STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 394

Over het toetsen van hoofdeffekten bij aanwezigheid van interakties in de variantieanalyse

door

L. de Haan en T. de Vries

maart 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

§0. Het probleem

Bij het Mathematisch Centrum is een algemeen variantieanalyse-programma in gebruik waarmee toetsen en schattingen kunnen worden verkregen; dit programma is gebaseerd op een parametrisering van de verschillende effekten zoals b.v. behandeld wordt in [1], hoofdstuk 1 en 2. Bij een praktijkgeval - met als parameters de hoofdeffekten en interakties onder de gebruikelijke (homogene) bijvoorwaarden - bleken de schatters voor de interakties niet aan de gestelde bijvoorwaarden te voldoen. De vraag was: hoe komt dit, wanneer is zoiets precies het geval en hie is het op te vangen. Het zal blijken dat deze - gebruikelijke - parametrisering in sommige beperkte modellen niet een toegelaten parametrisering (in de zin van stelling (1.1)) is. Het hoofdresultaat staat vermeld in stelling (2.1); de formulering van die stelling maakt gebruik van definitie (2.1). In §1 wordt het speciale geval van een tweefaktormodel besproken.

§1. Het tweefaktormodel

We bekijken een tweefaktormodel uit de variantienalyse. Het gebruikte model is

$$1.1. \qquad \underline{y}_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \underline{e}_{ijk}$$

voor $i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$; $k = 1, 2, \ldots, K_{ij}$ ($K_{ij} > 0$ voor alle i en j; er zijn dus geen lege cellen). De variabelen $\underline{e}_{ijk}$ worden onderling onafhankelijk verondersteld met verwachting nul en gelijke variantie σ^2.
In dat geval is

$$1.2. \qquad \eta_{ij} = E\underline{y}_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}.$$

In vektornotatie kunnen we dit schrijven als

$$1.3. \qquad \eta = X'\beta, \text{ waarbij } \eta' = (\eta_{11},\eta_{12},\ldots,\eta_{1J},\ldots,\eta_{I1},\ldots,\eta_{IJ}) \text{ en}$$

$$\beta' = (\mu,\alpha_1,\ldots,\alpha_I,\ \beta_1,\ldots,\beta_J,\ \gamma_{11},\gamma_{12},\ldots,\gamma_{IJ}).$$

In de matrix X' komen slechts nullen en enen voor. Men kan bij gegeven vektor η vele vektoren β vinden die voldoen aan (1.3). Om de gewenste één-één-duidigheid van de afbeelding te krijgen leggen we aan de vektor β lineaire restrikties op. Hierbij maken we gebruik van de volgende stelling (zie [1] sec. (1.4)).

Stelling 1.1. Zij X' een $n \times p$-matrix en H' een $t \times p$-matrix. De afbeelding $\eta = X'\beta$. $0 = H'\beta$ beeldt de kern van H' dan en slechts dan één-één-duidig af op de kolommenruimte van X' als

a. de rang van $G' = \binom{X'}{H'}$ gelijk is aan p en

b. de doorsnede van de rijenruimte van X' en de rijenruimte van H' de nulvektor is.

We kiezen nu de bijvoorwaarden:

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 0,$$

$$\sum_i \gamma_{ij} = 0 \qquad \text{voor} \quad j = 1, 2, \ldots, J,$$

$$\sum_j \gamma_{ij} = 0 \qquad \text{voor} \quad i = 1, 2, \ldots, I.$$

Nu levert de hiermee gedefiniëerde matrix H' een stelsel op dat aan a en b voldoet.

Het is duidelijk dat voor de kleinste-kwadraten-schatters van de parameters die aan de bijbehorende bijvoorwaarden voldoen, moet gelden (we nemen even gelijke aantallen, en wel K, waarnemingen per cel):

$$X\underline{\mathring{y}} = XX'\underline{\hat{\beta}}$$

$$0 = H'\underline{\hat{\beta}}$$

waarin

$$\underline{\mathring{y}}_{ij} = K^{-1} \sum_{k=1}^{K} \underline{y}_{ijk} \qquad \text{en} \qquad \underline{\beta}' = (\underline{\hat{\mu}}, \underline{\hat{\alpha}}_1, \ldots, \underline{\hat{\alpha}}_I, \underline{\hat{\beta}}_1, \ldots, \underline{\hat{\beta}}_J,$$
$$\underline{\gamma}_{11}, \ldots, \underline{\gamma}_{IJ}).$$

Noemen we

$$G' = \binom{X'}{H'}$$

dan geldt

$$GG'\underline{\hat{\beta}} = G\binom{\underline{\mathring{y}}}{0} = X\underline{\mathring{y}}.$$

Uit a volgt dat GG' inverteerbaar is dus:

1.4. $$\underline{\hat{\beta}} = (GG')^{-1}X\underline{\mathring{y}} = (XX' + HH')^{-1}X\underline{\mathring{y}}.$$

De komponent van de vektor $\underline{\mathring{y}}$ die loodrecht staat op het beeld van de afbeelding (1.3) wordt door de afbeelding (1.4) op de nulvektor afgebeeld zodat (1.4) dus als een echte inverse afbeelding beschouwd kan worden. Deze schattingsmethode gebruikt men onder andere bij het toetsen van lineaire hypothesen, vooral met behulp van de computer.

We bekijken de hypothese $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$ en wel zonder tevoren te eisen dat de interakties (γ_{ij}) nul zijn. Dat dit niet alleen een theoretisch denkbare maar ook een praktisch voorkomende hypothese is, mag blijken uit het volgende voorbeeld.

De faktor A heeft 2 niveau's: het al of niet invoeren van de een of andere verkeersmaatregel (zebrapad, maximumsnelheid enz.) die in de verschillende seizoenen eventueel een verschillende invloed heeft op de gemeten grootheid: de tijd nodig om per auto van een bepaald punt naar een ander te rijden. Faktor B zou dan b.v. 4 niveau's kunnen hebben, korresponderend met de 4 seizoenen. De hypothese die hier van belang is, is $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ongeacht de vraag of er interakties zijn of niet.

Voor het toetsen van genoemde hypothese willen we de schattingen voor de parameters hebben in het model:

1.5. $$\eta_{ij} = \mu + \beta_j + \gamma_{ij} \qquad \text{met:}$$
$$\sum_j \beta_j = \sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0 \quad ;$$

of, in matrixvorm:

1.6. $$\eta = \tilde{X}'\beta$$
$$0 = \tilde{H}'\beta.$$

Deze matrices $\tilde{X}'$ en $\tilde{H}'$ voldoen niet aan de voorwaarden van stelling (1.1). We zullen dit nagaan bij een voorbeeld, stel I = 2, J = 3; in dit geval wordt de matrix $\tilde{X}'$:

1.7. $$\begin{bmatrix} 1 & 1\,0\,0 & 1\,0\,0 & 0\,0\,0 \\ 1 & 0\,1\,0 & 0\,1\,0 & 0\,0\,0 \\ 1 & 0\,0\,1 & 0\,0\,1 & 0\,0\,0 \\ 1 & 1\,0\,0 & 0\,0\,0 & 1\,0\,0 \\ 1 & 0\,1\,0 & 0\,0\,0 & 0\,1\,0 \\ 1 & 0\,0\,1 & 0\,0\,0 & 0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

en de matrix $\tilde{H}'$:

1.8. $$\begin{bmatrix} 0 & 1\,1\,1 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,0 & 1\,1\,1 & 0\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 1\,1\,1 \\ 0 & 0\,0\,0 & 1\,0\,0 & 1\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,0 & 0\,1\,0 & 0\,1\,0 \\ 0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,1 & 0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

We zien dat de matrix $\tilde{X}'$ 6 onafhankelijke rijen heeft en de matrix H' 5. De rang van $\tilde{G}' = \binom{\tilde{X}'}{\tilde{H}'}$ is hoogstens gelijk aan 10, het aantal kolommen; dus bestaat er een niet-nul-vektor die een element is van zowel de rijenruimte van $\tilde{X}'$ als van de rijenruimte van $\tilde{H}'$. Dit is in tegenspraak met voorwaarde b van stelling (1.1).

(Tellen we de eerste drie rijen van $\tilde{X}'$ bij elkaar op, trekken we daar van af de laatste drie rijen van $\tilde{X}'$, dan krijgen we het verschil van rij 2 en rij 3 van $\tilde{H}'$.)

Uit stelling (1.1) volgt dat de afbeelding (1.6) niet een afbeelding is van de kern van $\tilde{H}'$ op de kolommenruimte van $\tilde{X}'$ (= kolommenruimte van X') maar een afbeelding van de kern van $\tilde{H}'$ op een echte deelruimte, zeg D, van de kolommenruimte van $\tilde{X}'$. Een echte inverse afbbelding (schatter) zou dus de komponent van $\mathring{\underline{y}}$ die loodrecht staat op D, op de nulvektor moeten afbeelden. De afbeelding *)

1.9. $$\hat{\underline{\beta}} = (\tilde{X}\tilde{X}' + \tilde{H}\tilde{H}')^{-1}\tilde{X}\mathring{\underline{y}}$$

beeldt echter alleen de komponent van $\mathring{\underline{y}}$, die loodrecht staat op de kolommenruimte van $\tilde{X}'$, af op de nulvektor en niet de komponent, loodrecht op D, binnen de kolommenruimte van $\tilde{X}'$. De schatters (1.9) zullen niet aan de overeenkomstige bijvoorwaarden voldoen, want de dimensie van het beeld van de afbeelding (1.9) is gelijk aan de dimensie van de rijenruimte van $\tilde{X}'$ en we hebben gezien dat deze groter is dan de dimensie van de kern van $\tilde{H}'$. De schatters (1.9) zijn dus niet de gezocht schatters**).

Het is uiteraard mogelijk de gestelde hypothese te onderzoeken zonder gebruik te maken van de schattingen van de (overblijvende) parameters van het model ([1], sec. 4.4 bij ongelijke aantallen waarnemingen per cel). Willen we echter gebruik maken van een rekenprogramma dat van die schattingen uitgaat dan kunnen we het volgende bedenken: een model

---

*) De rang van $\tilde{G}'$ is gelijk aan het aantal komponenten van $\hat{\underline{\beta}}$ zodat de inverse van $\tilde{G}\tilde{G}'$ bestaat.

**) Men kan door uitwerking van het voorbeeld nagaan dat de schatters (1.9) niet alleen niet aan de bijvoorwaarden voldoen, maar bovendien geen kleinste kwadratenschatters zijn in het model m.a.w. $\tilde{X}\tilde{X}'(\tilde{X}\tilde{X}' + \tilde{H}\tilde{H}')^{-1}\tilde{X} \neq \tilde{X}$, zodat het gebruik van (1.9) een onjuiste toetsingsgrootheid zou opleveren.

verandert niet bij substitutie van enkele lineaire restrikties van de matrix $\tilde{H}'$. De rijen van de matrix $\tilde{H}'$ die verantwoordelijk zijn voor de afhankelijkheid van de matrix $\tilde{X}'$ zijn (in ons voorbeeld 1.8) de tweede en derde. Substitueren we de daarmee korresponderende bijvoorwaarden $\sum_j \gamma_{ij} = 0$ voor $i = 1, 2$, b.v. door te stellen $\gamma_{13} = -\gamma_{11} - \gamma_{12}$ en $\gamma_{23} = -\gamma_{21} - \gamma_{22}$ dan zijn de rijen van de nieuwe matrix $\tilde{\tilde{X}}'$

1.10
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

onafhankelijk van die van de nieuwe matrix $\tilde{\tilde{H}}'$

1.11
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De nieuwe getransponeerde parametervektor wordt dan $(\mu, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22})$. De afbeelding

1.12
$$\underline{\hat{\beta}} = (\tilde{\tilde{X}}\tilde{\tilde{X}}' + \tilde{\tilde{H}}\tilde{\tilde{H}}')^{-1}\tilde{\tilde{X}}\underline{\mathring{y}}$$

levert dan de kleinste-kwadratenschatters van de parameters die aan de bijvoorwaarden voldoen.

Bij berekening blijkt dat de afbeelding (1.9) als resultaat heeft

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \underline{\mathring{y}}_{\cdot\cdot} \\ \underline{\beta}_j &= \underline{\mathring{y}}_{\cdot j} - \underline{\mathring{y}}_{\cdot\cdot} \\ \underline{\gamma}_{ij} &= \underline{\mathring{y}}_{ij} - \underline{\mathring{y}}_{\cdot j} - \tfrac{3}{4}\underline{\mathring{y}}_{i\cdot} + \tfrac{3}{4}\underline{\mathring{y}}_{\cdot\cdot} \end{aligned}$$

voor $i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$. Omdat in het model geldt $\eta_{i\cdot} - \eta_{\cdot\cdot} = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots, I$, zijn deze schattingen, die niet aan de bijbehorende bijvoorwaarden voldoen, wel zuiver.

Bij gelijke aantallen waarnemingen per cel is het niet nodig matrices te inverteren; de kleinste-kwadraten-schatters zijn in dat geval onmiddellijk op te schrijven. De bovenstaande redenering is echter zonder meer aan te passen voor het geval van ongelijke aantallen waarnemingen per cel (gesteld dat geen der cellen leeg is); zie hiervoor de opmerking aan het einde van §2.

2. Het algemene geval

Zij gegeven een $I_1 I_2 \ldots I_n$-dimensionale stochastische vektor $\underline{y} = (\underline{y}_{11..1}, \underline{y}_{11..12}, \underline{y}_{11..I_n}, \underline{y}_{11..121}, \ldots, \underline{y}_{I_1..I_n}$, waarvan de componenten onderling onafhankelijk verdeeld zijn met gelijke variantie σ^2. We noteren $E\underline{y} = \eta$ en voeren een $(I_1+1)(I_2+1) \ldots (I_n+1)$-dimensionale vektor β in die we in verband met het volgende als volgt noteren

$$\beta = (\alpha^0, \alpha^1_1, \alpha^1_2, \ldots, \alpha^1_{I_1}, \alpha^2_1, \ldots, \alpha^n_{I_n}, \alpha^{12}_{11}, \alpha^{12}_{12}, \ldots, \alpha^{12}_{I_1 I_2}, \alpha^{23}_{11}, \ldots, \alpha^{12..n}_{I_1..I_n});$$

de komponenten van β noemen we de parameters van het model. We geven de Euklidische ruimte waarin de vektor η ligt aan met A en die waarin β ligt met B.

Een lineaire deelruimte $U \subset B$ wordt gedefinieerd door de volgende lineaire restrikties

$$\text{2.1.} \qquad \begin{aligned} &\sum_{i_1=1}^{I_1} \alpha^1_{i_1} = \sum_{i_2=1}^{I_2} \alpha^2_{i_2} = \ldots = 0, \\ &\sum_{i_1=1}^{I_1} \alpha^{12}_{i_1 i_2} = \sum_{i_2=1}^{I_2} \alpha^{12}_{i_1 i_2} = \ldots = 0, \ldots, \\ &\sum_{i_1=1}^{I_1} \alpha^{1\,2\,..n}_{i_1 i_2 .. i_n} = \sum_{i_2=1}^{I_2} \alpha^{1\,2\,..n}_{i_1 i_2 .. i_n} = \ldots = \sum_{i_n=1}^{I_n} \alpha^{1\,2\,..n}_{i_1 i_2 .. i_n} = 0. \end{aligned}$$

We definiëren een lineaire afbeelding van U naar A als volgt

$$\text{2.2.} \qquad \eta_{i_1 i_2 .. i_n} = \alpha^0 + \alpha^1_{i_1} + \alpha^2_{i_2} + \ldots, \alpha^n_{i_n} + \alpha^{1\,2}_{i_1 i_2} + \ldots + \alpha^{n-1,\,n}_{i_{n-1}, i_n} + \ldots + \alpha^{1\,2\,..n}_{i_1 i_2 .. i_n}$$

waarbij de index i_k de getallen 1, 2, 3, ..., I_k doorloopt voor elke k. In matrixvorm schrijven we (2.2) resp. (2.1) als

$$\text{2.3.} \qquad \eta = X'\beta \qquad \text{en} \qquad H'\beta = 0.$$

Zoals bekend is de afbeelding (2.2) ééneenduidig; de inverse afbeelding wordt in de bekende puntnotatie *):

2.4. $\alpha^0 = \eta_{oo\ldots o}$; $\alpha^1_{i_1} = \eta_{i_1 oo\ldots o} - \eta_{oo\ldots o}$, enzovoort.

De verzameling parameters **) $\{\alpha^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}\}_{i_1 \ldots i_r}$ noemen we het <u>effekt</u> $\alpha^{k_1 \ldots k_r}$ waarin de <u>faktoren</u> $k_1, k_2, \ldots, k_r$ optreden.

<u>Definitie 2.1.</u> We voeren in de verzameling der effekten een partiële ordening in: het effekt γ_1 gaat vooraf aan het effekt γ_2 (notatie $\gamma_2 \prec \gamma_1$) als alle in γ_1 optredende faktoren ook in γ_2 optreden. Het effekt α^0 gaat aan alle andere effekten vooraf.

<u>Voorbeeld</u>: $\alpha^{136} \prec \alpha^{13} \prec \alpha^3$

Met gebruik van de matrix

$$G' = \binom{X'}{H'}$$

schrijven we (2.3) als

$$G'\beta = \binom{\eta}{0}.$$

Dus

$$GG'\beta = G\binom{\eta}{0} = X\eta.$$

Dit geeft, omdat rang $G' = (I_1+1)(I_2+1) \ldots (I_n+1)$, de inverse transformatie:

$$\beta = (GG')^{-1}X\eta = (XX' + HH')^{-1}X\eta \text{ .}$$

---

*) Wegens typografische moeilijkheden wordt hier een o-notatie gebruikt.

**) $\alpha^{k_1 \ldots k_r}_{i_1 \ldots i_r}$ is een vereenvoudigde schrijfwijze voor $\alpha^{k_1 \ldots k_r}_{i_{k_1} i_{k_2} \ldots i_{k_r}}$

De kleinste-kwadratenschatters die aan de bijvoorwaarden voldoen zijn dus:

2.5. $\underline{\hat{\beta}} = (XX' + HH')^{-1}X\underline{y}$.

We vragen ons het volgende af: als bekend is - door hypothese of in het model - dat bepaalde effekten afwezig zijn (afwezigheid van $\alpha^{k_1..k_r}$ wil zeggen $\alpha^{k_1..k_r}_{i_1..i_r} = 0$ voor alle $i_1, i_2, \ldots, i_r$), is dan deze methode van berekenen van de kleinste-kwadratenschatters (met behulp van de bij het model passende matrices X' en H') nog juist en - zo niet - hoe zijn die dan te berekenen?

Het zal blijken dat deze schattingsmethode dan en slechts dan juiste resultaten geeft als met elk ontbrekend effekt γ *ook alle effekten* γ^* *met* $\gamma^* < \gamma$ *ontbreken. Zijn er effekten* γ *en* γ^* *met* $\gamma^* < \gamma$ *waarbij* γ^* *aanwezig is en* γ *niet, dan levert substitutie van bijvoorwaarden van al die effekten* γ^* *nieuwe matrices* X' *en* H', *die ingevuld in* (2.5) *wel de juiste schatters voor de parameters opleveren.*

We definiëren bij elk effekt γ lineaire deelruimten $A_\gamma \subset A^*_\gamma \subset A$ op de volgende manier:

A^*_0 is de ruimte opgespannen door de vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A^*_1 is de ruimte opgespannen door de vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

enzovoort, bij elk effekt de ruimte opgespannen door de overeenkomstige kolomvektoren van X'. Verder is *)

$$A_0 = A_0^*$$
$$A_1 = A_1^* \ominus A_0$$
$$A_2 = A_2^* \ominus A_1 \ominus A_0 = A_2^* \ominus A_0.$$

enz.

Deze deelruimten zijn gedefinieerd onafhankelijk van het al of niet optreden van de effekten.

De lineaire deelruimten A_0, A_1, A_2, ..., $A_{12..n}$ staan alle loodrecht op elkaar en spannen samen de kolommenruimte van X' op. Als alle effekten aanwezig zijn is dit de gehele ruimte A.

---

*) $A \ominus B$ wil zeggen de verzameling vektoren uit A die loodrecht op alle vektoren van B staan.

$A \oplus B$ wil zeggen de verzameling vektoren die als sommen van vektoren uit A en B te schrijven zijn (we veronderstellen dat $A \perp B$).

We formuleren eerst enige hulpstellingen:

Hulpstelling 2.1. $\mathrm{Dim}\,(A^*_{k_1k_2\ldots k_r}) = I_{k_1} I_{k_2} \ldots I_{k_r}$

$\mathrm{Dim}\,(A_{k_1k_2\ldots k_r}) = (I_{k_1}-1)(I_{k_2}-1) \ldots (I_{k_r}-1)$

Bewijs: $A^*_{k_1k_2\ldots k_r}$ heeft $I_{k_1} I_{k_2} \ldots I_{k_r}$ opspannende vektoren die onafhankelijk zijn. De tweede bewering volgt uit stelling 3 van de appendix.

Hulpstelling 2.2. $A^*_\gamma = A_\gamma + A_{\gamma_1} + A_{\gamma_2} + \ldots + A_{\gamma_m}$, waarbij $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ alle effekten zijn die voorafgaan aan γ.

Bewijs: Zeg $\gamma = \alpha^{12\ldots r}$, dan is

$$A^*_\gamma = A^*_{12\ldots r} = \{\eta = (\eta_{i_1\ldots i_n}) \mid i_1=j_1, i_2=j_2, \ldots, i_r=j_r \Rightarrow \eta_{i_1\ldots i_n} = \eta_{j_1\ldots j_n}\}$$

(bijvoorbeeld: voor elke vektor $(\eta_{i_1\ldots i_n}) \in A^*_{12}$ geldt dat $\eta_{5411\ldots1}$ en $\eta_{5422\ldots2}$ gelijk zijn). Dus als $\gamma_1 \prec \gamma$ dan $A_{\gamma_1} \subset A^*_{\gamma_1} \subset A^*_\gamma$, dat wil zeggen

$$A_\gamma \oplus A_{\gamma_1} \oplus A_{\gamma_2} \oplus \ldots \oplus A_{\gamma_m} \subset A^*_\gamma.$$

Verder geldt: $\dim\,(A^*_\gamma) = \dim\,(A^*_{12\ldots r}) = I_1 I_2 \ldots I_r =$

$$= \{(I_1-1)+1\}\{(I_2-1)+1\} \ldots \{(I_r-1)+1\} = (I_1-1)(I_2-1)\ldots(I_r-1) =$$

$$= (I_1-1)(I_2-1)\ldots(I_{r-1}-1)+\ldots+(I_2-1)\ldots(I_r-1)+\ldots+I_1+I_2+\ldots+I_r+1 =$$

$$= \dim\,(A_\gamma) + \sum_m \dim\,(A_{\gamma_m}) \quad \text{dus} \quad A_\gamma \oplus A_{\gamma_1} \oplus \ldots \oplus A_{\gamma_m} = A^*_\gamma.$$

Noem de deelruimte opgespannen door de vektoren $\beta \in B$ waarvoor geldt dat alle komponenten, behalve misschien $\{\alpha^{k_1,\ldots,k_r}_{i_1,\ldots,i_r}\}_{i_1,\ldots,i_r}$, nul zijn $B^*_{k_1,\ldots,k_r}$. Dan geldt:

Hulpstelling 2.3. Als alle effekten aanwezig zijn wordt voor elk effekt γ de deelruimte $B_\gamma \subset B$ door de afbeelding (2.3) afgebeeld op $A_\gamma \subset A$.

Gevolg. De afbeelding (2.3) is dus ook voor elk van deze deelruimten ééneénduidig.

Bewijs: Zeg weer $\gamma = \alpha^{12..r}$, dan geldt wegens hulpstelling (2.2):

$$A_\gamma = A_{12..r} = \{\eta = (\eta_{i_1..i_n}) | \eta \in A^{*}_{12..r} \text{ en } \eta_{i_1..i_{r-1}000..0} =$$

$$= \eta_{i_1..i_{r-2}0i_r0..0} = ... = \eta_{0i_2..i_r00..0} = 0$$

$$\text{voor alle } i_1,\ i_2,\ ...,\ i_r\}.$$

Het beeld van een element $(\alpha^{1\ 2..r}_{i_1 i_2..i_r})_{i_1..i_r}$ uit $B_{12..r}$ is $\eta = (\eta_{i_1..i_n}) = (\alpha^{12...r}_{i_1..i_r})_{i_1..i_n}$. Men ziet dat dit een element van $A_{12...r}$ is. Omdat voor elk effect $\alpha^{k_1..k_r}$ geldt: beeld $(B_{k_1..k_r}) \subset A_{k_1..k_r}$ en omdat de afbeelding (2.3) ééneénduidig is, volget het gestelde.

Nemen we als voorbeeld de X'-matrix (1.5) van het 2-faktormodel uit §1. De eerste kolom spant A_0 op, de tweede en derde kolom A_1^*, de vierde, vijfde en zesde kolom A_2^* en de overige kolommen A_{12}^*. Verder is $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_{12}$. De komponenten van de verwachtingsvektor η schrijven we in de puntnotatie als volgt

$$\eta_{ij} = \eta_{..} + (\eta_{i.} - \eta_{..}) + (\eta_{.j} - \eta_{..}) + (\eta_{ij} - \eta_{i.} - \eta_{.j} + \eta_{..})$$

waarbij de vier termen korresponderen met de projekties op de deelruimten A_0, A_1, A_2 en A_{12}. Stel nu dat de interakties ontbreken, d.w.z. volgens hulpstelling (2.3) $\eta \in A \ominus A_{12}$, dan spannen de deelruimten A_0, A_1 en A_2 de kolommenruimte van de gereduceerde matrix X' op. Ontbreekt daarentegen b.v. de faktor a(korresponderend met de $\{\alpha_i\}$), maar niet de interakties, d.w.z. $\eta \in A \ominus A_1$, dan is blijkens (1.8) de kolommenruimte van de gereduceerde matrix X' gelijk aan A dus groter dan de definitieruimte van η.

Laten we bij ontbreken van effekten de overeenkomstige kolommen van de matrices X' en H' weg, dan geldt de volgende

Stelling 2.1. Er zijn twee mogelijkheden:

1. Met elk ontbrekend effekt, ontbreken ook alle effekten γ^* met $\gamma^* < \gamma$; in dit geval geldt: de overblijvende komponenten van de vektor β zijn alle schatbaar in het model en de kleinste-kwadratenschatters die aan de bijvoorwaarden voldoen worden gegeven door (2.5).
2. Er zijn effekten γ en γ^* met $\gamma^* < \gamma$ waarbij γ^* aanwezig is en γ niet; in dit geval zijn de overblijvende komponenten van de vektor β alle schatbaar maar de kleinste-kwadraten-schatters die aan de bijvoorwaarden voldoen worden niet gegeven door (2.5).

Bewijs: Welke effekten ook ontbreken, steeds bestaat een ééneénduidig verband tussen de vektor η en de aan bijvoorwaarden onderworpen getallen α^0, $\alpha^1_{i_1}$, ..., $\alpha^{1\,2\,..n}_{i_1 i_2 .. i_n}$, ..., $\alpha^{1\,2\,..n}_{I_1 I_2 .. I_n}$ (waarbij de ontbrekende effekten zijn weggelaten) door middel van enerzijds de relaties (2.2) en anderzijds de relaties (2.4). De vektor η doorloopt hierbij niet de gehele ruimte A maar een lineaire deelruimte van A, gedefinieerd door *)

$\alpha^{\gamma_1}_{i(\gamma_1)} = 0$, $\alpha^{\gamma_2}_{i(\gamma_2)} = 0$, ..., $\alpha^{\gamma_m}_{i(\gamma_m)} = 0$ voor alle $i(\gamma_1)$, $i(\gamma_2)$, ..., $i(\gamma_m)$

(γ_1, γ_2, ..., γ_m zijn de ontbrekende effekten), vertaald in beperkingen voor de η-vektor met behulp van de afbeelding

$$\beta = (XX' + HH')^{-1}X\eta,$$

d.w.z. $\eta \in A_d = A \ominus A_{\gamma_1} \ominus A_{\gamma_2} \ominus \ldots \ominus A_{\gamma_m}$; dit volgt uit hulpstelling (2.3).

---

*) De uitdrukking $i(\gamma)$ stelt een vektor van indices behorend bij het effekt γ voor.

We definiëren de matrix F als volgt: Fg is de projektie van de vektor g op A_d voor $g \in A$ en de matrix P als volgt: Pg is de projektie van g op de kolommenruimte van X' voor $g \in A$.

Bij elke $\eta \in A_d$ is er een $\beta \in B$ met $X'\beta = \eta$ en $H'\beta = 0$ dus *)

$$\beta = (XX' + HH')^{-1}X\eta$$

voor $\eta \in A_d$ dus

$$\beta = (XX' + HH')^{-1}X\,F\eta$$

is een afbeelding die vektoren $\eta \perp A_d$ op nul afbeeldt en vektoren $\eta \in A_d$ op vektoren β waarvoor (2.3) geldt **).

Steeds geldt: $A_d \subset$ kolommenruimte van X'. Welnu: de kolommenruimte van X' is de direkte som van $A_o^*, A_1^*, \ldots, A_{12..n}^*$, waaronder alleen de deelruimten van de optredende effekten voorkomen.

In geval 1 van de stelling geldt volgens hulpstelling (2.2): A_d = kolommenruimte van X'; voor de echte inverse afbeelding van (2.3) geldt dan

$$\beta = (XX' + HH')^{-1}XF\eta = (XX' + HH')^{-1}XP\eta = (XX' + HH')^{-1}X\eta;$$

ook voor de kleinste-kwadratenschatters die aan de bijvoorwaarden voldoen geldt:

$$\underline{\hat{\beta}} = (XX' + HH')^{-1}F\underline{y} = (XX' + HH')^{-1}X\underline{y}.$$

In geval 2 van de stelling zijn de kleinste-kwadratenschatters van β die aan de bijvoorwaarden voldoen

$$\underline{\hat{\beta}} = (XX' = HH')^{-1}XF\underline{y}$$

en deze uitdrukking is niet voor alle $\underline{y}$ gelijk aan

---

*) De inverse van de matrix XX' + HH' bestaat want stel dat er een $\beta^* \neq 0$ is met $X'\beta^* = 0$ en $H'\beta^* = 0$ dan zou gelden dim A_d < dim (kern H'); dus G' heeft volledige rang.

**) Een dergelijke afbeelding noemen we een echte inverse afbeelding van de afbeelding (2.3).

$$(XX' + HH')^{-1}X\underline{y}$$

want: stel $\gamma^* < \gamma_k$ voor een $k \leq m$ en $\gamma^* \notin \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ dan geldt:
$A_{\gamma_k} \in$ kolommenruimte van X';
dus geldt niet:

A_d = kolommenruimte van X'

dat wil zeggen

rijenruimte $(XX' + HH')^{-1}XF \neq$ rijenruimte $(XX' + HH')^{-1}X$.
Hiermee is de stelling bewezen.

Een methode om in geval 2 uit de moeilijkheden te komen is de volgende: Stel dat $\alpha^{12\ldots r}$ afwezig is. Substitueer (voorzover aanwezig)

$$\alpha^{1\,2\,\ldots rs}_{i_1 i_2 \ldots i_r I_s} = - \sum_{i_s \neq I_s} \alpha^{1\,2\,\ldots rs}_{i_1 i_2 \ldots i_r i_s} \qquad \text{voor alle } s > r$$

$$\alpha^{1\,2\,\ldots rst}_{i_1 i_2 \ldots i_r I_s i_t} = - \sum_{i_s \neq I_s} \alpha^{1\,2\,\ldots rst}_{i_1 i_2 \ldots i_r i_s i_t} \qquad \text{voor alle } s \text{ en } t > r$$

$$\alpha^{1\,2\,\ldots rst}_{i_1 i_2 \ldots i_r i_s I_t} = - \sum_{i_t \neq I_t} \alpha^{1\,2\,\ldots rst}_{i_1 i_2 \ldots i_r i_s i_t} \qquad \text{voor alle } s \text{ en } t > r$$

enzovoort; doe dit voor alle effekten die ontbreken. De rijen van H' die de betreffende restrikties geven zijn nu overbodig geworden: we laten ze weg. De resulterende matrices noemen we $\tilde{X}'$ en $\tilde{H}'$. Het is gemakkelijk in te zien dat de kolommen van $\tilde{X}'$ korresponderend met het effekt $\alpha^{12\ldots rs}$ loodrecht staan op $A_{12\ldots r}$. Dit geldt ook voor alle andere effekten waaraan $\alpha^{12\ldots r}$ voorafgaat. Dus A_d = kolommenruimte $\tilde{X}'$; verder blijft de ééneenduidige toevoeging bestaan zodat we in geval 1 van de stelling zijn komen te verkeren.

Een belangrijke toepassing is de volgende:

Bij de gebruikelijke situatie van meerdere waarnemingen per cel (geen lege cellen) definiëren we als in §1 een vektor $\mathring{\underline{y}}$ van celgemiddelden en een diagonaalmatrix N van aantallen waarnemingen per cel. We gebruiken dan een vektor $\eta^{*} = M\eta$ in plaats van η waarbij M de diagonaalmatrix is met MM = N; in plaats van (2.3) komt dan de afbeelding $\eta^{*} = MX'\beta$ en $H'\beta = 0$. De matrix $\binom{MX'}{H'}$ voldoet dan en slechts dan aan de voorwaarden a. en b. van de stelling genoemd aan het begin van §1 (zie [1] sec (1.4)) als de matrix $\binom{X'}{H'}$ aan die voorwaarden voldoet. Dus voor de schattingsmethode

$$\hat{\underline{\beta}} = (XMMX' + HH')^{-1}XMM\mathring{\underline{y}} = (XNX' + HH')^{-1}XN\mathring{\underline{y}}$$

geldt de stelling (2.1).

§3. Appendix: dimensiestelling

Definitie 3.1. Bij vektoren $a\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^n$, $a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ definiëren we de tensorproduktvektor $a * b$ als $(a * b)' = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$.

Bij een lineaire deelruimte $U\subset\mathbb{R}^n$ en een lineaire deelruimte $V\subset\mathbb{R}^n$ definiëren we de tensorproduktruimte $U * V$ als $U * V = \{c\in\mathbb{R}^n \mid \exists_{u\in U, v\in V}\ c = u * v\}$. De operatie $*$ is associatief en commutatief.

Opmerking. Uitgaande van de vektoren $\eta = (\eta_{i_1\ldots i_n})\in A$, ingevoerd in §2, definiëren we naast de deelruimten $A_0, A_1, A_1^*, \ldots, A_{12\ldots n}, A^*_{12\ldots n}$ bij elk effekt γ (zeg $\gamma = \alpha^{12\ldots r}$) nog de volgende deelruimte van A:

$$D_\gamma = D_{12\ldots r} = \{\eta = (\eta_{i_1 i_2\ldots i_n}) \mid i_{r+1} = j_{r+1}, i_{r+2} = j_{r+2}, \ldots, i_n = j_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta_{i_1\ldots i_n} = \eta_{j_1\ldots j_n}\}.$$

Opmerking. $A_\gamma \cap D_\gamma = A_0$.

Hulpstelling 3.1. Voor $a, a^0\in A_\gamma$ en $d, d^0\in D_\gamma$ geldt:

$$a * d \perp a^0 * d^0 \Leftrightarrow a \perp a^0 \text{ of } d \perp d^0 \text{ of beide.}$$

Bewijs: $$(a * d, a^0 * d^0) = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq I_1\\ 1\leq i_n\leq I_n}} a_{i_1 i_2\ldots i_n} a^0_{i_1 i_2\ldots i_n} d_{i_1 i_2\ldots i_n} d^0_{i_1 i_2\ldots i_n} =$$

$$= \Bigl(\sum_{\substack{1\leq i_1\leq I_1\\ \vdots\\ 1\leq i_r\leq I_r}} a_{i_1 i_2\ldots i_n} a^0_{i_1 i_2\ldots i_n}\Bigr)\Bigl(\sum_{\substack{1\leq i_{r+1}\leq I_{r+1}\\ \vdots\\ 1\leq i_n\leq I_n}} d_{i_1\ldots i_n} d^0_{i_1\ldots i_n}\Bigr)$$

$$= (a, a^0).(d, d^0).$$

Hulpstelling 3.2. Voor $U \subset A_\gamma$, dim (U) = q en $V \subset D_\gamma$, dim (V) = s geldt:

$$\dim (U * V) = (\dim U).(\dim V).$$

Bewijs: Laten $u_1, u_2, \ldots, u_q$ orthogonale opspannende vektoren van U zijn en $v_1, v_2, \ldots, v_s$ orthogonale opspannende vektoren van V, dan spant het stelsel orthogonale vektoren $(u_i * v_j)_{i=1}^{q}\,{}_{j=1}^{s}$ de ruimte $U * V$ op.

Gevolg. Men ziet langs rekursieve weg in dat $\dim (A_1 * A_2 * \ldots * A_r) =$
$= (\dim A_1).(\dim A_2) \ldots (\dim A_r) =$

$$= \prod_{k=1}^{r} (I_k - 1).$$

Hulpstelling 3.3.

$$A = A_o \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus A_1 * A_2 \oplus A_1 * A_3 \oplus \ldots \oplus A_{n-1} * A_n \oplus$$

$$\oplus A_1 * A_2 * \ldots * A_n.$$

Bewijs: Elke deelruimte uit het rechterlid staat loodrecht op elke andere deelruimte uit dit lid; dit volgt uit hulpstelling (3.1): bijvoorbeeld $A_1 = A_1 * A_o \perp A_1 * A_2$ omdat $A_o \subset D_2$. Verder geldt dat $\dim (\text{rechterlid}) = \dim (A_o) + \ldots + \dim (A_1 * \ldots * A_n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} I_k = \dim (A).$$

Stelling 3.4. $\quad A_{k_1,\ldots,k_r} = \sum_{i=1}^{r} * A_{k_1}.$

Bewijs: Uit de definitie van $A_{k_1,\ldots,k_r}$ en uit de definitie van de produktvektorruimte blijkt direkt:

3.9. $$A = A_{k_1,\ldots,k_r} \supset \sum_{i=1}^{r} * A_{k_i}.$$

Stel nu: $\exists$ ruimte $C \subset \mathbb{R}^{I_1 \ldots I_n}$: $A_{k_1 \ldots k_r} = \prod_i * A_{k_i} \oplus C$.

Dus $C \subset A_\gamma$. Stel $c \in C$, dan geldt $c \neq \prod_i * A_{k_i}$.

Er moet dus gelden, volgens (3.7): $\exists\, \gamma' \neq \gamma$, $\gamma' = m_1, \ldots, m_s$:

$c \in \prod_{i=1}^{s} * A_{m_i}$, dus volgens (3.9) $c \in A_{\gamma'}$. Maar $c \in A_{\gamma, \gamma \neq \gamma'}$, dus

$\nexists\, C \subset \mathbb{R}^{I_1 \ldots I_n}$, dus $A_\gamma = \prod_i * A_{k_i}$.

<u>Gevolg</u>. $\quad \mathrm{Dim}\,(R_{k_1 \ldots k_r}) = \prod_{1=1}^{r} (I_{k_1} - 1)$.

<u>Literatuur</u>: 1. H. Scheffé (1959): The Analysis of Variance; Wiley, New York.