STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 357

Syllabus van het

Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

# TOTAAL POSITIEVE FUNCTIES

door

W.R. van Zwet

mei 1966

# Totaal positieve functies [1)]

## 1. Inleiding

Zij $f(x,y)$ een reële functie gedefiniëerd voor alle $x \in X$ en $y \in Y$: $X \subseteq R^1$, $Y \subseteq R^1$.

**Definitie 1.1.**

$f$ is totaal positief van orde $k$ ($TP_k$) op $X \times Y$, indien voor alle $1 \leq m \leq k$, alle $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, $x_i \in X$, $y_j \in Y$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_m \\ y_1 & \ldots & y_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) & \ldots & f(x_1,y_m) \\ f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) & \ldots & f(x_2,y_m) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(x_m,y_1) & f(x_m,y_2) & \ldots & f(x_m,y_m) \end{vmatrix} \geq 0.$$

$f$ is strikt $TP_k$, als deze ongelijkheden steeds strikt zijn.
$f$ is (strikt) $TP_\infty$, als $f$ (strikt) $TP_k$ is voor alle $k = 1, 2, \ldots$ .

N.B. Een TP functie is dus steeds niet-negatief; een strikte TP functie is positief. Meestal zijn X en Y intervallen of aftelbare verzamelingen.

**Lemma 1.1.**

Zij $f_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, gedefiniëerd en $k-1$ maal continu differentieerbaar op een interval $Y$ met algeleiden $f_i^j(y) = \frac{d^j}{dy^j} f_i(y)$. Als

(a) $$\begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_1(y_2) & \ldots & f_1(y_m) \\ f_2(y_1) & f_2(y_2) & \ldots & f_2(y_m) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_m(y_1) & f_m(y_2) & \ldots & f_m(y_m) \end{vmatrix} \geq 0$$

voor alle $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, $y_j \in Y$, en alle $m \leq k$, dan

---

[1)] Deze syllabus heeft een voorlopig karakter en streeft niet naar volledigheid.

$$\text{(b)} \qquad \begin{vmatrix} f_1(y) & f_1^1(y) & \ldots & f_1^{m-1}(y) \\ f_2(y) & f_2^1(y) & \ldots & f_2^{m-1}(y) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_m(y) & f_m^1(y) & \ldots & f_m^{m-1}(y) \end{vmatrix} \geq 0$$

voor alle $y \in Y$ en alle $m \leq k$. Omgekeerd impliceert strikte ongelijkheid voor alle $y \in Y$ en alle $m \leq k$ in (b) strikte ongelijkheid voor alle $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, $y_j \in Y$, en alle $m \leq k$ in (a).

Bewijs:

Door in (a) van iedere kolom de voorgaande af te trekken (te beginnen bij de laatste) en de middelwaarde stelling toe te passen, vinden wij

$$0 \leq \prod_{j=2}^{m} (y_j - y_{j-1}) \begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_1^1(y_2^1) & f_1^1(y_3^1) & \ldots & f_1^1(y_m^1) \\ f_2(y_1) & f_2^1(y_2^1) & f_2^1(y_3^1) & \ldots & f_2^1(y_m^1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_m(y_1) & f_m^1(y_2^1) & f_m^1(y_3^1) & \ldots & f_m^1(y_m^1) \end{vmatrix},$$

waarbij $y_{j-1} < y_j^1 < y_j$ en dus $y_1 < y_2^1 < \ldots < y_m^1$. Hierbij is essentiëel, dat in een gehele kolom hetzelfde punt $y_j^1$ kan worden gekozen. Immers, voor iedere $j = 2, \ldots, m$, is de determinant na aftrekken van kolommen te schrijven als $F(y_j) - F(y_{j-1}) = \Sigma\alpha_i\{f_i(y_j) - f_i(y_{j-1})\} =$ $= (y_j - y_{j-1})F'(y_j^1) = (y_j - y_{j-1})\Sigma\alpha_i f_i^1(y_j^1)$, waarbij het niet relevant is, dat de $\alpha_i$ ook van $y_{j-1}$ en $y_j$ afhangen. Daar $\Pi(y_j - y_{j-1}) > 0$ is, is de bovenstaande determinant dus niet negatief. Door deze procedure te herhalen voor de laatste $(m - 1)$, $(m - 2)$, $\ldots$, 2 kolommen, vinden wij

$$\begin{vmatrix} f_1(y_1) & f_1^1(y_2^1) & f_1^2(y_3^2) & \ldots & f_1^{m-1}(y_m^{m-1}) \\ f_2(y_1) & f_2^1(y_2^1) & f_2^2(y_3^2) & \ldots & f_2^{m-1}(y_m^{m-1}) \\ \vdots & & & & \\ f_m(y_1) & f_m^1(y_2^1) & f_m^2(y_3^2) & \ldots & f_m^{m-1}(y_m^{m-1}) \end{vmatrix} \geq 0,$$

waarbij $y_1 < y_2^1 < y_3^2 < \ldots < y_m^{m-1} < y_m$ (de bovenste indices zijn uiteraard geen exponenten!). Door nu $y_1$ en $y_m$ naar $y \in Y$ te laten naderen, volgt ongelijkheid (b) wegens de continuïteit van de afgeleiden.

Het omgekeerde wordt met inductie naar k bewezen. Voor $k = 1$ is het gestelde juist. Stel het is juist tot en met $(k - 1)$ en veronderstel, dat ongelijkheid (b) strikt is. Zij $g_i = f_i/f_1$ $(f_1 > 0!)$ en zij $g_i^j(y) = \frac{d^j}{dy^j} g_i(y)$. Voor $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, $y_j \in Y$, geldt

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} f_1(y_1) & \ldots & f_1(y_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(y_1) & \ldots & f_m(y_m) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) & \ldots & g_2(y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(y_1) & g_m(y_2) & \ldots & g_m(y_m) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ g_2(y_1) & g_2^1(y_2^1) & \ldots & g_2^1(y_m^1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(y_1) & g_m^1(y_2^1) & \ldots & g_m^1(y_m^1) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} g_2^1(y_2^1) & g_2^1(y_3^1) & \ldots & g_2^1(y_m^1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m^1(y_2^1) & g_m^1(y_3^1) & \ldots & g_m^1(y_m^1) \end{vmatrix},$$

waarbij $y_{j-1} < y_j^1 < y_j$ volgens dezelfde redenering als boven. Nu is

$$g_i^j(y) = \frac{d^j}{dy^j} \frac{f_i(y)}{f_1(y)} = \frac{1}{f_1(y)} \frac{d^j}{dy^j} f_i(y) + \sum_{s=0}^{j-1} a_{s,j}(y) \frac{d^s}{dy^s} f_i(y),$$

waarbij $a_{s,j}(y)$ niet van i afhangt. Dus geldt voor alle $y \in Y$ en alle $m \leq k$

$$1 = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} f_1(y) & f_1^1(y) & \dots & f_1^{m-1}(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_m(y) & f_m^1(y) & \dots & f_m^{m-1}(y) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} f_1(y) & 0 & & 0 \\ f_2(y) & g_2^1(y) & \dots & g_2^{m-1}(y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_m(y) & g_m(y) & \dots & g_m^{m-1}(y) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} g_2^1(y) & \dots & g_2^{m-1}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m^1(y) & \dots & g_m^{m-1}(y) \end{vmatrix} .$$

Volgens de inductie veronderstelling impliceert dit, dat

$$\begin{vmatrix} g_2^1(y_2) & \dots & g_2^1(y_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g_m^1(y_2) & \dots & g_m^1(y_m) \end{vmatrix} > 0$$

voor alle $y_2 < y_3 < \dots < y_m$ en alle $m \leq k$. Voor $y_1 < y_2 < \dots < y_m$ en alle $m \leq k$ heeft deze determinant echter hetzelfde teken als de determinant in ongelijkheid (a).

<u>Stelling 1.1.</u>

Als X en Y open intervallen zijn en alle hieronder aangegeven partiële afgeleiden bestaan en continu zijn, dan impliceert het feit dat f $TP_k$ is, dat

$$\text{(a)} \qquad \begin{vmatrix} f(x_1,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_1,y) & \dots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} f(x_1,y) \\ f(x_2,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_2,y) & \dots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} f(x_2,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x_m,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x_m,y) & \dots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} f(x_m,y) \end{vmatrix} \geq 0$$

voor alle $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $x_i \in X$, alle $y \in Y$ en alle $1 \leq m \leq k$. Op zijn beurt impliceert dit, dat

$$(b)\qquad \begin{vmatrix} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) & \ldots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) & \ldots & \frac{\partial^m}{\partial x \partial y^{m-1}} f(x,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f(x,y) & \frac{\partial^m}{\partial x^{m-1} \partial y} f(x,y) & \ldots & \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{m-1}} f(x,y) \end{vmatrix} \geq 0$$

voor alle $x \in X$ en alle $y \in Y$ en alle $1 \leq m \leq k$. Omgekeerd: als ongelijkheid (b) overal strikt is, dan is ongelijkheid (a) overal strikt, hetgeen op zijn beurt impliceert, dat f strikt $TP_k$ is.

Bewijs:

Pas lemma 1.1 toe op $f_i(y) = f(x_i,y)$ op Y en op $f_i(x) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} f(x,y)$ op X.

Voorbeeld 1.1.

Zij $a(x) > 0$ en $b(y) > 0$ voor alle $x,y \in R^1$ en zij $\phi(x)$ en $\psi(y)$ stijgend op $R^1$. Dan is

$$f(x,y) = a(x)e^{\phi(x)\psi(y)}b(y)$$

strikt $TP_\infty$ op $R^2$.

Bewijs:

Daar $f\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_m \\ y_1 & \ldots & y_m \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m} a(x_i) \prod_{j=1}^{m} b(y_j)$. Det $(e^{\phi(x_i)\psi(y_j)})$ is het voldoende om aan te tonen dat $e^{\phi(x)\psi(y)}$ strikt $TP_\infty$ is. Vanwege de monotonie van $\phi$ en $\psi$ is het voldoende om aan te tonen dat $g(x,y) = e^{xy}$ strikt $TP_\infty$ is. Nu geldt:

$$\begin{vmatrix} g(x_1,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_1,y) & \cdots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} g(x_1,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(x_m,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x_m,y) & \cdots & \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} g(x_m,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x_1 y} & x_1 e^{x_1 y} & \cdots & x_1^{m-1} e^{x_1 y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{x_m y} & x_m e^{x_m y} & \cdots & x_m^{m-1} e^{x_m y} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{y\Sigma x_i} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1} \end{vmatrix} = e^{y\Sigma x_i} \prod_{j<i} (x_i - x_j) > 0.$$

De TP eigenschap berust dus hier op de eigenschappen van de bovenstaande VANDERMONDE determinant.

Lemma 1.2. (Aufgaben van Pólya en Szegö)

Zij $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, en $g_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, gedefiniëerd op een verzameling $T \subseteq R^1$ en zij $\mu$ een maat op $T$. Zij $h_{ij}$ gedefiniëerd door de absoluut convergente integralen

$$h_{ij} = \int_T f_i(t) g_j(t)\, d\mu(t), \quad i,j = 1, 2, \ldots, m.$$

Dan geldt:

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m,1} & \cdots & h_{m,m} \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{\substack{t_1<t_2<\cdots<t_m \\ t_s\in T}}{\int \cdots \int} \begin{vmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(t_1) & \cdots & f_m(t_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(t_1) & \cdots & g_m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(t_m) & \cdots & g_m(t_m) \end{vmatrix} d\mu(t_1) \cdots d\mu(t_m).$$

Bewijs:

Zij $\Pi$ de verzameling van alle permutaties $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(m))$ van de getallen $1, 2, \ldots, m$ en zij $\nu(\pi) = 0, 1$ al naar gelang $\pi$ even of oneven is. Dan is

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m,1} & \ldots & h_{m,m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{\pi\in\Pi} \sum_{\pi'\in\Pi} (-1)^{\nu(\pi)+\nu(\pi')} \int_T \ldots \int_T f_{\pi(1)}(t_1) g_{\pi'(1)}(t_1) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot f_{\pi(m)}(t_m) g_{\pi'(m)}(t_m) d\mu(t_1) \ldots d\mu(t_m) =$$

$$= \frac{1}{m!} \int_T \ldots \int_T \begin{vmatrix} f_1(t_1) & \ldots & f_1(t_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(t_1) & \ldots & f_m(t_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(t_1) & \ldots & g_m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(t_m) & \ldots & g_m(t_m) \end{vmatrix} d\mu(t_1) \ldots d\mu(t_m).$$

Als $t_s = t_{s'}$, voor $s \neq s'$, is de integrand nul. Het integratie-gebied kan dus worden gesplitst in $m!$ delen van de vorm

$$t_{\pi''(1)} < t_{\pi''(2)} < \ldots < t_{\pi''(m)},$$

waarbij $\pi''$ de verzameling $\Pi$ doorloopt. Daar het verwisselen van t's in de integrand neerkomt op het verwisselen van kolommen respectievelijk rijen in de twee determinanten, is de waarde van de integraal over zo'n gebied gelijk aan $(-1)^{2\nu(\pi'')} = 1$ maal de waarde van de integraal over het gebied $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$.

Dit resultaat wordt in de theorie voortdurend gebruikt. De belangrijkste toepassing is:

Stelling 1.2.

Zij $f(x,t)$ (strikt) $TP_k$ op $X \times T$ en $g(t,y)$ (strikt) $TP_k$ op $T \times Y$. Zij $h(x,y)$ gedefiniëerd voor alle $x \in X$ en $y \in Y$ door de absoluut convergente integraal

$$h(x,y) = \int_T f(x,t) g(t,y) d\mu(t),$$

waarbij $\mu$ een maat op $T \subseteq R^1$ voorstelt met een spectrum, dat tenminste k punten bevat. Dan is h (strikt) $TP_k$ op $X \times Y$.

Bewijs:

Pas lemma 1.2 toe op $f_i(t) = f(x_i, t)$ en $g_j(t) = g(t, y_j)$.

Het vaststellen van de TP eigenschap bij een bepaalde functie, geschiedt steeds met behulp van de stellingen 1.1 en 1.2 en enige aan lemma 1.2 analoge relaties voor de determinanten uit stelling 1.1.

## 2. De variatie verminderende eigenschap

Zij h een functie gedefiniëerd op $Y \subseteq R^1$.

Definitie 2.1.

Het aantal tekenwisselingen $V(h)$ van h op Y is gelijk aan k, indien een rij $y_1 < y_2 < \ldots < y_{m+1}$, $y_j \in Y$, waarvoor hetzij $(-1)^{j+1}h(y_j) > 0$ voor alle $j = 1, 2, \ldots, m+1$, of $(-1)^j h(y_j) > 0$ voor alle $j = 1, 2, \ldots, m+1$, bestaat voor $m = k$, docht niet voor $m = k + 1$.
Het aantal zwakke tekenwisselingen $V^+(h)$ van h op Y is gelijk aan k, indien een rij $y_1 < y_2 < \ldots < y_{m+1}$, $y_j \in Y$, waarvoor hetzij $(-1)^{j+1}h(y_j) \geq 0$ voor alle $j = 1, 2, \ldots, m+1$, of $(-1)^j h(y_j) \geq 0$ voor alle $j = 1, 2, \ldots, m+1$, bestaat voor $m = k$, doch niet voor $m = k + 1$.

Bij het tellen van zwakke tekenwisselingen wordt dus gezocht naar het maximale aantal tekenwisselingen, dat kan worden verkregen, door de functie in zijn nulpunten een arbitrair teken toe te kennen.

Als $V(h) = k$, is voor alle rijen $y_1 < y_2 < \ldots < y_{k+1}$ die aan de definitie voldoen, hetzij steeds $h(y_1) > 0$, of steeds $h(y_1) < 0$. Anders zou immers een rij met $(k + 1)$ tekenwisselingen kunnen worden samengesteld. Wij geven dit aan, door te zeggen, dat h k tekenwisselingen heeft in de volgorde $(+ - + - \ldots)$ resp. $(- + - + \ldots)$. Dezelfde conventie kan ook voor de zwakke tekenwisselingen worden gehanteerd, tenzij Y slechts $(k + 1)$ punten bevat en $h \equiv 0$ op Y. In dit laatste geval is de volgorde onbepaald.

Stelling 2.1.

Zij $f$ $TP_k$ op $X \times Y$, zij $\mu$ een maat op $Y$ en zij $g(x)$ voor alle $x \in X$ gedefiniëerd door de absoluut convergente integraal

$$g(x) = \int_Y f(x,y)h(y)d\mu(y).$$

Indien $V(h) \leq k - 1$, dan is $V(g) \leq V(h)$; als $V(g) = V(h)$ dan vinden de tekenwisselingen van $h$ en $g$ in dezelfde volgorde plaats.

Bewijs:

Stel $V(h) = m$. Er bestaat een partitie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m+1}$ van $Y$, zodanig, dat $y_{i-1} \in Y_{i-1}$ en $y_i \in Y_i$ impliceert $y_{i-1} < y_i$ en $h(y_{i-1})h(y_i) \leq 0$, met strikte ongelijkheid voor minstens één paar $y_{i-1}, y_i$, $i = 2, 3, \ldots, m + 1$. Zonder verlies van elgemeenheid veronderstellen wij, dat $h(y) \geq 0$ voor $y \in Y_1$ en dus dat $(-1)^{i+1}h(y) \geq 0$ voor $y \in Y_i$. Zij

$$G_i(x) = \left|\int_{Y_i} f(x,y)h(y)d\mu(y)\right|, \quad i = 1, 2, \ldots, m + 1,$$

zodat

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1}G_i(x).$$

Voor $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$, $x_j \in X$, geldt

$\det(G_i(x_j)) =$

$$= \int_{Y_{m+1}} \ldots \int_{Y_1} f\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_{m+1} \\ y_1 & \ldots & y_{m+1} \end{pmatrix} |h(y_1)| \ldots |h(y_{m+1})| d\mu(y_1) \ldots d\mu(y_{m+1}) \geq 0,$$

daar $f$ $TP_k$ is en $m + 1 \leq k$. Hetzelfde geldt voor iedere onderdeterminant, mits de oorspronkelijke volgorde van rijen en kolommen niet wordt veranderd.

Veronderstel, dat de stelling onjuist zou zijn en dat dus hetzij $V(g) > m$ zou zijn, of $V(g) = m$ doch $g(x) \leq 0$ links van zijn kleinste tekenwisseling. Dit is equivalent met de bewering, dat $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$

zo gekozen kunnen worden, dat $g(x_i) = (-1)^i \alpha_i$ met $\alpha_i > 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Dit betekent, dat het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}
a_1G_1(x_1) + a_2G_2(x_1) + \ldots + a_{m+1}G_{m+1}(x_1) &= -\alpha_1 \\
a_1G_1(x_2) + a_2G_2(x_2) + \ldots + a_{m+1}G_{m+1}(x_2) &= \alpha_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_1G_1(x_{m+1}) + a_2G_2(x_{m+1}) + \ldots + a_{m+1}G_{m+1}(x_{m+1}) &= (-1)^{m+1}\alpha_{m+1}
\end{aligned}$$

voor deze $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$ en $\alpha_i > 0$ een oplossing $a_i = (-1)^{i+1}$ $i = 1, 2, \ldots, m+1$, zou hebben.

Indien $D = \det\,(G_i(x_j)) > 0$ heeft het stelsel echter een unieke oplossing, waarbij

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & G_2(x_1) & & G_{m+1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{m+1}\alpha_{m+1} & G_2(x_{m+1}) & \ldots & G_{m+1}(x_{m+1}) \end{vmatrix}}{D} = \frac{-\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i D_i}{D},$$

waarin $D_i \geq 0$ de determinant is, die uit D wordt verkregen door weglaten van de eerste kolom en de i-de rij. Dus geldt $a_1 \leq 0$, hetgeen in tegenspraak is met $a_i = (-1)^{i+1}$ en dus het bewijs levert voor het geval waarin $D > 0$.

Daar $D \geq 0$, resteert het geval $D = 0$. Het bewijs verloopt met inductie naar $V(h)$. Voor $V(h) = 0$ is de stelling juist; stel, dat de stelling juist is voor $V(h) \leq m - 1$ en onjuist voor $V(h) = m \leq k - 1$. Daar $D = 0$, kan voor zekere $i_0$ de $i_0$-de kolom van D geschreven worden als een lineaire combinatie van de overige kolommen:

$$G_{i_0}(x_j) = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i G_i(x_j), \; j = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Zij $b_i = a_i + a_{i_0}\lambda_i$. Het stelsel

$$b_1G_1(x_1) +\dots+b_{i_0-1}G_{i_0-1}(x_1) +b_{i_0+1}G_{i_0+1}(x_1) +\dots+b_{m+1}G_{m+1}(x_1) =$$
$$\vdots \qquad = -\alpha_1$$
$$b_1G_1(x_{m+1})+\dots+b_{i_0-1}G_{i_0-1}(x_{m+1})+b_{i_0+1}G_{i_0+1}(x_{m+1})+\dots+b_{m+1}G_{m+1}(x_{m+1})=$$
$$= (-1)^{m+1}\alpha_{m+1}$$

zou dus een oplossing $b_i = (-1)^{i+1} + (-1)^{i_0+1}\lambda_i$, $i = 1,\dots, i_0 - 1, i_0 + 1,\dots, m + 1$, hebben. Beschouw de functie

$$h^*(y) = [(-1)^{i+1} + (-1)^{i_0+1}\lambda_i]\,|h(y)| \qquad \text{voor } y \in Y_i,\ i \neq i_0,$$
$$= 0 \qquad \text{voor } y \in Y_{i_0}.$$

$h^*(y)$ heeft geen tekenwisseling op één der verzamelingen $Y_i$. Daar $h \equiv 0$ op $Y_{i_0}$ is $V(h^*) \leq m - 1$ op $Y$. Volgens de inductie-veronderstelling geldt dus voor

$$g^*(x) = \int_Y f(x,y)h^*(y)d\mu(y) = \sum_{i\neq i_0} [(-1)^{i+1} + (-1)^{i_0+1}\lambda_i]G_i(x),$$

$V(g^*) \leq m - 1$ op $X$. Echter, volgens het bovenstaande geldt

$$g^*(x_j) = \sum_{i\neq i_0} [(-1)^{i+1} + (-1)^{i_0+1}\lambda_i]G_i(x_j) = (-1)^j\alpha_j,$$
$$j = 1, 2,\dots, m + 1,$$

waarbij $x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1}$ en $\alpha_j > 0$. Dit is in tegenspraak met $V(g^*) \leq m - 1$.

Stelling 2.2.

Indien, onder de veronderstellingen van stelling 2.1, f bovendien strikt $TP_k$ is, dan geldt zelfs $V^+(g) \leq V(h)$, tenzij $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op $Y$. Indien niet $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op $Y$ en indien $V^+(g) = V(h)$, dan vinden de zwakke tekenwisselingen van g plaats in dezelfde volgorde als de tekenwisselingen van h.

Bewijs:

Als $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op één of meer der $Y_i$ uit het vorige bewijs, dan her-definiëren wij $h \equiv 0$ op deze $Y_i$ en verkleinen zo $V(h)$ zonder $g$ te veranderen. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen wij dus verder, dat $V(h) = m \leq k - 1$, dat $h \not\equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op elk der $Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, en dat $h \geq 0$ op $Y_1$. Wij volgen nu verder het bewijs van stelling 2.1 met twee verschilpunten.
Ten eerste is nu $f$ strikt $TP_k$ en $h \not\equiv 0$ bijna overal op ieder der $Y_i$, zodat nu $D = \text{Det}\,(G_i(x_j)) > 0$ voor alle $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$; ook alle onderdeterminanten zijn strikt positief.
Het tweede verschil is, dat wij ditmaal het bestaan veronderstellen van $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$, zodat $g(x_j) = (-1)^j \alpha_j$, waarbij nu $\alpha_j \geq 0$ in plaats van $\alpha_j > 0$.
Ondanks deze wijziging leidt het eerste deel van het bewijs van stelling 2.1 (waar $D > 0$ werd verondersteld) ook nu tot de contradictie $a_1 = 1$, $a_1 \leq 0$. Er zijn dus geen m zwakke tekenwisselingen in de "verkeerde" volgorde en dus ook niet meer dan m zwakke tekenwisselingen.

N.B. Uit het bewijs volgt tevens dat $g$ hoogstens $V(h) = m$ nulpunten kan hebben, tenzij $h \equiv 0$ bijna overal en dus $g \equiv 0$ (Kies alle $\alpha_j = 0$). Als $X$ meer dan $(m+1)$ punten bevat ligt dit voor de hand, daar toevoeging van één extra punt aan $(m+1)$ nulpunten $(m+1)$ zwakke tekenwisselingen ten gevolge zou hebben. Indien $X$ echter uit $(m+1)$ punten bestaat is dit minder duidelijk. In een zeer speciale interpretatie staat dit overigens wel in de stelling, daar de $(m+1)$ nulpunten m zwakke tekenwisselingen zonder bepaalde volgorde vormen.

Uit stelling 2.1 en 2.2 tezamen kan nog de volgende precisering worden verkregen:

Stelling 2.3.

Zij $f$ strikt $TP_k$ op $X \times Y$, zij $\mu$ een maat op $Y$ en zij $g(x)$ gedefiniëerd voor alle $x \in X$ door de absoluut convergente integraal

$$g(x) = \int_Y f(x,y)h(y)d\mu(y).$$

Indien $V(h) = m \leq k - 1$ en de tekenwisselingen van h zich in de volgorde $(+ - + - \dots)$ afspelen, dan is hetzij $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op $Y$, of er bestaat een rij $-\infty = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq x_{m+1} = \infty$, zodanig, dat

$$g(x) > 0 \quad \text{voor} \quad x_{2i} < x < x_{2i+1}, \; x \in X, \; i = 0, 1, \dots, \left[\frac{m}{2}\right]$$

$$g(x) < 0 \quad \text{voor} \quad x_{2i+1} < x < x_{2i+2}, \; x \in X, \; i = 0, 1, \dots, \left[\frac{m-1}{2}\right].$$

Het bewijs van deze stelling is zeer gedetailleerd en wordt hier niet gegeven.

Indien $V(h) = m \leq k - 1$ en de tekenwisselingen van h zich in de volgorde $(+ - + - \ldots)$ afspelen, dan is hetzij $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op Y, of er bestaat een rij $-\infty = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} = \infty$, zodanig, dat

$$g(x) > 0 \text{ voor } x_{2i} < x < x_{2i+1},\ x \in X,\ i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m}{2}\right]$$

$$g(x) < 0 \text{ voor } x_{2i+1} < x < x_{2i+2},\ x \in X,\ i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m-1}{2}\right].$$

Het bewijs van deze stelling is zeer gedetailleerd en wordt hier niet gegeven.

Indien wij bovendien nog differentieerbaarheid veronderstellen kan de variatie verminderende eigenschap nog iets worden verscherpt:

Stelling 2.4.

Zij f strikt $TP_k$ op (X,Y), waarbij X een open interval voorstelt, en zij f (k-1) maal continu differentieerbaar naar x voor alle $y \in Y$. Zij $\mu$ een maat op Y en h een functie op Y zodanig, dat

$$g(x) = \int_Y f(x,y)h(y)d\mu(y)$$

(k-1) maal naar x kan worden gedifferentiëerd onder het integraal teken. Indien $V(h) \leq k - 1$, dan bezit g ten hoogste V(h) nulpunten met inachtneming van multipliciteiten, tenzij $h \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal op Y.

Het bewijs wordt hier niet gegeven.

3. Totaal positieve wh-dichtheden

Zij $F(x,\omega)$ een familie wh. verdelingsfuncties met drager $X \subseteq R^1$, parameter $\omega \in \Omega \subseteq R^1$ en dichtheden $p(x,\omega)$ met betrekking tot een $\sigma$-finiete maat $\mu$ op X:

$$F(x,\omega) = \int_{-\infty}^{x} p(t,\omega)d\mu(t).$$

Uiteraard is iedere wh-dichtheid p $TP_1$. p is $TP_2$ indien voor ieder paar $x_1 < x_2 \in X$ en ieder paar $\omega_1 < \omega_2 \in \Omega$

$$\begin{vmatrix} p(x_1,\omega_1) & p(x_1,\omega_2) \\ p(x_2,\omega_1) & p(x_2,\omega_2) \end{vmatrix} \geq 0,$$

d.w.z.

$$\frac{p(x_1,\omega_2)}{p(x_1,\omega_1)} \leq \frac{p(x_2,\omega_2)}{p(x_1,\omega_1)},$$

d.w.z. indien voor $\omega_1 < \omega_2 \in \Omega$ de likelihood-ratio

$$\frac{p(x,\omega_2)}{p(x,\omega_1)} \text{ niet-dalend is in } x.$$

De (strikte) $TP_2$ eigenschap betekent dus, dat wij met een (strikte) monotone likelihood-ratio familie te maken hebben. De beperking tot wh-dichtheden heeft tot gevolg, dat deze $TP_2$ families monotonie bewarend zijn; $TP_3$ families bewaren convexiteit:

Stelling 3.1.

Zij $p(x,\omega)$ en $TP_2$ familie wh-dichtheden op $(X,\Omega)$ en zij

$$g_i(\omega) = \int_X p(x,\omega)h_i(x)d\mu(x),\ i = 1,\ 2.$$

Indien $h_1$ niet-dalend is, is $g_1$ niet dalend. Indien bovendien $h_2$ convex is in $h_1$ en p $TP_3$ is, dan is $g_2$ convex in $g_1$.
Als p strikt $TP_2$ is, is $g_1$ zelfs strikt stijgend, tenzij $h_1 \equiv c$ $\mu$ - bijna overal. Als p strikt $TP_3$ is, is $g_2$ zelfs strikt convex in $g_1$ tenzij $h_2$ lineair in $h_1$ is $\mu$ - bijna overal.
Bewijs:
Daar $h_1(x) - c$ voor iedere constante c hoogstens één tekenwisseling heeft in de volgorde - + geldt hetzelfde voor

$$g_1(\omega) - c = \int_X p(x,\omega)[h_1(x) - c]d\mu(x),$$

zodat $g_1$ niet-dalend is. Als p strikt $TP_2$ is, is zelfs $V^+(g_1 - c) \leq 1$ en $g_1$ dus strikt stijgend, tenzij $h_1 \equiv c$ $\mu$ - bijna overal.
Daar $h_2$ convex in $h_1$ heeft $h_2(x) - a - bh_1(x)$ hoogstens twee tekenwisselingen in de volgorde + - +, zodat hetzelfde geldt voor

$$g_2(\omega) - a - bg_1(\omega) = \int_X p(x,\omega)\left[h_2(x) - a - bh_1(x)\right]d\mu(x),$$

d.w.z. $g_2$ is convex in $g_1$. Als p strikt $TP_3$ is, is $V^+(g_2 - a - bg_1) \leq 2$, d.w.z. $g_2$ is strikt convex in $g_1$, tenzij $h_2 - a - bh_1 \equiv 0$ $\mu$ - bijna overal.

N.B. De bovenstaande $TP_2$ en $TP_3$ eigenschappen zijn voldoende maar niet nodig voor het bewaren van monotonie en convexiteit in de hier gegeven formulering. Indien $q(x,\omega) = -\frac{\partial}{\partial\omega} F(x,\omega)$ bestaat, is nodig en voldoende, dat q $TP_1$ resp. $TP_2$ is.

Wij besluiten deze paragraaf door op te merken, dat behalve alle één-parameter exponentiële families ook de niet-centrale F, t en $\chi^2$ verdelingen met betrekking tot hun niet-centraliteits parameters strikt $TP_\infty$ dichtheden bezitten. Een bewijs wordt hier niet gegeven.

## 4. Toetsingstheorie

Gegeven is een familie wh-verdelingsfuncties $F(x,\omega)$, met drager $X \subseteq R^1$, parameter $\omega \in \Omega \subseteq R^1$, en dichtheden $p(x,\omega)$ m.b.t. een $\sigma$-finiete maat $\mu$ op X:

$$F(x,\omega) = \int_{t=-\infty}^{x} p(x,\omega)d\mu(t).$$

Op grond van een waarneming van $\underline{x}$ met een onbekende verdeling uit de familie ($\underline{x}$ is bijv. een sufficient statistic voor het probleem) wensen wij een hypothese $H_0$ over $\omega$ te toetsen. Er zijn twee mogelijke beslissingen. Beslissing 1: verwerp $H_0$ niet; Beslissing 2: verwerp $H_0$. Gegeven zijn twee meetbare verliesfuncties $L_1(\omega)$ en $L_2(\omega)$, die het verlies voorstellen bij het nemen van beslissing 1 resp. 2, indien $\omega$ de ware parameterwaarde is.

Wij definiëren

$$h(\omega) = L_1(\omega) - L_2(\omega).$$

In toetsings-terminologie luidt de nulhypothese: $h(\omega) < 0$, het alternatief $h(\omega) > 0$ en het indifferentiegebied: $h(\omega) = 0$. $h$ geeft echter bovendien de kracht van onze voorkeur voor verwerpen of niet verwerpen van $H_0$ aan. Zij $V(h)$ als tevoren het aantal tekenwisselingen van $h$ op $\Omega$. Wij veronderstellen steeds, dat $h$ van teken wisselt in de volgorde $+ - + - \ldots$ . De kleinste waarden van $\omega$ behoren dus tot het alternatief, zodat beslissing 2, verwerpen van $H_0$, daar gewenst is.

Zij $\phi$ een beslissingsfunctie of strategie, d.w.z. $\phi$ is een meetbare functie op $X$ en stelt de lotingskans op beslissing 2 (verwerpen van $H_0$) voor, indien $\underline{x} = x$ wordt waargenomen. Wij identificeren beslissingsfuncties $\phi_1$ en $\phi_2$ als $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$ - bijna overal. $\phi$ behoort tot de klasse $\mathfrak{M}_m$ van monotone strategieën, als $\phi$ van de vorm is (voor $x \in X$):

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x_{2i} < x < x_{2i+1},\ i = 0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}] \\ \lambda_j & \text{als } x = x_j,\ 0 \leq \lambda_j \leq 1,\ j = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{elders op } X, \end{cases}$$

waarbij $-\infty = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} = \infty$. Als alle $x_j$ verschillend zijn, prefereren wij dus beslissing 2 in $[\frac{m}{2}] + 1$ intervallen, beslissing 1 in $[\frac{m+1}{2}]$ intervallen, terwijl in $m$ punten mogelijk loting plaats vindt. Uiteraard geldt $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}_{m+1}$.

Het risico behorende bij een strategie $\phi$ en een ware parameterwaarde is het verwachte verlies

$$\rho(\omega,\phi) = \int_X [(1 - \phi(x))L_1(\omega) + \phi(x)L_2(\omega)]p(x,\omega)d\mu(x) =$$

$$= L_1(\omega) - \int_X \phi(x)h(\omega)p(x,\omega)d\mu(x).$$

Indien H een a priori verdeling op $\Omega$ voorstelt, dan is het bij een strategie $\phi$ behorende Bayes risico tegen H:

$$\rho(H,\phi) = \int_\Omega \rho(\omega,\phi)dH(\omega) =$$

$$= \int_\Omega L_1(\omega)dH(\omega) - \int_X \left[\int_\Omega p(x,\omega)h(\omega)dH(\omega)\right] \cdot \phi(x)d\mu(x) =$$

$$= \int_\Omega L_1(\omega)dH(\omega) - \int_X g(x)\phi(x)d\mu(x),$$

waarin

$$g(x) = \int_\Omega p(x,\omega)h(\omega)dH(\omega).$$

Wij veronderstellen, dat deze integraal absoluut convergeert voor alle $x \in X$. De Bayes-strategieën tegen H, d.w.z. de strategieën $\phi$ waarvoor $\rho(H,\phi)$ minimaal is, worden dus door de functie g bepaald. Voor $g(x) > 0$ is $\phi(x) = 1$ (verwerp $H_0$), voor $g(x) < 0$ is $\phi(x) = 0$ (verwerp $H_0$ niet); op de verzameling $\{x: g(x) = 0\}$ is de Bayes-strategie onbepaald.

Stelling 4.1.

Zij $V(h) = m$ en zij p strikt $TP_{m+1}$ op $(X,\Omega)$. Dan zijn voor een willekeurige a priori verdeling H hetzij alle strategieën Bayes, of de Bayes strategie behoort tot $\mathcal{M}_m$ en is eenduidig bepaald, behalve wellicht in sommige der punten $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$, die deze strategie in $\mathcal{M}_m$ beschrijven.

Bewijs:

Volgens stelling 2.3 is hetzij $h = 0$ H - bijna overal en dus $g \equiv 0$ op X, in welk geval alle strategieën Bayes zijn, of

$$g(x) > 0 \quad \text{voor} \quad x_{2i} < x < x_{2i+1}, \; x \in X, \; i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m}{2}\right]$$

$$g(x) < 0 \quad \text{voor} \quad x_{2i+1} < x < x_{2i+2}, \; x \in X, \; i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m-1}{2}\right]$$

waarbij $-\infty = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} = \infty$. Daar $g(x) \gtrless 0$ impliceert dat $\phi(x) = {1 \atop 0}$ behoort de Bayes strategie tot $\mathcal{M}_m$; hij is eenduidig bepaald behalve in nulpunten van g. Dit kunnen geen sommige of alle der $x_1 \ldots x_m$ zijn.

N.B. $\phi$ is dus slechts niet van de vereiste vorm in het triviale geval, dat de a priori verdeling H zich concentreert in de nulpunten van $h = L_1 - L_2$.

Een verzameling van strategieën $\mathcal{M}$ vormt een essentiëel volledige klasse, indien er voor iedere $\phi_1 \notin \mathcal{M}$ een $\phi_2 \in \mathcal{M}$ bestaat, zodat $\rho(\omega, \phi_2) \leq \rho(\omega, \phi_1)$ voor alle $\omega \in \Omega$. $\mathcal{M}$ is volledig indien de ongelijkheid bovendien steeds voor minstens één $\omega \in \Omega$ strikt is. $\mathcal{M}$ is minimaal volledig indien $\mathcal{M}$ volledig is en $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}$, $\rho(\omega, \phi_1) \leq \rho(\omega, \phi_2)$ voor alle $\omega \in \Omega$ impliceert, dat $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$ - bijna overal.
In het algemeen vormen de Bayes strategieën onder lichte regulariteitsvoorwaarden een essentiëel volledige klasse. Wij gebruiken hier

Voorwaarde A

Er bestaat een aftelbare deelverzameling $\Omega_0 \subseteq \Omega$, zodanig, dat er voor iedere $\omega \in \Omega$ een rij $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega_0$ bestaat, waarvoor

$$\lim_{n\to\infty} h(\omega_n) = h(\omega) \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} p(x, \omega_n) = p(x, \omega) \quad \text{voor} \quad \mu \text{ - bijna alle } x \in X.$$

Dan geldt:

Stelling 4.2.

Zij $V(h) = m$, zij p strikt $TP_{m+1}$ op $(X, \Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Dan is $\mathcal{M}_m$ een essentiëel volledige klasse van beslissingsfuncties.

Het bewijs is een kwestie van techniek.

Lemma 4.1.

Zij $\phi_1 \in \mathcal{M}_m$ en $\phi_2$ strategieën op X. Dan is $V(\phi_1 - \phi_2) \leq m$ en indien $V(\phi_1 - \phi_2) = m$, dan verandert $\phi_1 - \phi_2$ van teken in de volgorde + - + - ... .
Als bovendien $\phi_2 \in \mathcal{M}_m$, dan is $V(\phi_1 - \phi_2) \leq m - 1$.

Bewijs:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x_{2i} < x < x_{2i+1},\ x \in X,\ i = 0, 1, \dots, [\frac{m}{2}] \\ \lambda & \text{voor } x = x_i,\ x \in X,\ i = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{elders op } X, \end{cases}$$

met $-\infty = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq x_{m+1} = \infty$. Daar $0 \leq \phi_2 \leq 1$, is

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) \geq 0 \text{ voor } x_{2i} < x < x_{2i+1},\ x \in X,\ i = 0, 1, \dots, [\tfrac{m}{2}]$$
$$\leq 0 \text{ voor } x_{2i+1} < x < x_{2i+2},\ x \in X,\ i = 0, 1, \dots, [\tfrac{m-1}{2}],$$

waarmee het eerste deel van de stelling bewezen is. Als ook $\phi_2 \in \mathcal{M}_m$ en $V(\phi_1 - \phi_2) = m$, dan zouden volgens het voorgaande $(\phi_1 - \phi_2)$ zowel als $(\phi_2 - \phi_1)$ m tekenwisselingen in de volgorde + - + - ... bezitten, hetgeen niet kan.

Lemma 4.2

Zij $\phi_1 \in \mathcal{M}_m$ en $\phi_2$ strategieën op X, zij p strikt $TP_{m+1}$ op $(X, \Omega)$ en zij

$$\psi_j(\omega) = \int_X p(x, \omega)\phi_j(x)d\mu(x),\ j = 1, 2,$$

het onderscheidend vermogen van $\phi_j$. Dan is òf $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$ - bijna overal, òf $V^+(\psi_1 - \psi_2) \leq m$ en $\psi_1 - \psi_2$ bezit hoogstens m nulpunten. Indien niet $\phi_1 = \phi_2$ bijna overal, en $V^+(\psi_1 - \psi_2) = m$, dan vinden de zwakke tekenwisselingen van $\psi_1 - \psi_2$ plaats in de volgorde + - + - ... .
Als bovendien $\phi_2 \in \mathcal{M}_m$, dan is òf $\phi_1 = \phi_2$ b.o., òf $V^+(\psi_1 - \psi_2) \leq m - 1$ en $\psi_1 - \psi_2$ bezit hoogstens (m-1) nulpunten.

Bewijs:

Gebruik lemma 4.1 en pas stelling 2.2 en de opmerking erna toe op

$$\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega) = \int_X p(x,\omega)[\phi_1(x) - \phi_2(x)]d\mu(x).$$

Stelling 4.3.

Zij $V(h) = m$, zij $p$ strikt $TP_{m+1}$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Dan is $\mathcal{M}_m$ een minimaal volledige klasse beslissingsfuncties.

Bewijs:

Volgens stelling 4.2 is er voor iedere strategie $\phi_2$ een $\phi_1 \in \mathcal{M}_m$ met $\rho(\omega,\phi_2) \geq \rho(\omega,\phi_1)$ voor alle $\omega \in \Omega$, d.w.z.

$$0 \leq \rho(\omega,\phi_2) - \rho(\omega,\phi_1) = h(\omega)\int_X p(x,\omega)[\phi_1(x) - \phi_2(x)]d\mu(x) =$$

$$= h(\omega)[\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega)]$$

voor alle $\omega \in \Omega$. Daar $V(h) = m$ bestaat er een rij $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{m+1}$, zodat $(-1)^{i-1}h(\omega_i) > 0$ en dus $(-1)^{i-1}[\psi_1(\omega_i) - \psi_2(\omega_i)] \geq 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Derhalve is $V^+(\psi_1 - \psi_2) \geq m$. Volgens lemma 4.2 is dus òf $\phi_1 = \phi_2$ b.o., of $\phi_2 \notin \mathcal{M}_m$, $V^+(\psi_1 - \psi_2) = m$ en $\psi_1 - \psi_2$ bezit hoogstens m nulpunten. Indien $\phi_2$ dus niet geïdentificeerd kan worden met een strategie in $\mathcal{M}_m$ dan geldt dus voor minstens één $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ $(-1)^{i_0-1}[\psi_1(\omega_{i_0}) - \psi_2(\omega_{i_0})] > 0$, of $\rho(\omega_{i_0},\phi_2) > \rho(\omega_{i_0},\phi_1)$, hetgeen de volledigheid van $\mathcal{M}_m$ aantoont. Indien $\phi_2 \in \mathcal{M}_m$ dan is $\phi_2 = \phi_1$ b.o. hetgeen bewijst, dat $\mathcal{M}_m$ minimaal is.

N.B. Uit het voorafgaande is met behulp van stelling 2.3 nog iets meer te halen. Indien $\phi_1 \in \mathcal{M}_m$, $\phi_2 \notin \mathcal{M}_m$ (d.w.z. $\phi_2$ is niet met een strategie uit $\mathcal{M}_m$ te identificeren) en $\rho(\omega,\phi_1) \leq \rho(\omega,\phi_2)$, dan is volgens het bovenstaande $V^+(\psi_1 - \psi_2) = m$. Door toepassing van stelling 2.3 i.p.v. stelling 2.2 op de situatie in lemma 4.2 vinden wij, dat $\psi_1 - \psi_2$ van de vorm is:

$$\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega) > 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \dots, \left[\tfrac{m}{2}\right]$$
$$< 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i+1} < \omega < \omega_{2i+2}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \dots, \left[\tfrac{m-1}{2}\right],$$

waarbij $-\infty = \omega_0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_m \leq \omega_{m+1} = \infty$. Daar $V^+(\psi_1 - \psi_2) = m$ is geen der $\omega_1, \dots, \omega_m$ gelijk aan $\pm\infty$ en kunnen hoogstens twee opeenvolgende $\omega_i$ samenvallen. Daar $h(\omega)\left[\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega)\right] \geq 0$ is, geldt

$$h(\omega) \geq 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \dots, \left[\tfrac{m}{2}\right]$$
$$\leq 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i+1} < \omega < \omega_{2i+2}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \dots, \left[\tfrac{m-1}{2}\right].$$

Daar $V(h) = m$ is het zinvol de verzameling $\{\omega_i, \dots, \omega_m\}$ een stelsel teken-wisselpunten van h te noemen. Een dergelijk stelsel behoeft voor h uiteraard niet uniek te zijn. We kunnen nu concluderen dat $\psi_1(\omega) - \psi_2(\omega)$ slechts nul kan zijn op één stelsel teken-wisselpunten van h. Hieruit volgt dus, dat $\rho(\omega,\phi_1) < \rho(\omega,\phi_2)$ behalve in de nulpunten van h en eventueel op één bepaald stelsel teken-wisselpunten van h.

Bij de huidige stand van de theorie valt hierna weinig meer over de situatie te zeggen zonder verder gaande regulariteits voorwaarden. Deze dienen om stelling 2.4, de sterkste versie van de variatie verminderende eigenschap, toe te kunnen passen. Daar van deze stelling slechts een bescheiden gebruik zal worden gemaakt, zal het zonder twijfel mogelijk zijn het gestelde doel onder lichtere voorwaarden te bereiken, dan hier worden gehanteerd.

<u>Voorwaarde $A_k$</u>

$\Omega$ is een niet leeg interval; $p(x,\omega)$ is k maal continu differentiëerbaar naar $\omega$ op $\Omega$ $\mu$ - bijna overal op X en voor iedere strategie $\phi$ is het onderscheidend vermogen $\psi$ k maal continu differentiëerbaar op $\Omega$, waarbij de differentiatie onder het integraal teken kan worden uitgevoerd:

$$\frac{d^k\psi(\omega)}{d\omega^k} = \int_X \frac{\partial^k p(x,\omega)}{\partial\omega^k}\,\phi(x)d\mu(x).$$

Voorwaarde B

$\Omega$ is een niet leeg interval; h bezit hoogstens een aftelbaar aantal discontinuïteiten op $\Omega$; als $V(h) = m$, dan is h van de vorm

$$\begin{aligned} h(\omega) &> 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m}{2}\right] \\ &< 0 \quad \text{voor} \quad \omega_{2i+1} < \omega < \omega_{2i+2}, \ \omega \in \Omega, \ i = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{m-1}{2}\right], \end{aligned}$$

waarbij $-\infty = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_m < \omega_{m+1} = \infty$.

N.B. Het laatste betekent dus, dat het stelsel teken-wisselpunten $\omega_1, \ldots, \omega_m$ van h uniek is en dat de nulpunten van h hierin bevat zijn. Uiteraard kunnen weer hoogstens twee opeenvolgende $\omega_i$ gelijk zijn. Wij merken op dat B en $A_0$ (waarbij slechts continuïteit van p in $\omega$ wordt geëist; continuïteit van $\psi$ volgt dan automatisch via het lemma van Fatou) samen slechts weinig sterker zijn dan voorwaarde A. Het voornaamste verschil is de eis, dat $\Omega$ een interval is.

Door nu stelling 2.4 i.p.v. stelling 2.2 of stelling 2.3 toe te passen kan lemma 4.2 worden versterkt met

Lemma 4.3.

Zij $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}_m$, zij p strikt $TP_{m+1}$ op $(X, \Omega)$ en zij voorwaarde $A_{m-1}$ en voorwaarde B vervuld. Dan is òf $\phi_1 = \phi_2$ $\mu$ - bijna overal, òf $\psi_1 - \psi_2$ bezit hoogstens (m-1) nulpunten met inachtneming van multipliciteiten.

Stelling 4.3 kan nu als volgt worden uitgebreid.

Stelling 4.4.

Zij $V(h) = m$, zij p strikt $TP_{m+1}$ op $(X, \Omega)$ en zij voorwaarde $A_{m-1}$ en voorwaarde B vervuld. Dan is $\mathcal{M}_m$ een minimaal volledige klasse. Bovendien bestaat er voor iedere $\phi \notin \mathcal{M}_m$ slechts één $\phi_1 \in \mathcal{M}_m$ (uniek $\mu$ - b.o.) zodanig, dat $\rho(\omega, \phi_1) \leq \rho(\omega, \phi)$ voor alle $\omega \in \Omega$. Hiervoor geldt $\rho(\omega, \phi_1) < \rho(\omega, \phi)$ behalve in de teken-wisselpunten van h.

Bewijs:

Voor $m = 0$ is de stelling triviaal. Voor $m \geq 1$ impliceren de voorwaarden $A_{m-1}$ en B voorwaarde A zodat de minimale volledigheid uit stelling 4.3 volgt.

Wegens B zijn de teken-wisselpunten van h uniek en bevatten de nulpunten van h. Het laatste deel van de stelling volgt dus uit de opmerking na stelling 4.3. Slechts de uniciteit van $\phi_1$ behoeft dus nog bewezen te worden.

Zij $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_m$ het stelsel teken-wisselpunten van h. Daar

$$h(\omega)[\psi_1(\omega) - \psi(\omega)] \geq 0 \quad \text{voor alle } \omega \in \Omega,$$

$\psi_1 - \psi$ continu is wegens voorwaarden $A_{m-1}$ $(m \geq 1)$ en $h \neq 0$ tussen zijn teken-wisselpunten, geldt

$$\psi_1(\omega_i) = \psi(\omega_i),\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Dit blijft juist voor een dubbel teken-wisselpunt $\omega_{i_0}$ (twee samenvallende $\omega_i$), daar h strikt tegengesteld teken heeft in $\omega_{i_0}$ en in een omgeving van $\omega_{i_0}$. Voorts impliceert het bestaan van zo'n dubbel teken-wisselpunt $\omega_{i_0}$, dat $m \geq 2$; derhalve bestaat volgens voorwaarde $A_{m-1}$ de afgeleide $(\psi_1' - \psi')$ en is deze continu op $\Omega$. Dus

$$\psi_1'(\omega_{i_0}) = \psi'(\omega_{i_0}),$$

d.w.z. $\omega_{i_0}$ is een dubbel nulpunt van $\psi_1 - \psi$. De functie $\psi_1 - \psi$ heeft dus nulpunten in de teken-wisselpunten van h met tenminste dezelfde multipliciteit als de corresponderende teken-wisselpunten. Indien nu $\phi_2 \in \mathcal{M}_m$ en $\rho(\omega,\phi_2) \leq \rho(\omega,\phi)$ voor alle $\omega \in \Omega$, dan geldt hetzelfde voor $\psi_2 - \psi$ en dus ook voor $\psi_1 - \psi_2$. Dan bezit $\psi_1 - \psi_2$ dus minstens m nulpunten met inachtneming van multipliciteiten. Volgens lemma 4.3 betekent dit, dat $\phi_1 = \phi_2$ bijna overal.

## 5. Toepassingen

### 5.1. Uniform meest onderscheidende toetsen (UMP toetsen)

Zij p strikt $TP_2$ (monotone likelihood ratio) op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Beschouw het éénzijdige toetsingsprobleem: $V(h) = 1$,

$$\omega_1 \in \Omega,\ h(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \omega < \omega_1,\ \omega \in \Omega \quad \text{(niet leeg)} \\ -1 & \text{voor } \omega \geq \omega_1,\ \omega \in \Omega \quad \text{(niet leeg)}, \end{cases}$$

d.w.z. toetsing van $H_0$: $\omega \geq \omega_1$ tegen $H_1$: $\omega < \omega_1$. Hiervoor bestaat een UMP toets met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$ (cf. LEHMANN).

Immers, iedere $\phi \in \mathcal{M}_1$ is niet-stijgend, zodat volgens stelling 3.1 het onderscheidend vermogen

$$\psi(\omega) = \int_X p(x,\omega)\phi(x)d\mu$$

een niet-stijgende functie van $\omega$ is. Natuurlijk is er één en slechts één $\phi_1 \in \mathcal{M}_1$, zo dat $\psi_1(\omega_1) = \alpha$. Daar $\psi_1$ niet-stijgend is, is dit een toets met onbetrouwbaarheid $\alpha$. Voor iedere andere toets $\phi_2 \in \mathcal{M}_1$ met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$ geldt $\psi_2(\omega_1) < \alpha$. Daar $V^+(\psi_1 - \psi_2) = 0$ volgens lemma 4.2, is $\psi_1 - \psi_2 > 0$ op $\Omega$, zodat $\phi_1$ uniform meer onderscheidend is dan $\phi_2$. Voor iedere $\phi \notin \mathcal{M}_1$ bestaat er een $\phi_2 \in \mathcal{M}_1$ met $\rho(\omega,\phi_2) \leq \rho(\omega,\phi)$ voor alle $\omega \in \Omega$ en $\rho(\omega,\phi_2) < \rho(\omega,\phi)$ voor alle $\omega \neq \omega_1$ (stelling 4.3 en de daarop volgende opmerking). Als $\phi$ onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$ heeft, geldt dit zelfde voor $\phi_2$ en dus is òf $\phi_1 \equiv \phi_2$ bijna overal, òf $\phi_1$ is uniform meer onderscheidend dan $\phi_2$. $\phi_1$ is dus de unieke UMP toets.

### 5.2. Onbestaanbaarheid van UMP tweezijdige toetsen

Zij p strikt $TP_2$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Beschouw het tweezijdige toetsingsprobleem: $V(h) = 2$,

$$\omega_1 \leq \omega_2 \in \Omega,\ h(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{voor } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2,\ \omega \in \Omega \\ +1 & \text{voor } \omega < \omega_1 \text{ en } \omega > \omega_2,\ \omega \in \Omega \quad \text{(aan weerszijden niet leeg)}. \end{cases}$$

Er bestaat geen UMP toets.

Zij $\phi$ een toets met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$ voor het tweezijdige probleem. Beschouw de éénzijdige situatie:

$$h^*(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{voor } \omega < \omega_1,\ \omega \in \Omega \\ -1 & \text{voor } \omega \geq \omega_1,\ \omega \in \Omega. \end{cases}$$

Indien $\phi \notin \mathcal{M}_1$ dan bestaat er volgens het voorgaande een $\phi_2 \in \mathcal{M}_1$, zodat $\psi_2(\omega) > \psi(\omega)$ voor $\omega < \omega_1$, $\psi_2(\omega) < \psi(\omega) \leq \alpha$ voor $\omega > \omega_1$ en $\psi_2(\omega_1) \leq \psi(\omega_1) \leq \alpha$. $\phi_2$ heeft dus onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$ voor het éénzijdige probleem en dus ook voor het oorspronkelijke tweezijdige probleem en $\phi_2$ is uniform meer onderscheidend dan $\phi$ voor alle $\omega < \omega_1$. $\phi$ is dus niet UMP voor het tweezijdige probleem. Als $\phi \in \mathcal{M}_1$ dan geldt, daar steeds $0 < \alpha < 1$ wordt verondersteld, dat niet $\phi \equiv 0$ of $\phi \equiv 1$ b.o., en daar $\phi$ niet-stijgend is, is $\psi$ strikt dalend in $\omega$ (stelling 3.1). Dit impliceert echter, dat voor $\omega > \omega_2$ de toets $\phi \equiv \alpha$ strikt beter is, zodat $\phi$ niet UMP is voor het tweezijdige probleem.

<u>N.B.</u> KARLIN wijst erop, dat de striktheid van de $TP_2$ eigenschap hier zeer essentiëel is. Voor de homogene verdeling op $[0,\omega]$ bestaat er voor het geval $\omega_1 = \omega_2$ een UMP toets voor $H_0$: $\omega = \omega_1$ tegen $H_1$: $\omega \neq \omega_1$, nl. verwerp $H_0$ niet als $\alpha\omega_1 \leq x \leq \omega_1$. Deze familie dichtheden is $TP_2$ doch niet strikt $TP_1$ of $TP_2$:

$$\begin{vmatrix} p(x_1,\omega_1) & p(x_1,\omega_2) \\ p(x_2,\omega_1) & p(x_2,\omega_2) \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_1\omega_2} & \text{voor } x_1 \leq \omega_1 < x_2 \leq \omega_2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

## 5.3. <u>UMP zuivere toetsen</u>

Zij $m \geq 2$ en p strikt $TP_{m+1}$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde $A_{m-1}$ vervuld. Beschouw het toetsingsprobleem waarbij $H_0$ en $H_1$ de parameterruimte in $(m+1)$ intervallen verdelen, waarin beurtelings $H_1$ en $H_0$ juist zijn: $V(h) = m$,

$$h(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1},\ \omega \in \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}] \quad \text{(alle niet leeg)} \\ -1 & \omega_{2i+1} \leq \omega \leq \omega_{2i+2},\ \omega \in \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, [\frac{m-1}{2}] \quad \text{(alle niet leeg)}, \end{cases}$$

waarbij $-\infty = \omega_0 < \omega_1 \leq \omega_2 < \omega_3 \leq \omega_4 \ldots < \omega_{m+1} = \infty$. Voorwaarde B is dus eveneens vervuld. Voor m = 2 is dit het tweezijdige probleem.

Er bestaat een UMP zuivere toets.

Volgens stelling 4.4 bestaat er één en slechts één toets $\phi_1 \in \mathfrak{M}_m$, die uniform beter is dan $\phi \equiv \alpha$, d.w.z. $\rho(\omega,\phi_1) \leq \rho(\omega,\phi)$ op $\Omega$ en $\rho(\omega,\phi_1) < \rho(\omega,\phi)$ voor $\omega \neq \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dus

$$\psi_1(\omega) \begin{cases} > \alpha & \text{voor } \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1},\ i = 0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}] \\ < \alpha & \text{voor } \omega_{2i+1} < \omega < \omega_{2i+2},\ i = 0, 1, \ldots, [\frac{m-1}{2}], \end{cases}$$

en $\psi_1(\omega_i) = \alpha$, $i = 1, 2, \ldots, m$ vanwege de continuïteit.
Daar $\phi_1$ de enige toets is in $\mathfrak{M}_m$ met $\rho(\omega,\phi_1) \leq \rho(\omega,\phi)$ op $\Omega$, is $\phi_1$ de enige zuivere toets in $\mathfrak{M}_m$.
Voor iedere zuivere toets $\phi_2 \notin \mathfrak{M}_m$ met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha$, bestaat er een $\phi_3 \in \mathfrak{M}_m$, waarvoor $\rho(\omega,\phi_3) \leq \rho(\omega,\phi_2)$ op $\Omega$ met strikte ongelijkheid behalve voor $\omega = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Daar $\phi_3 \in \mathfrak{M}_m$ dus zuiver is, geldt $\phi_3 \equiv \phi_1$ b.o., zodat $\phi_1$ inderdaad UMP zuiver is.

N.B. In het bovenstaande kan uiteraard $\phi \equiv \alpha$ door een willekeurige andere vaste toets $\phi_0$ worden vervangen. Wij vinden dan:
Voor iedere toets $\phi_0$ bestaat er een toets die UMP is met betrekking tot de klasse van alle toetsen $\phi$ met $\rho(\omega,\phi) \leq \rho(\omega,\phi_0)$ op $\Omega$.

## 5.4. Kritieke gebieden van type A

Zij p strikt $TP_3$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde $A_2$ vervuld. Beschouw het tweezijdige toetsingsprobleem voor een enkelvoudige nulhypothese, d.w.z. $V(h) = 2$:

$$\omega_0 \in \Omega \quad h(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{voor} \quad \omega = \omega_0 \\ +1 & \text{voor} \quad \omega \neq \omega_0,\ \omega \in \Omega \quad \text{(aan weerszijden niet leeg).} \end{cases}$$

Voorwaarde B is dus vervuld.

Een kritiek gebied van type A is het kritieke gebied van een toets $\phi$ waarvoor

$$\int_X \phi(x) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} p(x,\omega) \Big|_{\omega_0} d\mu(x)$$

maximaal is onder de randvoorwaarden

$$\int_X \phi(x)p(x,\omega_0)d\mu(x) = \alpha \quad \text{en} \quad \int_X \phi(x) \frac{\partial}{\partial\omega} p(x,\omega) \Big|_{\omega_0} d\mu(x) = 0.$$

Een kritiek gebied van type A is de vereniging van hoogstens twee half oneindige intervallen (doorsneden met X), d.w.z. het complement is een interval (doorsneden met X).

In het voorgaande bewezen wij dat een UMP zuivere toets met onbetrouwbaarheid $\alpha$ bestaat. Dit is de enige $\phi_1 \in \mathcal{M}_2$, waarvoor

$$\int_X \phi(x)p(x,\omega_0)d\mu(x) = \psi_1(\omega_0) = \alpha$$

en

$$\int_X \phi_1(x) \frac{\partial}{\partial\omega} p(x,\omega) \Big|_{\omega_0} d\mu(x) = \psi'(\omega_0) = 0.$$

Immers, het laatste is juist, daar $\psi_1(\omega) > \alpha$ in een omgeving van $\omega_0$ en daar voorwaarde $A_2$ vervuld is; de uniciteit volgt uit het feit, dat iedere $\phi_2 \in \mathcal{M}_2$ met dezelfde eigenschappen volgens lemma 4.3 met $\phi_1$ kan worden geïdentificeerd. Volgens stelling 4.4 behoort bij iedere $\phi \notin \mathcal{M}_2$ een unieke toets $\phi_2 \in \mathcal{M}_2$ die hem strikt verbetert behalve in $\omega_0$. Indien $\phi$ aan de randvoorwaarden voldoet, geldt hetzelfde voor $\phi_2$. Wegens de uniciteit van $\phi_1 \in \mathcal{M}_2$ geldt $\phi_1 = \phi_2$ b.o.. Het type A gebied is dus het kritieke gebied van $\phi_1 \in \mathfrak{M}_2$.

5.5. <u>Type A gebieden als functie van $\alpha$</u>

Beschouw de situatie uit paragraaf 5.4.

Voor $\alpha_1 < \alpha_2$ is het type A kritieke gebied met onbetrouwbaarheid $\alpha_1$ voor het toetsen van $\omega = \omega_0$ tegen alle alternatieven bevat in het type A kritieke gebied met onbetrouwbaarheid $\alpha_2$.
D.w.z. afgezien van eventuele loting, kan men bij het gebruik van type A gebieden spreken van een overschrijdingskans, namelijk de kleinste onbetrouwbaarheid waarbij $\omega = \omega_0$ wordt verworpen. Voor alle grotere waarden van $\alpha$ wordt $\omega = \omega_0$ dan immers eveneens verworpen.

Tot nu toe veronderstelden wij steeds, dat X het spectrum van $\mu$ is, d.w.z. de verzameling van punten, waarvoor iedere open omgeving positieve maat heeft. In dit bewijs is het echter eenvoudiger X te reduceren tot de verzameling van punten x, waarvoor voor iedere $\xi_1 < x < \xi_2$ zowel $(\xi_1, x]$ als $[x, \xi_2)$ positieve $\mu$-maat bezitten. Dit kan zonder bezwaar geschieden, daar slechts een verzameling van "randpunten" met maat 0 wordt verwijderd.

Zij

$$p'(x,\omega_0) = \frac{\partial}{\partial\omega} p(x,\omega) \Big|_{\omega=\omega_0} .$$

Volgens stelling 1.1 (waarbij de voorwaarde, dat X een interval is, kan vervallen, daar alleen naar $\omega$ wordt gedifferentiëerd) geldt:

$$\begin{vmatrix} p(x_1,\omega_0) & p'(x_1,\omega_0) \\ p(x_2,\omega_0) & p'(x_2,\omega_0) \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{voor} \quad x_1 < x_2 \in X.$$

Daar p strikt $TP_3$ is, geldt $p > 0$ op $(X,\Omega)$. Indien dus $p'(x_1,\omega_0) > 0$ voor zekere $x_1 \in X$, dan is $p'(x,\omega_0) > 0$ voor alle $x > x_1$, $x \in X$. Indien $p'(x_2,\omega_0) < 0$ voor $x_2 \in X$, dan is $p'(x,\omega_0) < 0$ voor alle $x < x_2$, $x \in X$. Dit houdt in, dat de verzameling van nulpunten van $p'(x,\omega_0)$ van de vorm

$I \cap X$ is, waarbij $I$ een al dan niet leeg interval voorstelt. Links van deze verzameling is $p'(x,\omega_0) < 0$ en rechts is $p'(x,\omega_0) > 0$.

Stel nu dat $I \cap X$ meer dan een punt bevat, d.w.z. $I \cap X$ bevat twee disjuncte verzamelingen van positieve $\mu$-maat. Daar $p > 0$ is ook de $P_{\omega_0}$-maat van deze beide verzamelingen positief. Zij

$$0 < \varepsilon = P_{\omega_0}(I \cap X) \leq 1.$$

Dit zou betekenen, dat er voor $\alpha > 1 - \varepsilon$ meer dan één $\phi \in \mathcal{M}_2$ zou zijn, waarvoor $\phi \equiv 1$ op $I^c \cap X$ en $\psi(\omega_0) = \alpha$. Voor ieder van deze toetsen geldt bovendien

$$\psi'(\omega_0) = \int_X p'(x,\omega_0)\phi(x)d\mu(x) = \int_X p'(x,\omega_0)d\mu(x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\omega}\int_X p(x,\omega)d\mu(x)\Big|_{\omega=\omega_0} = 0.$$

Dit is echter in tegenspraak met paragraaf 5.4, waar de uniciteit werd aangetoond van de toets $\phi_1 \in \mathcal{M}_2$, waarvoor $\psi_1(\omega_0) = \alpha$ en $\psi_1'(\omega_0) = 0$.

$I \cap X$ bevat dus hoogstens één punt, zodat $p'(x,\omega_0)$ van de vorm is

$$p'(x,\omega_0) \begin{cases} < 0 & \text{voor} \quad x < x_0,\ x \in X \\ > 0 & \text{voor} \quad x > x_0,\ x \in X. \end{cases}$$

In de vorige paragraaf werd aangetoond, dat de type A gebieden met onbetrouwbaarheden $\alpha_1$ en $\alpha_2$ de kritieke gebieden zijn van toetsen $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}_2$, waarvoor, $i = 1, 2$,

$$\psi_i(\omega_0) = \int_X p(x,\omega_0)\phi_i(x)d\mu(x) = \alpha_i,\quad \psi_i'(\omega_0) = \int_X p'(x,\omega_0)\phi_i(x)d\mu(x) = 0.$$

Zij $S_i$ de verzameling, waarop $\phi_i < 1$ is (een interval doorsneden met $X$). Daar het geval, waarin $\alpha_2 = 1$ triviaal is, veronderstellen wij dat $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ en dus dat $\mu(S_i) > 0$ voor $i = 1, 2$. De relatie $\psi_i'(\omega_0) = 0$ is aequivalent met

$$\int_X p'(x,\omega_0)(1 - \phi_i(x))d\mu(x) = 0, \; i = 1, 2.$$

Indien $\mu(\{x_0\}) = 0$, dan is $p'(x,\omega_0)$ $\mu$ - bijna overal ongelijk aan nul en bevatten zowel $S_1$ als $S_2$ dus punten waar $p'(x,\omega_0) < 0$ en punten waar $p'(x,\omega_0) > 0$. Indien $\mu(\{x_0\}) \neq 0$, doch $p'(x_0,\omega_0) = 0$, dan bestaat hiernaast de mogelijkheid, dat $S_1 = \{x_0\}$ en/of $S_2 = \{x_0\}$.

Volgens lemma 4.1 geldt $V(\phi_1 - \phi_2) \leq 1$. Veronderstel, dat $V(\phi_1 - \phi_2) = 1$ en dat $\phi_1 - \phi_2$ van teken wisselt in de volgorde - +. Zij $(x_1,x_2)$ het grootste open interval zodanig dat $\phi_1 = \phi_2 = 0$ op $X \cap (x_1,x_2)$. Dan is $\phi_1 - \phi_2$ van de vorm

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{voor } x \leq x_1, \; x \in X \\ = 0 & \text{voor } x_1 < x < x_2, \; x \in X \\ \leq 0 & \text{voor } x \geq x_2, \; x \in X. \end{cases}$$

Nu geldt $S_1 \cap S_2 \subseteq [x_1,x_2]$. In het geval, dat $(x_1,x_2)$ leeg is, dient $[x_1,x_2]$ als $\{x_0\}$ te worden geïnterpreteerd. Indien $\mu(\{x_0\}) = 0$, houdt dit in, dat $[x_1,x_2]$ punten bevat waar $p'(x,\omega_0) < 0$ en punten waar $p'(x,\omega_0) > 0$, d.w.z.

$$p'(x,\omega_0) \begin{cases} > 0 & \text{voor } x \geq x_2, \; x \in X \\ < 0 & \text{voor } x \leq x_1, \; x \in X. \end{cases}$$

Echter

$$\int_X p'(x,\omega_0)[\phi_1(x) - \phi_2(x)]d\mu(x) = 0,$$

en dus zou $\phi_1 \equiv \phi_2$ b.o. op $X$. Dit is een contradictie, daar $\alpha_1 < \alpha_2$. Indien $\mu(\{x_0\}) \neq 0$, dan zouden $S_1$ en/of $S_2$ uitsluitend het punt $x_0$ kunnen bevatten. In dit geval zou echter $V(\phi_1 - \phi_2) = 0$ zijn, hetgeen de onderstelling $V(\phi_1 - \phi_2) = 1$ tegenspreekt. Hiermee is dus aangetoond, dat $\phi_1 - \phi_2$ niet één strikte tekenwisseling in de volgorde - + bezit.

Op analoge wijze kan worden bewezen, dat ook de volgorde + - onmogelijk is. Derhalve geldt $V(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Daar $\alpha_1 < \alpha_2$ is $\phi_1 \leq \phi_2$ op $X$, hetgeen te bewijzen was.

5.6. Monotonie van de power en envelope power

Beschouw het tweezijdige toetsingsprobleem: $V(h) = 2$, $\omega_1 \leq \omega_2 \in \Omega$,

$$h(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{voor } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2,\ \omega \in \Omega \text{ (niet leeg)} \\ +1 & \text{elders op } \Omega \text{ (aan weerszijden niet leeg).} \end{cases}$$

Wij beschouwen de klasse $\mathfrak{A}$ van toetsen voor dit probleem met onbetrouwbaarheid $\alpha$. Voor iedere $\omega < \omega_1$ of $\omega > \omega_2$ wordt de envelope power gedefiniëerd door

$$\tilde{\psi}(\omega) = \sup_{\phi \in \mathfrak{A}} \psi(\omega).$$

A) Zij p strikt $TP_2$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Dan is de envelope power $\tilde{\psi}$ strikt dalend voor $\omega < \omega_1$ op $\Omega$ en strikt stijgend voor $\omega > \omega_2$ op $\Omega$.

Immers, de UMP éénzijdige toets $\phi_1 \in \mathfrak{M}_1$ met onbetrouwbaarheid $0 < \alpha < 1$ voor de situatie

$$h^*(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{voor } \omega < \omega_1,\ \omega \in \Omega \\ -1 & \text{voor } \omega \geq \omega_1,\ \omega \in \Omega, \end{cases}$$

heeft een strikt dalend onderscheidend vermogen (verg. paragraaf 5.2). $\phi_1$ heeft ook onbetrouwbaarheid $\alpha$ voor het oorspronkelijke tweezijdige probleem, zodat $\tilde{\psi}(\omega) = \psi_1(\omega)$ voor $\omega < \omega_1$ op $\Omega$. Voor $\omega > \omega_2$ verloopt het bewijs analoog.

B) Zij p strikt $TP_3$ op $(X,\Omega)$ en zij voorwaarde A vervuld. Volgens het in paragraaf 5.3 bewezene bestaat er een UMP zuivere toets $\phi_0 \in \mathfrak{M}_2$ met onbetrouwbaarheid $\alpha$. Het onderscheidend vermogen $\psi_0$ van deze toets is strikt dalend voor $\omega < \omega_1$ op $\Omega$ en strikt stijgend voor $\omega > \omega_2$ op $\Omega$.

Daar $\phi_0 \in \mathfrak{M}_2$, geldt $V(\phi_0 - c) \leq 2$ voor alle $0 \leq c \leq 1$. Daar $\phi_0 - c$ niet b.o. nul is $(0 < \alpha < 1!)$, geldt $V^+(\psi_0 - c) \leq 2$ voor alle $0 \leq c \leq 1$; indien $V^+(\psi_0 - c) = 2$, dan treden de zwakke tekenwisselingen van $\psi_0 - c$ op in de volgorde $+ - +$ en kan $\psi_0 - c$ hoogstens twee nulpunten bezitten. Dit impliceert, dat $\psi_0$ hoogstens één relatief minimum en geen maxima behalve rand-maxima kan bezitten. Indien $\psi_0$ inderdaad één minimum bezit, dan is $\psi_0$ dus strikt dalend (resp. stijgend) links (resp. rechts) van dit minimum. Daar $\phi_0$ zuiver is, bezit $\psi_0$ één minimum tussen $\omega_1$ en $\omega_2$.

## 5.7. De likelihood-ratio test

Beschouw het toetsingsprobleem waarbij nulhypothese en alternatief de parameterruimte $\Omega$ in m disjuncte gebieden verdelen: $V(h) = m$,

$$h(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ voor } \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1},\ \omega \in \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right], \text{ alle niet leeg} \\ -1 \text{ voor } \omega_{2i+1} \leq \omega \leq \omega_{2i+2},\ \omega \in \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right], \text{ alle niet leeg.} \end{cases}$$

Zij $\Omega_i = \{\omega : \omega_{2i} < \omega < \omega_{2i+1},\ \omega \in \Omega\}$, $i = 0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$, de parameterwaarden corresponderende met het alternatief en zij

$$\Omega_i^- = \{\omega : \omega \leq \omega_{2i},\ \omega \in \Omega,\ h(\omega) = -1\},\quad \Omega_i^+ = \{\omega : \omega \geq \omega_{2i+1},\ \omega \in \Omega,\ h(\omega) = -1\}$$

de parameterwaarden corresponderende met $H_0$ links en rechts van $\Omega_i$. Voor de likelihood-ratio test in deze situatie geldt $\phi(x) = 1$ (d.w.z. verwerp $H_0$) op de verzameling

$$\{x : \sup_{\cup\Omega_i} p(x,\omega) \geq c \cdot \sup_{\Omega-\cup\Omega_i} p(x,\omega),\ x \in X\} =$$

$$= \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \{x : \sup_{\Omega_i} p(x,\omega) \geq c \cdot \sup_{\Omega-\cup\Omega_i} p(x,\omega)\} \cap X =$$

$$= \left[\bigcup_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \{I_i^- \cap I_i^+\}\right] \cap X,$$

waarbij

$$I_i^- = \{x : \sup_{\Omega_i} p(x,\omega) \geq c \cdot \sup_{\Omega_i^-} p(x,\omega)\}$$

en

$$I_i^+ = \{x : \sup_{\Omega_i} p(x,\omega) \geq c \cdot \sup_{\Omega_i^+} p(x,\omega)\}.$$

Indien p $TP_2$ is op $(X,\Omega)$, dan is $I_i^- \cap I_i^+ \cap X$ de doorsnede van X en een interval, $i = 0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}]$. Voor $i = 0$ kan dit interval aan de linkerzijde onbegrensd worden gekozen. Dit betekent:

Indien p $TP_2$ is behoort de likelihood-ratio test tot $\mathcal{M}_m$.

Kies $x_0 \in I_i^-$ d.w.z. er bestaat een rij $\omega^j \in \Omega_i$, $j = 1, 2, \ldots$, zodanig dat

$$\lim_{j\to\infty} \frac{p(x_0,\omega^j)}{p(x_0,\omega^-)} \geq c \quad \text{voor alle } \omega^- \in \Omega_i^-.$$

Daar p $TP_2$ is, geldt voor alle $x > x_0$, $x \in X$

$$\frac{p(x,\omega^j)}{p(x,\omega^-)} \geq \frac{p(x_0,\omega^j)}{p(x_0,\omega^-)},$$

daar $\omega^- < \omega^j$. Voor iedere $x > x_0$, $x \in X$, kan een deelrij $\omega^{j_1}$ worden gekozen, zodat $p(x,\omega^{j_1})$ convergeert en dus

$$\lim_{1\to\infty} \frac{p(x,\omega^{j_1})}{p(x,\omega^-)} \geq \lim_{1\to\infty} \frac{p(x_0,\omega^{j_1})}{p(x_0,\omega^-)} \geq c$$

voor alle $\omega^- \in \Omega_i^-$. Dit houdt in, dat $x \in I_i^-$ voor alle $x > x_0$, $x \in X$. Derhalve is $I_i^- \cap X$ de doorsnede van X en een aan de rechterzijde ongegrensd interval. Evenzo bewijst men, dat $I_i^+$ de doorsnede is van X en een links onbegrensd interval. Dus is $I_i^- \cap I_i^+ \cap X$ de doorsnede van X en een interval, $i = 0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}]$. Voor $i = 0$ tenslotte, geldt $\Omega_0^- = \emptyset$, zodat $I_0^- \cap I_0^+$ eenvoudig als $I_0^+$ moet worden geïnterpreteerd. Het feit, dat in dit bewijs quotiënten worden gehanteerd is niet essentiëel, zodat het eventueel nul zijn van noemers geen problemen schept.

Zij $m \geq 1$, p strikt $TP_{m+1}$ en zij voorwaarde A vervuld. Volgens stelling 4.3 is dan $\mathcal{M}_m$ een minimaal volledige klasse. Daar de likelihood-ratio test tot $\mathcal{M}_m$ behoort, is deze dus admissible.

Literatuur

Karlin, S. (1955), Decision theory for Pólya type distributions. Case of two actions, I. Proc. Third Berkeley Symp. 1, 115-128.

Karlin, S. (1957), Pólya type distributions, II. Ann. Math. Statist. 28, 281-308.

Karlin, S. (1963), Total positivity and convexity preserving transformations. Convexity: Proc. Symp. Pure Math. 7, 329-347, Amer. Math. Soc., Providence.

Karlin, S., Proschan, F., and Barlow, R.E. (1961), Moment inequalities of Pólya frequency functions. Pacif. J. Math. 11, 1023-1033.