STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Voorlopige

Invoerbeschrijving van Algol-programma's voor gemengde of zuivere, continue, geheeltallige en nul-een lineaire programmering

door

Jac.M. Anthonisse

maart 1967

Inleiding

Uit het bestaan van deze beschrijving mag niet worden geconcludeerd dat de betreffende programma's in alle gevallen foutloos zullen werken. Een aantal problemen is correct opgelost nadat het oorspronkelijke programma op verschillende punten was gewijzigd. Het is echter niet onmogelijk dat in de huidige versies van de programma's fouten zullen worden gevonden bij het oplossen van problemen die in structuur afwijken van de tot nu toe gebruikte test-problemen. Juist de behoefte aan testmateriaal is de bestaansreden van deze beschrijving.

Probleemstelling

maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \geq 0 \qquad (i = m_1+1, \ldots, m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \geq 0 \qquad (i = m_2+1, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

x_j = niet-negatieve integer als $j \in \{y_1, y_2, \ldots, y_{int}\}$

x_j = 0 of 1 als $j \in \{z_1, z_2, \ldots, z_{zo}\}$.

Het algemene programma

Verondersteld wordt dat de getallen

c_j	$(j = 1, 2, \ldots, n)$
a_{ij}	$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$
b_i	$(i = 1, 2, \ldots, m)$

integers zijn.

Op de invoerband moeten per probleem achtereenvolgens staan:

probleemnummer		n	m_1	m_2	m
i_1	c_1	$a_{11}, \ldots, a_{m1}$			
.					
.					
.					
i_j	c_j	$a_{1j}, \ldots, a_{mj}$			
.					
.					
.					
i_n	c_n	$a_{1n}, \ldots, a_{mn}$			
		$b_1, \ldots, b_m$			

int	
$y_1, \ldots, y_{int}$	uitsluitend als $0 < int < n$
zo	
$z_1, \ldots, z_{zo}$	uitsluitend als $0 < zo < n$
eps	
-1	uitsluitend als geen volgend probleem op de band staat.

In de probleemstelling zijn de variabelen genummerd van 1 t/m n. Het programma biedt de mogelijkheid de variabelen willekeurig te coderen met positieve gehele getallen $i_1, \ldots, i_n$.

De indices $y_1, \ldots, y_{int}$ van de variabelen die slechts niet-negatieve gehele waarden mogen aannemen behoeven niet te worden geponst als elke of geen enkele variabele integer moet zijn.
Hetzelfde geldt voor de nul-een variabelen.

De indices van de nul-een variabelen behoeven niet onder de indices van de geheeltallige variabelen te worden vermeld.

Vanzelfsprekend moeten de indices
$y_1, \ldots, y_{int}$ en $z_1, \ldots, z_{zo}$ voorkomen in $\{i_1, \ldots, i_n\}$.

De waarde van eps wordt gebruikt ter definitie van de reële 0. Een getal e wordt als gelijk aan 0 beschouwd indien abs(e) < eps.
Bij een te kleine keuze van eps kan een probleem, tengevolge van afrondingen, ten onrechte als infeasible worden opgegeven. eps = $_{10}-7$ is een gebruikelijke waarde.

Het programma stopt zodra een probleemnummer < 0 wordt gevonden, zodat de -1 na het laatste probleem op de band de berekeningen correct doet beëindigen.

<u>Voorbeeld van een invoerband</u>

101	4		4	4	4
1	1	1	0	2	3
2	1	1	1	1	2
3	1	1	2	1	0
4	1	0	3	2	1
		20	30	35	40

0

0

$_{10}-7$

102	4	4	4	4	
1	1	1	0	2	3
2	1	1	1	1	2
3	1	1	2	1	0
4	1	0	3	2	1
		20	30	35	40
4					
0					
10^{-7}					

103	4	4	4	4	
1	1	1	0	2	3
2	1	1	1	1	2
3	1	1	2	1	0
4	1	0	3	2	1
		20	30	35	40
1	4				
2	1	3			
10^{-7}					
-1					

Bovenstaande getallenband bevat 3 problemen, genummerd 101, 102 en 103. De objectfunctie en voorwaardematrix zijn voor elk van deze problemen:

$$\max \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

onder de voorwaarden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 20 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 30 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 35 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & \leq & 40. \end{array}$$

In probleem 101 is int = zo = 0, er zijn dus geen integer-voorwaarden, het probleem is een zuiver continu programmerings-probleem.

In probleem 102 is int = 4 = n, zo = 0, dus alle variabelen moeten in de eindoplossing een niet-negatieve gehele waarde hebben, dit probleem is zuiver geheeltallig.

In probleem 103 is int = 1, $y_1 = 4$, zo = 2, $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Dit is een gemengd probleem, x_4 is een geheeltallige variabele, x_1 en x_3 zijn nul-een variabelen, terwijl x_2 continu mag variëren.

Grootte van de problemen

Het huidige algemene programma maakt slechts gebruik van het kerngeheugen van de X8. Bij de tegenwoordige omvang van dat geheugen kunnen problemen van de volgende grootte worden ingelezen:

m	n
10	830
20	480
30	300
40	180
50	120
60	60.

Over de voor het oplossen van een probleem benodigde tijd is zeer weinig bekend.

Een speciaal programma

Bij een groot aantal LP problemen geldt voor de voorwaardenmatrix dat

$$a_{ij} = 0 \quad \text{of} \quad 1.$$

Voor deze gevallen is een speciaal programma geschreven waarin de voorwaardenmatrix wordt opgeslagen door per kolom te onthouden in welke regels een element = 1 staat.

Op de invoerband moeten achtereenvolgens staan:

probleemnummer $\quad n \quad m_1 \quad m_2 \quad m \quad E$

$i_1 \quad c_1 \quad e_1 \quad r_{11}, \ldots, r_{1e_1}$

.
.
.

$i_j \quad c_j \quad e_j \quad r_{j1}, \ldots, r_{je_j}$

.
.
.

$i_n \quad c_n \quad e_n \quad r_{n1}, \ldots, r_{ne_n}$

$b_1, \ldots, b_m$

int

$y_1, \ldots, y_{int}$ uitsluitend als $0 < int < n$

zo

$z_1, \ldots, z_{zo}$ uitsluitend als $0 < zo < n$

eps

-1 uitsluitend als de band geen volgende probleem bevat.

Hierin is

$$e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \text{aantal elementen} = 1 \text{ in kolom } j$$

$$E = \sum_{j=1}^{n} e_j = \text{aantal elementen} = 1 \text{ in voorwaardenmatrix}$$

$r_{j1}, \ldots, r_{je_j}$ = nummers van de regels met 1 in kolom j.

Alle andere symbolen hebben dezelfde betekenis als in het algemene programma.

<u>Voorbeeld van een invoerband</u>

104 14 0 0 6 23

1	-1	1	1		
2	-1	2	1	2	
3	-1	2	1	3	
4	-1	2	1	5	
5	-1	3	1	3	5
6	-1	1	2		
7	-1	1	3		
8	-1	2	3	5	
9	-1	2	3	6	
10	-1	1	4		
11	-1	2	4	5	
12	-1	1	5		
13	-1	2	1	5	
14	-1	1	6		

1 1 1 1 1 1

0 14 10^{-7} -1

Deze band bevat het volgende probleem:

minimaliseer $\sum_{j=1}^{14} x_j$

onder de voorwaarden:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
x_2 + x_6 + x_{11} + x_{13} &= 1 \\
x_5 + x_7 + x_8 + x_9 &= 1 \\
x_{10} + x_{11} &= 1 \\
x_4 + x_5 + x_8 + x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\
x_9 + x_{14} &= 1
\end{aligned}
$$

$$x_j = 0 \text{ of } 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, 14)$$

Grootte van de problemen

In onderstaande tabel staat een aantal variabelen aangegeven als functie van het aantal voorwaarden en de fractie elementen = 1 in de voorwaardenmatrix. Problemen van de aangegeven grootte kunnen bij de huidige beschikbare geheugencapaciteit door het tegenwoordige programma worden ingelezen.

m \ f	.05	.1	.15	.2	.3	.4	.5	.6
10	2065	1950	1845	1755	1595	1460	1350	1250
20	1855	1670	1520	1390	1190	1045	930	835
30	1630	1410	1235	1105	910	770	670	595
40	1385	1155	990	865	690	575	495	430
50	1125	910	760	655	515	420	355	310
60	855	670	550	470	360	290	245	210
70	570	435	355	295	225	180	150	130
80	280	210	165	140	105	80	70	60

Methode

De in de programma's gebruikte methode voor het oplossen van gemengde of zuivere LP problemen is de algorithme van Land en Doig:

Land, A.H.; Doig, A.G.
An automatic method of solving discrete programming problems.
Econometrica 28 (1960), 497-520.