{\nu}_{i-1}, \underline{y}_n = 0\} & \text{als} \quad \min\limits_{\underline{\nu}_{i-1} \leq n \leq N} \underline{y}_n = 0 , \\ N & \text{als} \quad \min\limits_{\underline{\nu}_{i-1} \leq n \leq N} \underline{y}_n > 0 , \end{cases}$$

en

$$\underline{\nu}_i = \begin{cases} \min\{n \mid n \geq \underline{\mu}_i, \underline{y}_n \geq b-a\} & \text{als} \quad \max\limits_{\underline{\mu}_i \leq n \leq N} \underline{y}_n \geq b-a , \\ N & \text{als} \quad \max\limits_{\underline{\mu}_i \leq n \leq N} \underline{y}_n < b-a , \end{cases}$$

voor $i=1,2,\ldots,N$. Dan zijn de $\underline{\mu}_i$ en $\underline{\nu}_i$ stochastische tijdstippen van $\{\underline{y}_n, n=1,2,\ldots,N\}$ en $1 = \underline{\nu}_0 \leq \underline{\mu}_1 \leq \underline{\nu}_1 \leq \ldots \leq \underline{\mu}_N \leq \underline{\nu}_N = N$. Omdat $\underline{y}_n \geq 0$ voor alle n, bestaan de verwachtingen van alle $\underline{y}_{\underline{\mu}_i}$ en $\underline{y}_{\underline{\nu}_i}$.

Derhalve is de rij $\underline{y}_{\nu_0}, \underline{y}_{\mu_1}, \underline{y}_{\nu_1}, \ldots, \underline{y}_{\mu_N}, \underline{y}_{\nu_N}$ een sub-martingaal (Stelling 2.3b)). Verder geldt

$$\underline{y}_N - \underline{y}_1 = \sum_{i=1}^{N} (\underline{y}_{\mu_i} - \underline{y}_{\nu_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{N} (\underline{y}_{\nu_i} - \underline{y}_{\mu_i}) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N} (\underline{y}_{\mu_i} - \underline{y}_{\nu_{i-1}}) + \underline{h}\,(b-a) \;.$$

Omdat op grond van het voorgaande $0 \leq \mathcal{E}\underline{y}_1 \leq \mathcal{E}\underline{y}_{\nu_{i-1}} \leq \mathcal{E}\underline{y}_{\mu_i} \leq \leq \mathcal{E}\underline{y}_N < \infty$, volgt hieruit

$$\mathcal{E}\underline{y}_N - \mathcal{E}\underline{y}_1 \geq (b-a)\, \mathcal{E}\,\underline{h}$$

en dus a fortiori de te bewijzen ongelijkheid.

Stelling 2.6 staat bekend als de ongelijkheid van Doob. Een aantal auteurs hebben deze ongelijkheid nog aanzienlijk verfijnd. Nadere bijzonderheden hierover zijn te vinden in

G.A. Hunt, Markoff chains and Martin boundaries, Illinois J. Math. 4 (1960) pp.313-340;

J.L. Doob, Notes on martingale theory, Proc. 4th Berk. Symp., II, pp.95-102;

L.E. Dubins, Rises and upcrossings of nonnegative martingales, Illinois J. Math. 6 (1962) pp.226-241.

3. Asymptotische gedrag van sub-martingalen

Stelling 3.1:

a) Als $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een sub-martingaal is met $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}\,\underline{x}_n^+ < \infty$, dan bestaat $\underline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n$ b.o. en $-\infty \leq \underline{x} < \infty$ b.o., $\mathcal{E}\,\underline{x}^+ \leq \lim \mathcal{E}\,\underline{x}_n^+ < \infty$ en $\mathcal{E}\,|\underline{x}| \leq \lim\inf \mathcal{E}\,|\underline{x}_n|$.

b) Dezelfde conclusie geldt als $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een achteruitlopende sub-martingaal is met $\mathcal{E}\,\underline{x}_n < \infty$ voor voldoend grote n.

Bewijs:

a) Zij C de eventualiteit dat de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ naar een eindige of oneindige limiet convergeert, en zij, voor elke a en b met $a < b$, $A_{a,b} = \{\lim\inf \underline{x}_n < a < b < \lim\sup \underline{x}_n\}$. Dan is $\overline{C}$ de aftelbare vereniging van alle $A_{a,b}$ met a en b rationaal en $a < b$. Als nu voor zulke a en b en $n=1,2,\ldots$ het aantal malen, dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ het interval $[a,b]$ van links naar rechts kruist, door $\underline{h}_n$ wordt aangeduid, dan is de rij $\underline{h}_1, \underline{h}_2, \ldots$ niet-negatief en niet-dalend met $\lim \underline{h}_n = \infty$ als de eventualiteit $A_{a,b}$ optreedt. Op grond van de monotone convergentie stelling impliceert $P(A_{a,b}) > 0$ dus dat $\lim \mathcal{E}\,\underline{h}_n = \mathcal{E} \lim \underline{h}_n = \infty$. Aangezien uit de ongelijkheid van Doob volgt dat

$$\lim \mathcal{E}\underline{h}_n \leq \frac{\lim \mathcal{E}\,(\underline{x}_n - a)^+}{b-a} \leq \frac{\lim \mathcal{E}\,\underline{x}_n^+ + |a|}{b-a} < \infty,$$

kunnen we concluderen dat $P(A_{a,b}) = 0$ voor alle a,b met $a < b$, zodat $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1$.

De sub-martingaal heeft dus b.o. een eindige of oneindige limiet $\underline{x}$. Uit de stelling van Fatou volgt nu $\mathcal{E}\,|\underline{x}| \leq \lim\inf \mathcal{E}\,|\underline{x}_n|$, en tevens, omdat $\underline{x}^+ = \lim \underline{x}_n^+$ b.o. en de rij $\mathcal{E}\underline{x}_1^+, \mathcal{E}\underline{x}_2^+, \ldots$ monotoon is (Stelling 2.1a)), $\mathcal{E}\,\underline{x}^+ \leq \lim \mathcal{E}\,\underline{x}_n^+ < \infty$. Dit laatste houdt in dat $\mathcal{E}\,\underline{x}$ bestaat, dat $\mathcal{E}\,\underline{x} < \infty$, en dat $-\infty \leq \underline{x} < \infty$ b.o.

b) Zonder beperking mogen we veronderstellen dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_1 < \infty$. Het bewijs verloopt geheel als onder a), met als enig verschil dat we, voor gegeven a, b met a < b en n=1, 2, ..., de stochastische grootheid $\underline{h}_n$ definiëren als het aantal malen dat de sub-martingaal $\underline{x}_n, \underline{x}_{n-1}, \ldots, \underline{x}_1$ het interval $[a, b]$ van links naar rechts kruist, zodat, wegens de ongelijkheid van Doob,

$$\lim \mathcal{E}\underline{h}_n \leq \frac{\mathcal{E}(\underline{x}_1 - a)^+}{b-a} \leq \frac{\mathcal{E}\underline{x}_1^+ + |a|}{b-a} < \infty .$$

Bij onze verdere beschouwingen zullen we een aantal eigenschappen van de functieruimten L_r met $r \geq 1$ nodig hebben. Wij geven deze eigenschappen hier ten dele zonder bewijs, daar ze in vele boeken over waarschijnlijkheidsrekening, maat- en integratietheorie of functionaal analyse worden afgeleid.

De collectie $L_r = L_r(\Omega, \mathcal{A}, P)$ is gedefiniëerd als de collectie van alle stochastische grootheden $\underline{x}$ met $\mathcal{E}|\underline{x}|^r < \infty$. Wij zullen hierbij steeds $r \geq 1$ veronderstellen. De r-norm van een stochastische grootheid $\underline{x} \in L_r$ is gedefiniëerd als $||\underline{x}||_r = \{\mathcal{E}|\underline{x}|^r\}^{1/r}$. Indien stochastische grootheden die b.o. aan elkaar gelijk zijn als identiek beschouwd worden, dan wordt L_r door het invoeren van de r-norm een Banach ruimte, d.w.z. een complete genormeerde lineaire ruimte.

Enige belangrijke ongelijkheden zijn de ongelijkheid van Hölder:

$$||\underline{x}\,\underline{y}||_1 \leq ||\underline{x}||_r\, ||\underline{y}||_s \quad \text{voor alle } \underline{x}, \underline{y} \text{ en alle } r, s > 1 \text{ met } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1;$$

en de ongelijkheid van Minkovski:

$$||\underline{x} + \underline{y}||_r \leq ||\underline{x}||_r + ||\underline{y}||_r \quad \text{voor alle } \underline{x}, \underline{y} \text{ en alle } r \geq 1.$$

De laatste ongelijkheid impliceert dat ook

$$\Big|\, ||\underline{x}||_r - ||\underline{y}||_r \,\Big| \leq ||\underline{x} - \underline{y}||_r \quad \text{voor alle } \underline{x}, \underline{y} \in L_r \text{ en alle } r \geq 1.$$

Ook zullen we bij herhaling gebruik maken van het feit dat, voor elke $\underline{x}$, de r-norm een niet-dalende functie van r is.

We zeggen dat een rij stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$, die tot L_r behoren, in r-norm of in het r-de gemiddelde convergeert naar een stochastische grootheid $\underline{x}$, die dan ook tot L_r behoort, als $\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n - \underline{x}\|_r = 0$, of, wat op hetzelfde neerkomt, als $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}|\underline{x}_n - x|^r = 0$. We schrijven dan $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$. De compleetheid van de ruimte L_r betekent dat een rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ in L_r dan en dan alleen in r-norm convergeert als die rij in r-norm Cauchy-convergent is, d.w.z. als $\|\underline{x}_m - \underline{x}_n\|_r \to 0$ als $m,n \to \infty$.

Definitie 3.1: Een collectie stochastische grootheden $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ heet uniform sommeerbaar als $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_{\{|\underline{x}_t|>c\}} \to 0$, uniform in $t \in T$, als $c \to \infty$.

Stelling 3.2: Een collectie stochastische grootheden $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ is dan en dan alleen uniform sommeerbaar als $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_t| < \infty$ en als bovendien $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_A \to 0$, uniform in $t \in T$ en $A \in \mathcal{A}$, als $P(A) \to 0$, d.w.z. als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta_\varepsilon > 0$ is met de eigenschap dat $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_A < \varepsilon$ voor alle $t \in T$ en alle $A \in \mathcal{A}$ met $P(A) < \delta_\varepsilon$.

Bewijs:

a) Als aan de gestelde voorwaarde voldaan is, dan volgt uit de ongelijkheid van Markov, voor elke $t \in T$ en elke $c > 0$,

$$P\{|\underline{x}_t| > c\} \leq \frac{1}{c}\, \mathcal{E}|\underline{x}_t| \leq \frac{1}{c} \sup \mathcal{E}|\underline{x}_t| < \infty ,$$

zodat $P\{|\underline{x}_t| > c\} \to 0$, uniform in $t \in T$ als $c \to \infty$. Maar dan volgt ook dat $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_{\{|\underline{x}_t|>c\}} \to 0$, uniform in $t \in T$ als $c \to \infty$.

b) Stel nu dat $\{\underline{x}_t, t \in T\}$ uniform sommeerbaar is. Dan geldt, voor alle $t \in T$, alle $A \in \mathcal{A}$ en elke $c > 0$,

$$\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_A = \mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_{A\cap\{|\underline{x}_t|\leq c\}} + \mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_{A\cap\{|\underline{x}_t|>c\}} \leq$$

$$\leq c.P(A) + \mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_{\{|\underline{x}_t|>c\}} .$$

Als nu $\varepsilon > 0$ gegeven is, dan kunnen we, wegens de uniforme sommeerbaarheid, c zo groot kiezen dat $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \underline{\chi}_A \leq c.P(A) + \frac{\varepsilon}{2}$, voor alle $t \in T$, $A \in \mathcal{A}$. Door in het bijzonder $A = \Omega$ te nemen, zien we dat $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_t|$ eindig is. Bovendien volgt nu dat $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \chi_A < \varepsilon$ voor alle $t \in T$ en alle $A \in \mathcal{A}$ met $P(A) < \frac{\varepsilon}{2c}$, zodat inderdaad $\mathcal{E}|\underline{x}_t|\ \chi_A \to 0$, uniform in $t \in T$ en $A \in \mathcal{A}$, als $P(A) \to 0$.

<u>Stelling 3.3</u>: Zij $r \geq 1$ en zij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ een rij stochastische grootheden die tot L_r behoren. Dan convergeert deze rij dan en dan alleen in r-norm naar een limiet $\underline{x}$ als de rij in waarschijnlijkheid naar $\underline{x}$ convergeert en als bovendien de collectie $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ uniform sommeerbaar is.

<u>Bewijs</u>:

a) Stel dat $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$. Dan geldt wegens de ongelijkheid van Markov, voor elke $\varepsilon > 0$ en alle n,

$$P\{|\underline{x}_n - \underline{x}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^r}\, \mathcal{E}|\underline{x}_n - \underline{x}|^r ,$$

zodat $\underline{x}_n \xrightarrow{P} \underline{x}$ als $n \to \infty$.

De stochastische grootheid $\underline{x}$ behoort tot L_r, omdat $\|\underline{x}\|_r \leq \|\underline{x} - \underline{x}_n\|_r + \|\underline{x}_n\|_r < \infty$ voor voldoend grote n (Minkovski), zodat, voor alle n en alle $A \in \mathcal{A}$,

$$\Big|\, \|\underline{x}_n\, \chi_A\|_r - \|\underline{x}\, \chi_A\|_r \Big| \leq \|(\underline{x}_n - \underline{x})\, \chi_A\|_r \leq \|\underline{x}_n - \underline{x}\|_r .$$

Hieruit volgt dat $\|\underline{x}_n\, \chi_A\|_r \to \|\underline{x}\, \chi_A\|_r$, en dus ook dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r\, \chi_A \to \mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_A$, uniform in $A \in \mathcal{A}$ als $n \to \infty$. Voor elke $\varepsilon > 0$ is er dus een n_ε met de eigenschap dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r\, \chi_A < \mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_A + \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ en alle $n \geq n_\varepsilon$.

Voorts geldt, voor alle $A \in \mathcal{A}$ en elke $c > 0$,

$$\mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_A = \mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_{A \cap \{|\underline{x}| \leq c\}} + \mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_{A \cap \{|\underline{x}| > c\}} \leq$$

$$\leq c^r . P(A) + \mathcal{E}|\underline{x}|^r\, \chi_{\{|\underline{x}| > c\}} .$$

Omdat $\underline{x} \in L_r$, volgt hieruit dat we, voor elke $\varepsilon > 0$, c zo groot

kunnen kiezen dat $\mathcal{E}|\underline{x}|^r \chi_A \leq c^r P(A) + \frac{\varepsilon}{4}$ voor alle $A \in \mathcal{A}$, hetgeen impliceert dat er een $\delta_\varepsilon > 0$ is met de eigenschap dat $\mathcal{E}|\underline{x}|^r \chi_A < \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $P(A) < \delta_\varepsilon$.
Op dezelfde manier kan men inzien, dat er voor elke $\varepsilon > 0$ en elke n een $d_{n,\varepsilon} > 0$ is met de eigenschap dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n| \chi_A < \varepsilon$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $P(A) < d_{n,\varepsilon}$.
Als nu $\varepsilon > 0$ en $\Delta_\varepsilon = \min(d_{1,\varepsilon}, d_{2,\varepsilon}, \ldots, d_{n_\varepsilon,\varepsilon}, \delta_\varepsilon)$, dan is $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_A < \varepsilon$ voor alle n en alle $A \in \mathcal{A}$ met $P(A) < \Delta_\varepsilon$. Hiermee is aangetoond dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_A \to 0$, uniform in n en A als $P(A) \to 0$.
Omdat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_A \to \mathcal{E}|\underline{x}|^r \chi_A$, voor alle $A \in \mathcal{A}$, als $n \to \infty$, geldt in het bijzonder $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \to \mathcal{E}|\underline{x}|^r$ als $n \to \infty$, zodat $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_n|^r < \infty$.
De uniforme sommeerbaarheid van $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ volgt dus uit Stelling 3.2.

b) Stel nu dat $\underline{x}_n \xrightarrow{P} \underline{x}$ als $n \to \infty$ en dat $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ uniform sommeerbaar is. Omdat de functie g, gedefiniëerd door $g(x) = |x|^r$, convex is, geldt $|x+y|^r \leq 2^{r-1}(|x|^r + |y|^r)$ voor alle reële x en y, zodat, voor alle m en n en elke $\eta > 0$,

$$\mathcal{E}|\underline{x}_m - \underline{x}_n|^r \leq \eta^r + \mathcal{E}|\underline{x}_m - \underline{x}_n| \chi_{\{|\underline{x}_m - \underline{x}_n| \geq \eta\}} \leq$$

$$\leq \eta^r + 2^{r-1} \mathcal{E}(|\underline{x}_m|^r + |\underline{x}_n|^r) \chi_{\{|\underline{x}_m - \underline{x}_n| \geq \eta\}}.$$

Omdat de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ in waarschijnlijkheid convergeert, is deze rij ook Cauchy-convergent in waarschijnlijkheid, zodat, wegens de uniforme sommeerbaarheid van $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$, $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_{\{|\underline{x}_m - \underline{x}_n| \geq \eta\}} \to 0$ voor elke $\eta > 0$ als $m, n \to \infty$. Door nu, bij gegeven $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ zo te kiezen, dat $\eta^r < \frac{\varepsilon}{2}$ zien we dat $\mathcal{E}|\underline{x}_m - \underline{x}_n|^r < \varepsilon$ voor alle voldoend grote m en n. De rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ is dus in r-norm Cauchy-convergent en dus convergeert deze rij in r-norm naar een limiet $\underline{y}$. Uit a) volgt dan dat $\underline{x}_n \xrightarrow{P} \underline{y}$ als $n \to \infty$. Omdat gegeven is dat ook $\underline{x}_n \xrightarrow{P} \underline{x}$ als $n \to \infty$, geldt $\underline{y} = \underline{x}$ b.o. Derhalve convergeert $\underline{x}_n$ in r-norm naar $\underline{x}$ als $n \to \infty$.

<u>Stelling 3.4</u>: Als $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een al dan niet achteruitlopende sub-martingaal is en $r \geq 1$, dan convergeert de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ in r-norm naar een limiet $\underline{x} \in L_r$, dan en dan alleen als voor voldoend grote N de collectie $\{|\underline{x}_n|^r, n \geq N\}$ uniform sommeerbaar is, en dan geldt bovendien $\underline{x}_n \to \underline{x}$ b.o. als $n \to \infty$.

<u>Bewijs</u>: Als $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x} \in L_r$ als $n \to \infty$, dan geldt $\underline{x}_n \in L_r$ voor alle n vanaf een zekere N, en de uniforme sommeerbaarheid van $\{|\underline{x}_n|^r, n \geq N\}$ volgt uit Stelling 3.3.
Zij nu gegeven dat $\{|\underline{x}_n|^r, n \geq N\}$ uniform sommeerbaar is. We kunnen dan zonder beperking veronderstellen dat $N = 1$, omdat we zo nodig een eindig aantal elementen aan het begin van de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ kunnen weglaten. Dan volgt uit Stelling 3.2 dat $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_n|^r$, en dus ook $\sup ||\underline{x}_n||_r$, eindig is. Omdat, voor elke stochastische grootheid $\underline{x}$ de ongelijkheid $||\underline{x}||_1 \leq ||\underline{x}||_r$ geldt, volgt nu dat $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_n|$ eindig is, zodat, wegens Stelling 3.1, de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ b.o. convergeert naar een limiet $\underline{x}$. Aangezien convergentie b.o. convergentie in waarschijnlijkheid impliceert, volgt uit Stelling 3.3 dat $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$.

De volgende stellingen gaan nader in op de existentie, en de consequenties daarvan, van afsluitende stochastische grootheden bij al dan niet achteruitlopende (sub-)martingalen. Eerst wordt echter de reeds ingevoerde terminologie nog iets verfijnd.

We zeggen dat een paar $(\underline{x},\mathcal{B})$ een (sub-)martingaal $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluit als de rij $(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1),(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),\ldots$ $\ldots,(\underline{x},\mathcal{B})$ weer een (sub-)martingaal is, en dat het paar $(\underline{x},\mathcal{B})$ minimaal is onder de paren die de (sub-)martingaal $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluiten als bovendien elk ander paar dat de (sub-)martingaal rechts afsluit ook de (sub-)martingaal $(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1),(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(\underline{x},\mathcal{B})$ rechts afsluit.

Geheel analoog zeggen we dat een paar $(\underline{x},\mathcal{B})$ een achteruitlopende (sub-)martingaal $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ links afsluit als de rij $(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1),(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(\underline{x},\mathcal{B})$ weer een achteruitlopende (sub-)martingaal is, d.w.z. als de rij $(\underline{x},\mathcal{B}),\ldots,(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1)$ een (sub-)martingaal is. We noemen het paar $(\underline{x},\mathcal{B})$ maximaal onder de paren die de achteruitlopende (sub-)martingaal links afsluiten als $(\underline{x},\mathcal{B})$ zelf een dergelijk paar is en als bovendien elk ander paar dat de achteruitlopende (sub-)martingaal $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ links afsluit ook de achteruitlopende (sub-)martingaal $(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1),(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(\underline{x},\mathcal{B})$, d.w.z. de (sub-)martingaal $(\underline{x},\mathcal{B}),\ldots,(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1)$ links afsluit.

<u>Stelling 3.5</u>: Zij $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ een (sub-)martingaal met de eigenschap dat $\underline{x}_n \xrightarrow[\infty]{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$ voor een $r \geq 1$, en zij $\mathcal{B}_\infty$ de σ-algebra die door $\bigcup\limits_1^{\infty} \mathcal{B}_n$ wordt voortgebracht. Dan kan $\underline{x}$ zo gekozen worden dat het paar $(\underline{x},\mathcal{B}_\infty)$ minimaal is onder de paren die de (sub-)martingaal rechts afsluiten, en voor elk ander minimaal paar $(\underline{y},\mathcal{B})$ geldt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\infty$ en $\underline{y} = \underline{x}$ b.o.

<u>Bewijs</u>: Stelling 3.4 houdt in dat $\underline{x} = \lim \underline{x}_n$ b.o., zodat $\underline{x}$ zo gekozen kan worden dat $\mathcal{B}(\underline{x}) \subset \mathcal{B}_\infty$.
Aangezien de r-norm van elke stochastische grootheid een niet-dalende functie van r is impliceert de convergentie in r-norm van $\underline{x}_n$ convergentie in 1-norm naar dezelfde limiet $\underline{x}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{E}\,\underline{x}_n\,\chi_A \to \mathcal{E}\,\underline{x}\,\chi_A$ als $n \to \infty$, voor alle $A \in \mathcal{A}$.
Nu geldt $\mathcal{E}\,\underline{x}_n\,\chi_B \leq \mathcal{E}\,\underline{x}_{m+n}\,\chi_B$ voor alle m en n en alle $B \in \mathcal{B}_n$. Als hierin $m \to \infty$, dan volgt $\mathcal{E}\,\underline{x}_n\,\chi_B \leq \mathcal{E}\,\underline{x}\,\chi_B$ voor alle n en alle $B \in \mathcal{B}_n$, waarmee bewezen is dat het paar $(\underline{x},\mathcal{B})$ de sub-martingaal $\{(\underline{x}_n,\mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluit.
Als $(\underline{y},\mathcal{B})$ een ander paar is met dezelfde eigenschap, dan geldt $\mathcal{B} \supset \bigcup\limits_1^{\infty} \mathcal{B}_n$, en dus $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_\infty$, en tevens $\mathcal{E}\,\underline{y}\,\chi_B \geq \mathcal{E}\,\underline{x}_{m+n}\,\chi_B$ voor alle m en n en alle $B \in \mathcal{B}_n$. Als hierin $m \to \infty$, dan volgt $\mathcal{E}\,\underline{y}\,\chi_B \geq \mathcal{E}\,\underline{x}\,\chi_B$ voor alle $B \in \bigcup\limits_1^{\infty} \mathcal{B}_n$ en dus ook voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$, omdat de niet-negatieve σ-additieve verzamelingsfunctie $\mathcal{E}(\underline{y}-\underline{x})\,\chi_B$ op de algebra $\bigcup\limits_1^{\infty} \mathcal{B}_n$ zijn voortzetting op $\mathcal{B}_\infty$ eenduidig bepaalt.
Het paar $(\underline{y},\mathcal{B})$ sluit dus de sub-martingaal $(\underline{x}_1,\mathcal{B}_1),(\underline{x}_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(\underline{x},\mathcal{B}_\infty)$ rechts af, zodat het paar $(\underline{x},\mathcal{B}_\infty)$ minimaal is.

Als $(\underline{y}, \mathcal{B})$ ook minimaal is, dan geldt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\infty$ en $\mathcal{E}\underline{x}\,\chi_B = \mathcal{E}\underline{y}\,\chi_B$ voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$, zodat $\underline{y} = \underline{x}$ b.o.
Als tenslotte $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ een martingaal is, dan zijn alle ongelijkheden in het bewijs in feite gelijkheden, zodat we dan overal over martingalen in plaats van sub-martingalen kunnen spreken.

<u>Stelling 3.6</u>: Zij $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ een achteruitlopende (sub-)martingaal met de eigenschap dat $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$ voor een $r \geq 1$, en zij $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_1^\infty \mathcal{B}_n$. Dan kan $\underline{x}$ zo gekozen worden dat het paar $(\underline{x}, \mathcal{B}_\infty)$ maximaal is onder de paren die de achteruitlopende (sub-)martingaal links afsluiten, en voor elk ander maximaal paar $(\underline{y}, \mathcal{B})$ geldt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\infty$ en $\underline{y} = \underline{x}$ b.o.

<u>Bewijs</u>: Uit Stelling 3.4 volgt weer dat $\underline{x} = \lim \underline{x}_n$ b.o., en dus kan $\underline{x}$ zo gekozen worden dat $\mathcal{B}(\underline{x}) \subset \mathcal{B}_\infty$. Ook geldt weer $\mathcal{E}\underline{x}_n\,\chi_A \to \mathcal{E}\underline{x}\,\chi_A$ als $n \to \infty$ voor alle $A \in \mathcal{A}$.
Nu geldt $\mathcal{E}\underline{x}_{m+n}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\underline{x}_n\,\chi_B$ voor alle m en n en alle $B \in \mathcal{B}_\infty$. Als hierin $m \to \infty$, dan volgt $\mathcal{E}\underline{x}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\underline{x}_n\,\chi_B$ voor alle n en alle $B \in \mathcal{B}_\infty$.
Het paar $(\underline{x}, \mathcal{B}_\infty)$ sluit de achteruitlopende sub-martingaal $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ dus links af.
Als ook het paar $(\underline{y}, \mathcal{B})$ deze eigenschap heeft, dan geldt $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\infty$ en $\mathcal{E}\underline{y}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\underline{x}_n\,\chi_B$ voor alle n en alle $B \in \mathcal{B}$. Als hierin $n \to \infty$, dan volgt $\mathcal{E}\underline{y}\,\chi_B \leq \mathcal{E}\underline{x}\,\chi_B$ voor alle $B \in \mathcal{B}$, zodat het paar $(\underline{x}, \mathcal{B}_\infty)$ maximaal is.
Als het paar $(\underline{y}, \mathcal{B})$ eveneens maximaal is, dan geldt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\infty$ en $\mathcal{E}\underline{y}\,\chi_B = \mathcal{E}\underline{x}\,\chi_B$ voor alle $B \in \mathcal{B}_\infty$, zodat $\underline{y} = \underline{x}$ b.o.
Als $\{(\underline{x}_n, \mathcal{B}_n), n=1,2,\ldots\}$ een achteruitlopende martingaal is, dan zijn alle ongelijkheden in het bewijs in feite gelijkheden zodat er uitsluitend sprake is van achteruitlopende martingalen.

Stelling 3.7:

a) Zij $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een martingaal of een niet-negatieve sub-martingaal. Als er een stochastische grootheid $\underline{y}$ is, die $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluit, met de eigenschap dat $\underline{y} \in L_r$ voor een $r \geq 1$, dan convergeert de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ in r-norm. Dit is steeds het geval als $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_n|^r < \infty$ voor een $r > 1$.

b) Zij $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ een achteruitlopende martingaal of niet-negatieve sub-martingaal. Als $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r < \infty$ voor voldoend grote n en een $r \geq 1$, dan convergeert de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ in r-norm.

Bewijs:

a) Als $\underline{y}$ de martingaal of niet-negatieve sub-martingaal $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluit, dan doet $\underline{z} = \mathcal{E}(\underline{y} \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots)$ dat ook. Als dus $\underline{x}_n \geq 0$ voor alle n, dan is ook $\mathcal{E}\underline{z}\, \chi_B \geq 0$ voor alle $B \in \bigcup_1^\infty \mathcal{B}(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ en dus voor alle $B \in \mathcal{B}(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots)$, zodat dan $\underline{z} \geq 0$ gekozen kan worden. Hieruit volgt dat $|\underline{z}|^r$ de sub-martingaal $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ rechts afsluit. (Stelling 2.1b)). Omdat bovendien $|\underline{z}|^r \leq \mathcal{E}(|\underline{y}|^r \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots)$ b.o. wegens Stelling 3.5.13 in Rapport S 295, volgt nu, voor alle n en elke $c > 0$,

$$\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_{\{|\underline{x}_n|>c\}} \leq \mathcal{E}|\underline{z}|^r \chi_{\{|\underline{x}_n|>c\}} \leq \mathcal{E}|\underline{y}|^r \chi_{\{|\underline{x}_n|>c\}} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}|\underline{y}|^r \chi_{\{\sup|\underline{x}_n|>c\}} .$$

Wegens Stelling 2.5 geldt voorts

$$P\{\sup|\underline{x}_n| > c\} \leq \frac{1}{c^r}\mathcal{E}|\underline{y}|^r \chi_{\{\sup|\underline{x}_n|>c\}} \leq \frac{1}{c^r}\mathcal{E}|\underline{y}|^r \to 0,$$

als $c \to \infty$. Nu volgt dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r \chi_{\{|\underline{x}_n|>c\}} \to 0$, uniform in n, als $c \to \infty$, d.w.z. dat $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$ uniform sommeerbaar is, hetgeen wegens Stelling 3.4 convergentie in r-norm van de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ impliceert.

Als $r > 1$ en $\sup \mathcal{E}|\underline{x}_n|^r = b < \infty$, dan geldt, voor alle n, alle $A \in \mathcal{A}$ en elke $c > 0$,

$$\mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\chi_A = \mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\chi_{A\cap\{|\underline{x}_n|>c\}} + \mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\chi_{A\cap\{|\underline{x}_n|\leq c\}} \leq$$

$$\leq c^{1-r}.\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r + c.P(A) \leq c^{1-r}.b + c.P(A) .$$

Hieruit volgt dat sup $\mathcal{E}|\underline{x}_n|$ eindig is en dat $\mathcal{E}|\underline{x}_n|\,\chi_A \to 0$, uniform in n en A als $P(A) \to 0$, zodat $\{|\underline{x}_n|, n=1,2,\ldots\}$ uniform sommeerbaar is (Stelling 3.2). Op grond van Stelling 3.4 convergeert de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ dus in 1-norm en b.o. naar een limiet $\underline{x}$, en deze stochastische grootheid $\underline{x}$ sluit $\{\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ rechts af (Stelling 3.5). Uit de stelling van Fatou, of ook uit Stelling 3.1a), toegepast op de sub-martingaal $\{|\underline{x}_n|^r, n=1,2,\ldots\}$, volgt dat $\mathcal{E}|\underline{x}|^r < \infty$, zodat $\underline{x} \in L_r$, hetgeen op grond van het voorgaande impliceert dat $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ als $n \to \infty$.

b) Zij $\mathcal{E}|\underline{x}_N|^r < \infty$ voor een $r \geq 1$. Dan is de rij $\ldots, \underline{x}_{N-1}, \underline{x}_N$ een martingaal of een niet-negatieve sub-martingaal die rechts wordt afgesloten door $\underline{x}_N \in L_r$. Geheel als onder a) kunnen we dus bewijzen dat de collectie $\{|\underline{x}_n|^r, n \geq N\}$ uniform sommeerbaar is, waarna de convergentie in r-norm van de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ volgt uit Stelling 3.4.

4. Toepassingen

4.1. 0 - 1 stellingen

Stelling 4.1.1: Als $\underline{x}$ en $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ stochastische grootheden zijn en $\mathcal{E}\underline{x}$ bestaat, dan bestaat $\underline{z} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n)$ b.o.
Als $\mathcal{E}|\underline{x}| < \infty$, dan geldt in het bijzonder $\underline{z} = \mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots)$ b.o., zodat dan $\underline{z} = \underline{x}$ b.o. als $\mathcal{B}(\underline{x}) \subset \mathcal{B}(\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots)$.

Bewijs: De rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$, gedefiniëerd door $\underline{x}_n = \mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n)$ b.o. voor $n=1,2,\ldots$, is een martingaal die rechts wordt afgesloten door $\underline{x}$. (Voorbeeld 1.2).
Als nu $\mathcal{E}\underline{x} < \infty$, dan volgt uit Stelling 2.1a) dat ook $\lim \mathcal{E}\underline{x}_n^+ \leq \mathcal{E}\underline{x}^+ < \infty$, zodat Stelling 3.1a) impliceert dat $\underline{z} = \lim \underline{x}_n$ b.o. bestaat. Als $\mathcal{E}\underline{x} > -\infty$, dan is dezelfde redenering van toepassing op de martingaal $\{-\underline{x}_n,\ n=1,2,\ldots\}$, die rechts wordt afgesloten door $-\underline{x}$.
Als $\mathcal{E}|\underline{x}| < \infty$, dan volgt uit Stelling 3.7a) dat $\underline{x}_n$ in 1-norm naar $\underline{z}$ convergeert als $n \to \infty$, zodat $\underline{z} = \mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots)$ b.o. wegens Stelling 3.5.

De volgende drie stellingen volgen direct uit Stelling 4.1.1 door substitutie van $\underline{\chi}_B$ voor $\underline{x}$.

Stelling 4.1.2 (Lévy): Als $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ stochastische grootheden zijn en $B \in \mathcal{B}(\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots)$, dan geldt $\lim_{n\to\infty} P(B \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n) = \underline{\chi}_B$ b.o.

Stelling 4.1.3 (Kolmogorov): Als $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ stochastische grootheden zijn en $B \in \mathcal{B}(\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots)$ de eigenschap heeft dat $P(B \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n) = P(B)$ b.o. voor oneindig veel waarden van n, dan is $P(B) = 0$ of $P(B) = 1$.

Stelling 4.1.4 (Kolmogorov): Als $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn en $B \in \bigcap_1^\infty \mathcal{B}(\underline{x}_n,\underline{x}_{n+1},\ldots)$, dan is $P(B) = 0$ of $P(B) = 1$.

Stelling 4.1.5: Zij $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ een rij niet-negatieve stochastische grootheden met de eigenschap dat $\sup \underline{y}_n \leq c$ voor een $c < \infty$, en zij $\underline{\eta}_0 = \mathcal{E}\underline{y}_1$ b.o. en $\underline{\eta}_n = \mathcal{E}(\underline{y}_n \mid \underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_{n-1})$ b.o. voor $n=2,3,\ldots$. Dan geldt

$$P\left[\{\sum_1^\infty \underline{y}_n = \infty\} \Delta \{\sum_1^\infty \underline{\eta}_n = \infty\}\right] = 0.$$

Bewijs: De rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots,$ gedefiniëerd door $\underline{x}_n = \sum_1^n (\underline{y}_m - \underline{\eta}_m)$ voor $n=1,2,\ldots,$ is een martingaal. (Voorbeeld 1.1). Zij nu $a > 0$ en zij

$$\underline{\nu}_k = \begin{cases} \min\{n \mid n \leq k, \underline{x}_n > a\} & \text{als } \max\limits_{n \leq k} \underline{x}_n > a, \\ k & \text{als } \max\limits_{n \leq k} \underline{x}_n \leq a, \end{cases}$$

voor $k=1,2,\ldots$. Dan is gemakkelijk in te zien dat $\underline{\nu}_k$ een stochastisch tijdstip van de martingaal $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_l\}$ is voor alle $k, l=1,2,\ldots$ met $k \leq l$, en dat $\underline{\nu}_1 \leq \underline{\nu}_2 \leq \ldots$ b.o. Bovendien geldt $0 \leq \underline{x}_{\underline{\nu}_k} \leq a+c$ b.o. voor alle k, zodat $\mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}_k}$ bestaat. Uit Stelling 2.3b) volgt dus dat de rij $\underline{x}_{\underline{\nu}_1}, \underline{x}_{\underline{\nu}_2}, \ldots$ weer een martingaal is.

Derhalve geldt $\mathcal{E}|\underline{x}_{\underline{\nu}_k}| = 2\mathcal{E}\underline{x}^+_{\underline{\nu}_k} - \mathcal{E}\underline{x}_{\underline{\nu}_k} = 2\mathcal{E}\underline{x}^+_{\underline{\nu}_k} - \mathcal{E}\underline{x}_1 \leq 2(a+c)$ voor alle k, zodat $\underline{z} = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_{\underline{\nu}_k}$ b.o. bestaat en $\mathcal{E}|\underline{z}| < \infty$ (Stelling 3.1a)).

Uit de definitie van de $\underline{\nu}_k$ volgt dat $\underline{x}_{\underline{\nu}_k} = \underline{x}_k$ voor alle k als $\sup \underline{x}_n \leq a$. Uit het voorgaande volgt dus dat ook de rij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ met kans 1 naar de eindige limiet $\underline{z}$ convergeert als $\sup \underline{x}_n \leq a$, d.w.z. dat

$P\{-\infty < \liminf \underline{x}_n = \limsup \underline{x}_n < \infty, \sup \underline{x}_n \leq a\} = P\{\sup \underline{x}_n \leq a\}$.

In het bijzonder geldt dus

$P\{\liminf \underline{x}_n = -\infty, \sup \underline{x}_n \leq a\} = 0$

voor alle $a > 0$, zodat

$P\{\liminf \underline{x}_n = -\infty, \sup \underline{x}_n < \infty\} = 0.$

Door uit te gaan van de martingaal $\{-\underline{x}_n, n=1,2,\ldots\}$ kunnen we op dezelfde wijze aantonen dat ook

$P\{\limsup \underline{x}_n = \infty, \inf \underline{x}_n > -\infty\} = 0.$

Zij nu $A = \bigcap_1^\infty \{\underline{y}_n \geq 0,\ \underline{\eta}_n \geq 0\}$. Dan is $P(A) = 1$ en

$$\left[\{\sum_1^\infty \underline{y}_n = \infty\} \,\Delta\, \{\sum_1^\infty \underline{\eta}_n = \infty\}\right] \cap A \subset$$

$$\subset \{\liminf \underline{x}_n = -\infty,\ \sup \underline{x}_n < \infty\} \cup \{\limsup \underline{x}_n = \infty,\ \inf \underline{x}_n > -\infty\}\ ,$$

waaruit het gestelde volgt.

Door $\underline{y}_n = \underline{\chi}_{B_n}$ te nemen voor $n=1,2,\ldots$, krijgen we de volgende stellingen.

Stelling 4.1.6 (Lévy): Voor elke rij eventualiteiten $\{B_n,\ n=1,2,\ldots\}$ geldt

$$P\left[(\limsup B_n) \,\Delta\, \{\sum_1^\infty P(B_n \mid \underline{\chi}_{B_1},\ldots,\underline{\chi}_{B_{n-1}}) = \infty\}\right] = 0.$$

Stelling 4.1.7 (Borel): Voor elke rij onderling onafhankelijke eventualiteiten $\{B_n,\ n=1,2,\ldots\}$ geldt

$$P(\limsup B_n) = \begin{cases} 0 & \text{als } \sum_1^\infty P(B_n) < \infty\ , \\ 1 & \text{als } \sum_1^\infty P(B_n) = \infty\ . \end{cases}$$

Stelling 4.1.8 (Borel-Cantelli): Voor elke rij eventualiteiten $\{B_n,\ n=1,2,\ldots\}$ geldt $P(\limsup B_n) = 0$ als $\sum_1^\infty P(B_n) < \infty$.

Bewijs: Op grond van de monotone convergentie stelling geldt

$$\mathcal{E}\left[\sum_1^\infty P(B_n \mid \underline{\chi}_{B_1},\ldots,\underline{\chi}_{B_{n-1}})\right] = \sum_1^\infty \mathcal{E}\left[P(B_n \mid \underline{\chi}_{B_1},\ldots,\underline{\chi}_{B_{n-1}})\right] = \sum_1^\infty P(B_n).$$

De voorwaarde $\sum_1^\infty P(B_n) < \infty$ impliceert dus dat $\sum_1^\infty P(B_n \mid \underline{\chi}_{B_1},\ldots,\underline{\chi}_{B_{n-1}}) < \infty$ b.o., zodat $P(\limsup B_n) = 0$ wegens Stelling 4.1.6.

4.2. Reeksen van stochastische grootheden

Stelling 4.2.1: Zij $\underline{x}_n = \sum_1^n \underline{y}_k$ voor $n=1,2,\ldots$, waar $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ integreerbare stochastische grootheden zijn met de eigenschap dat $\mathcal{E}(\underline{y}_{n+1} \mid \underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_n) = 0$ b.o. voor alle n. Dan geldt voor elke $\varepsilon > 0$, elke $r \geq 1$, en elke $n=1,2,\ldots$,

$$P\{\max_{k\leq n} |\underline{x}_k| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^r}\mathcal{E}|\underline{x}_n|^r .$$

Bewijs: Dit volgt direct uit Voorbeeld 1.1 en Stelling 2.5b).

De ongelijkheid van Kolmogorov volgt als bijzonder geval uit Stelling 4.2.1 als we $r = 2$ nemen en veronderstellen dat de $\underline{y}_n$ paarsgewijs ongecorreleerd zijn.

Stelling 4.2.2: Zij $\underline{x}_n = \sum_1^n \underline{y}_k$ voor $n=1,2,\ldots$, waar $\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met $\mathcal{E}\underline{y}_n = 0$ voor alle n, en zij $r \geq 1$. Dan convergeert $\underline{x}_n$ als $n \to \infty$ dan en dan alleen met kans 1 naar een limiet $\underline{x} \in L_r$, als $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x}$ wanneer $n \to \infty$.

Bewijs: Omdat de rij $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ een martingaal is, impliceert Stelling 3.4 dat $\underline{x} = \lim \underline{x}_n$ b.o. zodra $\underline{x}_n \xrightarrow{r} \underline{x} \in L_r$ als $n \to \infty$. Als $\underline{x} = \lim \underline{x}_n$ b.o. bestaat en $\underline{x} \in L_r$, dan kan $\underline{x}$ zo gekozen worden, dat $\mathcal{B}(\underline{x}) \subset \mathcal{B}(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots)$, zodat dan $\underline{x} = \lim \mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ b.o. wegens Stelling 4.1.1. Nu geldt, voor alle n,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n) &= \mathcal{E}(\underline{x}-\underline{x}_n \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n) + \mathcal{E}(\underline{x}_n \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n) = \\ &= \mathcal{E}(\underline{x}-\underline{x}_n) + \underline{x}_n = \\ &= \mathcal{E}\underline{x} + \underline{x}_n \quad \text{b.o.}\end{aligned}$$

Als hierin $n \to \infty$, dan volgt dat $\mathcal{E}\underline{x} = 0$ en $\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots) = \underline{x}_n$ b.o. voor alle n. De martingaal $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots$ wordt dus rechts afgesloten door $\underline{x} \in L_r$, zodat het gestelde volgt uit Stelling 3.7a).

Definitie 4.2.1: We noemen een rij stochastische grootheden $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ permuteerbaar (exchangeable) als, voor elke $n=1,2,\dots$ en elk n-tal onderling verschillende indices $i_1, i_2, \dots, i_n$, de stochastische vectoren $(\underline{y}_{i_1}, \underline{y}_{i_2}, \dots, \underline{y}_{i_n})$ en $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n)$ dezelfde verdeling hebben.

Stelling 4.2.3: Zij $\underline{x}_n = \sum_1^n \underline{y}_k$ voor $n=1,2,\dots$, waar $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ een permuteerbare rij stochastische grootheden is met $\mathcal{E}\,|\underline{y}_1|^r < \infty$ voor een $r \geq 1$, en zij $\mathcal{C} = \bigcap_1^\infty \mathcal{B}(\underline{y}_n, \underline{y}_{n+1}, \dots)$. Dan convergeert $\frac{1}{n}\underline{x}_n$ met kans 1 en in r-norm naar $\underline{\mathcal{E}}(\underline{y}_1 \mid \mathcal{C})$ als $n \to \infty$.

Bewijs: De rij $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots$, gedefiniëerd door $\underline{z}_n = \mathcal{E}(\underline{y}_1 \mid \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots)$ b.o. voor $n=1,2,\dots$, is een achteruitlopende martingaal (Voorbeeld 1.3), met $\mathcal{E}|\underline{z}_1|^r = \mathcal{E}|\underline{y}_1|^r < \infty$. Uit de Stellingen 3.7b), 3.4 en 3.6 volgt dus dat $\underline{z}_n$ in r-norm en met kans 1 convergeert naar de limiet $\underline{z} = \underline{\mathcal{E}}(\underline{y}_1 \mid \mathcal{B}_\infty)$ als $n \to \infty$, waar $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_1^\infty \mathcal{B}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots)$.
De permuteerbaarheid van de rij $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ houdt in dat $\mathcal{E}(\underline{y}_k \mid \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots) = \mathcal{E}(\underline{y}_1 \mid \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots)$ b.o. voor $k=1,2,\dots,n$ en alle n. Derhalve geldt

$$\frac{1}{n}\underline{x}_n = \frac{1}{n}\mathcal{E}(\underline{x}_n \mid \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots) = \mathcal{E}(\underline{y}_1 \mid \underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots) = \underline{z}_n \quad \text{b.o.}$$

voor alle n, zodat $\underline{x}_n/n$ in r-norm en met kans 1 convergeert naar $\underline{z}$ als $n \to \infty$.
Nu geldt $\mathcal{B}(\underline{y}_{n+1}, \underline{y}_{n+2}, \dots) \subset \mathcal{B}(\underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots)$ voor alle n, en dus ook $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_\infty$. Bovendien wordt het asymptotische gedrag van $\underline{x}_n/n$ als $n \to \infty$ voor elke m geheel bepaald door $\underline{y}_m, \underline{y}_{m+1}, \dots$, zodat $\underline{z}$ zo gekozen kan worden dat $\mathcal{B}(\underline{z}) \subset \mathcal{C}$. Hieruit volgt dat

$$\underline{z} = \underline{\mathcal{E}}(\underline{z} \mid \mathcal{C}) = \underline{\mathcal{E}}\{\underline{\mathcal{E}}(\underline{y}_1 \mid \mathcal{B}_\infty) \mid \mathcal{C}\} = \underline{\mathcal{E}}(\underline{y}_1 \mid \mathcal{C}) \text{ b.o.}$$

Met behulp van Stelling 4.2.3 bewijzen we nog de stelling van de Finetti.

__Stelling 4.2.4 (de Finetti)__: Als $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ een permuteerbare rij stochastische grootheden is en $\mathcal{C} = \bigcap_1^\infty \mathcal{B}(\underline{y}_n, \underline{y}_{n+1}, \ldots)$, dan zijn $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$ voorwaardelijk, gegeven $\mathcal{C}$, onderling onafhankelijk en identiek verdeeld, d.w.z. dan geldt

$$\underline{P}\{ \underline{y}_1 \leq a_1, \underline{y}_2 \leq a_2, \ldots, \underline{y}_m \leq a_m \mid \mathcal{C} \} = \prod_{k=1}^{m} \underline{P}\{\underline{y}_1 \leq a_k \mid \mathcal{C}\} \quad \text{b.o.}$$

voor alle $m=1,2,\ldots$ en alle reële $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

__Bewijs__: Zij $\underline{x}_n(a) = \frac{1}{n}\sum_1^n \chi_{\{\underline{y}_k \leq a\}}$ voor $n=1,2,\ldots$ en a reëel. Dan volgt uit Stelling 4.2.3 dat $\underline{x}(a) = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n(a)$ b.o. bestaat. Gemakkelijk is in te zien dat deze limiet $\underline{x}(a)$ zo gekozen kan worden dat $\mathcal{B}(\underline{x}(a)) \subset \mathcal{C}$, zodat

$$\underline{x}(a) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}(a) \mid \mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n(a) \mid \mathcal{C}) \quad \text{b.o.}$$

wegens de gemajoreerde convergentie stelling voor voorwaardelijke verwachtingen. Bovendien volgt, uit de permuteerbaarheid van $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots$, dat

$$\underline{\mathcal{E}}(\underline{x}_n(a) \mid \mathcal{C}) = \frac{1}{n}\sum_1^n \underline{P}\{\underline{y}_k \leq a \mid \mathcal{C}\} = P\{\underline{y}_1 \leq a \mid \mathcal{C}\} \quad \text{b.o.}$$

voor alle n, zodat $\underline{x}(a) = \underline{\mathcal{E}}(\underline{x}(a) \mid \mathcal{C}) = P\{\underline{y}_1 \leq a \mid \mathcal{C}\}$ b.o.

Nu volgt, voor $m=1,2,\ldots$ en $a_1, a_2, \ldots, a_m$ reëel,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n(a_1)\underline{x}_n(a_2)\ldots\underline{x}_n(a_m) = \prod_{k=1}^{m} \underline{P}\{\underline{y}_1 \leq a_k \mid \mathcal{C}\} \text{ b.o.}$$

en dus ook (gemajoreerde convergentie)

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\{\underline{x}_n(a_1)\underline{x}_n(a_2)\ldots\underline{x}_n(a_m) \mid \mathcal{C}\} = \prod_{k=1}^{m} P\{\underline{y}_1 \leq a_k \mid \mathcal{C}\} \quad \text{b.o.}$$

Verder geldt, wegens de permuteerbaarheid,

$$\mathcal{E}\{\underline{x}_n(a_1)\underline{x}_n(a_2)\dots\underline{x}_n(a_m) \mid \mathcal{C}\} =$$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} \underline{P}\{\underline{y}_{i_1} \leq a_1,\dots,\underline{y}_{i_m} \leq a_m \mid \mathcal{C}\} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} \underline{P}\{\underline{y}_1 \leq a_1,\dots,\underline{y}_m \leq a_m \mid \mathcal{C}\} + \underline{r}_n ,$$

waar $|r_n| \leq 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m}$ b.o., zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{r}_n = 0$ b.o.

Derhalve is

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\{\underline{x}_n(a_1)\dots\underline{x}_n(a_m) \mid \mathcal{C}\} = \underline{P}\{\underline{y}_1 \leq a_1,\dots,\underline{y}_m \leq a_m \mid \mathcal{C}\} \text{ b.o.,}$$

zodat het gestelde volgt.

4.3. Likelihood ratios

Zij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ een rij stochastische grootheden en zij, voor $n=1,2,\dots$, de maat μ_n op de σ-algebra $\mathcal{S}^n$ van alle Borel verzamelingen in de n-dimensionale Euclidische ruimte R^n gedefiniëerd door

$$\mu_n(S) = P\{(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\dots,\underline{x}_n) \in S\}$$

voor alle $S \in \mathcal{S}^n$. De μ_n vormen dan een consistent stelsel genormeerde maten in de zin dat

$$\mu_n(R^n) = 1 \qquad \text{en} \qquad \mu_{n+1}(S \times R) = \mu_n(S)$$

voor alle n en alle $S \in \mathcal{S}^n$. Zij $\nu_1, \nu_2, \dots$ een soortgelijk consistent stelsel genormeerde maten.

We denken hierbij aan een experimentator die een willekeurig groot aantal van de $\underline{x}_n$ kan waarnemen en die de verzamelingsfunctie P niet volledig kent doch slechts weet dat

óf $P\{(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \in S\} = \mu_n(S)$ voor alle $S \in \mathcal{S}^n$, $n=1,2,\dots$,

óf $P\{(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n) \in S\} = \nu_n(S)$ voor alle $S \in \mathcal{S}^n$, $n=1,2,\dots$.

Zonder beperking kunnen we aannemen dat er voor elke n een maat ϕ_n op $\mathcal{S}^n$ is met de eigenschap dat μ_n en ν_n beide absoluut continu zijn ten opzichte van ϕ_n, d.w.z. dat $\mu_n(S) = \nu_n(S) = 0$ zodra $\phi_n(S) = 0$. (We kunnen bijv. $\phi_n = \mu_n + \nu_n$ nemen). Op grond van de stelling van Radon-Nikodym kunnen we nu besluiten dat μ_n en ν_n voor elke n dichtheden hebben ten opzichte van ϕ_n, d.w.z. dat er voor elke n niet-negatieve meetbare functies f_n en g_n op R^n zijn, met de eigenschap dat

$$\mu_n(S) = \int_S f_n(t_1,\ldots,t_n)\, d\phi_n(t_1,\ldots,t_n)$$

en

$$\nu_n(S) = \int_S g_n(t_1,\ldots,t_n)\, d\phi_n(t_1,\ldots,t_n)$$

voor alle $S \in \mathcal{S}^n$.

Als nu $C_n = \{(t_1,\ldots,t_n) \mid f_n(t_1,\ldots,t_n) > 0\}$, dan is $C_n \subset \mathcal{S}^n$ en $P\{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in C_n\} = \mu_n(C_n) = 1$ voor alle n. Hieruit volgt dat voor elke n de likelihood ratio

$$\underline{\lambda}_n = \frac{g_n(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)}{f_n(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)}$$

b.o. gedefiniëerd is, met

$$\mathcal{E}\,\underline{\lambda}_n = \int_{R^n} \frac{g_n(t_1,\ldots,t_n)}{f_n(t_1,\ldots,t_n)}\, d\mu_n(t_1,\ldots,t_n) =$$

$$= \int_{C_n} g_n(t_1,\ldots,t_n)\, d\phi_n(t_1,\ldots,t_n) \leq 1.$$

Men kan deze ongelijkheid, met enig verlies aan exactheid, onder woorden brengen door te zeggen dat de likelihood van de waarnemingen $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ in zekere zin de neiging heeft maximaal te zijn als deze likelihood wordt berekend met behulp van de werkelijke verdeling van $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$. Op dit feit berust dan ook het maximum likelihood principe.

Uit de definitie van C_n volgt dat $\phi_{n+1}(C_{n+1} \cap (\overline{C}_n \times R)) = 0$ voor alle n. Immers, als dit niet zo was, dan zou

$$\mu_{n+1}(C_{n+1} \cap (\overline{C}_n \times R)) =$$
$$= \int_{C_{n+1} \cap (\overline{C}_n \times R)} f_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})\, d\phi_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) > 0 ,$$

hetgeen in strijd zou zijn met

$$\mu_{n+1}(C_{n+1} \cap (\overline{C}_n \times R)) \leq \mu_{n+1}(\overline{C}_n \times R) = \mu_n(\overline{C}_n) = 0 .$$

Nu geldt, voor elke n=1,2,... en elke $S \in \mathcal{S}^n$,

$$\mathcal{E}\, \underline{\lambda}_{n+1}\, \chi_{\{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in S\}} = \int_{S \times R} \frac{g_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})}{f_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})}\, d\mu_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) =$$

$$= \int_{(S \times R) \cap C_{n+1}} g_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1})\, d\phi_{n+1}(t_1,\ldots,t_{n+1}) =$$

$$= \nu_{n+1}((S \times R) \cap C_{n+1}) = \nu_{n+1}((S \times R) \cap C_{n+1} \cap (C_n \times R)) \leq$$

$$\leq \nu_{n+1}((S \cap C_n) \times R) = \nu_n(S \cap C_n) =$$

$$= \int_{S \cap C_n} g_n(t_1,\ldots,t_n)\, d\phi_n(t_1,\ldots,t_n) =$$

$$= \int_S \frac{g_n(t_1,\ldots,t_n)}{f_n(t_1,\ldots,t_n)}\, d\mu_n(t_1,\ldots,t_n) =$$

$$= \mathcal{E}\, \underline{\lambda}_n\, \chi_{\{(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) \in S\}} ,$$

zodat de rij $\{(\underline{\lambda}_n, \mathcal{B}_n),\ n=1,2,\ldots\}$, waar $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$ voor n=1,2,..., een supermartingaal is. We kunnen dus zeggen dat de neiging van $\underline{\lambda}_n$ om kleine waarden aan te nemen zeker niet afneemt als n toeneemt:

$$1 \geq \mathcal{E}\underline{\lambda}_1 \geq \mathcal{E}\underline{\lambda}_2 \geq \ldots .$$

Omdat $\underline{\lambda}_n \geq 0$ b.o. voor alle n, volgt uit Stelling 3.1a) dat $\underline{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \underline{\lambda}_n$ b.o. bestaat. In vele gevallen, d.w.z. onder passende voorwaarden voor de μ_n en ν_n blijkt $\underline{\lambda} = 0$ b.o. De maximum likelihood methode zal dus in dergelijke situaties met kans 1 tot de correcte conclusie leiden.

Wij beschouwen in het bijzonder het geval dat de experimentator weet dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ onderling onafhankelijk en identiek verdeeld zijn. De ϕ_n kunnen dan zo gekozen worden dat

$$f_n(t_1,\ldots,t_n) = \prod_1^n f(t_i) \quad \text{en} \quad g_n(t_1,\ldots,t_n) = \prod_1^n g(t_i)$$

voor alle n, waar $f = f_1$ en $g = g_1$, zodat $\underline{\lambda}_n = \prod_1^n q(\underline{x}_i)$ b.o. voor alle n, waar $q(t) = g(t)/f(t)$ als $f(t) > 0$.

Omdat $\underline{\lambda} = \lim \underline{\lambda}_n = \prod_1^\infty q(\underline{x}_i)$ b.o. bestaat, zullen ook $\underline{\lambda}' = \prod_1^\infty q(\underline{x}_{2i})$ en $\underline{\lambda}'' = \prod_1^\infty q(\underline{x}_{2i-1})$ b.o. bestaan. Bovendien volgt dat $\underline{\lambda}'$ en $\underline{\lambda}''$ onderling onafhankelijk zijn en beide dezelfde verdeling hebben als $\underline{\lambda}$. Derhalve geldt

$$P\{\underline{\lambda} > 0\} = P\{\underline{\lambda}' > 0\}.P\{\underline{\lambda}'' > 0\} = [P\{\underline{\lambda} > 0\}]^2 ,$$

zodat $\underline{\lambda} = 0$ b.o. of $\underline{\lambda} > 0$ b.o.

Als $\underline{\lambda} > 0$ b.o., dan zijn ook $\underline{\lambda}'$ en $\underline{\lambda}''$ met kans 1 positief, zodat $\log \underline{\lambda} = \log \underline{\lambda}' + \log \underline{\lambda}''$ b.o. Hieruit volgt, dat de karakteristieke functie van $\log \underline{\lambda}$ gelijk is aan het kwadraat van zichzelf, en dus identiek gelijk is aan 1, zodat $\underline{\lambda} = 1$ b.o. Dit houdt in, dat ook $\hat{\underline{\lambda}} = \prod_2^\infty q(\underline{x}_i) = 1$ b.o., en, omdat $\underline{\lambda} = q(\underline{x}_1).\hat{\underline{\lambda}}$ b.o., dat $q(\underline{x}_1) = 1$ b.o. Maar dit betekent dat $\mu_1 = \nu_1$, en dus ook, dat $\mu_n = \nu_n$ voor alle n.

Hiermee is dus bewezen dat, in het geval van onderling onafhankelijke, identiek verdeelde, stochastische grootheden, $\lim_{n\to\infty} \underline{\lambda}_n = 0$ b.o. tenzij $\mu_n = \nu_n$ voor alle n, in welk geval $\underline{\lambda}_n = 1$ b.o. voor alle n.