STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 352
(vertrouwelijk)

Controle van inkoopfacturen met behulp van aselecte steekproeven

door

C. Visser

augustus 1965

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam,49,2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Controle van inkoopfacturen met behulp van aselecte steekproeven

1. Inleiding

Bij een handelsfirma komen per jaar ca. 70.000 inkoopfacturen binnen. Het met deze facturen in rekening gebrachte bedrag is ca. f. 80.000.000,- per jaar. Per factuur variëert het bedrag van enkele tientallen tot meer dan tienduizend guldens.

De facturen worden na binnenkomst onmiddellijk geboekt waarbij doorschrift plaatsvindt op z.g.n proefsheets. Als voortelling wordt een telstrook gemaakt. Na vergelijking van de proefsheets met de telstroken en het eventueel aanbrengen van verbeteringen mag worden aangenomen, dat de facturen goed zijn geboekt en worden de telstroken vernietigd.

Daarna worden de facturen naar de inkoopafdelingen doorgegeven alwaar ze verder worden nagezien en verwerkt. Tenslotte worden de facturen, naarmate ze goed bevonden zijn, betaald en aan de accountant doorgegeven. De accountant ontvangt de afgehandelde facturen op onregelmatige tijdstippen en met gehele pakken tegelijk. Binnen deze pakken bestaat geen enkele systematische volgorde. Er bestaat ook geen overeenstemming tussen de volgorde van boeking en de volgorde van inlevering bij de accountant.

2. De controle door de accountant

In het verleden controleerde de accountant alle facturen. Bij de controle wordt o.a. op de volgende punten gelet:

a) het aanwezig zijn van een aan de factuur gehechte aankomstbon;
b) de vereiste parafen zijn geplaatst;
c) de factuur is in de goede artikelgroep geboekt;
d) het bedrag van de factuur werd correct geboekt;
e) vreemde valuta werden goed omgerekend;
f) een creditnota werd ook als creditnota geboekt.

Iedere gecontroleerde factuur wordt op de bovengenoemde proefsheets afgehaakt, zodat aan het einde van het jaar nagegaan kan worden welke facturen nog niet door de accountant werden gezien. Deze worden dan alle bijeengezocht en gecontroleerd.

Per jaar worden slechts 30 à 40 fouten ontdekt. Aangezien de controle zeer tijdrovend is werden naderhand de facturen beneden f. 100,- reeds buiten de controle gelaten. Men vraagt zich af of een aselecte steekproef geen grotere besparingen op kan leveren terwijl toch aanvaardbare resultaten worden bereikt.

3. Enkele bijzonderheden omtrent de populatie

Over een tijdvak van acht weken werden de bij de accountant ingeleverde facturen naar grootte gesorteerd en geteld. Dit gaf de in Tabel I vermelde aantallen. De in elk van deze acht weken ingeleverde aantallen facturen luidden: 1857, 971, 1518, 1440, 1175, 1210, 1919 en 1187.

Tabel I

Grove frequentieverdeling van de facturen in acht weken

Grootte van de factuur in guldens	Aantal in acht weken	Gemiddeld aantal per week
< 100,-	4.221	528
100,- — 4.999,99	6.428	804
5.000,- — 9.999,99	390	49
≥ 10.000,-	238	30

Omdat de in Tabel I gegeven klasse-indeling wel erg grof is, werd naderhand een nieuwe telling verricht. Over drie achtereenvolgende perioden, welke tezamen een periode van ongeveer vier weken omspanden, werden de in Tabel II vermelde aantallen verkregen.

Tabel II

Fijne frequentieverdeling van de facturen in drie perioden

Grootte van de factuur in guldens	Aantallen 1e periode	2e periode	3e periode	totaal
< 100,-	760	1.205	205	2.170
100,- — 199,99	202	290	69	561
200,- — 299,99	117	183	61	361
300,- — 399,99	89	94	33	216
400,- — 499,99	64	70	27	161
500,- — 749,99	133	154	77	364
750,- — 999,99	95	99	32	226
1.000,- — 1.499,99	127	140	96	363
1.500,- — 1.999,99	89	100	61	250
2.000,- — 2.499,99	63	83	42	188
2.500,- — 2.999,99	41	54	24	119
3.000,- — 3.499,99	48	34	16	98
3.500,- — 3.999,99	34	30	14	78
4.000,- — 4.499,99	14	22	9	45
4.500,- — 4.999,99	18	20	8	46
5.000,- — 9.999,99	86	95	36	217
≥ 10.000	57	35	14	106
	2.037	2.708	824	5.569

4. Het toe te passen steekproefsysteem

Tegen een guldenssteekproef uit de door de accountant ontvangen pakken facturen bestaan grote bezwaren omdat dan alle factuurbedragen geteld moeten worden. Ook een guldenssteekproef uit de proefsheets ontmoet bezwaren omdat het inleveren van deze sheets en de facturen niet synchroon lopen. Wij dienen derhalve na te gaan of een steekproef uit de facturen tot aanvaardbare resultaten leidt.

Het bezwaar van een facturensteekproef is, dat de aan de steekproefmethode verbonden risico's, in tegenstelling tot die verbonden aan een guldenssteekproef, minder nauwkeurig berekend kunnen worden. Teneinde de onnauwkeurigheden te beperken werd bij de tweede facturentelling een fijnere klasse-indeling doorgevoerd.

Om de aan de steekproefmethode verbonden risico's te verkleinen wil de accountant in ieder geval alle facturen boven een nader te bepalen bedrag (bijv. f. 5.000,-) controleren.

Omdat een gevonden foute factuur altijd "verbeterd" kan en zal worden en omdat de steekproef iedere week, of in ieder geval periodiek, herhaald wordt, komt het z.g.n. "A.O.Q.L.-keuringssysteem" in aanmerking.

5. Het A.O.Q.L.-keuringssysteem

Het aantal per week te controleren facturen bedraagt, zowel volgens de gegevens van Tabel I als die van Tabel II, gemiddeld ca. 1.400, waarvan gemiddeld ca. 1.320 met bedragen beneden f. 5.000,-. Uit deze 1.320 facturen worden aselect zonder teruglegging n facturen getrokken. Indien zich hierbij één of meer foute facturen bevinden worden alle 1.320 facturen gecontroleerd en zo nodig "verbeterd" [1]. In het andere geval wordt de gehele populatie zonder meer goedgekeurd en doorgegeven.

---

[1] Wij beperken ons hier tot een bepaald type A.O.Q.L.-systeem; in het algemeen zal men eerst tot volledige controle overgaan indien méér dan k_o fouten in de steekproef worden aangetroffen (zie ook Memorandum S 308-A17). Verder zijn er gecompliceerder A.O.Q.L.-systemen denkbaar, waarin bij het vinden van een fout de steekproef wordt uitgebreid in plaats van dat de gehele populatie gecontroleerd moet worden, terwijl men bij het vinden van een fout in de steekproefuitbreiding tot algehele controle overgaat (zie ook opmerking 4 aan het einde van dit rapport).

Met dit systeem wordt bereikt dat de gemiddelde fractie foute facturen $\bar{p}$, in de doorgegeven populaties maximaal $\bar{p}_m$ bedraagt, hetgeen betekent dat de gemiddelde fractie correcte facturen $1-\bar{p}$, in de doorgegeven populaties minimaal $1-\bar{p}_m$ is. In de literatuur wordt de fractie foute facturen $\bar{p}$ met "Average Outgoing Quality" en de maximale gemiddelde fractie foute facturen $\bar{p}_m$ met "Average Outgoing Quality Limit" aangeduid.

De omvang n van de wekelijks te nemen steekproef hangt af van de aan $\bar{p}_m$ te stellen eisen en tevens van de wekelijks ter controle aangeboden aantallen facturen. In dit rapport wordt verder uitgegaan van de overigens niet essentiële veronderstelling, dat deze aantallen tussen 1.000 en 2.000 liggen. In Tabel IV (zie blz. 9) worden voor enkele waarden van $\bar{p}_m$ de vereiste waarden van de steekproefomvang n vermeld.

In de Appendix wordt de theorie van het hier geadviseerde keuringssysteem beknopt uiteengezet.

6. Schatting van het bij de steekproefcontrole overblijvende risico

Het bovenbeschreven keuringssysteem garandeert slechts dat de fractie foute facturen in de doorgegeven populaties over een lange periode, waarin de methode vele malen wordt toegepast, gemiddeld maximaal $\bar{p}_m$ zal bedragen. Dit zegt, op zichzelf genomen, nog niets omtrent het maximale niet ontdekte foute bedrag over die periode. Het is echter wel mogelijk een schatting te geven van het maximum van het gemiddelde bedrag aan facturen waarin fouten zijn blijven zitten, bijv. over de periode van een jaar. Dit maximum wordt hierna het "maximale risico" genoemd en aangeduid met R_m. Het bedrag R_m is uiteraard een bovengrens voor het totale bedrag aan fouten, welke slechts dan bereikt wordt wanneer alle posten met fouten volledig fout zijn.

Om dit maximale risico R_m te kunnen schatten dienen eerst enkele zo realistisch mogelijke onderstellingen gemaakt te worden. Deze onderstellingen zijn:

a) De steekproef, waarvan de resultaten in Tabel II worden vermeld, is representatief voor het gehele jaar; anders gezegd, de in Tabel II weergegeven totale frequenties gelden voor iedere andere periode van vier weken. De gegevens van Tabel I zijn met deze onderstelling niet in strijd.

b) De foute facturen zijn gelijkmatig over alle klassen van Tabel II verdeeld.

c) De gemiddelde grootte van een factuur in een klasse is gelijk aan het midden van de betreffende klasse.

d) De accountant controleert alle facturen met bedragen boven f. 5.000,- volledig.

Het jaarlijkse aantal facturen voor elke klasse werd gevonden door het totale aantal in Tabel II voor die klasse opgegeven facturen, te vermenigvuldigen met $\frac{70.000}{5.569}$ en het gevonden aantal vervolgens op het dichtstbijliggende honderdvoud af te ronden. Onder de hierboven vermelde onderstellingen geeft Tabel III voor $\bar{p}_m$ = 0,001, 0,005 en 0,010, de maxima van de verwachte aantallen foute facturen en de bijbehorende maximale risico's.

Uit Tabel III is gemakkelijk af te leiden in hoeverre het maximale risico R_m verlaagd kan worden door niet alleen de facturen boven f. 5.000,- volledig te controleren, maar bijv. alle facturen boven f. 4.500,- of f. 4.000,-, of een nog lager bedrag.

Tabel III

Maximale risico's per jaar als functie van de gekozen A.O.Q.L.-waarde $\overline{p}_m$

Klassegrenzen in guldens	Aantal facturen	Maximum van het gemiddelde aantal foute facturen A.O.Q.L. ($\overline{p}_m$)			Maximaal risico R_m in guldens A.O.Q.L. ($\overline{p}_m$)		
		0,001	0,005	0,010	0,001	0,005	0,010
< 100	27.300	25	136	273	1.250	6.800	13.650
100,- — 199,99	7.100	7	35	71	1.050	5.250	10.650
200,- — 299,99	4.500	5	22	45	1.250	5.500	11.250
300,- — 399,99	2.700	3	14	27	1.050	4.900	9.450
400,- — 499,99	2.000	2	10	20	900	4.500	9.000
500,- — 749,99	4.600	5	23	46	3.125	14.375	28.750
750,- — 999,99	2.800	3	14	28	2.625	12.250	24.500
1.000,- — 1.499,99	4.600	5	23	46	6.250	28.750	57.500
1.500,- — 1.999,99	3.100	3	16	31	5.250	28.000	54.250
2.000,- — 2.499,99	2.400	2	12	24	4.500	27.000	54.000
2.500,- — 2.999,99	1.500	2	8	15	5.500	22.000	41.250
3.000,- — 3.499,99	1.200	1	6	12	3.250	19.500	39.000
3.500,- — 3.999,99	1.000	1	5	10	3.750	18.750	37.500
4.000,- — 4.499,99	600	1	3	6	4.250	12.750	25.500
4.500,- — 4.999,99	600	1	3	6	4.750	14.250	28.500
5.000,- — 9.999,99	2.700						
> 10.000,-	1.300						
	70.000	66	330	660	48.750	224.575	444.750

R_m als % van het totale inkoopbedrag ad f. 80.000.000,-: 0,061 0,28 0,56.

7. Het totale aantal per jaar te controleren facturen en de te bereiken besparingen

Voor de schatting van het maximale risico R_m werd alleen gebruik gemaakt van de gekozen A.O.Q.L.-waarde $\bar{p}_m$ en was de omvang n van de bijbehorende steekproef niet van belang. Voor de schatting van de controlekosten is dit echter wel het geval.

De omvang n van de steekproef hangt af van de aan $\bar{p}_m$ te stellen eisen en tevens van de wekelijks ter controle aangeboden aantallen facturen. Deze aantallen worden, zoals boven reeds werd opgemerkt, ondersteld te liggen tussen 1.000 en 2.000. Indien een jaar op 50 weken wordt gesteld is het totale aantal jaarlijks in de steekproeven op te nemen facturen gelijk aan 50n.

Het totale aantal per jaar te controleren facturen ligt echter hoger dan 50n. Ten eerste worden alle facturen boven bijv. f. 5.000,- altijd gecontroleerd; dit zijn er ca. 4.000. Verder zal het enkele malen per jaar voorkomen dat een foute factuur in de steekproef wordt aangetroffen en dat dus alle facturen van de betreffende week gecontroleerd moeten worden. Het gemiddelde aantal keren per jaar dat dit zich zal voordoen wordt verder met a aangeduid. Om a te kunnen bepalen werd aangenomen dat per week precies 1.320 facturen ter controle worden aangeboden. De grootte van a is maximaal indien zich elke week evenveel fouten in de populatie bevinden [2]. Daarom werd verondersteld dat elke week precies één foute factuur in de populatie aanwezig is. De onder deze onderstellingen berekende gemiddelde grootte van a wordt in Tabel IV vermeld. Per jaar zullen dus gemiddeld (1.320-n)a facturen extra gecontroleerd worden. Het gemiddelde aantal per jaar te controleren facturen t, bedraagt onder de vermelde onderstelling dus

$$t = 50n + 4.000 + (1.320-n)a.$$

Voor de controlekosten K geldt

$$K = C + kt.$$

Hierin vertegenwoordigt C de vaste kosten en k de controlekosten per factuur.

---

[2] Zie de Appendix.

Met enige kennis van de grootte van k, kan men zich een indruk vormen omtrent de bij de steekproefmethode te bereiken besparingen. Deze besparingen bedragen

$$(70.000-t)k.$$

Hierbij wordt verondersteld dat het invoeren van de steekproefmethode de vaste kosten C onveranderd laat.

Tegenover de zo verkregen besparingen staat het risico R waarvan het maximum R_m in Tabel III werd berekend. Indien lagere eisen aan $\bar{p}_m$ gesteld worden, daalt het totale aantal te controleren facturen t betrekkelijk langzaam, terwijl de waarde van R_m snel stijgt. Voor het geval dat $\bar{p}_m = 0,005$ lijkt een redelijk compromis tussen de waarden van t en R_m bereikt te zijn. In het vervolg zal van deze situatie worden uitgegaan.

Tabel IV

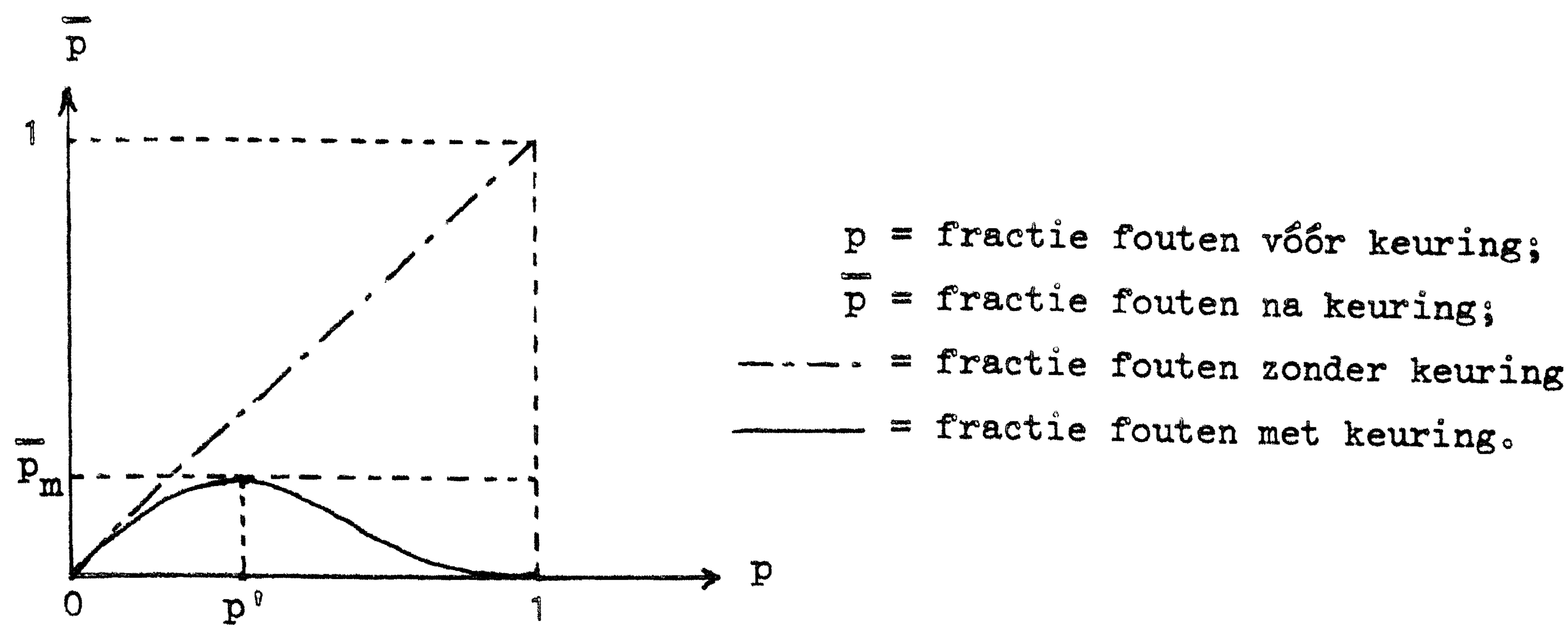
Vereiste grootte van n en verwachte gemiddelde waarden van R_m, a en t

$\bar{p}_m$	0,001	0,005	0,010
n	310	70	36
R_m	f. 49.000,-	f. 225.000,-	f. 445.000,-
a	11,74	2,65	1,36
t	31.400	10.800	7.600

8. Verdere analyse van de situatie $\bar{p}_m = 0,005$

In Tabel IV worden de gegevens, die op deze situatie betrekking hebben, vermeld. Op het risico R, waarvan het maximum R_m ca. f. 225.000,- bedraagt, dient nog iets verder te worden ingegaan.

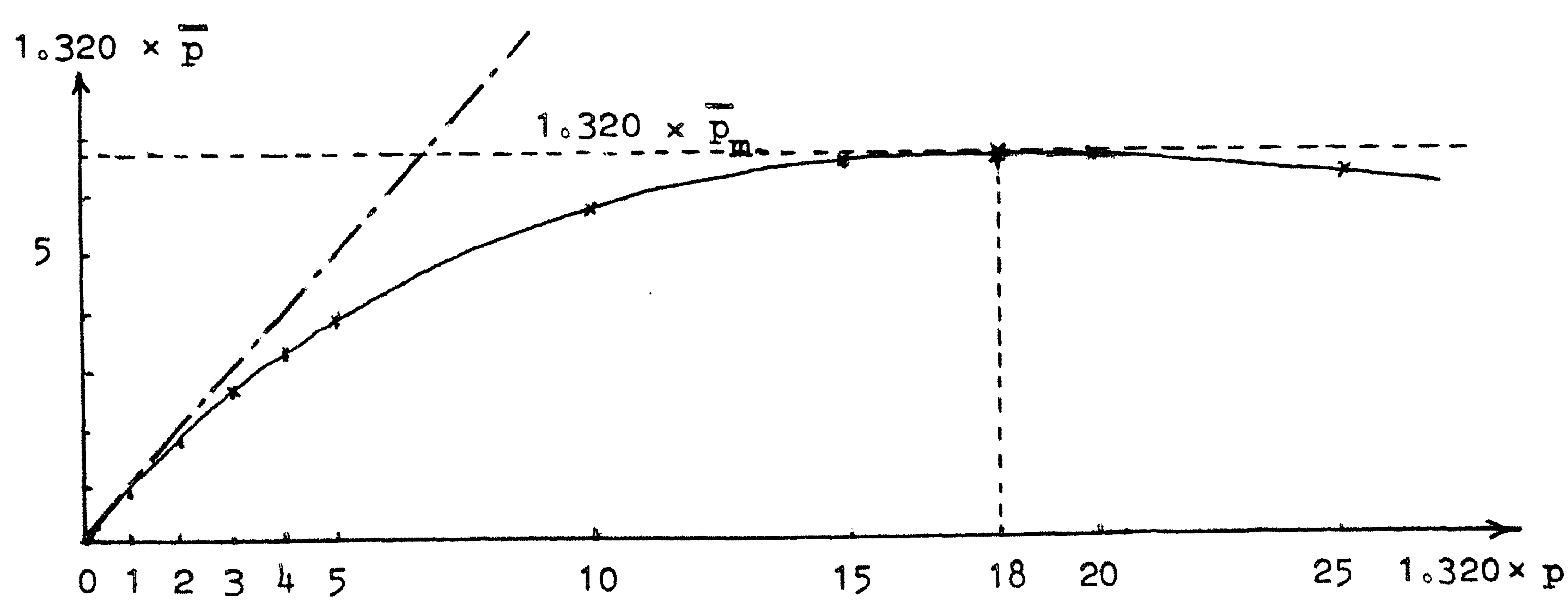
Bij een A.O.Q.L.-keuringssysteem is het voor het eindresultaat niet van belang hoe groot het foutenpercentage in de ter keuring aangeboden populaties is. Het resultaat van de keuring is een fractie fouten in de doorgegeven populaties, welke in het ongunstigste geval gemiddeld $\bar{p}_m$ bedraagt. In figuur 1 wordt een en ander grafisch weergegeven.



Figuur 1

Het verband tussen $\bar{p}$ en p

De fractie fouten p in de ter controle aangeboden populaties is onbekend en ligt ergens tussen 0 en 1. Zónder keuring is de gemiddelde fractie fouten $\bar{p}$ in de doorgegeven populaties gelijk aan p. Dit verband tussen $\bar{p}$ en p wordt weergegeven door de rechte — - — - — . Mét keuring is $\bar{p}$ altijd kleiner dan p en maximaal gelijk aan $\bar{p}_m$. Nu wordt het verband tussen $\bar{p}$ en p door de getrokken kromme voorgesteld. Indien p gelijk is aan p^0 wordt $\bar{p}$ gelijk aan $\bar{p}_m$, terwijl voor elke andere waarde van p de waarde van $\bar{p}$ kleiner is dan $\bar{p}_m$.



Figuur 2

Het verband tussen $\bar{p}$ en p bij $\bar{p}_m$ = 0,005

In figuur 2 wordt de onderhavige situatie met $\overline{p}_m$ = 0,005 gedetailleerd weergegeven. Langs de horizontale as is het aantal fouten in de 1.320 ter controle aangeboden facturen aangegeven, langs de verticale as het gemiddelde aantal fouten dat hiervan na toepassing van het beschreven steekproefsysteem overblijft. Het laatste aantal is maximaal indien er zich elke week 18 foute facturen bij de 1.320 aangeboden facturen bevinden.

In werkelijkheid bevinden er zich geen 18 maar slechts gemiddeld hoogstens één fout per week bij de aangeboden facturen. Het risico R zal dus het maximum R_m ad f. 225.000,- niet bereiken. Uit figuur 2 blijkt, dat het gemiddelde aantal fouten in de doorgegeven populaties maar weinig minder is dan 1 en dus per jaar maar weinig minder dan 50. Indien deze fouten zoals in Tabel III gelijkmatig over alle klassen worden verdeeld, geeft dit een risico R van ca. f. 34.000,-, of ca. 0,0425% van de totale jaarlijkse inkoop ad f. 80.000.000,-.

Voor een antwoord op de vraag naar het nut van een A.O.Q.L.-keuringssysteem in deze situatie wordt verwezen naar opmerking 6.

9. Slotopmerkingen

1) Het zal duidelijk zijn, dat niet iedere week precies 1.320 facturen beneden een bedrag ad f. 5.000,- ter controle worden aangeboden. Daarom werd getracht de gevolgen van dit feit op het risico R en het totaal aantal te controleren facturen t te schatten. Het is daarbij niet onredelijk te veronderstellen dat het aantal foute facturen evenredig is met het totale aantal ter controle aangeboden facturen, dus dat het foutenpercentage constant is. Daarbij bleek dat de kans op goedkeuren bij bijv. 1.000 facturen met 1 fout, nauwelijks verschilt van die bij 2.000 facturen met 2 fouten (deze kansen verhouden zich als 1 : 0,9987). Daaruit volgt dat het gemiddelde percentage fouten $\overline{p}$ ná de keuring en dus ook het risico R, nauwelijks door het in de aanhef genoemde feit beïnvloed wordt.

Bij de berekening van t werd uitgegaan van de onderstelling dat iedere week 1.320 facturen met één foute factuur ter controle worden aangeboden. De grootte van t hangt o.a. af van het gemiddeld aantal keren a dat de gehele partij gecontroleerd moet worden. Indien nu de partijen ongelijke aantallen facturen bevatten en het jaarlijkse totale aantal fouten is 50, dan schijnt een ongunstige situatie díe te zijn, waarbij kleine partijen veel en grote partijen weinig fouten bevatten. Men mag echter redelijkerwijs aannemen, dat de werkelijk voorkomende situaties díe zijn, waarbij het aantal fouten evenredig is met de grootte van de aangeboden partij facturen.

2) De berekende waarden van R, a en t zijn gemiddelden. Dit houdt in dat ook andere waarden voor kunnen komen en men zal zich vooral interesseren voor de kans, dat waarden boven een zeker niveau op zullen treden. Hier wordt slechts de situatie: iedere week 1.320 facturen met één fout, behandeld. In Tabel V is y het aantal malen per jaar, dat een integrale controle minstens uitgevoerd moet worden. Bij iedere waarde van y behoort een bepaalde kans P(y), een maximaal aantal fouten over het gehele jaar ná de controle, aan te geven met K(y), en een minimaal aantal te controleren facturen over het gehele jaar, aan te geven met t(y). Bij het maximale totale aantal fouten K(y) behoort een maximaal bedrag R aan facturen met fouten.

Tabel V

De kansen op afwijkingen van de gemiddelde waarden R, a en t

y	P(y)	K(y)	R(y) in guldens	t(y)
0	1,0	50	34.000,-	7.500
1	0,934	49	33.300,-	8.750
2	0,750	48	32.700,-	10.000
3	0,498	47	32.000,-	11.250
4	0,273	46	31.300,-	12.500
5	0,124	45	30.600,-	13.750
6	0,0479	44	29.900,-	15.000
7	0,0158	43	29.300,-	16.250
8	0,0045	42	28.600,-	17.500
9	0,0011	41	27.900,-	18.750

3) Bij het in dit rapport voorgestelde keuringssyteem is een nauwkeurige omschrijving van het begrip "fout" van zeer groot belang. Bij het vinden in de steekproef van bijv. een accuratessefout (de factuur is, behalve het ontbreken van bijv. een paraaf, verder geheel in orde), zal men zich afvragen of tengevolge van deze ene, betrekkelijk onbelangrijke fout, nu de gehele partij gecontroleerd moet worden. Bij elke gevonden fout zal men trachten de bron op te sporen, terwijl slechts "ernstige fouten" reden geven de gehele partij te controleren. De uitspraken omtrent foutenfracties en risicobedragen hebben dan echter slechts betrekking op de "ernstige fouten". De definitie van "ernstige fout" dient wel nauwkeurig en ondubbelzinnig te zijn.

4) Het vinden van slechts één (ernstige) fout heeft in het voorgestelde keuringssysteem veel extra werk tengevolge. Tegen het offer van een gecompliceerder systeem is het echter mogelijk dit bezwaar enigszins te ondervangen. Dit systeem werkt als volgt:

a) Uit de facturen wordt zonder teruglegging een aselecte steekproef van n facturen getrokken;
b) Bij het vinden van geen enkele fout wordt de populatie zonder meer goedgekeurd;
c) Bij het vinden van twee of meer fouten worden <u>alle</u> facturen gecontroleerd;
d) Bij het vinden van één fout wordt de steekproef op aselecte wijze uitgebreid met m facturen;
e) Bij het vinden van één of meer fouten in de steekproefuitbreiding worden <u>alle</u> facturen gecontroleerd;
f) Bij het vinden van geen enkele fout in de steekproefuitbreiding wordt de populatie verder zonder meer goedgekeurd;
g) Alle gevonden foute facturen, zowel bij de partiële als bij de integrale controle, worden verbeterd.

Dit keuringssysteem heeft een soortgelijk effect als het eenvoudiger systeem. Voor een A.O.Q.L.-waarde $\bar{p}_m$ van 0,005 bedraagt de omvang n van de eerste steekproef 105 en de omvang m van de tweede steekproef 60.

Indien iedere week 1.320 facturen met één foute factuur ter controle worden aangeboden bedraagt het gemiddelde jaarlijkse aantal foute facturen ná de controle ca. 46. Het risico R bedraagt dan ca. f. 31.000,- of ca. 0,035% van de totale inkoop ad f. 80.000.000,-.

Onder dezelfde onderstellingen kan ook het gemiddelde aantal te controleren facturen t, berekend worden. Dit geeft voor t een waarde van ca. 9.500.

In Tabel IV wordt voor t het aantal 10.800 gevonden, zodat met het hier vermelde gecompliceerder systeem een besparing van ca. 1.300 te controleren facturen kan worden verkregen.

5) Alvorens een steekproef uit de aangeboden populatie te kunnen trekken dient eerst de omvang van deze populatie, nadat de facturen boven f. 5.000,- verwijderd zijn, te worden bepaald en de bij deze omvang behorende lijst met 70 aselecte getallen te worden bijgezocht. Men behoeft natuurlijk niet voor élke populatieomvang een lijst met aselecte getallen te vervaardigen. Een oplossing is deze, dat men voor elk honderdvoud tussen bijv. 800 en 2.000 een lijst vervaardigd. De gevonden populatieomvang wordt dan op een honderdvoud naar boven afgerond. Voor de eventuele aselecte getallen die buiten de populatie vallen, worden daarna uit de populatie extra aselecte trekkingen verricht, zodat in elk geval de omvang van de steekproef 70 bedraagt.

6) Men kan zich afvragen wat het nut van het hierboven beschreven controlesysteem is, indien er toch slechts ca. 50 fouten per jaar worden gemaakt. In feite kan men echter niet uitsluiten dat tengevolge van de een of andere oorzaak tijdelijk, of periodiek, of blijvend, het foutenpercentage op een hoger niveau komt te liggen. Het A.O.Q.L.-keuringssysteem garandeert dat ook dán de fractie fouten in de doorgegeven facturen gemiddeld niet groter dan $\bar{\bar{p}}_m$ zal zijn.

7) In de loop van de tijd zal de verdeling van de factuurbedragen over de klassen van Tabel II zich wijzigen, bijv. door inflatie en/of omzetverhoging. Enkele malen per jaar zal men toch alle aangeboden facturen moeten controleren en kan men de frequenties opnieuw noteren. Verder kunnen bij iedere steekproef van 70 facturen de frequenties genoteerd

worden. De bovengrens ad f. 5.000,- zal misschien aan de nieuwe situatie aangepast moeten worden, terwijl bij omzetvergroting het gemiddeld aantal per week aangeboden facturen zal stijgen. Het verdient daarom aanbeveling periodiek, bijv. éénmaal per jaar, na te gaan of de opzet van het steekproefsysteem aan de eventuele nieuwe omstandigheden dient te worden aangepast.

Appendix

Beknopte theorie van het geadviseerde A.O.Q.L.-steekproefsysteem

Er zijn m controleperioden. Tijdens elke periode wordt een populatie van precies dezelfde omvang N ter controle aangeboden. In iedere populatie bevinden zich precies k defecten. Verder wordt uit iedere populatie een aselecte steekproef zonder teruglegging van de omvang n getrokken.

Indien in een steekproef één of meer defecten worden aangetroffen [1] gaat men tot integrale controle van alle N elementen over, terwijl alle gevonden defecten door goede elementen worden vervangen. Worden géén defecten in de steekproef aangetroffen, dan wordt de populatie zonder meer goedgekeurd.

De fractie defecten p, in de populaties vóór de controle is gelijk aan $\frac{k}{N}$, terwijl de fractie defecten ná de controle over alle m perioden tezamen $\underline{\bar{p}}$, een stochastische grootheid is. Stel dat de stochastische grootheid $\underline{x}_i$ gelijk is aan het aantal fouten in de i-de populatie ná de controle en dat de kans op het aantreffen van geen enkel defect in een steekproef gelijk is aan α. Dan geldt:

(1) $$P\left[\underline{x}_i = 0\right] = 1-\alpha \, , \quad P\left[\underline{x}_i = k\right] = \alpha \, ,$$

en dus

(2) $$\mu(\underline{x}_i) = k\alpha \, .$$

Voor $\underline{\bar{p}}$ geldt

(3) $$\underline{\bar{p}} = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^{m} \underline{x}_i$$

en dus geldt voor de verwachte fractie fouten $\bar{p}$ over alle m perioden tezamen:

(4) $$\bar{p} = \mu(\underline{\bar{p}}) = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^{m} \mu(\underline{x}_i) = \frac{1}{mN} mk\alpha = \frac{k\alpha}{N} = p\alpha \, .$$

---

[1] Zie ook de voetnoot op blz. 8.

Het aantal in een steekproef aan te treffen defecten is hypergeometrisch verdeeld. Voor α vinden we dus

$$(5) \qquad \alpha = \frac{\binom{k}{0}\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} .$$

Het aantal fouten k kunnen we laten variëren van 0 t/m N. Daarmee varieert ook de waarde van $\bar{p}$. Zonder afleiding vermelden we, dat $\bar{p}$ stijgt met stijgende k zolang $k \leq \frac{N+1}{n+1}$ en maximaal is voor k = het aantal gehelen in $\frac{N+1}{n+1} = \left[\frac{N+1}{n+1}\right]$, terwijl voor $k > \frac{N+1}{n+1}$ de fractie $\bar{p}$ daalt met stijgende k en gelijk 0 is voor $k \geq N-n$. Het maximum van $\bar{p}$ wordt voorgesteld door $\bar{p}_m$. De fractie $\bar{p}$ wordt de Average Outgoing Quality (A.O.Q.) en de fractie $\bar{p}_m$ de Average Outgoing Quality Limit (A.O.Q.L.) genoemd.

De grootte van $\bar{p}_m$ hangt, behalve van de populatieomvang N, af van de steekproefomvang n. Een eenvoudig verband tussen p_m, N en n is niet te geven. DODGE en ROMIG geven in hun tabellen [2] voor verschillende waarden van N en p_m de vereiste waarden van n.

Het verwachte aantal malen dat een gehele populatie gecontroleerd moet worden, wordt als volgt berekend: De stochastische grootheid $\underline{y}$ wordt gedefinieerd als het aantal malen dat een populatie integraal gecontroleerd wordt. Deze $\underline{y}$ is dus binomiaal verdeeld als het aantal "successen" uit m onderling onafhankelijke experimenten, elk met kans $1-\alpha$ op "succes". Derhalve geldt

$$(6) \qquad a = \mu(\underline{y}) = m(1-\alpha) .$$

Tussen de grootheden $\underline{y}$ en $\underline{\bar{p}}$ bestaat een nauw verband. Indien $\underline{y}$ de waarde y aanneemt, hebben y van de $\underline{x}_i$ de waarde 0 en m-y van de $\underline{x}_i$ de waarde k aangenomen, zodat $\underline{\bar{p}}$ de waarde

---

2) H.F. DODGE en H.G. ROMIG, "Sampling Inspection Tables", John Wiley and Sons, New York, Second edition (1959), pp. 197-204.

$$\frac{1}{mN}\{y.0 + (m-y)k\} = \frac{(m-y)k}{mN}$$

heeft aangenomen. Dus

$$P\left[\underline{\bar{p}} = \frac{(m-y)k}{mN}\right] = P[\underline{y} = y] =$$
$$= \binom{m}{y}(1-\alpha)^y \alpha^{m-y} ,$$

en

(8) $$P\left[\underline{\bar{p}} \leq \frac{(m-y)k}{mN}\right] = P[\underline{y} \geq y] .$$

Met behulp van deze laatste betrekking werd Tabel V samengesteld.

Het maximum van het verwachte aantal integrale controles

Op blz. 8 werd beweerd dat het verwachte aantal malen a, dat een gehele populatie gecontroleerd moet worden, maximaal is indien zich iedere controleperiode evenveel defecten in de populatie bevinden. Ondersteld werd dat de populaties alle dezelfde omvang bezaten. Deze omvang wordt in het volgende met N aangeduid. Verder werd ondersteld, dat het totale aantal defecten over alle controleperioden tezamen gegeven is. Dit totaal aantal defecten zullen we met K aanduiden. Tenslotte wordt in iedere periode een steekproef van de omvang n uit de N elementen getrokken.

We zullen onderstellen dat in de i-de controleperiode de populatie k_i defecten bevat. Dan geldt dus

(9) $$\sum_{i=1}^{m} k_i = K .$$

De kans op een integrale controle in deze periode is gelijk aan 1 minus de kans dat geen enkel defect in de steekproef wordt aangetroffen, en is dus gelijk aan

$$1 - \frac{\binom{N-k_i}{n}}{\binom{N}{n}} = 1 - \alpha_i .$$

Voor a vinden we dan

(10)
$$a = \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha_i) = m - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i =$$
$$= m - \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{m} \binom{N-k_i}{n} .$$

Indien a maximaal is, is de som $S = \sum_{i=1}^{m} \binom{N-k_i}{n}$ minimaal, alles onder de voorwaarde (9).

We zullen nu aantonen dat S minimaal is indien $k_i = \frac{K}{m} = \bar{k}$ voor alle i, waarbij we voorlopig aannemen dat K een veelvoud van m is.

Het is gemakkelijk in te zien dat

(11)
$$\binom{x+1}{n} - \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1} .$$

Deze betrekking zullen we voortdurend nodig hebben.
We zullen nu allereerst aantonen dat

(12)
$$\binom{M+r}{n} + \binom{M-r}{n} > 2\binom{M}{n}, \qquad (r > 0).$$

Dit is het geval indien het verschil van rechter- en linkerlid positief is.

(13)
$$\binom{M+r}{n} + \binom{M-r}{n} - 2\binom{M}{n} =$$
$$= \left\{\binom{M+r}{n} - \binom{M}{n}\right\} - \left\{\binom{M}{n} - \binom{M-r}{n}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M+r-i+1}{n} - \binom{M+r-i}{n}\right\} - \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M-i+1}{n} - \binom{M-i}{n}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \binom{M+r-i}{n-1} - \sum_{i=1}^{r} \binom{M-i}{n-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M-i+r}{n-1} - \binom{M-i}{n-1}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \left\{\binom{M-i+r-j+1}{n-1} - \binom{M-i+r-j}{n-1}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \binom{M-i+r-j}{n-2} ,$$

en dit is zeker positief.

Op dezelfde wijze tonen we aan dat

$$(14)\qquad \binom{M+r+s}{n} + \binom{M-r}{n} > \binom{M+s}{n} + \binom{M}{n}, \qquad (r > 0,\ s > 0).$$

Het verschil tussen rechter- en linkerlid is

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\left\{\binom{M+s+r}{n} - \binom{M+s}{n}\right\} - \left\{\binom{M}{n} - \binom{M-r}{n}\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M+s+r-i+1}{n} - \binom{M+s+r-i}{n}\right\} - \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M-i+1}{n} - \binom{M-i}{n}\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \binom{M+s+r-i}{n-1} - \sum_{i=1}^{r} \binom{M-i}{n-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left\{\binom{M+s+r-i}{n-1} - \binom{M-i}{n-1}\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r+s} \left\{\binom{M+s+r-i-j+1}{n-1} - \binom{M+s+r-i-j}{n-1}\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r+s} \binom{M+s+r-i-j}{n-2},
\end{aligned}
$$

en dit is weer positief.

Met (12) en (14) zien we, indien we $M = n - \bar{k}$ stellen, dat indien een populatie meer dan $\bar{k}$ defecten bevat, de som S kleiner wordt door defecten uit deze populatie "over te hevelen" naar een populatie met minder dan $\bar{k}$ defecten. De som S is dan minimaal en a dus maximaal, indien alle populaties $\bar{k}$ defecten bevatten.

Het totale aantal defecten K behoeft geen m-voud te zijn. Stel $K = m\bar{k} + l$ met $0 < l < m$. Met (14) en $M = N - \bar{k}$ kan dan weer aangetoond worden, dat S minimaal en dus a maximaal wordt, indien l populaties $\bar{k}+1$ en m-l populaties $\bar{k}$ defecten bevatten.