Voorwaardelijke verwachtingen en martingalen*)

door J. Fabius **)

Summary

The paper contains an elementary introduction, using no measure theory, to the theory of conditional expectations and martingales.

1. Inleiding

De theorie der martingalen, ontstaan bij LÉVY [7] en verder ontwikkeld door DOOB [1] en vele anderen, heeft zich een belangrijke plaats veroverd in het arsenaal van hulpmiddelen waarmee men problemen van waarschijnlijkheidstheoretische aard pleegt aan te pakken. Toepassingen van deze theorie komen zo veelvuldig voor in publicaties over onderwerpen uit de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek, dat een niet te verwaarlozen deel van de hedendaagse vakliteratuur op deze gebieden ontoegankelijk is voor lezers die niet enigszins vertrouwd zijn met het begrip martingaal.

Een min of meer uitvoerige behandeling van de theorie der martingalen vindt men o.a. in DOOB [1], FELLER [3], KEMENY, SNELL en KNAPP [5], KRICKEBERG [6], LOÈVE [8], MEYER [9] en NEVEU [10]. In al deze boeken behalve dat van KEMENY, SNELL en KNAPP, die alleen het discrete geval beschouwen, wordt daarbij echter een intensief gebruik gemaakt van het langs maattheoretische weg ingevoerde begrip voorwaardelijke verwachting, zodat iemand die in de maattheorie minder goed thuis is van een dergelijke behandeling weinig wijzer zal worden. De schrijver heeft daarom getracht op meer elementaire wijze althans een eerste inleiding te geven tot de theorie over voorwaardelijke verwachtingen en martingalen.

2. Voorwaardelijke verwachtingen

Als $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ stochastische grootheden zijn met een discrete simultane verdeling zodanig dat $E\,|X| < \infty$, en als

$$D = \{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid P\,\{(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\} > 0\} \tag{1}$$

de verzameling van alle "mogelijke waarden" $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ van de stochastische vector $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ is, dan kan men voor elk punt $y \in D$ de voorwaardelijke verwachting $E\,(X \mid Y = y)$ van X gegeven de *eventualiteit* $\{Y = y\}$ op de bekende „klassieke" wijze definiëren. Om duidelijk uit

*) Rapport S 381 (SP 104) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum
**) Lector aan de Rijksuniversiteit te Leiden

te laten komen dat deze voorwaardelijke verwachting in het algemeen van het gekozen punt $y \in D$ zal afhangen, schrijven we

$$\varphi(y) = E(X \mid Y = y) = \frac{\sum_x xP\{X = x,\ Y = y\}}{P\{Y = y\}} \qquad (y \in D). \tag{2}$$

Hierin is φ dus de functie, gedefinieerd op D, die in elk punt $y \in D$ de door het laatste lid van (2) gespecificeerde waarde aanneemt.

Daar $P\{Y \in D\} = 1$, is $\varphi(Y)$ een met kans 1 gedefinieerde stochastische grootheid. We definiëren nu de voorwaardelijke verwachting $E(X \mid Y)$ of $E(X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ van X gegeven de *stochastische vector* Y of gegeven de *stochastische grootheden* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ door de gelijkheid

$$E(X \mid Y) = E(X \mid Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = \varphi(Y). \tag{3}$$

Deze voorwaardelijke verwachting is dus zelf een stochastische grootheid, die de waarde $E(X \mid Y = y)$ aanneemt als de eventualiteit $\{Y = y\}$ gebeurt.

Ook in het absoluut continue geval, d.w.z. als de simultane verdeling van $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ een dichtheid $f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ heeft, blijft het voorgaande woord voor woord van toepassing, mits wederom $E \mid X \mid < \infty$ verondersteld wordt, en (1) en (2) vervangen worden door

$$D = \{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid g(y_1, y_2, \cdots, y_n) > 0\} \tag{1'}$$

en

$$\varphi(y) = E(X \mid Y = y) = \frac{\int xf(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\, dx}{g(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \qquad (y \in D), \tag{2'}$$

waarin $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de simultane dichtheid van $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ is.

Aan de aldus geformuleerde constructieve definitie van de voorwaardelijke verwachting van een stochastische grootheid gegeven één of meer stochastische grootheden kleven een aantal bezwaren, waarvan de belangrijkste wel zijn dat de definitie alleen van toepassing is in het discrete en het absoluut continue geval, en dat deze twee gevallen steeds apart behandeld moeten worden. De volgende stelling, die in feite een aequivalente niet-constructieve definitie geeft, suggereert hoe deze bezwaren kunnen worden ondervangen.

Stelling 2.1.

Als $E \mid X \mid < \infty$ en de simultane verdeling van $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ discreet of absoluut continu is, dan wordt de stochastische grootheid $E(X \mid Y) = E(X \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ gekarakteriseerd door de volgende twee eigenschappen:

(i) $E(X \mid Y)$ is een functie van de stochastische vector $Y = (Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$,
(ii) $E(ZX) = E(ZE(X \mid Y))$ voor elke stochastische grootheid Z die een functie van Y is en waarvoor $E \mid ZX \mid < \infty$.

Bewijs

$E(X \mid Y)$ voldoet per definitie aan (i). Zij $Z = \psi(Y) = \psi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ een stochastische grootheid die een functie van Y is met $E \mid ZX \mid < \infty$. Dan geldt in het discrete geval

$$E(ZX) = \sum_{x,y} \psi(y)\, xP\{X = x,\ Y = y\} = \sum_{y \in D} \psi(y) \sum_{x} xP\{X = x,\ Y = y\} =$$
$$= \sum_{y \in D} \psi(y)\, E(X \mid Y = y)\, P\{Y = y\} = E(ZE(X \mid Y)),$$

en in het absoluut continue geval

$$E(ZX) = \int \cdots \int \psi(y_1, y_2, \cdots, y_n)\, x f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\, dx\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n =$$
$$= \int_{y \in D} \cdots \int \psi(y_1, y_2, \cdots, y_n) \left\{ \int x f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\, dx \right\} dy_1\, dy_2 \cdots dy_n =$$
$$= \int_{y \in D} \cdots \int \psi(y_1, y_2, \cdots, y_n)\, E(X \mid Y = y)\, g(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n =$$
$$= E(ZE(X \mid Y)),$$

zodat $E(X \mid Y)$ ook aan (ii) voldoet.

Stel nu dat $E^*(X \mid Y)$ een stochastische grootheid is die aan (i) en (ii) voldoet. Als nu Z gedefinieerd is door

$$Z = \begin{cases} -1 \text{ als } E(X \mid Y) < E^*(X \mid Y), \\ +1 \text{ als } E(X \mid Y) \geqq E^*(X \mid Y), \end{cases}$$

dan is Z een stochastische grootheid met $E \mid ZX \mid = E \mid X \mid < \infty$, en wegens (i) een functie van Y. Uit (ii) volgt dus

$$E \mid E(X \mid Y) - E^*(X \mid Y) \mid = E\, Z(E(X \mid Y) - E^*(X \mid Y)) =$$
$$= E(ZX) - E(ZX) = 0,$$

zodat $E^*(X \mid Y) = E(X \mid Y)$[1], waarmee bewezen is dat de stochastische grootheid $E(X \mid Y)$ door (i) en (ii) geheel vastgelegd is.

Aangezien in de formulering van de eigenschappen (i) en (ii) in Stelling 2.1 geen gebruik wordt gemaakt van het feit dat de simultane verdeling van

[1]) Stochastische grootheden die met kans 1 gelijke waarden aannemen worden hier en in het volgende geïdentificeerd. $U = V$ betekent dus $P\{U = V\} = 1$.

$X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ discreet of absoluut continu verondersteld is, ligt het voor de hand de definitie van voorwaardelijke verwachting als volgt te generaliseren:

Definitie 2.1.

Zij X een stochastische grootheid met $E \mid X \mid < \infty$ en zij Y een stochastische grootheid, een stochastische vector $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, of zelfs een oneindige rij stochastische grootheden $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$, gedefinieerd op dezelfde kansruimte als X, d.w.z. zodanig dat X en Y een simultane verdeling bezitten. Dan is de voorwaardelijke verwachting $E(X \mid Y)$ van X gegeven Y de unieke stochastische grootheid die de volgende twee eigenschappen heeft:

(i) $E(X \mid Y)$ is een functie van Y;

(ii) $E(ZX) = E(ZE(X \mid Y))$ voor elke stochastische grootheid Z met $E \mid ZX \mid < \infty$ die een functie van Y is.

De waarde, die de stochastische grootheid $E(X \mid Y)$ aanneemt als de eventualiteit $\{Y = y\}$ gebeurt, noemt men de voorwaardelijke verwachting van X gegeven de eventualiteit $\{Y = y\}$; notatie: $E(X \mid Y = y)$ of $E(X \mid y)$.

Met behulp van een stelling uit de maattheorie – de stelling van RADON-NIKODYM – kan men aantonen dat er onder de in Definitie 2.1. gemaakte veronderstellingen altijd minstens één stochastische grootheid $E(X \mid Y)$ is, die aan (i) en (ii) voldoet. Bovendien volgt uit het laatste deel van het bewijs van Stelling 2.1. dat dit dan ook de enige stochastische grootheid met de eigenschappen (i) en (ii) is. Hierin, en in het feit dat Definitie 2.1. volgens Stelling 2.1. in het discrete en het absoluut continue geval overeenkomt met de klassieke definitie, ligt de rechtvaardiging van Definitie 2.1.

De volgende twee stellingen geven de belangrijkste eigenschappen van voorwaardelijke verwachtingen. Stilzwijgend wordt hierbij verondersteld dat, waar nodig, de in Definitie 2.1. gemaakte veronderstellingen vervuld zijn, zodat alle voorwaardelijke verwachtingen gedefinieerd zijn.

Stelling 2.2.

(a) $E(E(X \mid Y)) = E(X)$;

(b) Als X en Y onderling onafhankelijk zijn, dan is $E(X \mid Y) = E(X)$;

(c) Als X een functie van Y is, dan is $E(X \mid Y) = X$;

(d) Als de stochastische grootheid U een functie van Y is dan is $E(UX \mid Y) = UE(X \mid Y)$;

(e) Als de stochastische grootheid of vector U een functie van Y is, dan is $E(X \mid U) = E(E(X \mid Y) \mid U)$;

(f) $E(aX_1 + bX_2 \mid Y) = aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y)$ voor alle reële getallen a en b;

(g) Als $X \geqq 0$, dan is ook $E(X \mid Y) \geqq 0$.

Bewijs

(a) volgt door substitutie van $Z = 1$ in (ii)

(b) EX kan, zoals elke constante, worden opgevat als een stochastische grootheid en als een functie van Y, en voldoet dus aan (i). Als de stochastische grootheid Z een functie van Y is met $E \mid ZX \mid < \infty$, dan zijn X en Z onderling onafhankelijk en $E(ZX) = E(Z)E(X) = E(ZE(X)$, zodat $E(X)$ ook aan (ii) voldoet.

(c) Als X een functie van Y is, dan voldoet X aan (i), en X voldoet altijd aan (ii).

(d) $UE(X \mid Y)$ voldoet per definitie aan (i). Als de stochastische grootheid Z een functie van Y is met $E \mid ZUX \mid < \infty$, dan is ook $Z' = ZU$ een stochastische grootheid en een functie van Y met $E \mid Z'X \mid < \infty$. Uit de definitie van $E(X \mid Y)$ volgt dus: $E(ZUX) = E(Z'X) = E(Z'E(X \mid Y)) = E(Z(UE(X \mid Y)))$, zodat $UE(X \mid Y)$ aan (ii) voldoet.

(e) $E(E(X \mid Y) \mid U)$ is per definitie een stochastische grootheid en een functie van U, zodat aan (i) voldaan is. Zij Z een stochastische grootheid en een functie van U met $E \mid ZX \mid < \infty$. Definiëren we

$$Z' = \begin{cases} Z \text{ als } ZE(X \mid Y) \geqq 0 \\ -Z \text{ als } ZE(X \mid Y) < 0, \end{cases}$$

dan is Z' een stochastische grootheid en een functie van Y met $\mid Z' \mid = \mid Z \mid$, zodat $E \mid Z'X \mid < \infty$. De definitie van $E(X \mid Y)$ impliceert dus

$$E \mid ZE(X \mid Y) \mid = E(Z'E(X \mid Y)) = E(Z'X) \leqq E \mid Z'X \mid < \infty.$$

Uit de definities van $E(X \mid Y)$ en $E(E(X \mid Y) \mid U)$ volgt nu

$$E(ZX) = E(ZE(X \mid Y)) = E(ZE(E(X \mid Y) \mid U)),$$

en dus voldoet $E(E(X \mid Y) \mid U)$ aan (ii).

(f) Het is zonder meer duidelijk dat $aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y)$ aan (i) voldoet. Als Z een *begrensde* stochastische grootheid en een functie van Y is, dan zijn $E \mid ZX \mid$ en $E \mid ZX_2 \mid$ eindig omdat $E \mid X_1 \mid$ en $E \mid X_2 \mid$ eindig verondersteld zijn, zodat

$$\begin{aligned} E[Z(aX_1 + bX_2)] &= aE(ZX_1) + bE(ZX_2) = \\ &= aE(ZE(X_1 \mid Y)) + bE(ZE(X_2 \mid Y)) = \\ &= E[Z(aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y))]. \end{aligned}$$

Als de stochastische grootheid Z een onbegrensde functie van Y is met $E \mid Z(aX_1 + bX_2) \mid < \infty$, laat dan Z_n gedefinieerd zijn door

$$Z_n = \begin{cases} -n \text{ als } Z < -n, \\ Z \text{ als } |Z| \leqslant n, \\ n \text{ als } Z > n, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Dan geldt, wegens het voorgaande,

$E[Z_n(aX_1 + bX_2)] = E[Z_n(aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y))] \quad (n = 1, 2, \ldots),$

en de limiet overgang $n \to \infty$ geeft

$$E[Z(aX_1 + bX_2)] = E[Z(aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y))],$$

waarmee is aangetoond dat $aE(X_1 \mid Y) + bE(X_2 \mid Y)$ aan (ii) voldoet.

(g) Als de stochastische grootheid Z gedefinieerd is door

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ als } E(X \mid Y) < 0, \\ 0 \text{ als } E(X \mid Y) \geqq 0, \end{cases}$$

dan is Z een functie van Y met $E\,|ZX| < \infty$. Hieruit volgt, dat $0 \leqq E(ZX) = E[ZE(X \mid Y)] \leqq 0$, zodat $E[ZE(X \mid Y)] = 0$. Omdat $ZE(X \mid Y) \leqq 0$, impliceert dit $ZE(X \mid Y) = 0$ en dus ook $E(X \mid Y) \geqq 0$.

De in Stelling 2.2. opgesomde eigenschappen van voorwaardelijke verwachtingen kunnen geïnterpreteerd worden op een wijze die nauw bij de intuïtie aansluit. Zo zegt (*b*) dat informatie over Y geen enkele invloed heeft op onze verwachtingen ten aanzien van X als X en Y onderling onafhankelijk zijn, en (*e*) dat X bekend is als Y gegeven is en X een functie van Y is. De interpretatie van (*d*) is analoog: Als U een functie van Y is en Y gegeven is, dan is U bekend, zodat U als een constante voor het verwachtingssymbool kan worden geschreven. Evenzo kan (*e*) worden opgevat als een generalisatie van (*a*). Op grond van soortgelijke overwegingen is ook de volgende stelling evident.

Stelling 2.3.

Als de stochastische grootheden of vectoren U en Y elkaars waarden geheel bepalen in de zin dat U een functie van Y, en Y een functie van U is, dan is $E(X \mid U) = E(X \mid Y)$.

Bewijs

$E(X \mid U) = E(E(X \mid Y) \mid U)$ wegens (*e*), en $E(E(X \mid Y) \mid U) = E(X \mid Y)$ op grond van (*c*) omdat $E(X \mid Y)$ een functie van Y, en dus ook een functie van U is.

3. Martingalen

Men kan een martingaal opvatten als een voor de hand liggende generalisatie van een rij eerlijke spelen. Stel dat een gokker G, die beschikt over een gegeven beginkapitaal a, deelneemt aan een rij kansspelen, en dat zijn winst uit het n-de spel en zijn kapitaal na afloop van het n-de spel gegeven worden door stochastische grootheden Y_n en X_n, zodat

$$X_n = a + \sum_1^n Y_i \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{4}$$

Als men zegt dat deze kansspelen eerlijk zijn, dan bedoelt men daar meestal mee dat de verwachte winst uit elk spel nul is, dat de afzonderlijke spelen onderling onafhankelijk zijn, en soms bovendien nog dat zij onafhankelijke herhalingen van één spel zijn, m.a.w. dat de Y_n niet alleen onderling onafhankelijk, maar ook identiek verdeeld zijn. Bij nadere beschouwing is het echter duidelijk dat deze eisen onnodig restrictief zijn. De onderlinge onafhankelijkheid en het identiek verdeeld zijn van de Y_n heeft immers op zichzelf niets uit te staan met het al dan niet eerlijk zijn van de rij spelen. Deze eisen worden alleen gesteld omdat zij het mogelijk maken, met behulp van bekende stellingen als de wetten der grote aantallen en de centrale limietstelling, uitspraken te doen over het gedrag van de X_n voor grote n. De enige eis die iets te maken heeft met de intuïtieve achtergrond van het eerlijk zijn van de rij kansspelen is de eis dat de verwachte winst uit elk spel nul is. Als men geen verdere vereenvoudigende veronderstellingen, zoals onafhankelijkheid van de afzonderlijke spelen, wil maken, dan ligt het voor de hand deze eis te vervangen door de eis dat de voorwaardelijke verwachting van de winst uit elk spel, ongeacht het gegeven spelverloop in de daaraan voorafgaande spelen, nul is. Gebruik makend van de door FELLER ingevoerde term „absoluut eerlijk" komt men zo tot de volgende definitie.

Definitie 3.1.

Een rij stochastische grootheden $Y_1, Y_2, \ldots$ met eindige verwachtingen is absoluut eerlijk als

$$E(Y_1) = 0 \text{ en } E(Y_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

De bijbehorende door (4) gedefinieerde rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ is dan een martingaal.

Het is op intuïtieve gronden duidelijk dat onder deze omstandigheden de voorwaardelijke verwachting van het kapitaal van G na afloop van het $(n + 1)$-ste spel, ongeacht het gegeven spelverloop tot aan dat spel, gelijk zal zijn aan zijn kapitaal vlak ervoor, m.a.w. dat

$$E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Deze gelijkheid is dan ook rechtstreeks af te leiden uit Definitie 3.1. De stochastische vectoren $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ en $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ geven immers beide een volledige beschrijving van het spelverloop gedurende de eerste n spelen, zodat zij functies van elkaar zijn. Uit Stelling 2.2. en 2.3. volgt dus

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) &= E(X_n + Y_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = \\ &= E(X_n \mid X_1, \ldots, X_n) + E(Y_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = \\ &= X_n + E(Y_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n) = X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Het omgekeerde is ook waar: Als een rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ de eigenschap (6) heeft, dan kan deze rij worden opgevat als een martingaal in de zin van Definitie 3.1. Om dit in te zien hoeft men slechts $Y_1 = X_1 - E(X_1)$ en $Y_{n+1} = X_{n+1} - X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ te stellen, zodat (4) geldt met $a = E(X_1)$, $E(Y_1) = 0$, en

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n) &= E(X_{n+1} - X_n \mid Y_1, \ldots, Y_n) = \\ &= E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) - E(X_n \mid X_1, \ldots, X_n) = \\ &= X_n - X_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

hetgeen betekent dat de rij $Y_1, Y_2, \ldots$ absoluut eerlijk is.

Naast rijen absoluut eerlijke spelen kan men ook rijen spelen, die voordelig of juist nadelig voor G zijn, beschouwen. Dit betekent dat men in (5) en (6) het gelijkheidsteken door een ongelijkheidsteken ($\geqq$ bij voordelige, $\leqq$ bij nadelige spelen) dient te vervangen. Men zegt dan dat de rij $X_1, X_2, \ldots$ een submartingaal resp. een supermartingaal is. Uiteraard kan men ook deze definities in termen van de X_n zelf formuleren:

Definitie 3.2.

Een eindige of oneindige rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ met eindige verwachtingen is

een martingaal als $E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$
een submartingaal als $E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) \geqq X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots);$
een supermartingaal als $E(X_{n+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqq X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Stelling 3.1.

Een rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ is dan en dan alleen een supermartingaal als de rij $-X_1, -X_2, \ldots$ een submartingaal is. De rij $X_1, X_2, \ldots$ is dan en dan alleen een martingaal als hij zowel een submartingaal als een supermartingaal is.

Bewijs

Dit volgt rechtstreeks uit Definitie 3.2.

Stelling 3.2.

Als een rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ een submartingaal is, dan gelden de ongelijkheden

$$E(X_n) \leqq E(X_{n+1}), \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

$$E(X_{n+m} \mid X_1, \ldots, X_n) \geqq X_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Als $X_1, X_2, \ldots$ een supermartingaal is, dan gelden deze ongelijkheden in omgekeerde richting, en als $X_1, X_2, \ldots$ een martingaal is, dan gaan zij over in gelijkheden.

Bewijs

Zij $X_1, X_2, \ldots$ een submartingaal, zodat

$$E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) \geqq X_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Door aan beide zijden verwachtingen te nemen krijgt men (7), en (8) volgt door inductie naar m, daar

$$E(X_{n+m+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = E(E(X_{n+m+1} \mid X_1, \ldots, X_{n+m}) \mid X_1, \ldots, X_n) \geqq$$
$$\geqq E(X_{n+m} \mid X_1, \ldots, X_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

De overige beweringen zijn nu evident wegens Stelling 3.1.

Het gebruik van martingalen vereenvoudigt de studie van spelsystemen aanzienlijk. Ter illustratie diene de volgende stelling, een voorbeeld van een „systems theorem", d.w.z. een stelling die aantoont dat spelsystemen van een bepaald type niet werken.

Stelling 3.3.

Zij $X_1, X_2, \ldots$ een martingaal en zij $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ een rij stochastische grootheden die uitsluitend de waarden 0 en 1 aannemen met de eigenschap dat Δ_n een functie van de stochastische vector $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ is $(n = 1, 2, \ldots)$. De rij stochastische grootheden $Y_1, Y_2, \ldots$, gedefinieerd door de relaties.

$$Y_1 = X_1 \quad \text{en} \quad Y_{n+1} = Y_n + \Delta_n(X_{n+1} - X_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

is dan eveneens een martingaal.

Bewijs

Uit het gegeven volgt dat $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ een functie van $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is, zodat

$$E(Y_{n+1} \mid Y_1, \ldots, Y_n) = E(E(Y_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) \mid Y_1, \ldots, Y_n)$$

en

$$E(Y_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) = E(Y_n + \Delta_n(X_{n+1} - X_n) \mid X_1, \ldots, X_n) =$$
$$= Y_n + \Delta_n(E(X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) - X_n) = Y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

waaruit het gestelde volgt.

De interpretatie van deze stelling is als volgt: Gegeven is een rij absoluut eerlijke spelen, die beschreven wordt door de martingaal $X_1, X_2, \ldots$ De stochastische grootheid X_n is dus op te vatten als het vermogen na afloop van het n-de spel van een gokker die aan al deze spelen deelneemt. Onze gokker G echter gebruikt een spelsysteem, dat hieruit bestaat, dat hij na afloop van ieder spel, volgens een van te voren gekozen regel, afhankelijk van de uitslagen van de tot dat moment gerealiseerde spelen, beslist of hij al dan niet aan het volgende spel zal deelnemen. Dit spelsysteem wordt beschreven door de stochastische grootheden $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$: G neemt deel aan het $(n+1)$-ste spel als Δ_n de waarde 1 aanneemt, en hij beperkt zich tot het noteren van de uitslag van het $(n+1)$-ste spel als Δ_n de waarde 0 aanneemt ($n = 1, 2, \ldots$). Het is nu zonder meer duidelijk dat Y_n het vermogen van G na afloop van het n-de spel aangeeft, zodat de stelling leert dat G van het gebruik van een dergelijk spelsysteem geen enkel voordeel kan verwachten.

Stelling 3.3. is in het bijzonder van toepassing als het door G gebruikte spelsysteem bestaat uit een stopregel (optional stopping). Een dergelijk spelsysteem is immers van het beschouwde type met de bijzondere eigenschap dat $\Delta_{n+1} = 0$ als $\Delta_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), wat erop neerkomt dat G aan de eerste N spelen deelneemt en zich dan terugtrekt, waarbij de stochastische grootheid N gelijk is aan de kleinste n waarvoor $\Delta_n = 0$. Optional stopping heeft dus geen enkele invloed op de te verwachten winst uit een eindig aantal spelen. Indien men in staat is onbeperkt lang door te spelen, dan kan optional stopping echter wel nut hebben. Bij kruis of munt gooien met een zuivere munt kan men dan b.v. doorspelen totdat men voor het eerst één keer vaker gewonnen dan verloren heeft. Heeft men echter maar een eindige hoeveelheid tijd beschikbaar, zodat men b.v. na het duizendste spel in ieder geval moet ophouden met spelen, dan is het effect van deze stopregel dat men vermoedelijk met een winst ter grootte 1, doch misschien – de kans hierop is zeer klein, maar niet nul – met een zeer groot verlies naar huis gaat. De verwachte winst is immers nog steeds nul.

Van minstens even groot belang als de verzameling stellingen, die met de naam systems theorem worden aangeduid, is de collectie stellingen die het mogelijk maken uitspraken te doen over het asymptotisch gedrag van martingalen. Tot deze laatste categorie behoren in de eerste plaats de volgende generalisaties van de ongelijkheid van Kolmogorov.

Stelling 3.4

Als de rij niet-negatieve stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een submartingaal is, dan geldt de ongelijkheid

$$P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{E(X_n)}{\varepsilon}$$

voor alle $\varepsilon > 0$.

Bewijs

Zij $\varepsilon > 0$ en laten $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ stochastische grootheden zijn die uitsluitend de waarden 0 en 1 aannemen, en wel zó, dat $Z_1 = 1$ dan en dan alleen als $X_1 > \varepsilon$, en $Z_k = 1$ dan en dan alleen als $\max(X_1, \ldots, X_{k-1}) < \varepsilon$ en tevens $X_k \geqq \varepsilon$ $(k = 2, \ldots, n)$. Dit betekent dat Z_k juist dan de waarde 1 aanneemt als X_k de eerste van de stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is die een waarde gelijk aan ε of groter aanneemt $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Uit deze definitie volgt

$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} Z_k \leqq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} E(Z_k) = P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \geqq \varepsilon\},$$

$$Z_k X_k \geqq \varepsilon Z_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

en derhalve, daar Z_k een functie van $(X_1, \ldots, X_k)$ is,

$$E(X_n) \geqq \sum_{k=1}^{n} E(Z_k X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k E(X_n \mid X_1, \cdots, X_k)) \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{n} E(Z_k X_k) \geqq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) = \varepsilon P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \geqq \varepsilon\},$$

waarmee het bewijs geleverd is.

Stelling 3.5.

Als de rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een martingaal is, dan geldt de ongelijkheid

$$P\{\max(|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|) \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{E(X_n^2)}{\varepsilon^2}$$

voor alle $\varepsilon > 0$.

Bewijs

Aangezien de voorwaardelijke variantie $E((X - E(X \mid Y))^2 \mid Y)$ van een stochastische grootheid X gegeven een stochastische vector Y uiteraard niet negatief is, geldt algemeen de ongelijkheid

$$E(X^2 \mid Y) \geqq \{E(X \mid Y)\}^2.$$

In het bijzonder geldt dus

$$E(X^2_{k+1} \mid X_1, \ldots, X_k) \geqq \{E(X_{k+1} \mid X_1, \ldots, X_k)\}^2 = X_k^2 \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

hetgeen impliceert, dat de rij stochastische grootheden $X_1^2, X_2^2, \ldots, X_n^2$ een submartingaal is. De bewering volgt nu uit Stelling 3.4, toegepast op deze submartingaal.

Met behulp van deze gegeneraliseerde ongelijkheid van Kolmogorov kan de volgende convergentiestelling voor martingalen bewezen worden.

Stelling 3.6.

Als de rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ een martingaal is en $c = \sup E(X_n^2)$ eindig is, dan convergeert X_n als $n \to \infty$ met kans 1 naar een eindige stochastische limiet.

Bewijs

Als voor een vaste waarde van n de stochastische grootheden $Y_1, Y_2, \ldots$ gedefinieerd zijn door

$$Y_k = X_{n+k} - X_n \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

dan is voor iedere k de stochastische vector $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ een functie van $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+k})$, zodat uit de gelijkheid

$$\begin{aligned} &E(Y_{k+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n+k}) = \\ &= E(X_{n+k+1} \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n+k}) - E(X_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_{n+k}) = \\ &= X_{n+k} - X_n = Y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

volgt, dat de rij $Y_1, Y_2, \ldots$ een martingaal is. Als $\varepsilon > 0$, dan zegt de ongelijkheid van KOLMOGOROV voor martingalen (Stelling 3.5.) dus

$$P\{\max(|Y_1|, |Y_2|, \cdots, |Y_m|) \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{E(Y_m^2)}{\varepsilon^2} \qquad (m = 1, 2, \cdots),$$

of in termen van de X_k zelf,

$$P \bigcup_{k=1}^{m} \{|X_{n+k} - X_n| \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{E(X_{n+m} - X_n)^2}{\varepsilon^2} \qquad (n, m = 1, 2, \cdots). \quad (9)$$

Nu is

$$\begin{aligned} E(X_{n+m}X_n) &= E(E(X_{n+m}X_n \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)) = \\ &= E(X_n E(X_{n+m} \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)) = E(X_n^2), \end{aligned}$$

zodat

$$E(X_{n+m} - X_n)^2 = E(X_{n+m}^2) - E(X_n^2) \leqq c - E(X_n^2) \qquad (m, n = 1, 2, \cdots).$$

Daar het rechter lid van deze ongelijkheid niet van m afhangt, volgt uit (9) de ongelijkheid

$$P \bigcup_{k=1}^{\infty} \{| X_{n+k} - X_n | \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{c - E(X_n^2)}{\varepsilon^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

en dus ook

$$P \bigcup_{k=n}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} \{| X_k - X_l | \geqq 2\varepsilon\} \leqq \frac{c - E(X_n^2)}{\varepsilon^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots), \qquad (10)$$

omdat

$$\{| X_k - X_l | \geqq 2\varepsilon\} \subset \{| X_k - X_n | \geqq \varepsilon\} \cup \{| X_l - X_n | \geqq \varepsilon\}$$

voor alle k, l en n. Aangezien de rij stochastische grootheden $X_1^2, X_2^2, \ldots$ een submartingaal is (zie het bewijs van Stelling 3.5.), is $E(X_n^2)$ monotoon niet-dalend in n, zodat het rechterlid van (10) naar 0 convergeert als $n \to \infty$. Derhalve geldt de gelijkheid

$$P \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} \{| X_k - X_l | \geqq 2\varepsilon\} = 0,$$

of, wat op hetzelfde neerkomt,

$$P \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} \{| X_k - X_l | < 2\varepsilon\} = 1.$$

Daar ε positief, doch overigens geheel willekeurig was, volgt hieruit

$$P \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} \left\{| X_k - X_l | < \frac{1}{m}\right\} = 1,$$

hetgeen betekent dat de kans 1 is, dat de rij $X_1, X_2, \ldots$ Cauchy-convergent is en dus een eindige limiet heeft.

Er bestaan naast Stelling 3.6. en zijn consequenties, waaronder een generalisatie van de sterke wet der grote aantallen (zie Theorem VII. 8.2. in [3]), vele andere convergentiestellingen voor martingalen en submartingalen, waarbij andere eisen gesteld worden of andere soorten van convergentie, zoals convergentie in kwadratisch gemiddelde, beschouwd worden. De volgende stelling, afkomstig van Doob, is echter verreweg de belangrijkste van deze convergentiestellingen. Het bewijs laten wij hier achterwege.

Stelling 3.7.

Als de rij stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ een submartingaal of een supermartingaal is en $\sup E \mid X_n \mid$ eindig is, dan convergeert X_n als $n \to \infty$ met kans 1 naar een eindige stochastische limiet.

4. Enige voorbeelden en toepassingen

De urn van Pólya

In een vaas bevinden zich aanvankelijk z zwarte en r rode knikkers. Een trekking bestaat uit het aselect kiezen van een knikker uit de vaas, het weer terugleggen van deze knikker en het toevoegen aan de inhoud van de vaas van c extra knikkers van dezelfde kleur als de zojuist teruggelegde knikker.

Zij Z_n het aantal zwarte en R_n het aantal rode knikkers in de vaas na afloop van de n-de trekking, zodat $Z_n + R_n = z + r + nc$, en zij $X_n = Z_n/(Z_n + R_n)$ de fractie zwarte knikkers in de vaas op dat tijdstip. Dan geldt

$$E(X_{n+1} \mid R_1, Z_1, R_2, Z_2, \cdots, R_n, Z_n) = E(X_{n+1} \mid R_n, Z_n) =$$

$$= \frac{Z_n}{Z_n + R_n} \cdot \frac{Z_n + c}{Z_n + R_n + c} + \frac{R_n}{Z_n + R_n} \cdot \frac{Z_n}{Z_n + R_n + c} = X_n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

en hieruit volgt dat de rij $X_1, X_2, \ldots$ een martingaal is, omdat de stochastische vector $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ een functie van $(R_1, Z_1, R_2, Z_2, \ldots, R_n, Z_n)$ is. Daar bovendien $0 \leqq X_n \leqq 1$ voor alle n, volgt uit Stelling 3.6. dat X_n als $n \to \infty$ met kans 1 convergeert naar een limiet X. Met behulp van de stelling van DE FINETTI kan men aantonen dat deze limiet een betaverdeling met parameters z/c en r/c heeft (zie [3], VII. 4. (a) en VII. 8. (a)).

Vertakkingsprocessen

Zij X_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) het aantal individuen in de n-de generatie ($X_0 = 1$) van een GALTON-WATSON vertakkingsproces (branching process, zie [2], XII. 4 of [4], I), met $E(X_1) = \mu$, zodat $E(X_n) = \mu^n$, en zij $Y_n = \mu^{-n} \cdot X_n$. Dan volgt uit de gelijkheid

$$E(Y_{n+1} \mid Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) = \frac{1}{\mu^{n+1}} E(X_{n+1} \mid X_0, X_1, \cdots, X_n) =$$

$$= \frac{\mu X_n}{\mu^{n+1}} = Y_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

dat de rij $Y_0, Y_1, \ldots$ een martingaal is. Stelling 3.7. is van toepassing omdat $E \mid Y_n \mid = E(Y_n) = 1$, en dus convergeert Y_n als $n \to \infty$ met kans 1 naar een limiet Y.

Als $\mu \leqq 1$, dan sterft het proces met kans 1 uit zodat $Y = 0$. Als $\mu > 1$, dan is er een positieve kans dat het proces niet uitsterft, zodat de verdeling van Y nadere informatie over de ontwikkeling van het proces op lange termijn kan geven. Zonder veel moeite kan men, uitgaande van de bekende recurrente betrekking voor de voortbrengende functies van de X_n, een functionaal vergelijking opstellen voor de karakteristieke functie van Y. In enkele gevallen is deze expliciet oplosbaar, doch meestal is alleen numerieke benadering mogelijk (zie [4] voor verdere details).

Markov processen en harmonische functies

Als $X_0, X_1, X_2, \ldots$ een Markov proces met constante overgangswaarschijnlijkheden op een niet nader gespecificeerde toestandsruimte is en g een reële functie op deze toestandsruimte is met de eigenschap dat $E(g(X_{n+1}) \mid X_n) = g(X_n)$ voor alle n, dan is het niet moeilijk om in te zien dat de rij stochastische grootheden $g(X_0), g(X_1), \ldots$ een martingaal is. Men noemt een dergelijke functie g wel een harmonische functie (ook: concordant function) van het Markov proces. Is de functie g bovendien begrensd dan leert Stelling 3.6. dat $g(X_n)$ als $n \to \infty$ met kans 1 convergeert naar een stochastische limiet.

Beschouwen we ter illustratie een Markov proces dat als toestandsruimte de gesloten cirkelschijf $C = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leqq 1\}$ in het platte vlak heeft en waarvan de overgangswaarschijnlijkheden worden vastgelegd door de eigenschap dat wanneer het proces zich op enig moment in een toestand $x = (u, v) \in C$ bevindt, de volgende stap het proces naar een aselect gekozen punt op de omtrek van de grootste cirkel met middelpunt x, die nog juist geheel binnen C ligt, voert. Gemakkelijk is in te zien dat de functies $g(u, v) = u$ en $h(u, v) = v$ op C harmonische functies van dit Markov proces zijn, en derhalve volgt uit het voorgaande dat de beide coördinaten van X_n, en dus ook het stochastische punt X_n zelf, als $n \to \infty$ met kans 1 naar een stochastische limiet convergeren. Uit het karakter van de overgangswaarschijnlijkheden volgt direct dat het limietpunt X op de rand van C moet liggen. Als bovendien gegeven is dat de verdeling van X_0 invariant is onder rotaties om de oorsprong, dan kan men op grond van de symmetrie besluiten dat de verdeling van X de homogene verdeling op de rand van C is.

Likelihood ratios

Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rij stochastische grootheden, H_0 een hypothese die inhoudt dat voor elke n de simultane verdeling van $X_1, X_2, \ldots, X_n$ een dichtheid $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heeft, en H_1 een alternatieve hypothese, die specificeert dat deze dichtheid gegeven wordt door $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*). Onder de hypothese H_0 is het quotiënt

---

*) Gemakshalve worden alle dichtheden hier genomen ten opzichte van de Lebesgue maat van passende dimensie. Deze veronderstelling is echter niet essentiëel, zodat de eis, dat de simultane verdeling van $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zowel onder H_0 als H_1 een dichtheid heeft, geen wezenlijke beperking is.

$$\Lambda_n = \Lambda_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)}{f_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)}, \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

dan een met kans 1 gedefinieerde stochastische grootheid, en, voor $n = 1, 2, \ldots$ en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zodanig dat $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$,

$$\begin{aligned}
&E(\Lambda_{n+1} \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \\
&\quad = \int_{A_{n+1}} \Lambda_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, t) \frac{f_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, t)}{f_n(x_1, \cdots, x_n)} dt = \\
&\quad = \int_{A_{n+1}} \frac{g_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, t)}{f_n(x_1, \cdots, x_n)} dt \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, t)}{f_n(x_1, \cdots, x_n)} dt = \\
&\quad = \Lambda_n(x_1, \cdots, x_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots),
\end{aligned}$$

waarin $A_{n+1} = \{t \mid f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, t) > 0\}$; anders gezegd,

$$E(\Lambda_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n) \leqq \Lambda_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Hieruit volgt dat de rij $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ onder H_0 een supermartingaal is. Daar onder H_0 bovendien $E \mid \Lambda_n \mid = E(\Lambda_n) \leqq E(\Lambda_1)$ (Stelling 3.2.) en

$$E(\Lambda_1) = \int_{A_1} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} f_1(x)\, dx = \int_{A_1} g(x)\, dx \leqq 1,$$

waarin $A_1 = \{x \mid f_1(x) > 0\}$, garandeert Stelling 3.6. dat Λ_n onder H_0 als $n \to \infty$ met kans 1 convergeert naar een limiet Λ.

In het speciale geval dat de stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots$ onder beide hypothesen onderling onafhankelijk en identiek verdeeld zijn, is Λ gemakkelijk te bepalen. We kunnen in dat geval schrijven

$$f_n(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\ , \ g_n(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

zodat onder H_0

$$\Lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{g(X_i)}{f(X_i)} \quad \text{en} \quad \Lambda = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

met kans 1 gedefiniëerd zijn. Het is nu zonder meer duidelijk dat onder H_0 ook

$$\Lambda' = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{g(X_{2i-1})}{f(X_{2i-1})} \quad \text{en} \quad \Lambda'' = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{g(X_{2i})}{f(X_{2i})}$$

bestaan, onderling onafhankelijk zijn, en beide dezelfde verdeling hebben als $\Lambda = \Lambda' \cdot \Lambda''$. Onder H_0 geldt dus de gelijkheid

$$P\{\Lambda > 0\} = P\{\Lambda' > 0\}\, P\{\Lambda'' > 0\} = P\{\Lambda > 0\}^2,$$

zodat $P\{\Lambda > 0\} = 1$ of $P\{\Lambda > 0\} = 0$.

Als $P\{\Lambda > 0\} = 1$, dan kunnen we schrijven

$$\log \Lambda = \log \Lambda' + \log \Lambda'',$$

waaruit onder H_0 volgt, wegens de onafhankelijkheid van Λ' en Λ'' en het identiek verdeeld zijn van Λ, Λ' en Λ'', dat de karakteristieke functie van $\log \Lambda$ bij kwadrateren niet verandert. Gezien de continuïteit van karakteristieke functies betekent dit dat deze karakteristieke functie identiek gelijk moet zijn aan 1, zodat $\Lambda = 1$. In dat geval zal ook

$$\Lambda^* = \prod_{i=2}^{\infty} \frac{g(X_i)}{f(X_i)}$$

met kans 1 de waarde 1 aannemen, zodat

$$\frac{g(X_1)}{f(X_1)} = \frac{\Lambda}{\Lambda^*} = 1,$$

hetgeen inhoudt, dat de hypothesen H_0 en H_1 aequivalent zijn. Als H_0 en H_1 wezenlijk verschillen, dan volgt dus dat Λ_n onder H_0 als $n \to \infty$ met kans 1 naar 0 convergeert.

Door verwisseling van H_0 en H_1 ziet men direct dat Λ_n onder H_1 als $n \to \infty$ naar ∞ convergeert.

Literatuur

[1] Doob, J. L., Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.

[2] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. I, 2nd edition, Wiley, New York, 1957.

[3] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, Wiley, New York, 1966.

[4] Harris, T. E., The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin, 1963.

[5] Kemeny, J. G., Snell, J. L., Knapp, A. W., Denumerable Markov Chains, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[6] Krickeberg, K., Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner, Stuttgart, 1963.

[7] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthiers – Villars, Paris, 1937.

[8] Loève, M., Probability Theory, 3rd edition, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[9] Meyer, P. A., Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, 1966.

[10] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, Paris, 1964.