STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 395

Syllabus van het colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof.dr. J.Th. Runnenburg

Hoofdstuk I. Laplace-Stieltjesgetransformeerden

door

drs. W. Vervaat

oktober 1967 - maart 1968

maart 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inleiding

De hier behandelde stof is voornamelijk gebaseerd op Feller 2, hoofdstuk XIII, dat handelt over Laplace-Stieltjesgetransformeerden van verdelingsfuncties, maar omvat ook verschillende uitbreidingen. Met name § 7 geeft verschillende onlangs verkregen resultaten van Steutel en Goldie over klassen van oneindig deelbare verdelingsfuncties (zie voor de literatuur van § 7 blz. 79-80).

De paragrafen met nummer 2a, 3a en 6a vermelden eigenschappen van karakteristieke functies, die corresponderen met de in de paragrafen 2, 3 en 6 behandelde eigenschappen van Laplace-Stieltjesgetransformeerden. Naar onderstaande vier boeken wordt regelmatig in de tekst verwezen; tussen rechte haken staan hier de trefwoorden vermeld, waarmee de verwijzing in de tekst geschiedt.

[Feller 1] : W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. I, 2nd ed. (1957); Wiley, New York

[Feller 2] : W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, vol. II (1967); Wiley, New York.

[Lukacs] : E. Lukacs, Characteristic functions (1960); Griffin, London.

[Widder] : D.V. Widder, The Laplace transform (1941); Princeton University Press.

Inhoud

I. LAPLACE-STIELTJESGETRANSFORMEERDEN

§ 1 Convergentie van verdelingsfuncties

(Feller 2 VIII 1, gedeelte van 6)

Zij $\mathbb{R}$ de verzameling der reële getallen en $\mathcal{B}$ de σ-algebra der Borelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Definitie 1.1. Een reëelwaardige functie U op $\mathbb{R}$ heet een *maatfunctie* als U rechtscontinu en nietdalend is.

Definitie 1.2. Twee maatfuncties U en V heten *maatequivalent* als U en V een constante verschillen.

Maatequivalentie is een equivalentierelatie op de verzameling van maatfuncties. Er is een 1-1-correspondentie tussen de maten op $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ die eindig zijn op eindige intervallen en de equivalentieklassen van maatfuncties.
Een maatfunctie U definieert een maat μ op $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ door

$$(1.1) \qquad \mu\big((a,b]\big) = U(b) - U(a) \qquad \text{voor} \quad a < b \;;$$

de zo verkregen maat μ is eindig op eindige intervallen en blijft dezelfde indien we in (1.1) U vervangen door een met U maatequivalente maatfunctie V.
Elke maat μ op $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ die eindig is op eindige intervallen bepaalt weer eenduidig een equivalentieklasse van maatfuncties $\{U_c\}$ door

$$(1.2) \qquad U_c(x) = \begin{cases} c + \mu\big([0,x]\big) & \text{voor} \quad x \geq 0 \;, \\ c - \mu\big((x,0)\big) & \text{voor} \quad x < 0 \;. \end{cases}$$

In navolging van Feller schrijven we $U\{A\}$ in plaats van $\mu(A)$ als $A \in \mathcal{B}$. Met de akkoladen om het argument van U geven we dus aan dat we niet de maatfunctie U bedoelen, maar de maat die door U op $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ gedefinieerd wordt. Feller gebruikt de term "measure" zowel voor $U(.)$ als voor $U\{.\}$, waar wij twee verschillende termen (maatfunctie resp. maat) zullen gebruiken.

Definitie 1.3. Een functie F op $\mathbb{R}$ is een *verdelingsachtige functie* als F een maatfunctie is met

$$(1.3) \qquad F(-\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \ .$$

Definitie 1.4. Een functie F op $\mathbb{R}$ is een *verdelingsfunctie* als F een maatfunctie is met $F(-\infty) = 0$ en $F(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Definitie 1.5. Een functie F op $\mathbb{R}$ is een *defectieve verdelingsfunctie* als F een maatfunctie is met $F(-\infty) = 0$ en $F(\infty) < 1$. Het getal $1 - F(\infty)$ heet het *defect* van F.

Hieronder volgen de termen die Feller gebruikt voor de functies, die gedefinieerd worden in de definities 1.3, 1.4 en 1.5.

verdelingsfunctie	distribution function, proper distribution function
defectieve verdelingsfunctie	defective distribution function
verdelingsachtige functie	improper distribution function

Definitie 1.6. Een interval I van reële getallen (zij het open, half-open of gesloten en eventueel onbegrensd) heet een *continuiteitsinterval* van een maatfunctie U, als U continu is in de eindige eindpunten van I.

Feller eist op blz. 242 dat continuiteitsintervallen open zijn, maar reeds op de volgende bladzijde overtreedt hij de beperking die deze eis hem oplegt.

Definitie 1.7. De rij maatfuncties $\{U_n\}$ is *maatconvergent*, als er een maatfunctie U is met

$$(1.4) \qquad \lim_{n\to\infty} U_n\{I\} = U\{I\}$$

voor ieder begrensd continuiteitsinterval I van U. In dit geval heet de rij $\{U_n\}$ *maatconvergent naar* U. (N.B. Als een U voldoet aan (1.4), dan voldoet ook U+c!)

Opmerking 1.1. Als we in (1.4) U_n vervangen door $V_n = U_n + c_n$ (c_n reëel getal), dan is ook $\{V_n\}$ maatconvergent naar U. Het is duidelijk dat het voor maatconvergente $\{U_n\}$ mogelijk is dat $\{U_n(x)\}$ voor geen enkele x convergeert.

Definitie 1.8. De rij verdelingsachtige functies $\{F_n\}$ is *konvergent*, als er een verdelingsachtige functie F bestaat zó, dat $\{F_n\}$ maatconvergent naar F is. In dit geval heet de rij $\{F_n\}$ *konvergent naar* F en we gebruiken alleen hier de notatie $F_n \to F$ dan wel $\lim F_n = F$ (N.B. hier kan F dus noch in de definitie, noch in de notatie door F+c vervangen worden). Door de spelling van "konvergent" maken we onderscheid tussen het hier gedefinieerde begrip en het begrip "convergent" dat we kennen voor rijen van reële getallen.

Definitie 1.9. De rij verdelingsachtige functies $\{F_n\}$ is *verdelingsachtig convergent*, als er een verdelingsachtige functie F bestaat met

(1.5) $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

voor alle continuiteitspunten x van F. In dit geval heet de rij $\{F_n\}$ *verdelingsachtig convergent naar* F.

Definitie 1.10. De rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ is *conservatief convergent*, als er een verdelingsfunctie F bestaat zó, dat $\{F_n\}$ maatconvergent naar F is. In dit geval heet de rij $\{F_n\}$ *conservatief convergent naar* F (notatie $F_n \xrightarrow{\text{cons}} F$).

Om de lezer zo snel mogelijk met deze drie convergentiebegrippen voor verdelingsachtige functies (en in het bijzonder verdelingsfuncties) vertrouwd te maken volgt hier een opsomming van allerlei eigenschappen, die in de hierna volgende stellingen en opmerkingen zullen worden bewezen.

1) (Vgl. stelling 1.2)
   a) Conservatieve convergentie van verdelingsfuncties impliceert verdelingsachtige convergentie van die verdelingsfuncties.
   b) Verdelingsachtige convergentie van verdelingsachtige functies impliceert konvergentie van die verdelingsachtige functies.

2) Geen enkele implicatie in 1) kan worden omgekeerd (zie opm. 1.5 in verband met de omkering van a) en voorbeeld 1.1 in verband met de omkering van b)).

3) Uit de tegenvoorbeelden blijkt dat we de verschillen tussen de drie convergentiebegrippen voor *verdelingsfuncties* als volgt kunnen schetsen.

   Bij conservatieve convergentie verdwijnt er geen massa naar $-\infty$ of $+\infty$; bij verdelingsachtige convergentie kan er massa naar $+\infty$ verdwijnen; bij konvergentie kan er zowel naar $-\infty$ als naar $+\infty$ massa verdwijnen.

4) Als $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties is, dan geldt a) $F_n \to F$ dan en slechts dan als **F** een verdelingsachtige functie is met $F_n\{I\} \to F\{I\}$ voor elk eindig continuiteitsinterval I van F (def. 1.8), terwijl b) $F_n \xrightarrow{\text{cons}} F$ dan en slechts dan als **F** een verdelingsachtige functie is met $F_n\{I\} \to F\{I\}$ voor elk continuiteitsinterval I van F (stelling 1.1).

<u>Opmerking 1.2</u>. Bij ons is, in navolging van Feller, konvergentie van verdelingsachtige functies konvergentie volgens def. 1.8. De meeste andere auteurs definiëren "convergentie" van verdelingsachtige functies volgens def. 1.9. Feller bespreekt convergentie volgens def. 1.9 in een voetnoot op blz. 243 en maakt verder geen gebruik van dit begrip.

Hieronder volgen de termen die Feller gebruikt voor de convergentiebegrippen, die worden gedefinieerd in de definities 1.7, 1.8, 1.9 en 1.10.

maatconvergent	convergent
konvergent	convergent
verdelingsachtig convergent	---
conservatief convergent (alleen voor verdelingsfuncties)	properly convergent
niet-conservatief convergent (alleen voor verdelingsfuncties)	improperly convergent

<u>Opmerking 1.3</u>. Als een rij verdelingsachtige functies $\{F_n\}$ naar F konvergeert, is het niet mogelijk zoals in opm. 1.1 F_n te vervangen door maatequivalente maatfuncties. We hebben dan geen verdelingsachtige

functies meer, die immers moeten voldoen aan eis (1.3). Toch is het nog steeds mogelijk dat $F_n \to F$, terwijl $\{F_n(x)\}$ voor geen enkele x convergeert. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 1.1. Zij F een verdelingsfunctie en

$$F_n(x) = F\{x + (-1)^n n\} \qquad \text{voor} \quad n = 1,2,\ldots, \tag{1.6}$$

dan is $\lim F_{2n}(x) = 1$ en $\lim F_{2n+1}(x) = 0$ voor alle reële x, terwijl $\lim F_n\{I\} = 0$ voor alle begrensde intervallen I.

Opmerking 1.4. Als een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ naar een defectieve verdelingsfunctie F konvergeert, spreken we van *niet-conservatieve convergentie*.

Stelling 1.1. De rij *verdelingsfuncties* $\{F_n\}$ convergeert dan en slechts dan conservatief, als er een verdelingsachtige functie F is met

$$\lim F_n\{I\} = F\{I\} \tag{1.7}$$

voor alle continuiteitsintervallen I van F.

Bewijs.

a) Als (1.7) geldt voor alle continuiteitsintervallen I van de verdelingsachtige functie F, dan konvergeert F_n per definitie naar F en geldt bovendien, daar $\mathbb{R}$ een continuiteitsinterval is,

$$F(\infty) = F\{\mathbb{R}\} = \lim F_n\{\mathbb{R}\} = 1 \tag{1.8}$$

b) Zij nu gegeven $F_n \xrightarrow{\text{cons}} F$. Dan is F een verdelingsfunctie. Voor begrensde continuiteitsintervallen I geldt (1.7) wegens def. 1.7 en def. 1.8. Zij I nu een onbegrensd continuiteitsinterval van F en zij $\varepsilon > 0$. Omdat $F\{I\}$ eindig is, is er een begrensd continuiteitsinterval J van F met $J \subset I$ en $F\{J\} > F\{I\} - \varepsilon$. Daar $F_n\{J\} \to F\{J\}$ en $F_n\{I\} \geq F_n\{J\}$, is $\liminf F_n\{I\} \geq F\{I\} - \varepsilon$.
Dit laatste geldt voor elke $\varepsilon > 0$ en bijgevolg is

$$\liminf F_n\{I\} \geq F\{I\} \tag{1.9}$$

(N.B. drukfout in (1.3) van Feller 2, blz. 242).
Het complement I' van I is ook een onbegrensd continuiteitsinterval van F, zodat (1.9) ook geldt voor I'. Daar $F_n\{I'\} = 1 - F_n\{I\}$ en $F\{I'\} = 1 - F\{I\}$, is

$$\limsup F_n\{I\} \leqq F\{I\}. \tag{1.10}$$

Combinatie van (1.9) en (1.10) geeft (1.7).

Stelling 1.2.

a) Conservatieve convergentie van verdelingsfuncties impliceert verdelingsachtige convergentie van die verdelingsfuncties.
b) Verdelingsachtige convergentie van verdelingsachtige functies impliceert konvergentie van die verdelingsachtige functies.

Bewijs.

a) Laat de rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ naar een verdelingsfunctie konvergeren. Als x een continuiteitspunt van F is, is $(-\infty,x]$ een continuiteitsinterval van F en geldt wegens de vorige stelling

$$F_n(x) = F_n\{(-\infty,x]\} \to F\{(-\infty,x]\} = F(x). \tag{1.11}$$

b) Laat de rij verdelingsachtige functies $\{F_n\}$ verdelingsachtig convergent zijn naar (een verdelingsachtige functie) F. Wegens def. 1.9 geldt nu

$$F_n\{I\} \to F\{I\} \tag{1.12}$$

voor elk continuiteitsinterval I van F van de vorm $(-\infty,x]$.
Voor $\varepsilon > 0$ is $F_n(x-\varepsilon) \leqq F_n(x-0) \leqq F_n(x)$ wegens de monotonie van F_n.
Voor elk paar continuiteitspunten $x-\varepsilon, x$ van F volgt hieruit

$$F(x-\varepsilon) \leqq \liminf F_n(x-0) \leqq \limsup F_n(x-0) \leqq F(x). \tag{1.13}$$

Omdat de continuiteitspunten van F dicht liggen, is het mogelijk ε naar 0 te laten gaan, terwijl $x-\varepsilon$ continuiteitspunten van F doorloopt, zodat uit (1.13) volgt

$$F_n(x-0) \to F(x-0) = F(x)\ . \tag{1.14}$$

Dus (1.12) geldt ook voor continuiteitsintervallen van de vorm $I = (-\infty,x)$.

Elk begrensd continuiteitsinterval van F is het verschil van twee continuiteitsintervallen van de vorm $(-\infty,x]$ of $(-\infty,x)$, zodat (1.12) geldt voor alle begrensde continuiteitsintervallen van F.

Opmerking 1.5. De implicaties in stelling 1.2 kunnen niet worden omgekeerd. Een tegenvoorbeeld tegen de omkering van b) is al gegeven door voorbeeld 1.1.

Tegenvoorbeeld tegen de omkering van a):
We definiëren de verdelingsfunctie ι door

$$\iota(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x \geq 0 \,, \\ 0 & \text{voor } x < 0 \,. \end{cases} \tag{1.15}$$

Zij $F_n(x) = \iota(x-n)$, dan is $\lim_n F_n(x) = 0$ voor alle reële x.

Stelling 1.3. Als $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties is met dichtheden $f_n = F_n'$ en f_n convergeert bijna overal naar f, waarbij f de dichtheid is van een verdelingsfunctie F, dan convergeert F_n conservatief naar F.

Bewijs.
Voor elke $A \in \mathcal{B}$ geldt wegens het lemma van Fatou

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A \liminf f(x)\,dx \leq \liminf \int_A f_n(x)\,dx \tag{1.16}$$

Omdat (1.16) ook geldt voor $A' = \mathbb{R} - A$ en omdat $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx =$
$= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$, geldt ook

$$\int_A f(x)\,dx \geq \limsup \int_A f_n(x)\,dx \,, \tag{1.17}$$

zodat

$$\lim \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx \,. \tag{1.18}$$

Dus $F_n\{A\} \to F\{A\}$ voor alle $A \in \mathcal{B}$. Met behulp van stelling 1.1 volgt het gestelde.

Opmerking 1.6. Het omgekeerde van stelling 1.3 is niet waar. Neem voor $n = 1,2,\ldots$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2n\pi x & \text{voor} \quad 0 < x < 1 \, , \\ 0 & \text{elders} \, , \end{cases} \tag{1.19}$$

dan is

$$F_n(x) = x - \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi} \qquad \text{voor} \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad , \tag{1.20}$$

zodat $F_n(x) \to x$ voor $n \to \infty$ en $0 \leq x \leq 1$, terwijl $f_n(x)$ niet naar 1 convergeert.

Definitie 1.11. Een maatfunctie U heet *geconcentreerd* op een Borelverzameling A als $U\{\mathbb{R} - A\} = 0$.

Gevolg. Elke maatfunctie is geconcentreerd op $\mathbb{R}$.

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk, die handelen over Laplace-Stieltjesgetransformeerden, zijn de maatfuncties die ter sprake komen uitsluitend verdelingsachtige functies, geconcentreerd op $[0,\infty)$. De volgende stelling laat zien dat voor deze verdelingsachtige functies de begrippen konvergentie en verdelingsachtige convergentie identiek zijn.

Stelling 1.4. Een rij op $[0,\infty)$ geconcentreerde verdelingsachtige functies $\{F_n\}$ is dan en slechts dan konvergent als ze verdelingsachtig convergent is.

Bewijs.
Volgens stelling 1.2 impliceert verdelingsachtige convergentie konvergentie. Zij de rij $\{F_n\}$ konvergent naar F, dat wil zeggen F is een verdelingsachtige functie met

$$F_n\{I\} \to F\{I\} \tag{1.21}$$

voor alle begrensde continuiteitsintervallen I van F.
Daar $F_n\{I\} = 0$ voor alle begrensde continuiteitsintervallen I van F met alleen negatieve getallen, geldt $F\{I\} = 0$ voor deze intervallen.

Dus ook F is geconcentreerd op $[0,\infty)$. Zij $x \geq 0$ een continuiteitspunt van F, dan geldt, daar ook -1 een continuiteitspunt van F is,

$$(1.22)\qquad F_n(x) = F_n\{(-\infty,x]\} = F_n\{[-1,x]\} \to F\{[-1,x]\} = $$
$$= F\{(-\infty,x]\} = F(x),$$

terwijl voor $x < 0$ geldt dat $F_n(x) = F(x) = 0$. Dus $\{F_n\}$ is verdelingsconvergent naar F.

<u>Stelling 1.5</u>. ("selection theorem") Zij $\{a_n\}$ een rij reële getallen en $\{u_n\}$ een rij reëelwaardige functies op $\mathbb{R}$. Dan is er een deelrij $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ zó, dat $\lim_{k\to\infty} u_{n_k}(a_n)$ bestaat voor alle $n \geq 1$ (de limieten kunnen oneindig zijn).

<u>Bewijs</u>

met behulp van de diagonaalmethode van Cantor. De rij $\{u_n\}$ bevat een deelrij $\{u_{n_{1,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ zó, dat de rij $\{u_{n_{1,k}}(a_1)\}_{k=1}^{\infty}$ een limiet heeft. Uitgaande van een deelrij $\{u_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ zó, dat de rij $\{u_{n_{m,k}}(a_m)\}_{k=1}^{\infty}$ een limiet heeft; kunnen we een rij $\{u_{n_{m+1,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ vinden, die deelrij is van $\{u_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ en zó, dat $\{u_{n_{m+1,k}}(a_{m+1})\}_{k=1}^{\infty}$ een limiet heeft.

Beschouw, na op deze wijze voor $m = 1,2,\ldots$ deelrijen $\{u_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ geconstrueerd te hebben, de diagonaalrij $\{u_{n_{k,k}}\}_{k=1}^{\infty}$. Voor $m = 1,2,\ldots$ geldt: afgezien van de eerste $m-1$ termen is de diagonaalrij een deelrij van $\{u_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ en bijgevolg heeft de rij $\{u_{n_{k,k}}(a_m)\}_{k=1}^{\infty}$ een limiet.

<u>Stelling 1.6</u>. (Helly). Iedere rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ bezit een deelrij die naar een eventueel defectieve verdelingsfunctie F konvergeert.

<u>Bewijs</u>.

Zij $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ een aftelling van de rationale getallen. Wegens stelling 1.5

en de uniforme begrenzing $[0,1]$ voor verdelingsfuncties is er een deelrij $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ van $\{F_n\}$ zó, dat $F_{n_k}(r_m)$ voor $k \to \infty$ en alle natuurlijke getallen m convergeert, zeg naar $G(r_m)$, waarbij $0 \leq G(r_m) \leq 1$.

Omdat de F_{n_k} niet-dalend zijn, is G (gedefinieerd op de rationale getallen) niet-dalend. Voor reële x definiëren wij G door

$$(1.23) \qquad G(x) = \inf_{r_m \geq x} G(r_m).$$

Deze definitie laat de waarden van G(x) voor rationale x onveranderd en maakt van G een niet-dalende functie op $\mathbb{R}$ met waarden in $[0,1]$.

Zij x een reëel getal en r', r" twee rationale getallen met $r' < x < r''$. Dan geldt

$$(1.24) \qquad \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(r') = G(r') \leq \liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \leq$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(r'') = G(r'').$$

Omdat de rationale getallen dicht in de reële getallen liggen, volgt uit (1.24)

$$(1.25) \qquad G(x-0) \leq \liminf F_{n_k}(x) \leq \limsup F_{n_k}(x) \leq G(x+0).$$

Als x een continuiteitspunt van G is, geldt

$$(1.26) \qquad \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x) = G(x)$$

en bovendien

$$(1.27) \qquad \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x-0) = G(x) \; ,$$

omdat in (1.24) en (1.25) zonder bezwaar x in de argumenten van F_{n_k} door x-0 mag worden vervangen.

Zij $\tilde{G}(x) = G(x+0)$, dan is $\tilde{G}$ rechtscontinu en niet-dalend, dus een maatfunctie. Daar $G(x) = \tilde{G}(x)$ voor continuiteitspunten x van $\tilde{G}$ (G en $\tilde{G}$ hebben dezelfde continuiteitspunten), blijven (1.26) en (1.27) juist voor deze x, indien we G vervangen door $\tilde{G}$.

Zij

$$(1.28) \qquad F(x) = \tilde{G}(x) - \tilde{G}(-\infty)$$

$(\tilde{G}(-\infty)$ kan positief zijn, zie voorbeeld 1.1), dan is F een eventueel defectieve verdelingsfunctie. Voor elk begrensd continuiteitsinterval I van F met eindpunten a en b ($a < b$) geldt nu wegens (1.26) en (1.27) met $\tilde{G}$ in plaats van G

$$(1.29) \qquad \lim_{k\to\infty} F_{n_k}\{I\} = \tilde{G}(b) - \tilde{G}(a) = F(b) - F(a) = F\{I\} ,$$

dus $F_{n_k} \to F$.

Het is mogelijk voor konvergentie van verdelingsfuncties noodzakelijke en voldoende voorwaarden te vinden, die geformuleerd zijn in termen van convergentie van verwachtingen. Daartoe hebben we de volgende definities nodig.

Definitie 1.12. $C(-\infty,\infty)$ is de verzameling van alle reëelwaardige begrensde continue functies op $\mathbb{R}$; $C_o(-\infty,\infty)$ is de verzameling van alle $u \in C(-\infty,\infty)$ met $\lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Vanaf nu is in deze paragraaf steeds sprake van een rij verdelings functies $\{F_n\}$ een een eventueel defectieve verdelingsfunctie F. We maken gebruik van de afkortingen

$$(1.30) \qquad M_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dF_n(x) \quad , \qquad M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dF(x).$$

De notatie (1.30), die in deze paragraaf voor verwachtingen gebruikt zal worden, wijkt af van de gangbare notatie, die in de volgende paragrafen weer gebruikt zal worden. In die notatie schrijven we $\mathcal{E}u(\underline{x}_n)$ in plaats van $M_n(u)$ en $\mathcal{E}u(\underline{x})$ in plaats van $M(u)$, waarbij $\underline{x}_n$ verdeeld is volgens F_n voor $n = 1,2,\ldots$ en $\underline{x}$ volgens F.

Stelling 1.7. Zij $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties.

a) Er bestaat dan en slechts dan een eventueel defectieve verdelingsfunctie F zó, dat $F_n \to F$, als $\{M_n(u)\}$ convergeert voor alle $u \in C_o(-\infty,\infty)$. In dit geval geldt

(1.31) $$M_n(u) \to M(u)$$

voor alle $u \in C_o(-\infty,\infty)$.

b) Er bestaat dan en slechts dan een verdelingsfunctie F zó, dat $F_n \to F$, als $\{M_n(u)\}$ convergeert voor alle $u \in C(-\infty,\infty)$. In dit geval geldt (1.31) voor alle $u \in C(-\infty,\infty)$.

Bewijs.

(i) [a) : ($\Longrightarrow$)]. Gegeven is $F_n \to F$. Zij $u \in C_o(-\infty,\infty)$ en $\varepsilon > 0$, dan is er een begrensd en gesloten continuiteitsinterval $A = [a,b]$ van F zó, dat $|u(x)| < \varepsilon$ voor $x \in A' = \mathbb{R} - A$. Omdat u uniform continu is op A, is er een natuurlijk getal k en een verdeling $a = x_o < x_1 < \ldots < x_k = b$ van A zó, dat $x_o, x_1, \ldots, x_k$ continuiteitspunten van F zijn en de schommeling van u in elk interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ minder dan ε bedraagt. Zij

(1.32) $$\sigma(x) = \begin{cases} u(x_i) & \text{als} \quad x \in (x_{i-1}, x_i], \quad i = 1,2,\ldots,k\ , \\ u(a) & \text{als} \quad x = x_o = a\ , \\ 0 & \text{als} \quad x \in A'\ , \end{cases}$$

dan is

(1.33) $$\|\sigma - u\| \overset{\text{def}}{=\!=} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma(x) - u(x)| < \varepsilon\ ,$$

waaruit volgt

(1.34) $$|M_n(\sigma) - M_n(u)| < \varepsilon\ , \qquad |M(\sigma) - M(u)| < \varepsilon\ .$$

Omdat $x_o, x_1, \ldots, x_k$ continuiteitspunten van F zijn, geldt

(1.35) $$M_n(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} u(x_i)\big(F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})\big) + u(a)\big(F_n(a) - F_n(a-0)\big) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} u(x_i)\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = M(\sigma) \quad ,$$

zodat $|M(\sigma) - M_n(\sigma)| < \varepsilon$ voor voldoende grote n.

Wegens (1.32) geldt voor deze n

(1.36) $$|M(u) - M_n(u)| < 3\varepsilon \quad ,$$

zodat (1.31) geldt voor $u \in C_o(-\infty,\infty)$.

(ii) $[b) : (\Longrightarrow)]$. Gegeven is $F_n \to F$ met F een verdelingsfunctie. Zij $\varepsilon > 0$, dan is er een begrensd en gesloten continuiteitsinterval $A = [a,b]$ van F met $F\{A\} > 1 - \varepsilon$. Zij $u \in C(-\infty,\infty)$, zeg met $\|u\| \leqq 1$. Op dezelfde wijze als in (i) kunnen we, gegeven F, A, u en ε, een trapfunctie σ construeren.

Nu geldt

(1.37) $$|M(\sigma) - M(u)| \leqq \varepsilon F\{A\} + 1 - F\{A\} < 2\varepsilon$$

en voor voldoende grote n

(1.38) $$|M_n(\sigma) - M_n(u)| \leqq \varepsilon F_n\{A\} + 1 - F_n\{A\} < 3\varepsilon$$

want $F_n\{A\} \to F\{A\}$, omdat A een continuiteitsinterval van F is. Omdat (1.35) onveranderd blijft gelden, is ook $|M(\sigma) - M_n(\sigma)| < \varepsilon$ voor voldoende grote n, zodat voor deze n wegens (1.37) en (1.38)

(1.39) $$|M(u) - M_n(u)| < 6\varepsilon \ .$$

Nu geldt (1.31) voor $u \in C(-\infty,\infty)$.

(iii) $[a) : (\Longleftarrow)]$. Gegeven is een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ zó, dat $\{M_n(u)\}$ convergeert voor alle $u \in C_o(-\infty,\infty)$.

Wegens stelling 1.6 is er een deelrij $\{F_{n_k}\}$ zó, dat $F_{n_k} \to F$ met F een eventueel defectieve verdelingsfunctie. Zij M_F de verwachtingsoperator met betrekking tot deze F, dan geldt wegens de reeds bewezen gedeelten van deze stelling

$$(1.40) \qquad M_{n_k}(u) \to M_F(u)$$

voor $u \in C_o(-\infty,\infty)$. Wegens de gegeven convergentie van $\{M_n(u)\}$ kan alleen dan een eventueel defectieve verdelingsfunctie G limiet zijn van een deelrij van $\{F_n\}$ als $M_F = M_G$ op $C_o(-\infty,\infty)$.

Zij A een Borelverzameling, dan wordt χ_A, de *indicator* van A, gedefinieerd door

$$(1.41) \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in A, \\ 0 & \text{als} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Omdat $\chi_{(-\infty,x]}$ limiet is van een uniform begrensde rij functies $\{u_n\}$ met $u_n \in C_o(-\infty,\infty)$, geldt wegens de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie

$$(1.42) \qquad F(x) = M_F(\chi_{(-\infty,x]}) = \lim_{n\to\infty} M_F(u_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} M_G(u_n) = M_G(\chi_{(-\infty,x]}) = G(x) \;,$$

zodat F en G identiek zijn. Elke oneindige deelrij van $\{F_n\}$ bezit een konvergente deelrij, die dus naar F moet konvergeren.

Stel dat $\{F_n\}$ niet naar F konvergeert, dan is er een begrensd continuiteitsinterval I van F zó, dat $\{F_n\{I\}\}$ niet naar $F\{I\}$ convergeert, dus er is een reëel getal $a \neq F\{I\}$ en een deelrij $\{F_{n_k}\}$ van $\{F_n\}$ zó, dat $F_{n_k}\{I\} \to a$. Maar $\{F_{n_k}\}$ bevat een konvergente deelrij $\{F_{n_{k_1}}\}$ die naar F konvergeert, zodat $F_{n_{k_1}}\{I\} \to F\{I\}$. Tegenspraak, dus $F_n \to F$.

(iv) [b) : (<==)]. Gegeven is een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ zó, dat $\{M_n(u)\}$ convergeert voor elke $u \in C(-\infty,\infty)$.

De overwegingen in (iii) zijn nu geldig met $C_o(-\infty,\infty)$ vervangen door $C(-\infty,\infty)$.

Daar de constante functie $1 \in C(-\infty,\infty)$, geldt

$$F(\infty) = M(1) = \lim M_n(1) = 1 \qquad (1.43)$$

Dus F is een verdelingsfunctie.

Opmerking 1.7. Analoog aan stelling 1.7 kan men bewijzen dat een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ dan en slechts dan verdelingsachtig convergent is, als $\{M_n(u)\}$ convergeert voor alle $u \in C(-\infty,\infty)$ met $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$.

Uit stelling 1.7 kunnen we de volgende veelgebruikte stelling afleiden.

Stelling 1.8. Zij $\{V_n\}$ een rij maatfuncties die maatconvergent is naar een maatfunctie V. Zij verder $[a,b]$ een begrensd en gesloten continuiteitsinterval van V en zij u een reëelwaardige continue functie op $[a,b]$, dan geldt

$$\int_{[a,b]} u(x)\, dV_n(x) \longrightarrow \int_{[a,b]} u(x)\, dV(x) \qquad \text{voor} \quad n \to \infty . \qquad (1.44)$$

Bewijs.
Stel $V\{[a,b]\} > 0$, dan is $V_n\{[a,b]\} > 0$ voor voldoende grote n. Zij voor deze n

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad x < a , \\ \dfrac{V_n\{[a,x]\}}{V_n\{[a,b]\}} & \text{voor} \quad a \leq x \leq b , \\ 1 & \text{voor} \quad x > b , \end{cases} \qquad (1.45)$$

terwijl F analoog aan (1.45) met behulp van V gedefinieerd wordt, dan is $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties die conservatief naar F convergeert.
We definiëren $\tilde{u} \in C(-\infty,\infty)$ door

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(a) & \text{voor} \quad x < a , \\ u(x) & \text{voor} \quad a \leq x \leq b , \\ u(b) & \text{voor} \quad x > b . \end{cases} \qquad (1.46)$$

Wegens stelling 1.7b en wegens $V_n\{[a,b]\} \longrightarrow V\{[a,b]\}$ geldt

$$(1.47) \qquad \int_{[a,b]} u(x)\, dV_n(x) = M_n(\tilde{u})\, V_n\{[a,b]\} \to M(\tilde{u})\, V_n\{[a,b]\} = $$
$$= \int_{[a,b]} u(x)\, dV(x) \; .$$

Als $V\{[a,b]\} = 0$, dan is het rechterlid van (1.44) gelijk aan nul, terwijl de absolute waarde van het linkerlid overschat wordt door $V_n\{[a,b]\}.\max_{a\le x\le b} |u(x)| \to 0$ voor $n \to \infty$.

Opmerking 1.8. Stelling 1.8 kan ook rechtstreeks bewezen worden door bij V op $[a,b]$ een trapfunctie σ te construeren als in het bewijs van stelling 1.7.

Tot slot volgen er twee stellingen over convergentie van momenten van verdelingsfuncties.

Stelling 1.9. Een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$, geconcentreerd op $[0,1]$, konvergeert dan en slechts dan naar een limiet F, als voor alle niet-negatieve gehele getallen k de momenten $M_n(x^k)$ convergeren naar een reëel getal μ_k. In dit geval is $\mu_k = M(x^k)$ het k^e moment van F en is $\{F_n\}$ conservatief convergent.

Bewijs.
Zij $F_n \to F$. Voor alle begrensde continuiteitsintervallen I van F met $[0,1] \subset I$ geldt $1 = F_n\{I\} \to F\{I\}$, zodat $F\{[0,1]\} = 1$. F is dus een verdelingsfunctie, geconcentreerd op $[0,1]$.

Wegens stelling 1.8 geldt nu voor $k = 0,1,\dots$

$$(1.48) \qquad M_n(x^k) = {}_0\!\int^1 x^k dF_n(x) \to {}_0\!\int^1 x^k dF(x) = M(x^k) \; .$$

Zij nu gegeven, dat voor $k = 0,1,2,\dots$ de rij momenten $\{M_n(x^k)\}$ naar een getal μ_k convergeert. Dan is $\{M_n(p)\}$ convergent voor elk polynoom $p(x)$. Volgens de benaderingsstelling van Weierstrass (zie ook Feller 2 VII,2) kan elke $u \in C(-\infty,\infty)$ op $[0,1]$ uniform door polynomen benaderd worden, waaruit de convergentie volgt van $\{M_n(u)\}$ voor elke $u \in C(-\infty,\infty)$. Wegens stelling 1.7b geldt nu dat F_n conservatief naar een F convergeert en dat μ_k het k^e moment is van F.

Opmerking 1.9. In het algemenere geval, als de verdelingsfuncties F_n niet op eenzelfde begrensd interval geconcentreerd zijn, hoeft uit de conservatieve convergentie van $\{F_n\}$ geen convergentie van de momenten te volgen. Zij bijvoorbeeld voor $n = 1,2,\ldots$

$$(1.49) \qquad F_n(x) = (1 - n^{-1})\ \iota(x) + n^{-1}\ \iota(x - n^2),$$

dan convergeert $F_n(x)$ puntsgewijs naar $\iota(x)$ voor $n \to \infty$, maar tegelijk geldt $M_n(x) = n \to \infty$.

De volgende stelling geeft resultaten over convergentie van momenten voor het algemenere geval.

Stelling 1.10. Als een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ naar F konvergeert en voor een $\rho > 0$ en $n = 1,2,\ldots$ geldt dat $M_n(|x|^\rho) \leqq C < \infty$, dan geldt

a) $M(|x|^\rho) \leqq \liminf\limits_{n\to\infty} M_n(|x|^\rho) \leqq C$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(|x|^\alpha) = M(|x|^\alpha)$ voor $0 \leqq \alpha < \rho$;

c) F is een verdelingsfunctie .

Bewijs.
We spreken af, dat a in dit bewijs steeds een positief reëel getal is zó, dat $-a$ en a continuiteitspunten van F zijn.
a) Wegens stelling 1.8 geldt voor alle in aanmerking komende $a > 0$

$$(1.50) \qquad \int_{-a}^{a} |x|^\rho dF_n(x) \to \int_{-a}^{a} |x|^\rho dF(x)$$

Omdat het linkerlid van (1.50) kleiner is dan $M_n(|x|^\rho)$, geldt

$$(1.51) \qquad \int_{-a}^{a} |x|^\rho dF(x) \leqq \liminf_{n\to\infty} M_n(|x|^\rho) .$$

Omdat het rechterlid van (1.51) niet van a afhangt, blijft de ongelijkheid gelden als links $a \to \infty$ gaat.

b) Zij $0 \leq \alpha < \rho$. Uit a) weten we dat $M(|x|^\alpha)$ bestaat, omdat $M(|x|^\rho)$ bestaat. Er geldt

$$(1.52)\qquad |M(|x|^\alpha) - M_n(|x|^\alpha)| \leq$$

$$\leq \left| {}_{-a}\int^{a} |x|^\alpha dF(x) - {}_{-a}\int^{a} |x|^\alpha dF_n(x) \right| + \int_{|x|\geq a} |x|^\alpha dF(x) +$$

$$+ \int_{|x|\geq a} |x|^\alpha dF_n(x) \ .$$

Omdat

$$(1.53)\qquad \int_{|x|\geq a} |x|^\alpha dF_n(x) \leq a^{\alpha-\rho} \int_{|x|\geq a} |x|^\rho dF_n(x) \leq a^{\alpha-\rho} C \quad ,$$

convergeert de laatste term in het rechterlid van (1.52) uniform in n naar 0 voor $a \to \infty$, evenals de middelste term in het rechterlid van (1.52), deze vanwege het bestaan van $M(|x|^\alpha)$.

Kies bij $\varepsilon > 0$ een a zó, dat voor $n = 1,2,\ldots$

$$(1.54)\qquad \int_{|x|\geq a} |x|^\alpha dF(x) + \int_{|x|\geq a} |x|^\alpha dF_n(x) < \varepsilon \ .$$

Wegens stelling 1.8 is de eerste term in het rechterlid van (1.52) $< \varepsilon$ voor voldoende grote n. Dus het linkerlid is kleiner dan 2ε, waaruit b) volgt.

c) Gevolg van b) met $\alpha = 0$.

§ 2 Definitie van Laplace-Stieltjesgetransformeerden De continuiteitsstelling (Feller 2 XIII, 1)

Definitie 2.1. Als F een eventueel defectieve verdelingsfunctie is, geconcentreerd op $[0,\infty)$, dan is de *Laplace-Stieltjesgetransformeerde* van F de functie $\check{F}$ op $[0,\infty)$ gedefinieerd door

$$\check{F}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dF(x) \qquad \text{voor} \qquad \lambda \geq 0\ . \tag{2.1}$$

Afkorting. We schrijven voortaan "LS-getransformeerde" in plaats van "Laplace-Stieltjesgetransformeerde".

Opmerking 2.1. Met $\int_{0-}^{\infty}$ bedoelen we de integraal $\int_{[0,\infty)}$. Omdat F geconcentreerd is op $[0,\infty)$ mogen we het integratie-interval $[0,\infty)$ vervangen door $(-\infty,\infty)$, zonder dat $\check{F}$ verandert. Telkens wanneer we over de LS-getransformeerde van een eventueel defectieve verdelingsfunctie F spreken, is stilzwijgend verondersteld dat F geconcentreerd is op $[0,\infty)$.

Opmerking 2.2. Vaak worden LS-getransformeerden van verdelingsfuncties gedefinieerd door (2.1) voor Re $\lambda \geq 0$. In navolging van Feller beperken we ons hier tot reële λ.

Opmerking 2.3. Zij $\underline{x}$ een niet-negatieve stochastische variabele met verdelingsfunctie F, dan noemen we $\check{F}$ de LS-getransformeerde *bij* $\underline{x}$. We kunnen $\check{F}$ nu schrijven als een verwachting:

$$\check{F}(\lambda) = \mathcal{E} e^{-\lambda \underline{x}}\ . \tag{2.2}$$

Voorbeeld 2.1. Als $0,1,2,\ldots$ de mogelijke waarden van $\underline{x}$ zijn en $p_0, p_1, p_2, \ldots$ de bijbehorende kansen, dan is

(2.3) $$\check{F}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-n\lambda} \qquad \text{voor} \qquad \lambda \geq 0 ,$$

terwijl de genererende functie P van de rij $\{p_n\}$ gedefinieerd wordt door

(2.4) $$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \mathcal{E}\, s^{\underline{x}} \qquad \text{voor} \qquad |s| \leq 1 .$$

Dus

(2.5) $$\check{F}(\lambda) = P(e^{-\lambda}) .$$

De laatste relatie verklaart de analogie tussen eigenschappen van LS-getransformeerden en die van kansgenererende functies.

<u>Stelling 2.1</u>. Als F een eventueel defectieve verdelingsfunctie is, dan geldt:

1) $\check{F}(\lambda)$ is continu voor $\lambda \geq 0$;
2) $0 \leq \check{F}(\lambda) \leq F(\infty) \leq 1$ voor $\lambda \geq 0$;
3) $\check{F}$ is niet stijgend ;
4) F is dan en slechts dan een verdelingsfunctie als $\check{F}(0) = 1$.

<u>Bewijs</u>.
1) $\check{F}(\lambda+h) = \int_{0-}^{\infty} e^{-(\lambda+h)x}\, dF(x) \longrightarrow \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dF(x) = \check{F}(\lambda)$
voor $h \to 0$, omdat 1 een sommeerbare majorant van $e^{-(\lambda+h)x}$ is (stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie);

2) en 3) volgen uit de begrenzing en de monotonie van de integrand;

4) $\check{F}(0) = \int_{0-}^{\infty} dF(x) = F(\infty)$.

<u>Stelling 2.2</u>. Verschillende eventueel defectieve verdelingsfuncties bezitten verschillende LS-getransformeerden.

<u>Bewijs</u>.
Direct gevolg van de omkeerstelling, welke later volgt (zie § 5). Het bewijs dat Feller in <u>2</u> XIII,1 geeft berust op de stelling dat een ver-

delingsfunctie, geconcentreerd op $[0,1]$, eenduidig bepaald is door zijn momenten.

Gevolg. Verdelingsfuncties en defectieve verdelingsfuncties zijn eenduidig bepaald door, dus in principe herkenbaar aan hun LS-getransformeerden.

Stelling 2.3 (continuiteitsstelling).
Zij $\{F_n\}$ een rij verdelingsfuncties. De rij $\{F_n\}$ konvergeert dan en slechts dan naar een eventueel defectieve verdelingsfunctie F, als er een functie ϕ op $(0,\infty)$ is met $\check{F}_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ voor alle $\lambda > 0$. In dat geval is $\phi = \check{F}$ op $(0,\infty)$. De limiet F is niet-defectief dan en slechts dan als

$$\phi(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \downarrow 0} \phi(\lambda) = 1 \ . \tag{2.6}$$

Bewijs.
Zij gegeven $F_n \to F$. Dan geldt $\check{F}_n(\lambda) \to \check{F}(\lambda)$ voor $\lambda > 0$ wegens stelling 1.7a (als $\lambda > 0$ is er een $u \in C_0(-\infty,\infty)$ met $u(x) = e^{-\lambda x}$ voor $x \geq 0$).

Zij gegeven $\check{F}_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ voor alle $\lambda > 0$. Wegens stelling 1.6 (Helly) is er een convergente deelrij $\{F_{n_k}\}$ van $\{F_n\}$. Zij $F = \lim F_{n_k}$, dan geldt wegens het eerste gedeelte van dit bewijs $\check{F}_{n_k}(\lambda) \to \check{F}(\lambda)$ voor $\lambda > 0$, dus $\check{F}(\lambda) = \phi(\lambda)$ voor $\lambda > 0$.

Hierdoor is $\check{F}$ wegens de continuiteit van $\check{F}$ in 0 volledig bepaald, en $\check{F}$ bepaalt wegens stelling 2.2 eenduidig F, dus alleen deze F kan limiet zijn van deelrijen van $\{F_n\}$. Als in het bewijs van stelling 1.7 (blz. 14) volgt $F_n \to F$.

De laatste bewering van de stelling volgt uit $\phi(0) = \check{F}(0) = F(\infty)$.

Opmerking 2.4. Als $F_n \to F$, dan hoeft niet te gelden dat $\check{F}_n(0) \to F(0)$. Neem $F_n(x) = \iota(x-n)$ en $F(x) = 0$, dan geldt $\check{F}_n(\lambda) = e^{-\lambda x}$, $\check{F}(\lambda) = 0$. Nu is $\check{F}_n(0) = 1$ voor $n = 1,2,\ldots$, en $\check{F}(0) = 0$, terwijl $F_n \to F$.

Als we def. 2.1 bekijken, zien we dat het linkerlid van (2.1) niet verandert, indien we rechts F door een met F maatequivalente maatfunctie vervangen. We kunnen $\check{F}$ met evenveel recht de LS-getransformeerde van de door F op $[0,\infty)$ geïnduceerde maat noemen, of de LS-getransformeerde van de equivalentieklasse van maatfuncties waar F toe behoort.

We willen nu een LS-getransformeerde invoeren voor alle of zoveel mogelijk maten op $[0,\infty)$ die eindig zijn op eindige intervallen. Dit zou kunnen door

$$(2.7) \qquad \check{\mu}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, d\mu ,$$

als μ zo'n maat is, maar we hebben liever een notatie waarin maatfuncties optreden, dus iets als

$$(2.8) \qquad \check{U}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, d\mathbf{U}(x) ,$$

waarin U een maatfunctie is, geconcentreerd op $[0,\infty)$.

Er geldt dan dat twee maatequivalente maatfuncties dezelfde LS-getransformeerde hebben. Omdat we echter alleen te doen hebben met maten die eindig zijn op eindige intervallen en geconcentreerd op $[0,\infty)$, zijn we in de gelukkige omstandigheid dat er een 1-1-correspondentie is tussen deze maten en de verdelingsachtige functies U met $U(x) = 0$ voor $x < 0$. Deze 1-1-correspondentie wordt bepaald door de relaties

$$(2.9) \qquad \begin{cases} U(x) = \mu\big((-\infty,x]\big) , \\ \mu\big((a,b]\big) = U(b) - U(a) \qquad \text{voor} \quad a < b \end{cases}$$

(N.B. voor algemenere maten die eindig zijn op eindige intervallen geldt zoiets niet: de Lebesguemaat kan niet beschreven worden door een verdelingsachtige functie). Het ligt dus voor de hand in (2.8) alleen verdelingsachtige functies U toe te laten met $U(x) = 0$ voor $x < 0$.

Een moeilijkheid is, dat de integraal in (2.8) niet voor alle $\lambda \geq 0$ hoeft te convergeren. Wel geldt dat convergentie voor $\lambda = a$ convergentie voor $\lambda > a$ impliceert, zodat de verzameling der reële getallen λ waarvoor de integraal in (2.8) convergeert leeg is of een interval van de vorm (a,∞) of $[a,\infty)$.

<u>Definitie 2.2</u>. Zij U een verdelingsachtige functie, geconcentreerd op $[0,\infty)$ en zó, dat er reële getallen λ zijn waarvoor de integraal in (2.8) eindig is; zij λ_0 het infimum van deze getallen λ. Dan is de door (2.8)

op (λ_0,∞) gedefinieerde functie $\check{U}$ de LS-getransformeerde van U; λ_0 heet de *convergentie-abscis* van $\check{U}$.

Opmerking 2.5. Zodra we spreken over de LS-getransformeerde van een verdelingsachtige functie U, is stilzwijgend verondersteld dat U geconcentreerd is op $[0,\infty)$ en dat er reële getallen λ bestaan waarvoor de integraal in (2.8) eindig is. We reserveren de letters F en G zoveel mogelijk voor eventueel defectieve verdelingsfuncties en de letters U en V voor verdelingsachtige functies.

Opmerking 2.6. Een veel voorkomend geval is, dat de verdelingsachtige functie U absoluut continu is met dichtheid (= afgeleide) u. In dat geval wordt (2.8)

$$\check{U}(\lambda) = {}_0\int^\infty e^{-\lambda x}\, u(x)dx \ . \tag{2.10}$$

Het rechterlid van (2.10) noemen we de *Laplace-getransformeerde* van u. De u in (2.10) is (bijna overal) niet-negatief, maar we zullen Laplace-getransformeerden toevoegen aan grotere klassen van functies. Ook het begrip LS-getransformeerde kan uitgebreid worden, maar dit is voor ons doel niet nodig.

Definitie 2.3. Als u een meetbare functie is op $[0,\infty)$ en er reële getallen λ bestaan zó, dat $e^{-\lambda x}\, u(x)$ sommeerbaar is over $[0,\infty)$, waarbij λ_0 het infimum is van deze getallen λ, dan heet de door

$$\mathring{u}(\lambda) = {}_0\int^\infty e^{-\lambda x}\, u(x)dx \tag{2.11}$$

op (λ_0,∞) gedefinieerde functie $\mathring{u}$ de *Laplace-getransformeerde* van u; λ_0 heet de *convergentie-abscis* van $\mathring{u}$.

Opmerking 2.7. Een LS-getransformeerde heet bij Feller "Laplace transform" en een Laplace-getransformeerde een "ordinary Laplace transform".

Voorbeeld 2.2. Laat u de dichtheid (= afgeleide) zijn van een absoluut continue verdelingsachtige functie U.

a) Als $u(x) = x^a$ met een $a > -1$, dan geldt $\check{U}(\lambda) = \overset{\circ}{u}(\lambda) = \Gamma(a+1)/\lambda^{a+1}$ voor alle $\lambda > 0$.

b) Als $u(x) = e^{ax}$, dan geldt $\check{U}(\lambda) = 1/(\lambda-a)$ voor $\lambda > a$, terwijl de integraal in (2.10) divergeert voor $\lambda \leq a$. Dit geldt voor elke reële a.

c) Als $u(x) = e^{x^2}$, divergeert de integraal in (2.10) voor elke λ.

Opmerking 2.8. Als U en V twee maatfuncties zijn en f een reeelwaardige Borelmeetbare functie op $\mathbb{R}$ zó, dat

$$V\{A\} = {}_A\!\int dV(x) = {}_A\!\int f(x)dU(x) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{B}\,, \tag{2.12}$$

dan korten we (2.12) af met de notatie

$$dV(x) = f(x)dU(x) \qquad (\text{of} \quad f = \frac{dV}{dU}) \,. \tag{2.13}$$

We noemen f de *dichtheid* van V met betrekking tot U. Dichtheden zonder meer zijn dichtheden met betrekking tot de Lebesquemaat. Een relatie als (2.12) kan alleen gelden tussen maatfuncties, als f U-sommeerbaar is over alle eindige intervallen en de verzameling der reële getallen x met $f(x) < 0$ U-maat 0 heeft. Uit (2.12) volgt dat voor elke niet-negatieve Borelmeetbare functie ϕ

$$_{\mathbb{R}}\!\int \phi(x)\, dV(x) = {}_{\mathbb{R}}\!\int \phi(x)\, f(x)\, dU(x) \tag{2.14}$$

Men bewijst dit door een niet-dalende rij Borelmeetbare trapfuncties te beschouwen, die puntsgewijs naar ϕ convergeert.

Als $f(x) > 0$ voor alle reële x, dan volgt uit (2.13)

$$dU(x) = \frac{1}{f(x)}\, dV(x) \,. \tag{2.15}$$

Immers, voor elke $A \in \mathcal{B}$ geldt

(2.16) $$\int_A \frac{1}{f(x)}\, dV(x) = \int_A \frac{1}{f(x)}\, f(x)\, dU(x)$$

Als de verzameling der reële getallen x met $f(x) \leqq 0$ U-maat 0 heeft, dan blijft (2.15) juist. De integranden in (2.16) zijn nu niet gedefinieerd als $f(x) = 0$, maar de verzameling der reële getallen x waarvoor dit het geval is heeft U- èn V-maat 0.

Indien U en V verdelingsachtige functies zijn, geldt (2.12) dan en slechts dan als

(2.17) $$\int_{-\infty}^{x} dV(y) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dU(y) \qquad \text{voor alle reële } x\ .$$

In dit geval is V eenduidig bepaald door U en f.

<u>Opmerking 2.9</u>. Als U een verdelingsachtige functie is zó, dat de integraal in (2.8) convergeert voor $\lambda = a$, dan is voor $\lambda \geqq 0$

(2.18) $$\check{U}(\lambda+a) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, e^{-ax}\, dU(x)$$

de LS-getransformeerde van de begrensde verdelingsachtige functie $U^{\#}$, bepaald door

(2.19) $$dU^{\#}(x) = e^{-ax}\, dU(x)\ .$$

Hieruit volgt dat $\check{U}(\lambda+a)/\check{U}(a)$ de LS-getransformeerde is van een verdelingsfunctie, mits $\check{U}(a) > 0$. We hebben hier een middel om stellingen over LS-getransformeerden van verdelingsfuncties te vertalen in stellingen over LS-getransformeerden van verdelingsachtige functies. Op deze manier zullen we stelling 2.4 en gedeeltelijk stelling 2.5 uit de stellingen 2.2 en 2.3 afleiden. Omdat de nieuwe LS-getransformeerde $\check{U}(\lambda+a)$ ontstaat door verschuiving van $\check{U}(\lambda)$, noemen we deze methode het *verschuivingsprincipe* (Feller: "translation principle").

<u>Stelling 2.4</u>. Indien $\check{U}(\lambda)$ bestaat voor $\lambda > \lambda_0$, dan wordt de verdelingsachtige functie U volledig bepaald door het geven van $\check{U}(\lambda)$ voor alle $\lambda > a \geqq \lambda_0$.

Bewijs.

1) Als $\check{U}(\lambda) = 0$ voor een $\lambda > a$, dan geldt voor deze λ en alle $x \geq 0$

$$(2.20) \qquad U(x) \leq e^{\lambda x} \int_{0-}^{x} e^{-\lambda y}\, dU(y) \leq e^{\lambda x}\, \check{U}(\lambda) = 0\ ,$$

zodat $U(x) = 0$ voor alle reële x.

Gevolg: $\check{U}(\lambda) = 0$ voor alle reële λ.

2) Stel dat U_1 en U_2 verdelingsachtige functies zijn met $\check{U}_1 = \check{U}_2$ op (a,∞) en zó, dat er een $b > a$ is met $\check{U}_1(b) > 0$ (wegens 1) geldt dan $\check{U}_i(\lambda) > 0$ voor alle $\lambda > a$ en $i = 1,2$). Dan geldt

$$(2.21) \qquad \frac{\check{U}_i(\lambda+b)}{\check{U}_i(b)} = \check{U}_i^{\#}(\lambda) \qquad \text{voor} \qquad \lambda \geq 0\ , \quad i = 1,2,$$

als de $U_i^{\#}$ de verdelingsfuncties zijn, gedefinieerd door

$$(2.22) \qquad dU_i^{\#}(x) = e^{-bx}\, dU_i(x)\ /\ \check{U}_i(b) \qquad \text{voor} \qquad i = 1,2.$$

Omdat $\check{U}_1 = \check{U}_2$, geldt $\check{U}_1^{\#} = \check{U}_2^{\#}$, waaruit wegens stelling 2.2 volgt dat $U_1^{\#} = U_2^{\#}$. Daar wegens opmerking 2.8

$$(2.23) \qquad dU_i(x) = \check{U}_i(b)\, e^{bx}\, dU_i^{\#}(x) \qquad \text{voor} \qquad i = 1,2,$$

volgt uit $U_1^{\#} = U_2^{\#}$ dat $U_1 = U_2$.

Stelling 2.5 (Uitgebreide continuiteitsstelling).

Zij $\{U_n\}$ een rij verdelingsachtige functies.

a) Als er een reeelwaardige functie ω op (a,∞) bestaat met $\check{U}_n(\lambda) \to \omega(\lambda)$ voor alle $\lambda > a$, dan is er een verdelingsachtige functie U met $U_n \to U$ en $\check{U} = \omega$ op (a,∞).

b) Als $U_n \to U$ en de rij $\{\check{U}_n(a)\}$ is begrensd, dan geldt $\check{U}_n(\lambda) \to \check{U}(\lambda)$ voor $\lambda > a$.

Bewijs.

a 1) Als $\omega(\lambda) = 0$ voor een $\lambda > a$, dan geldt voor deze λ en alle $x \geq 0$

(2.24) $U_n(x) \leqq e^{\lambda x} \; {}_{0-}\!\int^{x} e^{-\lambda y} \, dU_n(y) \leqq e^{-\lambda x} \, \check{U}_n(\lambda) \to 0$ als $n \to \infty$,

zodat $U_n \to 0$.

a 2) Stel er is een $b > a$ met $\omega(b) > 0$, dan is $\check{U}_n(b) > 0$ voor voldoende grote n. Dan geldt

(2.25) $$\check{U}_n^{\#}(\lambda) = \frac{\check{U}_n(\lambda+b)}{\check{U}_n(b)} \quad \text{voor alle} \quad \lambda \geqq 0 ,$$

als $U_n^{\#}$ de verdelingsfunctie is, gedefinieerd door

(2.26) $$dU_n^{\#}(x) = e^{-bx} \, dU_n(x) \; / \; \check{U}_n(b) \; .$$

Wegens de convergentie van $\{\check{U}_n(\lambda)\}$ geldt

(2.27) $$\check{U}_n^{\#}(\lambda) \to \frac{\omega(\lambda+b)}{\omega(b)} \quad \text{voor} \quad \lambda \geqq 0 ,$$

zodat wegens stelling 2.3 geldt dat $U_n^{\#} \to U^{\#}$ met

(2.28) $$\check{U}^{\#}(\lambda) = \frac{\omega(\lambda+b)}{\omega(b)} \quad \text{voor} \quad \lambda > 0 \; .$$

Wegens opmerking 2.8 volgt uit (2.26) voor $x \geqq 0$

(2.29) $$U_n(x) = \check{U}_n(b) \; {}_{0-}\!\int^{x} e^{by} \, dU_n^{\#}(y) \; .$$

Daar $U_n^{\#} \to U^{\#}$ en $\check{U}_n(b) \to \omega(b)$, geldt wegens stelling 1.8 voor alle continuiteitspunten x van U

(2.30) $$U(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} U_n(x) = \omega(b) \; {}_{0-}\!\int^{x} e^{-by} \, dU^{\#}(y) \; ,$$

waarbij

(2.31) $$\check{U}(\lambda) = \omega(b) \, \check{U}^{\#}(\lambda-b) = \omega(\lambda) \quad \text{voor} \quad \lambda > b \; .$$

b) (Feller bewijst stelling 2.5b niet, maar merkt op dat deze stelling met het verschuivingsprincipe bewezen kan worden. Daar ons dit niet gelukt is, volgt hier een ander bewijs)
Zij $0 \leq \check{U}_n(a) \leq M$ voor $n = 1,2,\ldots$ en zij c steeds een continuiteitspunt van U. Dan geldt wegens stelling 1.8 voor alle reële λ

$$\lim_{n\to\infty} {}_{0-}\int^{c} e^{-\lambda x}\, dU_n(x) = {}_{0-}\int^{c} e^{-\lambda x}\, dU(x) \;. \tag{2.32}$$

Daar voor elke in aanmerking komende c

$$ {}_{0-}\int^{c} e^{-ax}\, dU(x) = \lim_{n\to\infty} {}_{0-}\int^{c} e^{-ax}\, dU_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \check{U}_n(a) \leq M, \tag{2.33}$$

volgt

$$\check{U}(a) \leq \limsup_{n\to\infty} \check{U}_n(a) \leq M \;, \tag{2.34}$$

waarmee het bestaan van $\check{U}(\lambda)$ voor $\lambda \geq a$ is aangetoond.

Zij $\lambda > a$. Er geldt

$$\begin{aligned} |\check{U}(\lambda) - \check{U}_n(\lambda)| \leq & \left| {}_{0-}\int^{c} e^{-\lambda x}\, dU(x) - {}_{0-}\int^{c} e^{-\lambda x}\, dU_n(x) \right| + \\ & + {}_{c}\int^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU(x) + {}_{c}\int^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU_n(x) \;. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Omdat

$$ {}_{c}\int^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU_n(x) \leq e^{-(\lambda-a)c} \; {}_{c}\int^{\infty} e^{-ax}\, dU_n(x) \leq e^{-(\lambda-a)c} M \;, \tag{2.36}$$

convergeert de laatste term in het rechterlid van (2.35) uniform in n naar 0 voor $c \to \infty$, evenals de voorlaatste term, deze wegens het bestaan van $\check{U}(\lambda)$. Kies bij $\varepsilon > 0$ een c zó, dat voor $n = 1,2,\ldots$

$$ {}_{c}\int^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU(x) + {}_{c}\int^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU_n(x) < \varepsilon. \tag{2.37}$$

Wegens stelling 1.8 is de eerste term in het rechterlid van (2.35)

$< \varepsilon$ voor voldoende grote n, zodat het linkerlid $< 2\varepsilon$ is voor deze n, waaruit het gestelde volgt.

<u>Voorbeeld 2.3</u>.

a) Zij

(2.38) $$U_n(x) = e^{n^2}\,\iota(x-n)\ ,$$

dan geldt $U_n \to 0$, terwijl voor alle reële λ

(2.39) $$\check{U}_n(\lambda) = e^{n(x-\lambda)} \to \infty \quad \text{als} \quad n \to \infty\ .$$

b) Zij F een verdelingsfunctie, $a > 0$ en

(2.40) $$U_n(x) = \begin{cases} F(x) & \text{voor oneven } n\ , \\ F(x) + e^{ax}\,\iota(x-n) & \text{voor even } n\ , \end{cases}$$

dan geldt $U_n \to F$. Daar voor $\lambda \geqq 0$

(2.41) $$U_n(\lambda) = \begin{cases} \check{F}(\lambda) & \text{voor oneven } n\ , \\ \check{F}(\lambda) + e^{-(\lambda-a)n} & \text{voor even } n\ , \end{cases}$$

geldt dat $\lim \check{U}_n(\lambda) = \check{F}(\lambda)$ voor $\lambda > a$, terwijl $\check{U}_n(a)$ afwisselend de waarden $\check{F}(a)$ en $\check{F}(a) + 1$ aanneemt als n de natuurlijke getallen doorloopt.

<u>Aanvulling (De Haan)</u>. We kunnen stelling 2.5b ook met het verschuivingsprincipe bewijzen. Daarbij gebruiken we het volgende lemma.

<u>Lemma</u>. Als onder de voorwaarden van stelling 2.5b er een deelrij $\{U_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ van $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ is met $\check{U}_{n_k}(a) \to 0$ voor $k \to \infty$, dan geldt

1) $U_n \to 0$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \check{U}_{n_k}(\lambda) = 0$ voor alle $\lambda > a$.

<u>Bewijs</u>.

1) Analoog aan a 1) in het bewijs van stelling 2.5a volgt $U_{n_k} \to 0$ en dus $U_n \to 0$ wegens de konvergentie van $\{U_n\}$.

2) Gevolg van de monotonie van $\check{U}_{n_k}(\lambda)$.

<u>Bewijs</u> van stelling 2.5b met behulp van het verschuivingsprincipe.

i) Als $\check{U}_n(a) \to 0$, dan geldt wegens het lemma $U_n \to 0$ en $\check{U}_n(\lambda) \to 0$ voor alle $\lambda > a$.

ii) Stel, er is een deelrij $\{U_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ van $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ zó, dat $\lim\limits_{k\to\infty} \check{U}_{n_k}(a) = c > 0$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat alle $\check{U}_{n_k}(a)$ positief zijn. Derhalve definieert

$$dU^{\#}_{n_k}(x) = e^{-ax}\, dU_{n_k}(x) \,/\, \check{U}_{n_k}(a) \tag{2.42}$$

verdelingsfuncties $U^{\#}_{n_k}$ voor $k = 1,2,\ldots$ met LS-getransformeerden

$$\check{U}^{\#}_{n_k}(\lambda) = \check{U}_{n_k}(\lambda+a) \,/\, \check{U}_{n_k}(a) \qquad \text{voor} \quad \lambda \geq 0 . \tag{2.43}$$

Wegens de konvergentie van $\{U_{n_k}\}$ en de convergentie van $\{\check{U}_{n_k}(a)\}$ geldt $U^{\#}_{n_k} \to U^{\#}$ (vgl. bewijs van stelling 2.5a), waarbij $U^{\#}$ is gedefinieerd door

) $$dU^{\#}(x) = e^{-ax}\, dU(x) \;/\; c$$

et LS-getransformeerde

;) $$\check{U}^{\#}(\lambda) = \check{U}(\lambda+a) \;/\; c \;.$$

Jegens stelling 2.3 convergeert (2.43) naar (2.45) als $k \to \infty$ voor alle $\lambda > 0$, zodat

5) $$\check{U}_{n_k}(\lambda) \to \check{U}(\lambda) \qquad \text{voor alle } \lambda > a \;.$$

Stel dat niet geldt:

7) $$\lim_{n\to\infty} \check{U}_n(\lambda) = \check{U}(\lambda) \qquad \text{voor alle } \lambda > a \;,$$

dan is er een $b > a$, een reeel getal q en een deelrij $\{U_{m_k}\}$ zó, dat

8) $$\lim_{k\to\infty} \check{U}_{m_k}(b) = q \neq \check{U}(b) \;.$$

Nu bezit $\{\check{U}_{m_k}(a)\}$ een convergente deelrij $\{\check{U}_{m_{k_1}}(a)\}$, zeg met limiet c'.

α) Als $c' = 0$, dan volgt uit het lemma $U = 0$, $\check{U} = 0$ en $\check{U}_{m_{k_1}}(\lambda) \to 0$ als $1 \to \infty$ voor alle $\lambda > a$, in het bijzonder voor $\lambda = b$.
Tegenspraak met (2.48).

β) Als $c' > 0$, dan volgt analoog aan (2.42) t/m (2.47) dat $\check{U}_{m_{k_1}}(\lambda) \to \check{U}(\lambda)$ voor alle $\lambda > a$, in het bijzonder $\lambda = b$.
Tegenspraak met (2.48).

Conclusie: (2.47) geldt.

§ 2a

(Feller 2, XV, 1, 3)

Definitie 2a.1. Als F een begrensde verdelingsachtige functie is, dan is de *karakteristieke functie* van F de complexwaardige functie ϕ op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$(2a.1) \qquad \phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x}\, dF(x) \qquad \text{voor } \tau \in \mathbb{R}\,.$$

Opmerking 2a.1. Anders dan bij LS-getransformeerden is het begrip "karakteristieke functie" niet uit te breiden tot algemenere typen van maatfuncties, want voor de sommeerbaarheid van de integrand in (2a.1) is het noodzakelijk dat $F\{\mathbb{R}\}$ eindig is. Daarom kunnen karakteristieke functies alleen zinvol gedefinieerd worden bij begrensde maten op $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, welke eeneenduidig corresponderen met de begrensde verdelingsachtige functies.

Opmerking 2a.2. Zij $\underline{x}$ een stochastische variabele met verdelingsfunctie F, dan noemen we de karakteristieke functie ϕ van F ook de karakteristieke functie van $\underline{x}$; ϕ kan nu als verwachting geschreven worden:

$$(2a.2) \qquad \phi(\tau) = \mathcal{E}\, e^{i\tau \underline{x}}$$

Opmerking 2a.3. Er zijn stellingen over karakteristieke functies die geen analogon voor LS-getransformeerden bezitten. Als we werken met LS-getransformeerden, dan kunnen we vaak toch gebruik maken van deze stellingen, omdat de karakteristieke functie ϕ van een verdelingsfunctie F vaak verkregen kan worden uit de LS-getransformeerde $\check{F}$ door de formele substitutie

$$(2a.3) \qquad \phi(\tau) = \check{F}(-i\tau)\ .$$

Stelling 2a.1. Als F een begrensde verdelingsachtige functie is met karakteristieke functie ϕ, dan geldt

1) ϕ is continu;

2) $0 \leq |\phi(\tau)| \leq F(\infty)$;

3) F is dan en slechts dan een verdelingsfunctie als $\phi(0) = 1$.

Stelling 2a.2. Verschillende begrensde verdelingsachtige functies hebben verschillende karakteristieke functies.

Stelling 2a.3 (continuiteitsstelling).
Een rij verdelingsfuncties $\{F_n\}$ convergeert dan en slechts dan naar een verdelingsfunctie F, als er een *in* 0 *continue* functie ϕ op $\mathbb{R}$ bestaat met $\phi_n(\tau) \to \phi(\tau)$ voor alle reële τ. In dat geval is ϕ de karakteristieke functie van F en is de convergentie van $\{\phi_n(\tau)\}$ naar $\phi(\tau)$ uniform op elk eindig interval.

§ 3 Eenvoudige eigenschappen van LS-getransformeerden

(Feller 2, V 4, XIII 2)

(i) convoluties.

Zij U een maatfunctie en ϕ een meetbare functie op $\mathbb{R}$, dan definieert

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)\, dU(y) \tag{3.1}$$

een nieuwe functie ψ op $D \subset \mathbb{R}$, waarbij D de verzameling der reële getallen is, waarvoor $\phi(x-y)$ U-integreerbaar is.

Als U absoluut continu is met dichtheid $u = U'$, dan is (3.1) te schrijven als

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)\, u(y)dy. \tag{3.2}$$

Definitie 3.1. De *convolutie* van een meetbare functie ϕ met een *maatfunctie* U is de door (3.1) gedefinieerde functie ψ op $D \subset \mathbb{R}$. Notatie $\psi = U * \phi$ (let op volgorde).

Als U absoluut continu is met dichtheid u, dan noemen we ψ ook wel de *convolutie* van ϕ met de *dichtheid* u. Notatie $\psi = u$ ✦ ϕ.

Opmerking 3.1. Feller geeft de convolutie-operatoren aan met ★ in plaats van $*$ en $*$ in plaats van ✦.

Stelling 3.1. Als F en G verdelingsfuncties zijn, dan is $F * G$ een verdelingsfunctie.

Bewijs.
Zij voor reële x

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)\, dF(y) \ , \tag{3.3}$$

dan is $H = F * G$ niet-dalend, omdat G dat is. Omdat 1 een sommeerbare majorant voor de integrand $G(x-y)$ is, mogen in (3.3) wegens de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie het integraalteken en limieten met betrekking tot x verwisseld worden. Uit de rechtscontinuiteit van G volgt nu die van H, uit $G(-\infty) = 0$ en $G(\infty) = 1$ dat $H(-\infty) = 0$ en $H(\infty) = 1$.

Stelling 3.2. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn met verdelingsfuncties F resp. G, dan is $F * G$ de verdelingsfunctie van $\underline{x} + \underline{y}$.

Bewijsschets.

$$(3.4) \qquad P\{\underline{x} + \underline{y} \leq z\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \iota(z-x-y)\, dG(y)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z-x)\, dF(x) = F * G(z) \ .$$

Gevolg. Tussen verdelingsfuncties is de convolutie-operator $*$ *commutatief* en *associatief*, d.w.z.

1) $F * G = G * F$,
2) $F * (G * H) = (F * G) * H$.

Opmerking 3.1. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ stochastische variabelen zijn met verdelingsfuncties F en G en de verdelingsfunctie van $\underline{x} + \underline{y}$ is $F * G$, dan hoeven $\underline{x}$ en $\underline{y}$ niet noodzakelijk onderling onafhankelijk te zijn. Zij bij voorbeeld Ω de vereniging van de gebieden in $\mathbb{R}^2$ begrensd door de vierhoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$ en de driehoek met hoekpunten $(\frac{1}{2},0)$, $(1,0)$, $(1,\frac{1}{2})$ en laat de stochastische vector $(\underline{x},\underline{y})$ homogeen over Ω verdeeld zijn, d.w.z. als A een Borelmeetbare verzameling in $\mathbb{R}^2$ is, dan is $P\{(\underline{x},\underline{y}) \in A\}$ gelijk aan tweemaal de Lebesguemaat van $A \cap \Omega$. Dan zijn de componenten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ homogeen verdeeld over $[0,1]$, terwijl $\underline{x} + \underline{y}$ dezelfde verdelingsfunctie heeft als in het geval van onafhankelijke $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

Stelling 3.3. Als F en G verdelingsfuncties zijn en $H = F * G$, dan geldt $\check{H}(\lambda) = \check{F}(\lambda)\,\check{G}(\lambda)$ voor alle $\lambda \geq 0$.

Bewijs. Laten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn met verdelingsfuncties F resp. G. Wegens stelling 3.2 is H de verdelingsfunctie van $\underline{x} + \underline{y}$, zodat

$$(3.5) \qquad \check{H}(\lambda) = \mathcal{E} e^{-\lambda(\underline{x}+\underline{y})} = \mathcal{E} e^{-\lambda \underline{x}}\, \mathcal{E} e^{-\lambda \underline{y}} = \check{F}(\lambda)\, \check{G}(\lambda)$$

voor alle $\lambda \geq 0$.

Opmerking 3.2. Ook uit deze stelling volgt wegens stelling 2.2 de commutativiteit en associativiteit van de convolutie-operator $*$ tussen verdelingsfuncties. Stelling 3.3 en het gevolg van stelling 3.2 zullen opnieuw afgeleid worden als bijzonder geval van de volgende algemenere stellingen over convoluties van verdelingsachtige functies.

Opmerking 3.3. De convolutie van twee verdelingsachtige functies hoeft niet gedefinieerd te zijn. Neem bij voorbeeld

$$U(x) = \begin{cases} x & \text{voor } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{voor } x < 0\,, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{voor } x < -1 \\ 1 & \text{voor } x \geq -1 \end{cases}$$

dan divergeert $\int_{-\infty}^{\infty} V(x-y)\, dU(y)$ voor alle reële x.

Stelling 3.4. Als U en V twee verdelingsachtige functies zijn, geconcentreerd op $[0,\infty)$, dan is $W = U * V$ een verdelingsachtige functie, die geconcentreerd is op $[0,\infty)$.

Bewijs. Daar

$$(3.6) \qquad W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x-y)\, dU(y) = \begin{cases} \int_{[0,x]} V(x-y)\, dU(y) & \text{als } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{als } x < 0\,, \end{cases}$$

is W gedefinieerd en eindig op $\mathbb{R}$ met $W(x) = 0$ voor $x < 0$. Omdat V niet-dalend is, is W niet-dalend. Voor $0 \leq h \leq 1$ is $V(x+1-y)$ een U-sommeerbare majorant van $V(x+h-y)$, zodat wegens de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie en de rechtscontinuiteit van V

$$(3.7)\qquad \lim_{h\downarrow 0} W(x+h) = \lim_{h\downarrow 0} {}_{-\infty}\int^{\infty} V(x+h-y)\, dU(y) =$$

$$= {}_{-\infty}\int^{\infty} \lim_{h\downarrow 0} V(x+h-y)\, dU(y) = {}_{-\infty}\int^{\infty} V(x-y)\, dU(y) = W(x).$$

Dus W is rechtscontinu.

<u>Stelling 3.5</u>. Tussen verdelingsachtige functies geconcentreerd op $[0,\infty)$ is de convolutie-operator $*$ commutatief en associatief.

<u>Bewijs</u>. Laten U, V en W verdelingsachtige functies zijn, geconcentreerd op $[0,\infty)$. Dan geldt wegens de stelling van Fubini

$$(3.8)\qquad U * V(z) = {}_{-\infty}\int^{\infty} V(z-x)\, dU(x) = {}_{-\infty}\int^{\infty} \left({}_{-\infty}\int^{\infty} \iota(z-x-y)\, dV(y)\right) dU(x) =$$

$$= {}_{-\infty}\int^{\infty} \left({}_{-\infty}\int^{\infty} \iota(z-x-y)\, dU(x)\right) dV(y) =$$

$$= {}_{-\infty}\int^{\infty} U(z-y)\, dV(y) = V * U(z)\ .$$

Wegens (3.8) en de stelling van Fubini is

$$(3.9)\qquad U * (V * W)(z) = {}_{-\infty}\int^{\infty} V * W(z-x_1)\, dU(x_1) =$$

$$= {}_{-\infty}\int^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \iota(z-x_1-x_2-x_3)\, dV(x_2)\, dW(x_3)\right) dU(x_1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \iota(z-x_1-x_2-x_3)\, dU(x_1)\, dV(x_2)\, dW(x_3)\ .$$

Aan de symmetrie van het laatste lid van (3.9) zien we dat berekening van $(U * V) * W(z)$ hetzelfde resultaat geeft.

<u>Opmerking 3.4</u>. Aan het bewijs van stelling 3.5 zien we dat deze stelling geldig is voor alle verdelingsachtige functies. Het is dan wel mogelijk, dat de leden van (3.8) en (3.9) oneindig zijn.

<u>Stelling 3.6</u>. Als U en V twee verdelingsachtige functies zijn en $W = U * V$ is een verdelingsachtige functie, dan geldt voor elke continue, niet-negatieve, niet-stijgende functie ϕ op $\mathbb{R}$

$$(3.10) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dW(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+y)\, dU(x)\, dV(y) .$$

De leden van (3.10) kunnen oneindig zijn.

<u>Opmerking 3.5</u>. Men kan bewijzen dat (3.10) reeds geldt als ϕ Borelmeetbaar en W-integreerbaar is. Voor onze doeleinden is de beperktere stelling voldoende.

<u>Bewijs</u> van stelling 3.6.
Als $\phi(x) = \iota(a-x)$ met a reeel, dan geldt (3.10), immers

$$(3.11) \qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \iota(a-x)\, dW(x) = W(a) , \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \iota(a-x-y)\, dU(x)\, dV(y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(a-y)\, dV(y) = W(a) , \end{cases}$$

en bijgevolg is (3.10) juist als ϕ een eindige lineaire combinatie van functies $\iota(a_m-x)$ is.

Zij ϕ_0 een continue, niet-negatieve, niet-dalende functie op $\mathbb{R}$ en zij t_n voor $n = 1,2,\ldots$ de links-continue trapfunctie gedefinieerd door

$$(3.12) \qquad t_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{als } \dfrac{k-1}{2^n} \leqq \phi_0(x) < \dfrac{k}{2^n} \quad \text{voor } 1 \leqq k \leqq n.2^n , \\ n & \text{als } \phi_0(x) \geqq n , \end{cases}$$

dan is t_n een eindige lineaire combinatie van functies $\iota(a_m-x)$ en dus als ϕ_0 niet-stijgend is, en door

$$(3.13) \qquad t_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{als } \frac{k-1}{2^n} < \phi_0(x) \leqq \frac{k}{2^n} \quad \text{voor} \quad 1 \leqq k \leqq n.2^n , \\ \\ n & \text{als } \phi_0(x) > n \end{cases}$$

als ϕ_0 niet-dalend is, dan is t_n een eindige lineaire combinatie van functies $\iota(a_m - x)$ en een constante. Dus (3.10) geldt voor $\phi = t_n$. Bovendien is $\{t_n\}$ een niet-dalende rij niet-negatieve functies met $\lim t_n(x) = \phi_0(x)$ voor alle reële x.

Algemeen geldt, als $(X,\mathcal{F},\mu)$ een maatruimte is (d.w.z. X is een verzameling, $\mathcal{F}$ een σ-algebra van deelverzamelingen van X en μ een σ-eindige maat op $(X,\mathcal{F})$) en $\{f_n\}$ een niet-dalende rij niet-negatieve $\mathcal{F}$-meetbare functies op X, dat

$$(3.14) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim f_n d\mu$$

(de leden van (3.14) kunnen oneindig zijn). Deze stelling wordt soms de stelling van Beppo Levi genoemd. Derhalve is

$$(3.15) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_n(x)\, dW(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)\, dW(x) \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t_n(x+y)\, dU(x)\, dV(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x+y)\, dU(x)\, dV(y) . \end{cases}$$

Uit de geldigheid van (3.10) voor $\phi = t_n$ en (3.15) volgt dat (3.10) geldt voor $\phi = \phi_0$.

<u>Stelling 3.7</u>. Als U en V op $[0,\infty)$ geconcentreerde maatfuncties zijn met $U \neq 0$, $V \neq 0$ en als $W = U * V$, dan bestaat $\check{W}(\lambda)$ juist voor die waarden van λ, waarvoor $\check{U}(\lambda)$ en $\check{V}(\lambda)$ beide bestaan. Voor al deze λ geldt $\check{W}(\lambda) = \check{U}(\lambda)\check{V}(\lambda)$.

Bewijs. Kies $\phi(x) = e^{-\lambda x}$ in stelling 3.6, dan volgt uit (3.10)

$$(3.16) \qquad {}_0\int^\infty e^{-\lambda x}\, dW(x) = {}_0\int^\infty e^{-\lambda x}\, dU(x)\ .\ {}_0\int^\infty e^{-\lambda y}\, dV(y)\ ,$$

waarbij de leden van (3.16) oneindig kunnen zijn. We zeggen dat $\check{U}(\lambda)$, $\check{V}(\lambda)$ of $\check{W}(\lambda)$ bestaat, als de definiërende integraal eindig is. Uit (3.16) volgt nu al het gestelde.

Opmerking 3.6. Stelling 3.5 kan niet afgeleid worden uit stelling 3.7, omdat niet alle op $[0,\infty)$ geconcentreerde verdelingsachtige functies een LS-getransformeerde bezitten (zie voorbeeld 2.2c).

Met het oog op stelling 3.8 volgen hier definities van het begrip absolute continuiteit en formuleren we de stelling van Radon-Nikodym.

Definitie 3.2. Als X een verzameling is en $\mathcal{F}$ een σ-algebra van deelverzamelingen van X en als μ en ν twee maten op $(X,\mathcal{F})$ zijn, dan heet ν *absoluut continu ten opzichte van* μ als $\nu(N) = 0$ voor iedere $N \in \mathcal{F}$ met $\mu(N) = 0$.

Definitie 3.3. Een maatfunctie U heet *absoluut continu* als de maat $U\{.\}$ absoluut continu is ten opzichte van de Lebesguemaat μ op $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ waarin $\mathcal{L}$ de σ-algebra van alle Lebesguemeetbare verzamelingen in $\mathbb{R}$ is.

Stelling van Radon-Nikodym.

Als μ en ν twee maten op $(X,\mathcal{F})$ zijn en μ σ-eindig is, dan is ν dan en slechts dan absoluut continu ten opzichte van μ als er een niet-negatieve, eindigwaardige $\mathcal{F}$-meetbare functie f is zó, dat

$$(3.17) \qquad \nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \text{voor alle} \qquad A \in \mathcal{F}.$$

(Notaties: $d\nu = f\, d\mu$, $f = \frac{d\nu}{d\mu}$; vgl. opm. 2.8).

De functie f is door (3.17) op een μ-nulfunctie na bepaald, d.w.z. een functie g voldoet dan en slechts dan aan (3.17) als g-f een μ-nulfunctie is, dus als $\mu(\{x|x \in X,\ g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0$.

Gevolg. Een maatfunctie U is dan en slechts dan absoluut continu als er een Lebesguemeetbare functie u bestaat met

$$(3.18)\qquad U\{A\} = \int_A u(x)\,dx \qquad \text{voor alle} \quad A \in \mathcal{E}\ .$$

Voor (3.18) is het noodzakelijk en voldoende dat

$$(3.19)\qquad U(b) - U(a) = U\{(a,b]\} = \int_{(a,b]} u(x)dx \qquad \text{voor alle reële } a,b \text{ met } a < b.$$

We noemen u *een dichtheid* van U. Aan (3.18) voldoen alle functies die slechts een nulfunctie van u verschillen. Omdat we zulke functies vaak gelijk noemen, spreken we ook wel van *de dichtheid* u van U.

Lemma. Als U een absoluut continue maatfunctie is, dan is er een dichtheid van U die Borelmeetbaar is.

Bewijs. Zij μ de Lebesguemaat, dan geldt, daar $U\{N\} = 0$ voor alle $N \in \mathcal{E}$ met $\mu(N) = 0$, dat $U\{N\} = 0$ voor alle $N \in \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ met $\mu(N) = 0$. Dus $U\{.\}$ is absoluut continu ten opzichte van de Lebesguemaat beperkt tot de Borelmeetbare verzamelingen. Het lemma volgt nu uit de stelling van Radon-Nikodym.

Stelling 3.8. Zijn U en V twee verdelingsachtige functies zó, dat $W = U * V$ een verdelingsachtige functie is, en is V absoluut continu met Borelmeetbare dichtheid v dan is ook W absoluut continu met Borelmeetbare dichtheid $w = U * v$.

Gevolg. Als ook U absoluut continu is met dichtheid u, dan geldt $w = u * v$.

Bewijs van stelling 3.8. Er geldt

(3.20) $$W(x) = {}_{-\infty}\!\int^{\infty} V(x-y)\, dU(y) = {}_{-\infty}\!\int^{\infty} \left({}_{-\infty}\!\int^{x} v(z-y)dz\right)dU(y)\ .$$

Als v(z-y) aan zekere meetbaarheidseisen voldoet, dan geldt wegens de stelling van Fubini.

(3.21) $$W(x) = {}_{-\infty}\!\int^{\infty} \left({}_{-\infty}\!\int^{x} v(z-y)dz\right)dU(y) = {}_{-\infty}\!\int^{x} \left({}_{-\infty}\!\int^{\infty} v(z-y)dU(y)\right)dz.$$

Hieruit volgt dat

(3.22) $$w(x) = {}_{-\infty}\!\int^{\infty} v(x-y)dU(y)$$

een dichtheid van W is, zodat W wegens de stelling van Radon-Nikodym absoluut continu is.

Nu moet de meetbaarheid van v(z-y) nog onderzocht worden. Wegens het lemma is er een Borelmeetbare dichtheid v van V. Kies deze v in (3.20). Omdat z-y een continue, dus Borelmeetbare functie op $\mathbb{R}^2$ is en omdat elke Borelmeetbare functie van een (Borel)meetbare functie (Borel)meetbaar is, is v(z-y) een Borelmeetbare functie op $\mathbb{R}^2$. Nu is de overgang van (3.20) naar (3.21) geoorloofd en geldt bovendien dat (3.22) een Borelmeetbare dichtheid van W definieert.

Opmerking 3.7. Uit het gevolg van stelling 3.8 en uit de voorgaande stellingen volgt dat de convolutie-operator $*$ tussen dichtheden van verdelingsachtige functies commutatief en associatief is en dat $\overset{\circ}{w}(\lambda) = \overset{\circ}{u}(\lambda)\ \overset{\circ}{v}(\lambda)$ voor dichtheden u, v en w van verdelingsachtige functies met $w = u * v$.

Voorbeeld 3.1.

a) Zij $a \geq 0$ en U een verdelingsachtige functie, dan is $e^{-a\lambda}\check{U}(\lambda)$ de LS-getransformeerde van de verdelingsachtige functie U(x-a). Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van de LS-getransformeerden, maar kan ook gezien worden als een toepassing van stelling 3.7, waarin $V(x) = \iota(x-a)$ met $\check{V}(\lambda) = e^{-\lambda a}$.

b) Zij $u_\alpha(x) = x^{\alpha-1}$ met $\alpha > 0$, dan is

(3.23) $$\overset{\circ}{u}_\alpha(\lambda) = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha) .$$

Wegens opmerking 3.7 is $\lambda^{-(\alpha+\beta)}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ de Laplacegetransformeerde van $u_\alpha * u_\beta$, zodat

(3.24) $$u_\alpha * u_\beta(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, x^{\alpha+\beta-1} \qquad (\alpha,\beta > 0) .$$

In het bijzonder volgt voor $\alpha,\beta > 0$

(3.25) $$B(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{=\!=} {}_0\!\int^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = u_\alpha * u_\beta(1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} .$$

ii) Afgeleiden en momenten

Stelling 3.9. Zij U een verdelingsachtige functie en λ_0 de convergentie-abscis van $\check{U}$, dan is $\check{U}$ oneindig vaak differentieerbaar op (λ_0,∞) met

(3.26) $$\check{U}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}x^n dU(x) \qquad \text{voor } \lambda > \lambda_0,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Bewijs. Voor $\lambda > \lambda_0$ en $n = 0,1,2,\ldots$ is $e^{-\lambda x}x^n$ U-sommeerbaar, want $x^n = o\left(e^{\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)x}\right)$ voor $x \to \infty$, zodat $e^{-\lambda x}x^n = o\left(e^{-\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda)x}\right)$ voor $x \to \infty$, en $e^{-\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda)x}$ is U-sommeerbaar. Stel dat (3.26) geldt voor zekere n en alle $\lambda > \lambda_0$, dan geldt als ook $\lambda+h > \lambda_0$

(3.27) $$\frac{\check{U}^{(n)}(\lambda+h) - \check{U}^{(n)}(\lambda)}{h} = (-1)^{n+1} \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}x^n \frac{1-e^{-hx}}{h}\, dU(x) .$$

Uit de middelwaardestelling der differentiaalrekening volgt dat $|h^{-1}(1-e^{-hx})| \leq xe^{\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)x}$ als $|h| < \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)$, zodat $e^{-\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda)x}x^{n+1}$ een sommeerbare majorant van de integrand in (3.27) is als $|h| < \frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)$. Wegens de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie volgt (3.26) met n+1 in plaats van n uit (3.27) voor $h \to 0$. Daar (3.26) juist is voor n=0 volgt het gestelde met volledige inductie.

Opmerking 3.8. Uit de voorgaande stelling volgt dat de afgeleiden van $\check{U}$ afwisselend niet-positief en niet-negatief zijn, zodat alle afgeleiden van $\check{U}$ monotoon zijn. Daarom bestaan, als F een verdelingsfunctie is, de eventueel oneindige limieten $\lim_{\lambda\downarrow 0}\check{F}^{(n)}(\lambda)$ voor $n = 0,1,2,\ldots$. Met $\check{F}^{(n)}(0)$ zullen we de n^e rechterafgeleide van $\check{F}$ in 0 aangeven, als deze bestaat, d.w.z. een eindige waarde heeft.

Stelling 3.10. Als $\underline{x}$ een stochastische variabele is met verdelingsfunctie F, dan geldt voor $n = 0,1,2,\ldots$

a) $$\lim_{\lambda\downarrow 0} (-1)^n\check{F}^{(n)}(\lambda) = \mathcal{E}\underline{x}^n$$

(beide leden kunnen oneindig zijn).

b) $\check{F}^{(n)}(0)$ bestaat $\Longleftrightarrow \lim_{\lambda\downarrow 0} |\check{F}^{(n)}(\lambda)| < \infty$. In dat geval geldt

$$\check{F}^{(n)}(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}^{(n)}(\lambda) \ .$$

Bewijs.

a) Daar $e^{-\lambda x}x^n$ niet-negatief is en niet-dalend voor afnemende λ, geldt wegens (een generalisatie) van de stelling van Beppo Levi

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} (-1)^n \check{F}^{(n)}(\lambda) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \int_{0-}^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dF(x) = \tag{3.28}$$

$$= \int_{0-}^{\infty} \lim_{\lambda\downarrow 0} (x^n e^{-\lambda x}) dF(x) = \int_{0-}^{\infty} x^n dF(x) = \mathcal{E}\underline{x}^n,$$

ook als de leden van (3.28) oneindig zijn.

b) Voor $n = 0$ is het gestelde juist: $\check{F}(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}(\lambda) = 1$.
Stel dat voor zekere n geldt dat $\check{F}^{(n)}(0)$ bestaat, $\lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}^{(n)}(\lambda)$ eindig is en dat $\lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}^{(n)}(\lambda) = \check{F}^{(n)}(0)$. Dan geldt voor zekere θ_λ met $0 < \theta_\lambda < 1$

$$\frac{\check{F}^{(n)}(\lambda) - \check{F}^{(n)}(0)}{\lambda} = \check{F}^{(n+1)}(\theta_\lambda \lambda) \ . \tag{3.29}$$

Indien $\lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}^{(n+1)}(\lambda)$ eindig is, dan bestaat $\check{F}^{(n+1)}(0)$ wegens (3.29) met $\check{F}^{(n+1)}(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \check{F}^{(n+1)}(\lambda)$. Als $\lim_{\lambda\downarrow 0}|\check{F}^{(n+1)}(\lambda)| = \infty$, dan heeft het differentiequotiënt in (3.29) geen eindige limiet voor $\lambda\downarrow 0$, zodat de $(n+1)^e$ rechterafgeleide van F in 0 niet bestaat evenmin als de hogere afgeleiden. Wegens a) geldt dat ook $\lim_{\lambda\downarrow 0}|\check{F}^{(m)}(\lambda)| = \infty$ voor $m \geq n+1$, immers, als $\mathcal{E}\underline{x}^{n+1} = \infty$, dan geldt $\mathcal{E}\underline{x}^m = \infty$ voor $m \geq n+1$.

Voorbeeld 3.2. (zwakke wet van de grote aantallen).

Zij $\{\underline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen met alle dezelfde verdelingsfunctie F en verwachting $\mu < \infty$. Dan is wegens stelling 3.10

$$(3.30) \qquad \check{F}(\lambda) = 1 - \mu\lambda + o(\lambda) \qquad \text{voor} \qquad \lambda\downarrow 0 .$$

De LS-getransformeerde bij $(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n$ is

$$(3.31) \qquad \mathcal{E}\, e^{-\lambda(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n} = \{\check{F}(\tfrac{\lambda}{n})\}^n ,$$

zodat wegens (3.30)

$$(3.32) \qquad \log \mathcal{E}\, e^{-\lambda(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n} = n \log\left(1 - \mu\tfrac{\lambda}{n} + o(\tfrac{\lambda}{n})\right) =$$

$$= \mu\lambda + n\, o(\tfrac{\lambda}{n}) \qquad \text{voor} \qquad \tfrac{\lambda}{n} \to 0 .$$

Dus voor vaste $\lambda > 0$ geldt

$$(3.33) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}\, e^{-\lambda(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n} = e^{-\mu\lambda} .$$

Daar $e^{-\mu\lambda}$ de LS-gestransformeerde van de verdelingsfunctie $\iota(x-\mu)$ is, convergeren wegens de continuiteitsstelling (st. 2.3) de verdelingsfuncties van $(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n$ conservatief naar $\iota(x-\mu)$ voor $n\to\infty$. Wegens stelling 1.1 geldt nu voor elke $\varepsilon > 0$

$$(3.34)\qquad \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n}{n} - \mu| > \varepsilon\} = 0\ ,$$

dus $(\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n)/n$ convergeert in waarschijnlijkheid naar μ.

Stelling 3.11. Als U een verdelingsachtige functie is zó, dat $\check{U}$ convergentie-abscis 0 heeft, dan geldt

$$(3.35)\qquad \lim_{\lambda\downarrow 0} \check{U}(\lambda) = U(\infty) \leqq \infty\ .$$

Bewijs.
Wegens de stelling van Beppo Levi geldt

$$(3.36)\qquad \lim_{\lambda\downarrow 0} \check{U}(\lambda) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dU(x) = \int_{0-}^{\infty} \lim_{\lambda\downarrow 0} (e^{-\lambda x})\, dU(x) =$$

$$= U(\infty) \leqq \infty\ .$$

iii) Partiële integratie

Stelling 3.12. Als U een verdelingsachtige functie is, dan bestaat $\check{U}(\lambda)$ dan en slechts dan voor alle $\lambda > a \geqq 0$ als $\overset{o}{U}(\lambda)$ voor alle $\lambda > a \geqq 0$ bestaat. In dit geval geldt

$$(3.37)\qquad \overset{o}{U}(\lambda) = \lambda^{-1}\check{U}(\lambda)\ .$$

Bewijs. Voor $\lambda > a$ en $b > 0$ geldt wegens de stelling van Fubini

$$(3.38)\qquad {}_0\!\int^b e^{-\lambda x}\, U(x)\, dx = {}_0\!\int^b e^{-\lambda x} \left(\int_{0-}^{x} dU(y)\right) dx =$$

$$= \int_{0-}^{b} \left({}_y\!\int^b e^{-\lambda x} dx\right) dU(y) = \int_{0-}^{b} \frac{e^{-\lambda y}-e^{-\lambda b}}{\lambda}\, dU(y)\ ,$$

zodat

$$(3.39)\qquad {}_0\!\int^b e^{-\lambda x}\, U(x)\, dx = -\lambda^{-1}\, e^{-\lambda b}\, U(b) + \lambda^{-1} \int_{[0,b]} e^{-\lambda x}\, dU(x).$$

a) Als $\overset{\circ}{U}(\lambda)$ bestaat, dan convergeert het linkerlid van (3.39) naar $\overset{\circ}{U}(\lambda)$ voor $b \to \infty$. Daar de integraal in het rechterlid voor $b \to \infty$ een eventueel oneindige limiet heeft, bezit $e^{-\lambda b}U(b)$ voor $b \to \infty$ een eventueel oneindige limiet. Stel dat $\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda b}U(b) > 0$, dan is er een $\delta > 0$ en een b_0 zó, dat $U(x) > \delta e^{\lambda x}$ voor $x > b_0$, waaruit volgt dat het linkerlid van (3.39) divergeert voor $b \to \infty$. Tegenspraak, dus $\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda b}U(b) = 0$, zodat (3.37) uit (3.39) volgt door de limietovergang $b \to \infty$.

b) Als $\check{U}(\lambda)$ bestaat, dan convergeert de integraal in het rechterlid van (3.39) naar $\check{U}(\lambda)$ voor $b \to \infty$. De integraal in het linkerlid is niet-negatief en niet groter dan de integraal in het rechterlid, zodat ook de linkerintegraal convergeert voor $b \to \infty$. Nu geldt (3.37) wegens a).

Voorbeeld 3.3.

Als F een verdelingsfunctie is, dan is ${}_0\!\int^x \big(1 - F(y)\big)dy$ een verdelingsachtige functie met LS-getransformeerde

$$(3.40)\qquad {}_0\!\int^\infty e^{-\lambda x} \big(1 - F(x)\big)dx = \frac{1 - \check{F}(\lambda)}{\lambda} \qquad \text{voor} \quad \lambda > 0\ .$$

Als F een eindig positief eerste moment μ heeft, dan geldt wegens stelling 3.10

$$(3.41)\qquad \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1 - \check{F}(\lambda)}{\lambda} = - \check{F}'(0) = \mu$$

en dus wegens stelling 3.11

$$(3.42)\qquad {}_0\!\int^\infty \big(1 - F(x)\big)dx = \mu.$$

Derhalve is $\mu^{-1}\big(1-F(x)\big)$ de dichtheid van een absoluut continue verdelingsfunctie met LS-getransformeerde

(3.43) $$\frac{1 - \check{F}(\lambda)}{\mu\lambda} \quad .$$

Deze verdelingsfunctie speelt een belangrijke rol in de vervangingstheorie.

§ 3a (Lukacs § 3.2.)

Stelling 3a.1. Als F en G begrensde verdelingsachtige functies zijn met karakteristieke functies ϕ en γ, dan is $\phi(\tau)\gamma(\tau)$ de karakteristieke functie van $F * G$.

Stelling 3a.2. Zij F een verdelingsfunctie met karakteristieke functie ϕ en n een niet-negatief geheel getal.

α) Als het n^e moment van F bestaat, dan is ϕ n-maal differentieerbaar met

(3a.1) $$\phi^{(m)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,(ix)^m\,dF(x) \qquad \text{voor} \qquad m = 0,1,\ldots,n \ .$$

β) Als ϕ n-maal differentieerbaar is in 0, dan bestaat het n^e moment van F (d.w.z. $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n dF(x) < \infty$) als n even is en het $(n-1)^e$ moment als n oneven is.

Opmerking 3a.1. Stelling 3a.2β kan niet verscherpt worden.

Opmerking 3a.2. Er bestaan nergens differentieerbare karakteristieke functies. Bijvoorbeeld:

(3a.2) $$\phi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\, e^{i\tau 7^k}$$

is de karakteristieke functie van de verdelingsfunctie

(3a.3) $$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\, \iota(x - 7^k)$$

en is nergens differentieerbaar (zie Hobson, The theory of functions of a real variable II).

§ 4 Voorbeelden. Stochastische wandeling en Besselfuncties
(Feller 2 II 7 en XIII 3)

(i) Homogene verdeling

Zij $\{\underline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen, die homogeen over $[0,1]$ verdeeld zijn, d.w.z. alle $\underline{x}_k$ bezitten dezelfde verdelingsfunctie H met

$$(4.1) \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x < 0 , \\ x & \text{als} \quad 0 \leqq x < 1 , \\ 1 & \text{als} \quad x \geqq 1 . \end{cases}$$

Gevraagd: de verdelingsfunctie van $\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n$.

Wegens stelling 3.2 is H^{n*}, de n-voudige convolutie van H met zichzelf, de verdelingsfunctie van $\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_n$. Daar $\check{H}(\lambda) = \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda})$ is wegens stelling 3.3

$$(4.2) \qquad \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{-\lambda k} \lambda^{-n}$$

de LS-getransformeerde van H^{n*}. Nu is λ^{-n} de LS-getransformeerde van $x^n/n!$ (voorbeeld 2.2a), zodat wegens voorbeeld 3.1a $e^{-\lambda k}\lambda^{-n}$ de LS-getransformeerde is van $\left((x-k)^+\right)^n/n!$, waarbij x^+ gedefinieerd wordt door

$$(4.3) \qquad x^+ = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x < 0 , \\ x & \text{als} \quad x \geqq 0 . \end{cases}$$

Omdat de LS-transformatie een lineaire operatie op verdelingsachtige functies is, volgt uit (4.2)

$$(4.4) \qquad H^{n*}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left((x-k)^+\right)^n .$$

(ii) Convolutiemachtreeksen

Zij $\{\underline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen met alle dezelfde verdelingsfunctie F, zij $\underline{n}$ een stochastische variabele met mogelijke waarden 0,1,2,... en bijbehorende kansen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ en zij $P(s) = \sum p_n s^n$ de genererende functie van $\{p_n\}$. Zij bovendien gegeven dat $\{\underline{x}_k\}$ en $\underline{n}$ onderling onafhankelijk zijn. Dan heeft

$$(4.5) \qquad \underline{y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{k=1}^{\underline{n}} \underline{x}_k & \text{als} \quad \underline{n} \geq 1 , \\ 0 & \text{als} \quad \underline{n} = 0 , \end{cases}$$

als verdelingsfunctie

$$(4.6) \qquad G = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{k*}$$

(hierin is $F^{0*} \stackrel{\text{def}}{=} \iota$) , zodat

$$(4.7) \qquad \check{G}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \check{F}^k(\lambda)$$

de LS-getransformeerde bij $\underline{y}$ is (ook voor k=0 geldt, dat $\check{F}^k(\lambda)$ de LS-getransformeerde van F^{k*} is).

(iii) Stochastische wandeling

Met het oog op (iv) en (v) volgt hier een korte behandeling van de stochastische wandeling (random walk).

Definitie 4.1. Als $\{\underline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen is zó, dat voor k = 1,2,...

$$(4.8) \qquad \begin{cases} P\{\underline{x}_k = 1\} = p & (0 \leq p \leq 1) , \\ P\{\underline{x}_k = -1\} = q = 1-p , \end{cases}$$

dan heet de rij stochastische variabelen $\{\underline{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ gedefinieerd door

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \underline{s}_0 = 0 & \text{met kans } 1 \\ \underline{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \underline{x}_k & \text{voor } n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

een *stochastische wandeling*.

Men kan $\{\underline{s}_n\}$ interpreteren aan de hand van een gokspel. A en B spelen een spel waarbij A met kans p een gulden wint van B en met kans q=1-p een gulden aan B verliest. Dit gokspel tussen A en B wordt steeds onafhankelijk herhaald. Nu is $\underline{x}_n$ de winst van A uit het n^e spel en $\underline{s}_n$ de totale winst van A na n keer spelen.

Een andere illustratie van de stochastische wandeling krijgen we door de punten $(n,\underline{s}_n)$ voor $n = 0,1,\ldots$ in een assenstelsel uit te zetten en opeenvolgende punten $(n,\underline{s}_n)$ en $(n+1,\underline{s}_{n+1})$ te verbinden met een lijnstuk (zie fig. 4.1). Een dergelijke grafiek van een realisering van $\{\underline{s}_n\}$ noemen we een *pad*.

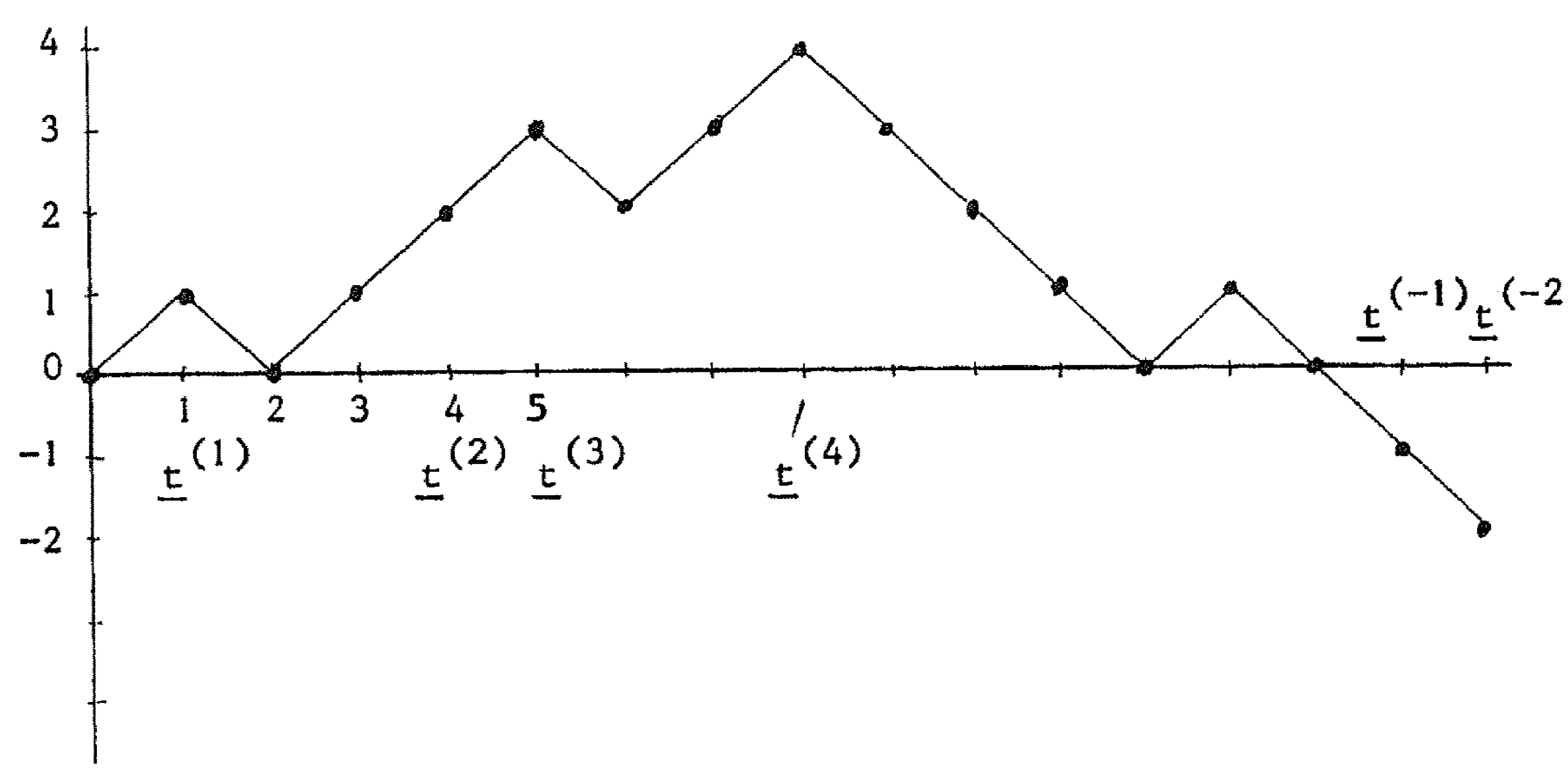

fig. 4.1

We stellen ons hierbij voor dat in de grafiek de baan van een deeltje dat zich over de reële rechte beweegt tegen de tijd is uitgezet. Wanneer de tijd een geheel aantal tijdseenheden bedraagt, bevindt het deeltje zich in een geheel getal, en één tijdseenheid verder is de coördinaat van de plaats van het deeltje met +1 of −1 toegenomen. Omdat de plaats van het deeltje op de verticale as is uitgezet, noemen we de plaats van het deeltje op de reële rechte gemakshalve de hoogte of het niveau van het deeltje. De terminologie die we gebruiken om evenementen met betrekking tot $\{\underline{s}_n\}$ te beschrijven is van deze zienswijze afkomstig. Zo omschrijven we het evenement $\{\underline{s}_n = k\}$ met "het deeltje bevindt zich op tijdstip n op hoogte k".

We definiëren nu voor gehele r en niet-negatieve gehele n:

(4.10) $u_n^{(r)} = P\{\underline{s}_n = r\}$ = kans, dat het deeltje zich op tijdstip n op hoogte r bevindt

(dus $u_0^{(r)}=0$ als $r \neq 0$ en $u_0^{(0)}=1$) ;

$$\lambda_n^{(r)} = \left\{ \begin{array}{lll} P\{\underline{s}_0<r,\ \underline{s}_1<r,\ldots,\underline{s}_{n-1}<r,\underline{s}_n=r\} & \text{als} & r>0 \\ P\{\underline{s}_0>r,\ \underline{s}_1>r,\ldots,\underline{s}_{n-1}>r,\underline{s}_n=r\} & \text{als} & r<0 \end{array} \right\} = \tag{4.11}$$

= kans, dat het deeltje op tijdstip n voor het eerst niveau r bereikt $(r\neq 0)$

(dus $\lambda_0^{(r)} = 0$ voor $r\neq 0$) ;

(4.12) $\left\{ \begin{array}{l} f_o = 0 \\ f_n = P\{\underline{s}_1\neq 0,\ \underline{s}_2\neq 0,\ldots,\underline{s}_{n-1}\neq 0,\underline{s}_n=0\} \end{array} \right.$ = kans, dat eerste terugkeer in 0 op tijdstip n plaats vindt $(n \geq 1)$.

Hierbij definiëren we de genererende functies

$$U^{(r)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(r)} s^n \qquad (|s| < 1) ,$$

$$\Lambda^{(r)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(r)} s^n \qquad (|s| \leq 1) , \tag{4.13}$$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n \qquad (|s| \leq 1)$$

en voor $r \neq 0$ de stochastische variabele

$$(4.14) \qquad \underline{t}^{(r)} = \min\{n \mid \underline{s}_n = r,\ n=1,2,\ldots\} = \text{tijdstip dat niveau } r \text{ voor het eerst bereikt wordt.}$$

Derhalve geldt voor $n = 0,1,\ldots$ en $r = \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$(4.15) \qquad P\{\underline{t}^{(r)} = n\} = \lambda_n^{(r)} .$$

Opmerking 4.1. Er geldt: $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(r)} = 1 - d \leqq 1$. Het is mogelijk dat $d > 0$. In dat geval is de verdelingsfunctie van $\underline{t}^{(r)}$ defectief en noemen we $\underline{t}^{(r)}$ een *defectieve stochastische variabele* en d het *defect* van $\underline{t}^{(r)}$. We interpreteren d als de kans dat $\underline{t}^{(r)} = \infty$ en kennen aan $\underline{t}^{(r)}$ in dit geval daarom verwachting ∞ toe.

Stelling 4.1.

a) $$\begin{cases} u_{r+2k}^{(r)} = \binom{r+2k}{k} p^{r+k} q^k & \text{voor} \quad r,k = 0,1,2,\ldots, \\ u_n^{(r)} = 0 \qquad \text{voor} & r,n = 0,1,2,\ldots \text{ met } \quad n-r \neq 0,2,4,\ldots . \end{cases}$$

b) $$U^{(0)}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} \qquad \text{voor} \quad |s| < 1 .$$

Bewijs.

a) Zij $n,r \geqq 0$. Om van $(0,0)$ naar (n,r) te komen moet het pad $\frac{1}{2}(n-r)$ keer dalen en $\frac{1}{2}(n+r)$ keer stijgen. Dit is alleen mogelijk als beide aantallen niet-negatief en geheel zijn, wat dan en slechts dan het geval is als $n-r$ niet-negatief en even is, dus als $n-r = 2k$ met $k = 0,1,\ldots$. Er zijn $\binom{r+2k}{k}$ verschillende paden met $r+k$ stijgende en k dalende verbindingslijnstukken en elk van deze paden heeft kans $p^{r+k}q^k$ op realisatie, waaruit het gestelde volgt.

b) Wegens a) en (4.13) geldt

$$(4.16) \qquad U^{(0)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(0)} s^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k s^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4pqs^2)^k = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqs^2}} \quad .$$

Opmerking 4.2. Men verkrijgt $\lambda_n^{(-r)}$, $\Lambda^{(-r)}(s)$, $u_n^{(-r)}$ en $U^{(-r)}(s)$ uit $\lambda_n^{(r)}$, $\Lambda^{(r)}(s)$, $u_n^{(r)}$ en $U^{(r)}(s)$ door p en q te verwisselen.

Opmerking 4.3. Met behulp van de zgn. *methode der collectieve kenmerken* van Van Dantzig is het mogelijk genererende functies voor $0 < s < 1$ als kansen te interpreteren.

Stel dat er op elk tijdstip n (n natuurlijk getal) met kans $1-s$ een ramp gebeurt ($0 < s < 1$) en dat het al of niet optreden van deze ramp onafhankelijk is van het verloop van de stochastische wandeling en onafhankelijk van het optreden van rampen op andere tijdstippen, dan is $\Lambda^{(r)}(s)$ de kans dat niveau r voor het eerst bereikt wordt zonder dat er een ramp is gebeurd, en $F(s)$ de kans op een eerste terugkeer in 0 zonder dat er een ramp is gebeurd. Deze zienswijze wordt in het bewijs van de volgende stelling gebruikt.

Stelling 4.2.

a) $\Lambda^{(r)}(s) = \Lambda^r(s) = \left\{\frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}\right\}^r$ voor $|s| \leq 1$, $r = 1,2,\ldots$,

waarin $\Lambda(s) \overset{\text{def}}{=} \Lambda^{(1)}(s)$.

b) $F(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$ voor $|s| < 1$.

c) $\{\lambda_n^{(r)}\}_{n=0}^{\infty}$ is een kansverdeling $\Longleftrightarrow$ $p \geq \frac{1}{2}$.

d) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ is een kansverdeling $\Longleftrightarrow$ $p = \frac{1}{2}$.

Bewijs.

a) Zij $r \geq 2$. Nu is $\Lambda^{(r)}(s)$ de kans dat niveau r voor het eerst bereikt wordt, zonder dat er een ramp gebeurd is. Dit is alleen mogelijk, nadat eerst niveau r-1 voor het eerst bereikt is zonder dat er een ramp gebeurd is (kans $\Lambda^{(r-1)}(s)$). Als het deeltje dat de stochastische wandeling uitvoert niveau r-1 voor het eerst en zonder ramp bereikt heeft, stel op tijdstip n, dan moet het daarna nog 1 in hoogte stijgen zonder dat er een ramp in de hiervoor benodigde tijd gebeurt. De kans hierop is onafhankelijk van wat er tot en met tijdstip n gebeurd is en gelijk aan de kans dat het deeltje uitgaande van (0,0) voor het eerst niveau 1 bereikt, zonder dat er een ramp gebeurd is. Dus $\Lambda^{(r)}(s) = \Lambda^{(r-1)}(s)\Lambda(s)$ waaruit volgt dat $\Lambda^{(r)}(s) = \Lambda^{r}(s)$.

Berekening van $\Lambda(s)$. Als $\underline{s}_1 = 1$ en geen ramp op tijdstip 1 optreedt (kans ps), dan is op tijdstip 1 niveau 1 voor het eerst bereikt zonder ramp. Als $\underline{s}_1 = -1$ en geen ramp optreedt op tijdstip 1 (kans qs), dan wordt niveau 1 voor het eerst zonder ramp bereikt dan en slechts dan als het pad na (1,-1) zonder ramp 2 aan hoogte wint (kans $\Lambda^2(s)$). Derhalve geldt

$$\Lambda(s) = ps + qs\Lambda^2(s) \; . \tag{4.17}$$

De wortels van vergelijking (4.17) zijn

$$\Lambda(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} \; . \tag{4.18}$$

Omdat $\Lambda(s)$ wegens (4.13) analytisch is voor $|s| < 1$ en de wortel met het plus-teken naar ∞ gaat voor $s \downarrow 0$, geldt

$$\Lambda(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2qs} \tag{4.19}$$

voor $|s| \leqq 2/\sqrt{pq}$, dus zeker voor $|s| \leqq 1$.

b) Splitsing naar de mogelijke uitkomsten van $\underline{s}_1$ levert analoog aan het bewijs van a) en met behulp van opmerking 4.2

$$F(s) = ps\,\Lambda^{(-1)}(s) + qs\,\Lambda(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs} \; . \tag{4.20}$$

c) Er geldt: $\{\lambda_n^{(r)}\}_{n=0}^{\infty}$ is een kansverdeling $\Longleftrightarrow$

$\Lambda^r(1) = \sum \lambda_n^{(r)} = 1 \Longleftrightarrow \Lambda(1) = 1$. Dit is dan en slechts dan het geval als $p \geqq \frac{1}{2}$, daar

$$(4.21)\qquad \Lambda(1) = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1-\sqrt{(p-q)^2}}{2q} = \frac{1-|p-q|}{2q} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{als} \quad p \geq \tfrac{1}{2}\,, \\ \frac{p}{q} & \text{als} \quad p < \tfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

d) $F(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - |p-q| = 1 \iff p=q=\frac{1}{2}$.

Opmerking 4.4. Onder de omstandigheden die beschreven zijn in opmerking 4.3 is

$$(4.22)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^{n-1}(1-s) = \frac{1-s}{s}\left(U^{(r)}(s)-u_0^{(r)}\right) = \begin{cases} \frac{1-s}{s}\, U^{(r)}(s) & \text{als } r\neq 0, \\ \frac{1-s}{s}\left(U^{(0)}(s)-1\right) & \text{als } r=0 \end{cases}$$

de kans dat de eerste ramp optreedt op een tijdstip dat het deeltje zich op hoogte r bevindt. Op dezelfde wijze volgt

$$(4.23)\begin{cases} \frac{1-s}{2}\,\Lambda^r(s) = \text{kans dat het optreden van de eerste ramp samenvalt met de eerste aankomst op niveau } r; \\ \frac{1-s}{s}\,F(s) = \text{kans dat het optreden van de eerste ramp samenvalt met de eerste terugkeer in } 0. \end{cases}$$

Deze interpretaties worden gebruikt in het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 4.3.

$\lambda_{r+2k}^{(r)} = \frac{r}{r+2k}\binom{r+2k}{k} p^{r+k} q^k$ voor $k = 0,1,\ldots,$ $r = 1,2,\ldots$

$\lambda_n^{(r)} = 0$ voor $k = 0,1,\ldots$, $r = 1,2,\ldots$ met $n-r \neq 0,2,4,\ldots$.

<u>Bewijs</u>. Voor $r \neq 0$ en $0 < s < 1$ zullen we afleiden

$$\frac{1-s}{s}\, U^{(r)}(s) = \frac{1-s}{s}\, \Lambda^{r}(s) + \Lambda^{r}(s) \,.\, \frac{1-s}{s} \left(U^{(0)}(s) - 1\right) , \tag{4.24}$$

zodat

$$U^{(r)}(s) = U^{(0)}(s)\, \Lambda^{r}(s) \,. \tag{4.25}$$

Afleiding van (4.24) door interpretatie: het optreden van de eerste ramp op een tijdstip dat het deeltje zich in r bevindt kan op twee manieren gebeuren:

1) de eerste ramp valt samen met de eerste aankomst in r (kans $s^{-1}(1-s)\ \Lambda^{r}(s)$) ;
2) bij de eerste aankomst in r is er nog geen ramp gebeurd (kans $\Lambda^{r}(s)$) en de eerste ramp treedt op op een tijdstip van terugkeer naar hetzelfde niveau r (kans $s^{-1}(1-s)\{U^{(0)}(s) - 1\}$).

Wegens stelling 4.1b en stelling 4.2a geldt

$$U^{(0)}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^{2}}} = \frac{1}{1-2qs\Lambda(s)} \tag{4.26}$$

Uit (4.25) en (4.26) volgt

$$\Lambda^{(r)}(s) = U^{(r)}(s) - 2qsU^{(r+1)}(s) , \tag{4.27}$$

zodat

$$\lambda_{n}^{(r)} = u_{n}^{(r)} - 2q u_{n-1}^{(r+1)} \,. \tag{4.28}$$

Wegens stelling 4.1a is $\lambda_{n}^{(r)}$ alleen positief als $n = r+2k$ met $k=0,1,2,\ldots$ en is

$$\lambda_{r+2k}^{(r)} = \binom{r+2k}{k} p^{r+k} q^{k} - 2q \binom{r+2k-1}{k-1} p^{r+k} q^{k-1} = \tag{4.29}$$

$$= \frac{r}{r+2k} \binom{r+2k}{k} p^{r+k} q^{k} \,.$$

Opmerking 4.5 (Göbel). (4.28) is ook rechtstreeks door kansinterpretatie af te leiden. Er geldt $u_n^{(r)} = \lambda_n^{(r)} + x_n^{(r)}$ waarin $u_n^{(r)}$ de kans is op niveau r op tijdstip n, $\lambda_n^{(r)}$ de kans op voor de eerste keer niveau r op tijdstip n en $x_n^{(r)}$ de kans, dat het deeltje op tijdstip n op niveau r is nadat het al minstens een keer in niveau r geweest is.

Nadat het deeltje op tijdstip $\underline{t}^{(r)}$ voor het eerst op niveau r gekomen is, kan het deeltje op tijdstip n weer in r terugkomen vanuit niveau r-1 of r+1 op tijdstip n-1. Door van alle paden die door (n,r) gaan na niveau r minstens een keer gesneden te hebben het stuk tussen $(\underline{t}^{(r)},r)$ en (n,r) te spiegelen ten opzichte van niveau r ontstaat een 1-1-correspondentie tussen de hiervoorgenoemde paden die door (n-1,r-1) en die door (n-1,r+1) gaan, waarbij corresponderende paden gelijke kansen hebben.

De kans op hoogte r+1 op tijdstip n-1 en vervolgens hoogte r op tijdstip n is $u_{n-1}^{(r+1)}.q$, zodat $x_n^{(r)} = 2qu_{n-1}^{(r+1)}$.

Opmerking 4.6. Stelling 4.1b kan ook afgeleid worden uit stelling 4.2b en de kansinterpretatie van opmerking 4.4

$$(4.30) \qquad \frac{1-s}{s}\left(U^{(0)}(s)-1\right) = \frac{1-s}{s}F(s) + F(s).\frac{1-s}{s}\left(U^{(0)}(s)-1\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad U^{(0)}(s) = \frac{1}{1-F(s)} \quad .$$

Opmerking 4.7. De volgende zienswijze waarin $U^{(r)}(s) - \delta_{0,r}$ geïnterpreteerd wordt als verwachting berust op een idee van Cox (zie de discussie bij de voordracht van Runnenburg in: W.L. Smith, W.E. Wilkinson, Proceedings on the symposium on congestion theory, University of North Carolina (1965)).

Zij $\underline{N}_n$ het aantal terugkeren naar 0 in het tijdsinterval (0,n], dan geldt

$$(4.31) \qquad \mathcal{E}\,\underline{N}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(0)} \,,$$

immers $\underline{N}_n = \sum_{k=1}^{n} \underline{a}_k$ waarin $\underline{a}_k=1$ als op tijdstip k een terugkeer naar 0 plaats vindt en 0 anders ($k=1,2,\ldots$), dus $\mathcal{E}\underline{a}_k = P\{\underline{a}_k=1\} = u_k^{(0)}$. Het verwachte aantal terugkeren vóór de eerste ramp is daarom gelijk aan

$$(4.32) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} s^{n-1}(1-s)\,\mathcal{E}\,\underline{N}_{n-1} = (1-s)\sum_{n=2}^{\infty} s^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} u_k^{(0)} =$$

$$= (1-s)\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(0)} \sum_{n=k+1}^{\infty} s^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(0)} s^k = U^{(0)}(s) - 1.$$

Analoog leidt men af dat $U^{(r)}(s)$ voor $r\neq 0$ het verwachte aantal snijpunten van het pad met niveau r is vóór optreden van de eerste ramp.

Toepassing. Het aantal terugkeren naar 0 vóór optreden van de eerste ramp is gelijk aan 0 met kans $1-F(s)$ en ≥ 1 met kans $F(s)$ (zie opmerking 4.3). Onder de voorwaarde dat de eerste terugkeer naar 0 zonder ramp heeft plaatsgevonden, heeft het aantal terugkeren naar 0 na deze eerste terugkeer en vóór het optreden van de eerste ramp dezelfde verdeling als het aantal terugkeren naar 0 vóór de eerste ramp zonder meer. Derhalve is

$$(4.33) \qquad U^{(0)}(s)-1 = \big(1-F(s)\big).0 + F(s)\,\{1 + \big(U^{(0)}(s) - 1\big)\},$$

zodat $U^{(0)}(s) = \big(1 - F(s)\big)^{-1}$. Op analoge wijze kan (4.25) afgeleid worden.

We definiëren voor $r=1,2,\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$

(4.34)

$f_n^{(r)}$ = kans dat r^e terugkeer naar 0 op tijdstip n plaats vindt;

$$F^{(r)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(r)} s^n \quad \text{voor} \quad |s| \leq 1 .$$

Wegens (4.12) en (4.13) geldt $f_n^{(1)} = f_n$ en $F^{(1)}(s) = F(s)$.

Stelling 4.4.

a) $F^{(r)}(s) = F^r(s) = (1 - \sqrt{1-4pqs^2})^r$ voor $r=1,2,\ldots$ en $|s| \leq 1$.

b) $f^{(r)}_{2r+2k} = \frac{r}{2k+r} \binom{2k+r}{k} 2^r (pq)^{k+r}$ voor $k=0,1,\ldots$, $r=1,2,\ldots$

$f^{(r)}_n = 0$ voor alle $n=0,1,\ldots$, $r=1,2,\ldots$ met $n-2r \neq 0,2,4,\ldots$

c) $\{f^{(r)}_n\}^{\infty}_{n=0}$ is een kansverdeling $\Longleftrightarrow$ $p=\frac{1}{2}$.

Bewijs.

a) Zij $r \geq 2$; $F^{(r)}(s)$ is de kans op een r^e terugkeer naar 0 zonder dat er een ramp gebeurd is. Dan moet er een eerste terugkeer naar 0 geweest zijn zonder dat er een ramp gebeurd is, gevolgd door (r-1)-maal terugkeren naar 0 zonder dat er een ramp is gebeurd. Dus $F^{(r)}(s) = F(s)\, F^{(r-1)}(s)$, zodat $F^{(r)}(s) = F^r(s) = (1 - \sqrt{1-4pqs^2})^r$ (stelling 4.2b).

b) Wegens a) en stelling 4.2a geldt $F^r(s) = (2qs)^r \Lambda^r(s)$, waaruit volgt dat

$$f^{(r)}_n = (2q)^r \lambda^{(r)}_{n-r} \qquad . \tag{4.35}$$

Het gestelde volgt nu uit stelling 4.3 en (4.35).

c) $F^r(1) = 1 \Longleftrightarrow F(1) = 1 \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$ (stelling 4.2d).

Aanhangsel: analytische methode voor het bepalen van de coëfficiënt van s^n in de machtreeksontwikkeling van $\Lambda^r(s)$.

In Feller 1 III,6 is $\lambda^{(r)}_n$ als kans met behulp van combinatorische methoden berekend; in Feller 1 XI,3, waar de stochastische wandeling met behulp van genererende functies behandeld, wordt $\lambda^{(r)}_n$ niet uit $\Lambda^r(s)$ berekend. Dit gebeurt wel in een artikel van Feller *), waaraan het bewijs van stelling 4.3 ontleend is, afgezien van de kansinterpretatie van de optredende genererende functies. Feller merkt hierbij op dat berekening van $\lambda^{(r)}_n$ uit $\Lambda^r(s)$ met analytische methoden zeer moeilijk is.

*) W. Feller, Infinitely divisible distributions and Bessel functions associated with random walks, J. Soc. Industr. Appl. Math. 14, 864-875 (1966).

Het is ons echter gelukt $\lambda_n^{(r)}$ met betrekkelijk eenvoudige middelen rechtstreeks uit $\Lambda^r(s)$ te berekenen.

Daar

(4.36) $$\Lambda(s) = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4pqs^2)^n}{2qs} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+2k} \binom{1+2k}{k} p^{1+k} q^k s^{1+2k} ,$$

is $\Lambda^r(s)$ voor $r=0,1,2,\ldots$ te schrijven in de vorm

(4.37) $$\Lambda^r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} A(r,k) p^{r+k} q^k s^{r+2k} ,$$

waarin $A(r,k)$ een functie is van de niet-negatieve gehele getallen r en k en

(4.38) $$\begin{cases} A(0,k) = \delta_{0,k} , \\ A(1,k) = \frac{1}{1+2k} \binom{1+2k}{k} . \end{cases}$$

Omdat

(4.39) $$\Lambda^2(s) = \frac{1}{qs} \Lambda(s) - \frac{p}{q} ,$$

geldt voor gehele $r \geq 2$

(4.40) $$\Lambda^r(s) = \frac{1}{qs} \Lambda^{r-1}(s) - \frac{p}{q} \Lambda^{r-2}(s) ,$$

zodat wegens (4.37)

(4.41) $$A(r,k) = A(r-1,k+1) - A(r-2,k+1) \quad \text{voor} \quad r \geq 2,\ k \geq 0.$$

Met behulp van deze relatie en (4.38) kan al met volledige inductie bewezen worden dat

(4.42) $$A(r,k) = \frac{r}{r+2k} \binom{r+2k}{k} \quad \text{voor} \quad r \geq 1,\ k \geq 0 ,$$

maar we zullen een meer constructieve methode volgen.

Door

(4.43) $$B(r+2k,k) = A(r,k)$$

is $B(n,k)$ gedefinieerd voor gehele n en k met $k \geq 0$ en $n \geq 2k$, waarbij

$$(4.44)\qquad B(1+2k,k) = A(1,k) = \frac{1}{1+2k}\binom{1+2k}{k} =$$

$$= \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} \qquad \text{voor} \quad k \geq 0 \ .$$

Uit (4.41) volgt voor alle in aanmerking komende n en k

$$(4.45)\qquad B(n+1,k) = B(n,k) + B(n,k-1) \ .$$

Dit is juist de optelregel voor binomiaalcoëfficiënten die de driehoek van Pascal genereert. Men gaat gemakkelijk na, dat $B(n,k)$ op een en slechts een manier uitgebreid kan worden tot een functie van gehele n en k met $n \geq 0$ door te eisen dat $B(n,k)$ voor $k \geq 0$ en $n \geq 2k$ aan (4.43) en voor $n \geq 0$ aan optelregel (4.45) voldoet (zie fig. 4.2b). In dat geval geldt voor gehele n,m en k met $n,m \geq 0$

$$(4.46)\qquad B(n+m,k) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} B(n,\ell)\binom{m}{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} B(n,\ell)\binom{m}{k-\ell}$$

m.a.w., als we $B(n,k)$ uitzetten in een rooster als van de Pascaldriehoek, dan ontstaat de $(n+m)^e$ rij door "interferentie" van Pascaldriehoeken die naar beneden worden "uitgezonden" vanaf de n^e rij, waarbij aan de Pascaldriehoek met top op (n,ℓ) gewicht $B(n,\ell)$ wordt toegekend (zie fig. 4.2). Toepassing van (4.46) met $n=1$, $m=2k$ geeft

$$(4.47)\qquad B(1+2k,k) = \sum_{\ell=0}^{k} B(1,\ell)\binom{2k}{k-\ell} \ .$$

Vergelijking met (4.44) leert dat (4.47) met $B(1,0) = 1$, $B(1,1) = -1$ en $B(1,\ell) = 0$ voor $\ell \neq 0$ een oplossing $B(n,\ell)$ geeft, die aan (4.43) en (4.45) voldoet, en dus <u>de</u> oplossing.

Nu geldt wegens (4.43) en (4.47) voor $r \geq 1$, $k \geq 0$

$$(4.48)\qquad A(r,k) = B(r+2k,k) = \binom{r+2k-1}{k} - \binom{r+2k-1}{k-1} = \frac{r}{r+2k}\binom{r+2k}{k} \ .$$

$\binom{n}{k}$	k =	-3	-2	-1	0	1	2	3
n =	0	0	0	0	1	0	0	0
	1	0	0	1	1	0	0	
	2	0	0	1	2	1	0	0
	3	0	1	3	3	1	0	
	4	0	1	4	6	4	1	0
	5	1	5	10	10	5	1	

a) één Pascaldriehoek

B(n,k)		-3	-2	-1	0	1	2	3	4
n =	1	0	0	0	1	-1	0	0	0
	2	0	0	1	0	-1	0	0	
	3	0	0	1	1	-1	-1	0	0
	4	0	1	2	0	-2	-1	0	
	5	0	1	3	2	-2	-3	-1	0
	6	1	4	5	0	-5	-4	1	

$n \geqq 2k$

b) twee interfererende Pascaldriehoeken met gewicht +1 en -1.

fig. 4.2

iv) <u>Besselfuncties</u>

<u>Definitie 4.2.</u> De *Besselfunctie van orde* $\rho > -1$ is de functie I_ρ op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$(4.49) \qquad I_\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\rho+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\rho} \qquad \text{voor } x \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 4.8. De convergentiestraal van de machtreeks in (4.49) is ∞, omdat

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^\rho e^{|x|^2/4}$$

voor alle complexe x een convergente majorant van deze reeks is.

Opmerking 4.9. In de literatuur heet I_ρ de *gemodificeerde Besselfunctie*. De gewone Besselfunctie wordt altijd aangegeven met J_ρ en wordt gedefinieerd door in het rechterlid van (4.49) achter het somteken $(-1)^k$ in te voegen. Omdat we ons alleen met de gemodificeerde Besselfunctie zullen bezighouden en de gewone Besselfunctie niet zullen tegenkomen, duiden we I_ρ kortweg aan met Besselfunctie.

Definitie 4.3. De Besselfuncties van orde $-r$ met $r=1,2,\ldots$ worden gedefinieerd door $I_{-r} = I_r$.

Opmerking 4.10. De functie $1/\Gamma(x)$ kan uitgebreid worden tot een gehele functie op de complexe getallen, zodat (4.49) voor alle complexe ρ een functie I_ρ definieert. De inhoud van definitie 4.3 wordt dan een gevolg van de op deze wijze gegeneraliseerde definitie van I_ρ.

Besselfuncties komen voor in veel expliciete oplossingen in wachttijdtheorie en diffusietheorie. In het volgende zullen we aan de hand van een generalisatie van de in iii) gedefinieerde stochastische wandeling verdelingsfuncties afleiden waarin Besselfuncties optreden.

In iii) hebben we een stochastische wandeling bekeken waarin de sprongen alleen optreden op de tijdstippen 1,2,3,... . Men kan de "tijd" in deze stochastische wandeling zien als een variabele die het aantal opgetreden sprongen telt. We gaan de stochastische wandeling van iii) veralgemenen door de sprongen niet meer te laten plaats vinden op vaste tijdstippen maar op stochastische tijdstippen.

We veronderstellen dat de tijdstippen waarop sprongen optreden worden aangewezen door een stationair Poissonproces met intensiteit α ($\alpha > 0$), d.w.z. de lengten van de tijdsintervallen tussen opeenvolgende sprongen en de lengte van het tijdsinterval tussen 0 en de eerste sprong zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen met alle dezelfde dichtheid $\alpha e^{-\alpha t}$ voor $t > 0$. Elke sprong heeft grootte +1 met kans p en grootte -1 met kans $q = 1-p$. De grootte van elke sprong is onafhankelijk van de grootte van andere sprongen en onafhankelijk van het Poissonproces dat de tijdstippen der sprongen bepaalt.

We zullen het hier beschreven stochastische proces voor het gemak een *Poissonwandeling* noemen. De positie op tijdstip t van een deeltje dat uitgaande van 0 op tijdstip 0 deze Poissonwandeling uitvoert geven we aan met $\underline{\sigma}(t)$ en het aantal sprongen dat is opgetreden in het tijdsinterval $(0,t]$ met $\underline{n}(t)$. Nu geldt

$$(4.50) \qquad \underline{\sigma}(t) = \underline{s}_{\underline{n}(t)} \quad .$$

Hierin is $\{\underline{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ de stochastische wandeling, die beschreven is in iii); $\{\underline{s}_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\{\underline{n}(t)\}_{t\in[0,\infty)}^{\infty}$ zijn twee onderling onafhankelijke collecties stochastische variabelen.

Stelling 4.5.

$$a_r(t) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{\sigma}(t)=r\} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}r} e^{-\alpha t}\, I_r\,(2\sqrt{pq}\alpha t) \qquad \text{voor } r \text{ geheel en } t \geq 0 \ .$$

Bewijs. Voor alle gehele r geldt

$$(4.51) \qquad a_r(t) = P\{\underline{s}_{\underline{n}(t)} = r\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\underline{s}_{\underline{n}(t)} = r \mid \underline{n}(t) = n\} P\{\underline{n}(t) = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(r)}\, e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \ .$$

Voor $r=0,1,2,\ldots$ is het laatste lid van (4.51) wegens stelling 4.1 gelijk aan

$$(4.52)\qquad e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+2k}{k}p^{r+k}q^{k}\frac{(\alpha t)^{r+2k}}{(r+2k)!}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}r}e^{-\alpha t}\,I_r(2\sqrt{pq}\,\alpha t)\ .$$

Voor $r=-1,-2,\ldots$ volgt het gestelde wegens opmerking 4.2 en definitie 4.3.

<u>Opmerking 4.9.</u> Uit het model van de stochastische wandeling volgt dat $\{u_n^{(r)}\}_{r=-\infty}^{\infty}$ voor elk natuurlijk getal n een kansverdeling is (d.w.z. $u_n^{(r)} \geq 0$ en $\sum_{r=-\infty}^{\infty} u_n^{(r)} = 1$). Dan is wegens (4.51) $\{a_r(t)\}_{r=-\infty}^{\infty}$ een kansverdeling, zodat $\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r(t) = 1$. Door substitutie $2\sqrt{pq}\,\alpha t = x$ en $p/q = s^2$ volgt uit deze laatste identiteit

$$(4.53)\qquad \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r(x)\, s^r = e^{\frac{1}{2}x(s+s^{-1})}\ .$$

Hiermee hebben we de genererende functies van de Besselfuncties van gehele orde gevonden. Formule (4.53), welke ook gemakkelijk rechtstreeks met behulp van de definities 4.2 en 4.3 af te leiden is, wordt soms de formule van Schlömilch genoemd.

<u>Opmerking 4.11.</u> Uit

$$(4.54)\qquad a_r(t+\tau) = P\{\underline{\sigma}(t+\tau) = r\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\{\underline{\sigma}(t) = k\}P\{\underline{\sigma}(t+\tau) = r\,|\,\underline{\sigma}_t = k\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t)\, a_{r-k}(\tau) \qquad \text{voor}\quad t,\tau \geq 0$$

volgt wegens stelling 4.5

$$(4.55)\qquad I_r(t+\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(t)\, I_{r-k}(\tau)$$

(identiteit van K. Neumann); (4.55) volgt ook onmiddelijk uit (4.53).

Voor gehele $r \neq 0$ definiëren we de stochastische variabele $\underline{\tau}^{(r)}$ als het tijdstip waarop in de [illegible] wandeling voor het eerst niveau r bereikt wordt. De verdelingfunctie van $\underline{\tau}^{(r)}$ geven we aan met L_r; $\underline{\tau}^{(r)}$ en L_r kunnen defectief zijn.

Stelling 4.6.

a) L_r is absoluut continu met dichtheid

$$(4.56) \qquad L_r'(t) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}r} e^{-\alpha t} \frac{|r|}{t} I_r\,(2\sqrt{pq}\,\alpha t)$$

voor $t > 0$, r geheel, $r \neq 0$.

b) Voor $r = 1,2,\ldots$ en $\lambda \geq 0$ geldt

$$\check{L}_r(\lambda) = \check{L}^r(\lambda) = \left(\frac{\frac{\lambda}{\alpha} + 1 - \sqrt{(\frac{\lambda}{\alpha}+1)^2-4pq}}{2q}\right)^r ,$$

waarin $L \stackrel{\text{def}}{=} L_1$.

c) $L_r = L^{r*}$ voor $r = 1,2,\ldots$.

d) L_r is een niet-defectieve verdelingsfunctie $\Longleftrightarrow$ $p \geq \frac{1}{2}$ $(r > 0)$.

Bewijs.

a) Zij $\underline{y}_1$ het tijdstip van de eerste sprong en $\underline{y}_n$ voor $n \geq 2$ de lengte van het tijdsinterval tussen de $(n-1)^e$ en n^e sprong, dan is $\{\underline{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen met alle dezelfde verdelingsfunctie $F(t) = 1-e^{-\alpha t}$ voor $t \geq 0$. Nu geldt

$$(4.57) \qquad \underline{\tau}^{(r)} = \sum_{n=1}^{\underline{t}^{(r)}} \underline{y}_n ,$$

waarin $\underline{t}^{(r)}$ het tijdstip van eerste aankomst in r is in de stochastische wandeling met vaste sprongtijden, beschreven in iii). Omdat $\{\lambda_n^{(r)}\}_{n=1}^{\infty}$ de kansverdeling van $\underline{t}^{(r)}$ is, geldt wegens ii) voor $t \geq 0$.

$$(4.58) \qquad L_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(r)} F^{n*}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(r)} \int_0^t \frac{\alpha^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha\tau} d\tau =$$

$$\overline{\overline{\text{Beppo Levi}}} \quad {}_0\!\int^t \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(r)} \frac{\alpha^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha\tau} d\tau ,$$

dus L_r is absoluut continu. Voor $r = 1,2,\ldots$ geldt wegens stelling 4.3

$$(4.59) \quad L_r'(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{r+2k} t^{r+2k-1}}{(r+2k-1)!} \frac{r}{r+2k} \binom{r+2k}{k} p^{r+k} q^k =$$

$$= e^{-\alpha t} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}r} \frac{r}{t} I_r(2\sqrt{pq}\alpha t) ,$$

zodat (4.56) geldt voor niet-negatieve r. De juistheid van (4.56) voor negatieve r volgt uit opmerking 4.2 en definitie 4.3.

b) Wegens ii) en stelling 4.2a geldt voor $r = 1,2,\ldots$

$$(4.60) \quad \check{L}_r(\lambda) = \Lambda^r\big(F(\lambda)\big) = \Lambda^r \left(\frac{1}{1+\lambda/\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{\lambda}{\alpha} + 1 - \sqrt{(\frac{\lambda}{\alpha}+1)^2 - 4pq}}{2q}\right)^r = \left(\check{L}_1(\lambda)\right)^r .$$

c) Gevolg van b).

d) Voor $r = 1,2,\ldots$ geldt

L_r niet defectief $\Longleftrightarrow \check{L}^r(0) = \Lambda^r(1) = 1 \Longleftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$ (stelling 4.2c).

Stelling 4.7.

$$(4.61) \quad \mathring{I}_r(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} {}_0\!\int^\infty e^{-\lambda t}\, I_r(t)dt = \frac{(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})^{|r|}}{\sqrt{\lambda^2-1}} .$$

voor $\lambda > 1$, r geheel.

Bewijs. Uit stelling 4.6a met $p=q=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$ en stelling 3.9 volgt voor $r=1,2,\ldots$ en $\lambda > 0$

$$(4.62) \qquad \check{L}_r'(\lambda) = - r \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)t} I_r(t)\, dt = $$
$$= - r \overset{o}{I}_r(\lambda+1) .$$

Wegens stelling 4.6b is

$$(4.63) \qquad \check{L}_r'(\lambda) = - r \frac{(\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda+1)^2-1})^r}{\sqrt{(\lambda+1)^2-1}} .$$

Combinatie van (4 62) en (4.63) geeft (4.61) voor positieve gehele r en vervolgens voor negatieve gehele r wegens definitie 4.3.
Voor r=0 volgt (4.61) uit

$$(4.64) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda t} I_0(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} dt =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty 2^{-2n} \binom{2n}{n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\, dt \quad \overline{\overline{(1)}}$$
$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \lambda^{-2n-1} \quad \overline{\overline{(2)}}$$
$$= \frac{1/\lambda}{\sqrt{1-(1/\lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} .$$

Identiteit (1) is juist voor $\lambda > 0$ en identiteit (2) voor $|\lambda^{-1}| < 1$, dus (4.64) in zijn geheel is juist voor $\lambda > 1$.

Opmerking 4.12. In een artikel (zie voetnoot op blz. 60) toont Feller aan dat (4.56) voor alle reële positieve r een verdelingsfunctie L_r definieert met LS-getransformeerde als in stelling 4.6b. Ten gevolge hiervan is stelling 4.7 juist voor alle reële positieve r.

v) Stabiele verdeling met coëfficiënt $\frac{1}{2}$

We beschouwen de stochastische wandeling beschreven in iii) met $p=q=\frac{1}{2}$. Uit stelling 4.4c volgt dat het deeltje dat de stochastische wandeling uitvoert met kans 1 minstens r keer naar 0 terugkeert voor alle natuurlijke getallen r, zodat het deeltje met kans 1 oneindig vaak naar 0 terugkeert.

Zij $\underline{t}_1$ het tijdstip van de eerste terugkeer naar 0 en $\underline{t}_r$ het tijdsverloop tussen de $(r-1)^e$ en r^e terugkeer naar 0 $(r \geq 2)$, dan is $\{\underline{t}_r\}_{r=1}^{\infty}$ een rij onderling onafhankelijke geheelwaardige stochastische variabelen met alle dezelfde kansverdeling $\{f_n\}$ en kansgenererende functie

(4.65) $$F(s) = 1 - \sqrt{1-s^2} \qquad \text{voor} \qquad |s| \leq 1 .$$

Het tijdstip van de r^e terugkeer naar 0 is $\underline{t}_1+\underline{t}_2+\ldots+\underline{t}_r$ met kansverdeling $\{f_n^{(r)}\}_{n=0}^{\infty}$ en kansgenererende functie $F^r(s)$.

Wij zijn geïnteresseerd in de verdelingsfunctie van de gemiddelde terugkeertijd $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r$ en hopen dat deze voor $r \to \infty$ naar een interessante limiet gaat. De LS-getransformeerde bij $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r$ is $F^r(e^{-\lambda/r})$. Omdat

(4.66) $$\log F(s) \sim -\sqrt{2(1-s)} \qquad \text{voor} \qquad s \uparrow 1$$

geldt voor alle $\lambda > 0$

(4.67) $$\log F^r(e^{-\lambda/r}) \sim -r\sqrt{2(1-e^{-\lambda/r})} \sim -\sqrt{2\lambda r} \to -\infty \qquad \text{voor } r \to \infty.$$

De LS-getransformeerde bij $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r$ convergeert naar 0 voor alle $\lambda > 0$ en dus konvergeert de verdelingsfunctie van de gemiddelde terugkeertijd naar 0 voor $r \to \infty$ (stelling 2.3). De verdelingsfuncties van een rij niet-negatieve stochastische variabelen kunnen alleen naar 0 konvergeren als alle massa naar ∞ verdwijnt, dus de gemiddelde terugkeertijd divergeert in waarschijnlijkheid naar ∞ voor $r \to \infty$.

We gaan nu voor alle $\alpha > 0$ onderzoeken wat de limiet is van de verdelingsfunctie van $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r^{\alpha}$ met LS-getransformeerde

(4.68) $$F^r(e^{-\lambda/r^\alpha}) \sim \exp\left(- r\sqrt{\frac{2\lambda}{r^\alpha}}\right) \quad \text{voor} \quad r \to \infty.$$

Uit (4.68) volgt dat de LS-getransformeerden naar 0 convergeren als $\alpha < 2$ en naar 1 als $\alpha > 2$, wat correspondeert met konvergentie van de bijbehorende verdelingsfuncties naar 0 als $\alpha < 2$ en naar 1 als $\alpha > 2$ en divergentie in waarschijnlijkheid naar ∞ van $(\underline{t}+\ldots+\underline{t}_r)/r^\alpha$ als $\alpha < 2$ en convergentie in waarschijnlijkheid naar 0 als $\alpha > 2$.

Uit (4.68) met $\alpha=2$ volgt convergentie van de LS-getransformeerden bij $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r^2$ naar $e^{-\sqrt{2\lambda}}$ voor $r \to \infty$, $\lambda \geq 0$. De vraag is van welke verdelingsfunctie dit de LS-getransformeerde is.

De verdelingsfunctie van $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r^2$ is bekend omdat de kansverdeling $\{f_n^{(r)}\}$ van $\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r$ bekend is (stelling 4.4). Het is daarom mogelijk de limiet van de verdelingsfuncties van $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r^2$ rechtstreeks uit te rekenen. Aanwijzingen hiervoor worden gegeven in Feller 1, p. 87, waar als limiet de verdelingsfunctie G met dichtheid

(4.69) $$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{1}{2x}} \qquad \text{voor} \qquad x > 0$$

wordt vermeld. In Feller 2 wordt onder verwijzing naar dit resultaat en met behulp van de continuiteitsstelling (stelling 2.3) geconcludeerd dat $e^{-\sqrt{2\lambda}}$ de LS-getransformeerde is van G, gedefinieerd door (4.69).

Wij zullen een andere weg bewandelen en uitgaande van (4.69) rechtstreeks aantonen dat $\check{G}(\lambda) = e^{-\sqrt{2\lambda}}$.
Hieruit volgt wegens de continuiteitsstelling dat de verdelingsfunctie van $(\underline{t}_1+\ldots+\underline{t}_r)/r^2$ naar deze G konvergeert.

Stelling 4.8. De functie G, gedefinieerd door (4.69), is een verdelingsfunctie met LS-getransformeerde

$$\check{G}(\lambda) = e^{-\sqrt{2\lambda}}.$$

Bewijs. (ontleend aan G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation). Uit

(4.70) $$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a}{u} - u\right)^2} du = \int_0^\infty \frac{a}{v^2}\, e^{-\left(v - \frac{a}{v}\right)^2} dv \qquad (a > 0)$$

volgt door het linkerlid bij beide leden op te tellen

$$(4.71)\qquad 2\ {}_0\!\int^\infty e^{-(\frac{a}{u}-u)^2}du = {}_0\!\int^\infty \left(1+\frac{a}{v^2}\right) e^{-(\frac{a}{v}-v)^2}dv \overset{}{\underset{(w=\frac{a}{v}-v)}{=\!=\!=}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}dw = \sqrt{\pi} \qquad (a>0)\ .$$

Het eerste en het laatste lid van (4.71) zijn ook gelijk voor a=0.
Met behulp van het voorgaande volgt voor $\lambda \geqq 0$

$$(4.72)\qquad \check{G}(\lambda) = {}_0\!\int^\infty e^{-\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{1}{2x}}\,dx =$$

$$= e^{-\sqrt{2\lambda}}\ {}_0\!\int^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-(\sqrt{\lambda x}-\frac{1}{\sqrt{2x}})^2}dx \underset{(u=\frac{1}{\sqrt{2x}})}{=\!=\!=}$$

$$= e^{-\sqrt{2\lambda}}\ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ {}_0\!\int^\infty e^{-(\frac{\sqrt{\lambda/2}}{u}-u)^2}du = e^{-\sqrt{2\lambda}}\ .$$

Daar $\check{G}(0) = 1$, is G een verdelingsfunctie.

Vooruitlopend op wat later behandeld zal worden vermelden we het volgende.

Definitie 4.4. Een verdelingsfunctie R heet *strikt stabiel met coëfficiënt* α, als voor alle natuurlijke getallen n geldt

$$(4.73)\qquad R^{n*}(xn^{\frac{1}{\alpha}}) = R(x)\ .$$

Gevolg. Als $\{\underline{x}_n\}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen is met alle dezelfde verdelingsfunctie R, dan is R ook de verdelingsfunctie van $(\underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n)/n^{\frac{1}{\alpha}}$

Definitie 4.5. Een verdelingsfunctie R heet *stabiel* met coëfficiënt α, als er een reëel getal c bestaat zó, dat R(x-c) strikt stabiel is met coëfficiënt α.

Opmerking 4.13. De verdelingsfunctie G is strikt stabiel met coëfficiënt $\frac{1}{2}$, immers uit $\check{G}^n(\lambda/n^2) = \check{G}(\lambda)$ volgt $G^{n*}(xn^2) = G(x)$.

Opmerking 4.14. Men kan aantonen dat er dan en slechts dan een strikt stabiele verdeling bestaat met coëfficiënt α als $0 < \alpha \leq 2$. Voorbeelden van strikt stabiele verdelingen zijn: de standaardnormale verdeling (coëfficiënt 2) en de Cauchy-verdeling (coëfficiënt 1).

§ 5 Absoluut en volledig monotone functies

(Feller 2 XIII 4, VII 6)

Definitie 5.1. Een functie f heet *absoluut monotoon* op (a,b) als alle afgeleiden van f op (a,b) bestaan en $f^{(n)}(x) \geq 0$ voor $n=0,1,2,\ldots$, $a < x < b$.

Voorbeeld 5.1.

a) $-\frac{1}{x}$ is absoluut monotoon op $(-\infty,0)$;

b) e^{x^x} is absoluut monotoon op $\mathbb{R}$;

c) $-\log|x|$ is absoluut monotoon op $(-1,0)$;

d) Als $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ een kansverdeling is, dan is de bijbehorende genererende functie $\sum p_k s^k$ absoluut monotoon op $(0,1)$.

Definitie 5.2. Een functie f heet *volledig monotoon* op (a,b) als alle afgeleiden van f op (a,b) bestaan en $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ voor $n=0,1,2,\ldots$, $a < x < b$.

Opmerking 5.1. $f(x)$ volledig monotoon op $(a,b) \Longleftrightarrow f(-x)$ absoluut monotoon op $(-b,-a)$.

Voorbeeld 5.2.

a) $\frac{1}{x}$ is volledig monotoon op $(0,\infty)$;

b) e^{-x} is volledig monotoon op $\mathbb{R}$;

c) $-\log x$ is volledig monotoon op $(0,1)$;

s U een verdelingsachtige functie is en λ_0 de convergentie-abscis n $\check{U}$, dan is $\check{U}(\lambda)$ volledig monotoon op (λ_0,∞) (gevolg van stelling 9).

ng 5.1 (ontleend aan Widder). Als f absoluut monotoon is op (a,b), n f uitgebreid worden tot een analytische functie f(z) (z complex) cirkel $|z-a| < b-a$.

. De limieten $\lim_{x\downarrow a} f^{(n)}(x)$ bestaan en zijn niet-negatief en ein- or $n=0,1,\ldots$, daar $f^{(n)}$ niet-dalend en niet-negatief is op (a,b). tstelling $f(a) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{x\downarrow a} f(x)$ volgt als in het bewijs van stelling dat alle rechterafgeleiden van f in a bestaan (die we aangeven met)) en dat $f^{(n)}(a) = \lim_{x\downarrow a} f^{(n)}(x)$ voor $n=0,1,2,\ldots$. Met behulp aylor volgt voor $a \leq x < b$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \ ,$$

n

$$R_n(x) = {}_a\!\int^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\, {}_0\!\int^1 (1-t)^n\, f^{(n+1)}\big(a + (x-a)t\big)\, dt \ .$$

$f^{(n+1)}\big(a + (x-a)t\big)$ niet-dalend in x is, geldt voor $a \leq x \leq c < b$

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\, {}_0\!\int^1 (1-t)^n\, f^{(n+1)}\big(a + (c-a)t\big)\, dt =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(c-a)^{n+1}}\, R_n(c) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(c-a)^{n+1}} \Big\{ f(c) - f(a) - f'(a)(c-a) - \ldots -$$

$$- f^{(n)}(a)\,\frac{(c-a)^n}{n!} \Big\} \leq f(c)\Big(\frac{x-a}{c-a}\Big)^{n+1} \ .$$

it volgt dat $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ voor $a \leq x < c < b$ en dus voor $< b$, omdat c willekeurig in (a,b) gekozen mag worden. Dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n$$

voor reële z met $a \leq z < b$, waaruit volgt dat (5.4) voor complexe z met $|z-a| < b-a$ een analytische functie definieert.

Gevolg. Een functie $P(s)$ op $(0,1)$ is dan en slechts dan een kansgenererende functie als $P(s)$ absoluut monotoon is op $(0,1)$ en $\lim_{s\uparrow 1} P(s) = 1$.

Opmerking 5.2. Uit stelling 5.1 volgt dat een functie f op (a,b) dan en slechts dan voor $x \in (a,b)$ te schrijven is als een convergente machtreeks in $(x-a)$, als f het verschil is van twee absoluut monotone functies op (a,b). Immers, de voorwaarde is wegens stelling 5.1 voldoende; de noodzakelijkheid volgt uit $\sum b_n(x-a)^n = \sum b_n^+ (x-a)^n - \sum b_n^- (x-a)^n$.

Opmerking 5.3. Wegens opmerking 5.1 en stelling 5.1 geldt het volgende. Als een functie f volledig monotoon is op (a,b), dan is f uit te breiden tot een analytische functie $f(z)$ op de cirkel $|z-b| < b-a$.

Stelling 5.2. Als U een verdelingsachtige functie is en λ_0 de convergentie-abscis van $\check{U}$, dan is $\check{U}(\lambda)$ uit te breiden tot een analytische functie op het complexe halfvlak $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0$.

Bewijs. Wegens stelling 3.9 is $\check{U}$ volledig monotoon op (λ_0,∞). Elk punt in het halfvlak $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0$ is bevat in een cirkel $|\lambda-b| < b-\lambda_0$ met $b > \lambda_0$. Het gestelde volgt nu uit opmerking 5.3.

Stelling 5.3. Een functie ϕ is dan en slechts dan volledig monotoon op $(0,\infty)$ als ϕ de LS-getransformeerde is van een verdelingsachtige functie met convergentie-abscis $\lambda_0 \leq 0$.

Bewijs.

a) Wegens stelling 3.9 is de voorwaarde voldoende.

b) Zij ϕ volledig monotoon op $(0,\infty)$ en zij $a > 0$. Dan is $\phi(a-as)$ als functie van s absoluut monotoon op $(0,1)$ en geldt wegens stelling 5.1

$$(5.5) \qquad \phi(a-as) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n \phi^{(n)}(a)}{n!} s^n \qquad \text{voor} \quad 0 \leq s < 1 .$$

Dus $\phi(a-as)$ is de genererende functie van de rij niet-negatieve getallen $\{p_n\}$ met

$$(5.6) \qquad p_n = \frac{(-a)^n \phi^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{voor} \qquad n=0,1,2,\ldots .$$

Bijgevolg is $\phi(a-ae^{-\lambda})$ voor $\lambda > 0$ de LS-getransformeerde van de verdelingsachtige functie $\sum_{n \leq x} p_n$.
Dan is ook $\phi(a-ae^{-\lambda/a})$ LS-getransformeerde van een verdelingsachtige functie, en wel van

$$(5.7) \qquad U_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq ax} p_n .$$

Daar voor $\lambda > 0$

$$(5.8) \qquad \lim_{a\to\infty} \phi(a-ae^{-\lambda/a}) = \phi(\lambda) ,$$

is wegens stelling 2.5 $\phi(\lambda) = \check{U}(\lambda)$ voor $\lambda > 0$, waarin $U = \lim_{a\to\infty} U_a$.

Hiermee hebben we de volgende *omkeerstelling* "bewezen".

Stelling 5.4 (omkeerstelling). Als U een verdelingsachtige functie is en de convergentie-abscis van $\check{U}$ niet-positief is, dan geldt voor alle continuiteitspunten x van U

$$(5.9) \qquad U(x) = \lim_{a\to\infty} \sum_{n \leq ax} \frac{(-a)^n}{n!} \check{U}^{(n)}(a) .$$

Opmerking 5.4. Voor het bewijs van de eenduidigheidsstelling (stelling 2.2) hebben we verwezen naar bovenstaande omkeerstelling. Deze verwijzing is alleen geoorloofd, **als** stelling 2.2 en de gevolgtrekkingen uit deze stelling niet gebruikt zijn voor het bewijs van stelling 5.4.

We kunnen er daarom niet mee volstaan stelling 5.4 te zien als een gevolg van het bewijs van stelling 5.3, omdat daarin gebruik is gemaakt van de uitgebreide continuiteitsstelling, die met behulp van stelling 2.2 bewezen is.

Op het eind van deze paragraaf volgt een nieuw bewijs van een beperking van stelling 5.4, dat berust op de ongelijkheid van Bienaymé - Čebyšev en stelling 3.9 (deze stelling is onafhankelijk van stelling 2.2). De beperking van stelling 5.4 bestaat hierin, dat U verondersteld wordt een *verdelingsfunctie* te zijn. Dit is voor het bewijs van stelling 2.2 voldoende.

Stelling 5.5. Zij ϕ een reële functie op $(0,\infty)$ en c een niet-negatief reeel getal. Dan zijn de volgende twee beweringen equivalent.

a) $\phi=\check{U}$ op $(0,\infty)$, waarin U een absoluut continue verdelingsachtige functie is met dichtheid u, die voldoet aan

$$(5.10) \qquad 0 \leq u(x) \leq c$$

voor alle $x > 0$.

b) ϕ is oneindig vaak differentieerbaar met

$$(5.11) \qquad 0 \leq \frac{(-\lambda)^n \phi^{(n)}(\lambda)}{n!} \leq \frac{c}{\lambda} \qquad \text{voor alle } \lambda > 0\,, \; n=0,1,2,\ldots\,.$$

Bewijs. Zij a) gegeven, dan geldt voor alle $\lambda > 0$ en $n=0,1,2,\ldots$ wegens stelling 3.9

$$(5.12) \qquad 0 \leq \frac{(-\lambda)^n \phi^{(n)}(\lambda)}{n!} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} u(x)\, dx \leq$$

$$\leq c \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{c}{\lambda}\,.$$

Zij b) gegeven, dan is ϕ volledig monotoon op $(0,\infty)$. Wegens stelling 5.3 is er een verdelingsachtige functie U zó, dat de convergentie-abscis van $\check{U}$ niet-positief is en $\phi=\check{U}$ op $(0,\infty)$. Wegens stelling 5.4 geldt nu voor elk paar niet-negatieve reële getallen x_1, x_2 met $x_1 < x_2$

$$(5.13) \qquad U(x_2) - U(x_1) = \lim_{a\to\infty} \sum_{ax_1 < n \leq ax_2} \frac{(-a)^n}{n!} \phi^{(n)}(a) \leq$$

$$\leq c \lim_{a\to\infty} \sum_{ax_1 < n \leq ax_2} \frac{1}{a} = c(x_2 - x_1).$$

Hieruit volgt dat U absoluut continu is met betrekking tot de Lebesguemaat en dat er een dichtheid van U is die aan (5.10) voldoet (elke dichtheid van U voldoet bijna overal aan (5.10)).

Stelling 5.6. Als f en g absoluut (volledig) monotoon zijn op (a,b) dan zijn de som f+g en het product fg ook absoluut (volledig) monotoon op (a,b).

Bewijs. De bewering over f+g is triviaal. Beschouw verder alleen fg. Zijn f en g absoluut monotoon op (a,b), dan zijn $f^{(n)}$ en $g^{(n)}$ niet-negatief op (a,b) voor n=0,1,2,... . Uit de formule van Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{voor } n=0,1,... \tag{5.14}$$

volgt dat $(fg)^{(n)}$ voor n=0,1,2,... niet-negatief is op (a,b), dus fg is op (a,b) absoluut monotoon.

Als f en g volledig monotoon zijn op (a,b), dan zijn wegens opmerking 5.1 f(-x) en g(-x), dus ook f(-x)g(-x) absoluut monotoon op (-b,-a), dus fg is volledig monotoon op (a,b).

Opmerking 5.4. Dat het product van twee volledig monotone functies volledig monotoon is volgt ook rechtstreeks uit de tekenwisseling der afgeleiden en (5.14).

Stelling 5.7. Zij g een functie op (a,b) met een op (a,b) absoluut (volledig) monotone afgeleide en zij f een absoluut (volledig) monotone functie op (g(a), g(b)), dan is de samengestelde functie f(g) absoluut (volledig monotoon op (a,b).

Bewijs. Met volledige inductie gaat men na dat

$$\{f(g)\}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g)\, P_{k,n} \qquad \text{voor } n=1,2,... , \tag{5.15}$$

waarin $P_{k,n}$ een polynoom in $g', g'', ..., g^{(n)}$ is met niet-negatieve coëfficiënten (n=1,2,...; k=1,2,...,n). Als g' absoluut monotoon is op (a,b) en

f absoluut monotoon op $(g(a),g(b))$, dan is het rechterlid van (5.15) niet-negatief op (a,b), waaruit de absolute monotonie van $f(g)$ volgt.

Stel nu, dat g' volledig monotoon is op (a,b) en f volledig monotoon op $(g(a),g(b))$ en definieer $\phi(x) = f(-x)$ en $\psi(x) = -g(-x)$ voor $x \in (-g(b), -g(a))$ resp. $x \in (-b,-a)$. Wegens opmerking 5.1 is $f(g(x))$ dan en slechts dan volledig monotoon op (a,b) als $f(g(-x)) = \phi(\psi(x))$ absoluut monotoon is op $(-b,-a)$. Dit laatste is het geval, daar wegens opmerking 5.1 $\phi(x) = f(-x)$ absoluut monotoon is op $(-g(b), -g(a))$ en $\psi'(x) = g'(-x)$ absoluut monotoon op $(-b,-a)$.

Gevolg. Als ψ op (a,b) een volledig monotone afgeleide bezit, dan is $e^{-\psi}$ volledig monotoon op (a,b).

Aanhangsel (Feller 2 VII,6)

Bewijs van stelling 5.4 voor *verdelingsfuncties* $U = F$ zonder gebruik te maken van stelling 2.2 en de hieruit volgende stellingen.

Zij y een positief reeel getal en $\underline{x}_a$ voor $a > 0$ een geheelwaardige stochastische variabele met

$$P\{\underline{x}_a = n\} = e^{-ay}\frac{(ay)^n}{n!} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \; , \tag{5.16}$$

dan is $\mathcal{E}\underline{x}_a = \operatorname{var} \underline{x}_a = ay$.
Omdat volgens de ongelijkheid van Bienaymé-Čebyšev voor alle $\varepsilon > 0$

$$P\{|\underline{x}_a - ay| > a\varepsilon\} < \frac{ay}{a^2\varepsilon^2} \to 0 \text{ als } a \to \infty \; , \tag{5.17}$$

convergeert wegens stelling 1.1 de verdelingsfunctie van $\underline{x}_a/a$ conservatief naar $\iota(x-y)$ als $a \to \infty$, dus

$$\lim_{a\to\infty} e^{-ay} \sum_{k \leq ax} \frac{(ay)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad x < y \; , \\ 1 & \text{voor} \quad x > y \; . \end{cases} \tag{5.18}$$

Zij F een verdelingsfunctie, dan is wegens stelling 3.9 voor alle $a > 0$, $x \geq 0$

$$(5.19)\qquad \sum_{k \leq ax} \frac{(-a)^k \check{F}^{(k)}(a)}{k!} = \sum_{k \leq ax} \frac{a^k}{k!} \int_{0-}^{\infty} y^k e^{-ay}\, dF(y) =$$

$$= \int_{0-}^{\infty} e^{-ay} \sum_{k \leq ax} \frac{(ay)^k}{k!}\, dF(y)\ .$$

Wegens (5.18) en de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie geldt voor continuiteitspunten x van F, dat het laatste lid van (5.19) voor $a \to \infty$ convergeert naar $F(x)$.

Opmerking 5.5. Uit de centrale-limietstelling volgt dat het linkerlid *) van (5.18) gelijk is aan $\frac{1}{2}$ voor $x=y$, zodat het voorgaande veralgemeend kan worden tot

$$(5.20)\qquad \lim_{a\to\infty} \sum_{k \leq ax} \frac{(-a)^k}{k!} \check{F}^{(k)}(a) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}\ .$$

Stelling 5.8 (omkeerstelling voor gewone Laplacegetransformeerden). Als u een begrensde continue functie is op $(0,\infty)$, dan geldt voor alle $x > 0$

$$(5.21)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{x}\right)^n \hat{u}^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = u(x)\ .$$

Bewijs. Zij $F_n(y)$ voor $n=1,2,\ldots$ de verdelingsfunctie met dichtheid

$$(5.22)\qquad F_n'(y) = \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^n y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{n}{x}y} \qquad \text{voor} \qquad y > 0\ ,$$

dan is x de verwachting en x^2/n de variantie bij F_n.

Uit de ongelijkheid van Bienaymé-Čebyšev volgt als in het voorgaande bewijs dat $F_n(y)$ conservatief naar $\iota(y-x)$ convergeert voor $n \to \infty$.

---

*) In G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Band II, p. 60 wordt aangetoond dat

$$\int_0^s \frac{t^s}{\Gamma(s+1)} e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s^{-\frac{1}{2}} + O(s^{-1}) \qquad \text{voor} \qquad s \to \infty\ .$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k\leq ax} e^{-ax} \frac{(ax)^k}{k!} = \frac{1}{2} + O(a^{-\frac{1}{2}})$ voor $a \to \infty$. Dit laatste volgt ook rechtstreeks uit de stelling van Berry-Esséen (Feller 2, p. 515).

Omdat u begrensd en continu is, bestaat

(5.23) $$\overset{o}{u}(\lambda) = {}_0\int^\infty e^{-\lambda y}\, u(y)\, dy$$

voor $\lambda > 0$. Door u als verschil van twee niet-negatieve functies te schrijven en stelling 3.9 toe te passen ziet men dat

(5.24) $$\overset{o}{u}{}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \, {}_0\int^\infty y^n e^{-\lambda y}\, u(y)\, dy$$

voor $\lambda > 0$, $n=0,1,2,\ldots$. Derhalve geldt

(5.25) $$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{x}\right)^n \overset{o}{u}{}^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = {}_0\int^\infty u(y)\, dF_n(y) \ .$$

Uit de conservatieve convergentie van $F_n(y)$ naar $\iota(y-x)$ en stelling 1.7b volgt nu het gestelde.

Opmerking 5.6. Men kan zonder veel moeite aantonen dat (5.21) reeds geldt als u begrensd en Lebesgue-meetbaar is en x een continuiteitspunt van u is.

§ 6 Oneindig deelbare verdelingsfuncties op $[0,\infty)$

Feller 2, XIII 7.

Definitie 6.1. Een verdelingsfunctie F heet *oneindig deelbaar* als er voor elk natuurlijk getal n een verdelingsfunctie $F_{1/n}$ bestaat met $F_{1/n}^{n*} = F$.

Definitie 6.2. De LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie heet *oneindig deelbaar* als het de LS-getransformeerde is van een oneindig deelbare verdelingsfunctie.

Gevolg. Als F een verdelingsfunctie is, dan is F dan en slechts dan oneindig deelbaar als $\check{F}^{1/n}$ voor elk natuurlijk getal n LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie is (omdat de LS-getransformeerden niet-negatief zijn geeft de definitie van de n^e-machtswortel geen moeilijkheden, dit in tegenstelling tot de complexwaardige karakteristieke functies).

Stelling 6.1. Als F en G oneindig deelbare verdelingsfuncties zijn, dan is $F * G$ oneindig deelbaar.

Bewijs. Wegens de commutativiteit van het convolutieproduct volgt uit $F = F_{1/n}^{n*}$ en $G = G_{1/n}^{n*}$ dat $F * G = (F_{1/n} * G_{1/n})^{n*}$.

Gevolg. Als F een oneindig deelbare verdelingsfunctie is dan is $\check{F}^t$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie F_t voor elk niet-negatief *rationaal* getal t.

Stelling 6.2. Als $\{F^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ een rij oneindig deelbare verdelingsfuncties is, $F = \lim_{n\to\infty} F^{(n)}$ en F een verdelingsfunctie is, dan is F oneindig deelbaar.

Bewijs. Wegens de continuiteitsstelling geldt $\lim_{n\to\infty} \check{F}^{(n)}(\lambda) = \check{F}(\lambda)$ voor alle $\lambda \geqq 0$. Derhalve geldt voor elk natuurlijk getal k en alle $\lambda \geqq 0$

$$(6.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\check{F}^{(n)}(\lambda)\right)^{1/k} = \left(\check{F}(\lambda)\right)^{1/k}.$$

Omdat $\left(\check{F}^{(n)}(\lambda)\right)^{1/k}$ LS-getransformeerde is van een verdelingsfunctie $F_{1/k}^{(n)}$ en $\check{F}(0) = 1$, is $\left(\check{F}(\lambda)\right)^{1/k}$ wegens de continuiteitsstelling LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie $F_{1/k}$, waarbij $F_{1/k} = \lim_{n\to\infty} F_{1/k}^{(n)}$.

Gevolg. Als F een oneindig deelbare verdelingsfunctie is, dan is $\check{F}^t$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie F_t voor alle niet-negatieve *reële* t. Deze verdelingsfuncties voldoen aan

$$(6.2) \qquad F_s * F_t = F_{s+t} \qquad \text{voor} \qquad s,t \geq 0.$$

Definitie 6.3. Een collectie verdelingsfuncties $\{F_t\}_{t\geq 0}$ die aan (6.2) voldoet heet een *halfgroep van verdelingsfuncties*.

Stelling 6.3. Een functie ϕ op $[0,\infty)$ is dan en slechts dan LS-getransformeerde van een oneindig deelbare verdelingsfunctie als $\phi(\lambda) = e^{-\psi(\lambda)}$ met ψ' volledig monotoon op $(0,\infty)$ en $\psi(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \psi(\lambda) = 0$.

Bewijs.

a) Zij ψ' volledig monotoon op $(0,\infty)$ en $\psi(0) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \psi(\lambda) = 0$. Wegens het gevolg van stelling 5.7 is $\phi = e^{-\psi}$ volledig monotoon op $(0,\infty)$, zodat er wegens stelling 5.3 een verdelingsachtige functie F is met $e^{-\psi} = \check{F}$. Uit $e^{-\psi(0)} = \check{F}(0) = 1$ volgt dat F een verdelingsfunctie is.

Vervanging van ψ door ψ/n geeft met dezelfde argumenten dat $e^{-\psi/n}$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie is. Dus F is oneindig deelbaar.

b) Zij F oneindig deelbaar en zij ψ gedefinieerd door $\check{F} = e^{-\psi}$, dan is $\check{F}^{1/n} = e^{-\psi/n}$ voor elk natuurlijk getal n LS-getransf. van een verdelingsfunctie, dus volledig monotoon op $(0,\infty)$. Zij

$$(6.3) \qquad \psi_n = n(1 - e^{-\psi/n}) = n(1 - \check{F}^{1/n}),$$

dan is voor n=1,2,...

$$(6.4) \qquad \psi_n'(\lambda) = -n \frac{d}{d\lambda} \left(\check{F}^{1/n}(\lambda)\right)$$

volledig monotoon op $(0,\infty)$. Uit (6.3) volgt ook

$$(6.5) \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n'(\lambda) = \lim_{n\to\infty} e^{-\psi(\lambda)/n}\, \psi'(\lambda) = \psi'(\lambda) \qquad \text{voor alle } \lambda > 0,$$

zodat ψ' wegens stelling 5.3 en stelling 2.5 volledig monotoon is. De bewering over $\psi(0)$ is triviaal.

Stelling 6.4. Een functie ϕ op $[0,\infty)$ is dan en slechts dan LS-getransformeerde van een oneindig deelbare verdelingsfunctie als $\psi = -\log \phi$ voldoet aan

$$(6.6) \qquad \psi(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x}\, dP(x) \qquad \text{(lees } \lambda \text{ voor de integrand als } x = 0\text{)} ,$$

waarin P een verdelingsachtige functie is zó, dat

$$(6.7) \qquad {}_1\int^{\infty} \frac{1}{x}\, dP(x) < \infty .$$

Bewijs. De eindigheid van (6.6) voor alle $\lambda > 0$ is equivalent met (6.7) wegens

$$(6.8) \qquad (1-e^{-\lambda}) \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dP(x) \leqq \int_{0-}^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda x}}{x}\, dP(x) \leqq \lambda P(1) + {}_1\int^{\infty} \frac{1}{x}\, dP(x)$$

Wegens stelling 5.3 en 6.3 is ϕ dan en slechts dan LS-getransformeerde van een oneindig deelbare verdelingsfunctie als

$$(6.9) \qquad \psi(0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \psi(\lambda) = 0$$

en er een verdelingsachtige functie P is met

$$(6.10) \qquad \psi'(\lambda) = \check{P}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dP(x) < \infty \qquad \text{voor alle } \lambda > 0 .$$

Het is dus voldoende te bewijzen dat (6.6) geldt en eindig is voor alle $\lambda > 0$ dan en slechts dan als (6.9) en (6.10) gelden.

Zijn (6.9) en (6.10) gegeven, dan is $\psi'(\lambda)$ als LS-getransformeerde continu voor $\lambda > 0$, zodat

$$(6.11) \qquad \psi(\lambda) = {}_a\int^\lambda \psi'(\mu)\, d\mu + c_a$$

waarin a en c_a reële constanten zijn en $a > 0$. Uit (6.9) volgt nu het bestaan van ${}_0\int^a \psi'(\mu)d\mu$ en tevens dat deze integraal gelijk is aan c_a. Dus

$$(6.12) \qquad \infty > \psi(\lambda) = {}_0\int^\lambda \psi'(\mu)d\mu = {}_0\int^\lambda \left(\int_{0-}^\infty e^{-\mu x} dP(x)\right) d\mu =$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=\!=} \int_{0-}^\infty \left({}_0\int^\lambda e^{-\mu x} d\mu\right) dP(x) = \int_{0-}^\infty \frac{1-e^{-\lambda x}}{x}\, dP(x) \ .$$

Indien (6.6) geldt en eindig is voor alle $\lambda \geqq 0$ (dus ook (6.7) geldt), bestaat $\check{P}(\lambda)$ voor $\lambda \geqq 0$ wegens

$$(6.13) \qquad \check{P}(\lambda) = \int_{0-}^\infty e^{-\lambda x} dP(x) \leqq P(1) + {}_1\int^\infty \frac{1}{x}\, dP(x) < \infty \ .$$

Met overwegingen als in het bewijs van stelling 3.9 volgt nu, dat ψ' uit (6.6) verkregen kan worden door onder de integraal naar λ te differentiëren, dus $\psi'(\lambda) = \check{P}(\lambda)$, waarmee (6.10) bewezen is.

Wegens het bestaan van $\check{P}(0)$ is $1 \geqq \lambda \geqq (1-e^{-\lambda x})/x$ voor $0 \leqq \lambda \leqq 1$ een sommeerbare majorant van de integrand in (6.6). Met behulp van de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie volgt nu de juistheid van(6.9).

<u>Voorbeeld 6.1</u> (ψ en P hebben dezelfde betekenis als in de voorgaande stelling).

a) Samengestelde Poissonverdeling (F verdelingsfunctie; $\alpha > 0$)

$$Q = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!} F^{n*} \qquad ;$$

$$\check{Q}(\lambda) = e^{-\alpha(1-\check{F}(\lambda))} \qquad ;$$

ERRATUM

De tekst op bladzijde 85 vanaf formule (6.12) tot aan voorbeeld 6.1. moet als volgt gewijzigd worden.

Indien (6.6) geldt en eindig is voor alle $\lambda>0$ (dus ook (6.7) geldt), bestaat $\check{P}(\lambda)$ voor $\lambda>0$ omdat $e^{-\lambda x} < x^{-1}$ voor voldoende grote x. Met overwegingen als in het bewijs van stelling 3.9. volgt nu, dat $\psi'(\lambda)$ voor $\lambda>0$ uit (6.6) verkregen kan worden door onder de integraal naar λ te differentiëren, dus $\psi'(\lambda) = \check{P}(\lambda)$ voor $\lambda> 0$, waarmee (6.10) bewezen is

Daar $(1-e^{-\lambda x}) / x \leq 1/x$ en $(1-e^{-\lambda x})/x\leq\lambda\leq 1$ voor $0\leq\lambda\leq 1$, is $\min(1, 1/x)$ voor deze waarden van λ een sommeerbare majorant van de integrand in (6.6). Met behulp van de stelling van Lebesque over gemajoreerde convergentie volgt nu de juistheid van (6.9).

$$\psi'(\lambda) = -\alpha\check{F}'(\lambda) \quad ;$$

$$dP(x) = \alpha x dF(x) \quad .$$

b) Gammaverdeling $(a > 0)$

$$G'(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-x} \qquad \text{voor} \quad x > 0 \; ;$$

$$\check{G}(\lambda) = (1+\lambda)^{-a} \quad ;$$

$$\psi'(\lambda) = \frac{a}{1+\lambda} \quad ;$$

$$dP(x) = a\, e^{-x} dx \quad .$$

c) (vgl. stelling 4.6)

$$L_r'(x) = e^{-x} \frac{|r|}{x} I_r(x) \qquad \text{voor} \quad x > 0, \quad r \text{ geheel}, \ r \neq 0 \; ;$$

$$\check{L}_r(\lambda) = (\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda+1)^2-1})^{|r|} \quad ;$$

$$\psi'(\lambda) = \frac{|r|}{\sqrt{(\lambda+1)^2-1}} \underset{\text{st. 4.7}}{=\!=} |r| \; \overset{\circ}{I}_0(\lambda+1) \quad ;$$

$$dP(x) = |r| \; e^{-x} \; I_0(x) \; dx \quad .$$

d) $$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{1}{2x}} \qquad \text{voor} \quad x \geq 0 \; ;$$

$$\check{G}(\lambda) = e^{-\sqrt{2\lambda}} \quad ;$$

$$\psi'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \quad ;$$

$$dP(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} dx \quad .$$

Stelling 6.5. Als $\{F_t\}_{t\geq 0}$ en $\{G_t\}_{t\geq 0}$ twee halfgroepen van verdelingsfuncties zijn en

$$(6.14)\qquad Q_t(x) = \int_{0-}^{\infty} F_\tau(x)\, dG_t(\tau) \qquad \text{voor } x\geq 0,\ t\geq 0,$$

dan is $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ een halfgroep van verdelingsfuncties.

Bewijs. Met behulp van de stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie volgt dat Q_t gedefinieerd door (6.14) alle eigenschappen van een verdelingsfunctie bezit.

Uit

$$(6.15)\qquad \int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty} \iota(a-x)\, dF_\tau(x)\, dG_t(\tau) = \int_{0-}^{\infty} F_\tau(a)\, dG_t(\tau) = Q_t(a) =$$

$$= \int_{0-}^{\infty} \iota(a-x)\, dQ_t(x) \qquad \text{voor alle } a\geq 0$$

volgt dat

$$(6.16)\qquad \int_{0-}^{\infty} \phi(x)\, dQ_t(x) = \int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty} \phi(x)\, dF_\tau(x)\, dG_t(\tau)$$

voor alle zwak-monotone continue niet-negatieve functies ϕ op $\mathbb{R}$, wat men bewijst door ϕ als in het bewijs van stelling 3.6 met trapfuncties te benaderen. Dus

$$(6.17)\qquad \check{Q}_t(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dQ_t(x) = \int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda x}\, dF_\tau(x)\, dG_t(\tau) =$$

$$= \int_{0-}^{\infty} \check{F}_\tau(\lambda)\, dG_t(\tau).$$

Met behulp van de notaties $\psi_1 = -\log \check{F}_1$, $\psi_2 = -\log \check{G}_1$ volgt $\check{F}_t = e^{-t\psi_1}$ en $\check{G}_t = e^{-t\psi_2}$, zodat

$$(6.18)\qquad \check{Q}_t(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\tau\psi_1(\lambda)}\, dG_t(\tau) = \check{G}_t(\psi_1(\lambda)) = e^{-t\psi_2(\psi_1(\lambda))} .$$

Dus $\check{Q}_t.\check{Q}_s = \check{Q}_{t+s} \Rightarrow Q_t * Q_s = Q_{t+s}$ voor $s, t \geq 0$, waaruit het gestelde volgt.

Opmerking 6.1. De voorgaande stelling heeft de volgende achtergrond. Bij de halfgroep $\{F_t\}$ bestaat een stochastisch proces $\{\underline{x}(t)\}_{t \geq 0}$ met onafhankelijke stationaire incrementen (een voorbeeld van een stationair Markov-proces) zó, dat F_t de verdelingsfunctie is van $\underline{x}_{s+t} - \underline{x}_s$ voor alle $s, t \geq 0$. Zij $\{\underline{y}(t)\}_{t \geq 0}$ een soortgelijk proces bij de halfgroep $\{G_t\}$ en stel dat $\{\underline{x}(t)\}$ en $\{\underline{y}(t)\}$ onderling onafhankelijke processen zijn. Dan is $\{\underline{x}(\underline{y}(t))\}_{t \geq 0}$ een stochastisch proces met onafhankelijke stationaire incrementen bij de halfgroep $\{Q_t\}$.

Het Markovproces $\{\underline{x}(\underline{y}(t))\}$ ontstaat uit $\{\underline{x}(t)\}$ door de "tijdparameter" stochastisch te maken (iets soortgelijks is gebeurd in §4 waar uit de stochastische wandeling de Poissonwandeling geconstrueerd werd). Deze manier van combineren van Markovprocessen wordt "subordination of processes" genoemd. Het proces $\underline{x}(\underline{y}(t))$ heet ondergeschikt (subordinated to) het proces $\{x(t)\}$ met als regelend proces (directing process) $\{y(t)\}$.

§ 6a

Lukacs §5.2, 5.3, 5.5.

Definitie 6a.1 = definitie 6.1.

Stelling 6a.1 = stelling 6.1.

Stelling 6a.2 = stelling 6.2.

Toelichting. In bovenstaande definitie en stellingen hoeven de verdelingsfuncties niet op (o, ∞) geconcentreerd te zijn. Het bewijs van stelling 6.1. blijft geldig. Het bewijs van stelling 6.2. gaat niet meer op.

Definitie 6a.2. Een karakteristieke functie $\phi(\tau)$ heet oneindig deelbaar als het de karakteristieke functie is van een oneindig deelbare verdelingsfunctie.

Gevolg. Als $\phi(\tau)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie is, dan is $\phi^t(\tau)$ een karakteristieke functie voor alle reële $t \geq 0$. Hierbij is de complexwaardige functie ϕ^t ondubbelzinnig gedefinieerd door de eisen

1) $\phi^t(0) = 1$
2) $\phi^t(\tau)$ is een continue functie van $\tau (\tau \in \mathbb{R})$.

Deze eisen bepalen ϕ^t ondubbelzinnig wegens

Stelling 6a.3. Als $\phi(\tau)$ een oneindig deelbare karakteristieke functie is, dan geldt $\phi(\tau) \neq 0$ voor alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Stelling 6a.4. (kanonieke voorstelling van Lévy-Chinčin).
Een karakteristieke functie $\phi(\tau)$ is dan en slechts dan oneindig deelbaar als er een reëel getal a en een begrensde verdelingsachtige functie θ bestaan met

$$\text{(6a.1)} \quad \log \phi(\tau) = ai\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\tau x} - 1 - \frac{i\tau x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\theta(x).$$

§7. Klassen van oneindig deelbare verdelingsfuncties

Literatuur:

[1] F.W. Steutel (1967), Note on the infinite divisibility of exponential mixtures, Ann. Math. Stat. 38, 1303 - 1305.

[2] F.W. Steutel (1968), A class of infinitely divisible mixtures. (wordt gepubliceerd in de Ann. Math. Stat.).

[3] F.W. Steutel (1968), Infinitely divisible renewal distributions (nog niet gepubliceerd).

[4] C.M. Goldie (1967), A class of infinitely divisible distributions, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63, 1141 - 1143.

[5] discussie bij de voordracht van J.F.C. Kingman in: W.L. Smith, W.E. Wilkinson (1965), Proceedings on the symposium on congestion theory, University of North Carolina press.

[6] Th. Kaluza (1928), Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen, Math. Z. 28, 161-170.

[7] D.G. Kendall (1967), Renewal sequences and their arithmetic, Symposium on probability methods in analysis, Lecture Notes in Mathematics nr. 31, Springer.

In deze paragraaf worden (tenzij anders vermeld wordt) door Steutel verkregen resultaten over oneindig deelbare karakteristieke functies (dus over oneindig deelbare verdelingsfuncties zonder meer) gespecialiseerd tot resultaten over LS-getransformeerden (dus over oneindig deelbare verdelingsfuncties geconcentreerd op $[0,\infty)$) en in die vorm afgeleid. Soms worden de bewijzen van Steutel bijna ongewijzigd overgenomen, terwijl in andere gevallen de bewijzen door het begrip volledige monotonie sterk vereenvoudigd worden, uiteraard ten koste van de grotere algemeenheid van de resultaten van Steutel.

<u>Definitie 7.1.</u> Zij T een verzameling van reële getallen, $\{F_t\}_{t\in T}$ een collectie verdelingsfuncties en G een verdelingsfunctie geconcentreerd op T. Dan noemen we de verdelingsfunctie

$$(7.1) \qquad H(x) = \int_T F_t(x)\, dG(t)$$

een *mengsel* van de verdelingsfunctie $\{F_t\}$ met *mengfunctie* G en de LS-getransformeerde

$$(7.2) \qquad \check{H}(\lambda) = \int_T \check{F}_t(\lambda)\, dG(t)$$

een *mengsel* van de LS-getransformeerden $\{\check{F}_t\}$.

De resultaten van Steutel in [1] en [2] betreffen het al of niet oneindig deelbaar zijn van mengsels van oneindig deelbare verdelingsfuncties. In stelling 6.5 hebben we al een resultaat van dit soort verkregen. Daar is aangetoond dat een mengsel van een halfgroep van verdelingsfuncties met een oneindig deelbare mengfunctie weer oneindig deelbaar is.

<u>Stelling 7.1.</u> Als $\{p_j\}_{j=1}^n$ en $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ twee rijen positieve getallen zijn waarbij $\Sigma_{j=1}^n p_j = 1$ en $\{\alpha_j\}$ stijgend is, dan is de verdelingsfunctie

$$(7.3) \qquad H(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \,(1-e^{-\alpha_j x}) \quad \text{voor} \quad x \geq 0$$

oneindig deelbaar (H is een mengsel van exponentiële verdelingsfuncties met mengfunctie $\Sigma_{j=1}^n p_j \;\iota(x-\alpha_j)$).

<u>Bewijs.</u> Er geldt voor $\lambda \geq 0$

$$(7.4) \qquad \check{H}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j\alpha_j \,/\, (\alpha_j + \lambda) = p(\lambda) \,/\, \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j+\lambda),$$

waarin $p(\lambda)$ een polynoom is van graad $(n-1)$ of kleiner. Door (7.4) wordt ook voor $\lambda < 0$ een functie $\check{H}(\lambda)$ gedefinieerd mits $\lambda_j \neq -\alpha_j$ voor $j=1,2,\ldots,n$. Daar voor $j=1,2,\ldots,n$

$$(7.5) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\downarrow-\alpha_j} \check{H}(\lambda) = \infty, \\ \lim\limits_{\lambda\uparrow-\alpha_j} \check{H}(\lambda) = -\infty \end{cases}$$

en $\check{H}$ voor $\lambda \neq -\alpha_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ continu is, bezit $\check{H}$ $n-1$ nulpunten $-\beta_1, -\beta_2,\ldots, -\beta_{n-1}$ met

$$(7.6) \qquad 0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2< \ldots < \alpha_{n-1}<\beta_{n-1}< \alpha_n .$$

Daar $\check{H}$ en p dezelfde nulpunten bezitten en p er hoogstens $n-1$

bezit, zijn nu alle nulpunten van $\check{H}$ en p gevonden. Daar $\check{H}(0) = 1$, is

$$(7.7) \qquad \check{H}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j+\lambda} \Big/ \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\beta_k+\lambda} .$$

Met behulp van $\psi(\lambda) = -\log \check{H}(\lambda)$ volgt voor $n=0,1,2,\ldots$

$$(7.8) \qquad \psi'(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j+\lambda} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\beta_k+\lambda} = \check{P}(\lambda)$$

met

$$(7.9) \qquad P'(x) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha_j x} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\beta_k x} \quad \text{voor} \quad x > 0.$$

Uit (7.6) volgt *) dat $e^{-\alpha_j x} - e^{-\beta_j x} > 0$ voor $x>0$ en $j=1,2,\ldots,n-1$ en dus $P'(x)>0$ voor $x>0$. Daar P een begrensde verdelingsachtige functie is, is H oneindig deelbaar wegens stelling 6.4.

Opmerking 7.1. Zij $F_\alpha(x) = 1-e^{-\alpha x}$ voor $x\geq 0$. Uit (7.7) blijkt dat er bij elke verdelingsfunctie H gedefinieerd door (7.4) een rij niet-negatieve getallen $\{\beta_k\}_{k=1}^{n-1}$ te vinden is met

$$H*F_{\beta_1} * F_{\beta_2} *\ldots* F_{\beta_{n-1}} = F_{\alpha_1} * F_{\alpha_2} \ldots * F_{\alpha_n} .$$

---

*) Eveneens met behulp van (7.6) kan men aantonen dat ψ' in (7.8) volledig monotoon is, omdat de afgeleiden van ψ' op de juiste manier van teken wisselen. De oneindig-deelbaarheid van H volgt nu uit stelling 6.3.

<u>Opmerking 7.2.</u> Het bewijs van stelling 7.1. is aan [1] ontleend. Als oneindig-deelbaarheidscriterium wordt daar echter stelling 6a.4. gebruikt, waar wij stelling 6.4. gebruiken. De met stelling 7.1. corresponderende stelling in [1] is echter algemener en bestrijkt ook gevallen waarin sommige der p_j negatief zijn. Het is namelijk mogelijk dat de rij $\{p_j\}$ negatieve getallen bevat en dat (7.3) toch een verdelingsfunctie H definieert. Noodzakelijk hiervoor is, dat

1^o $\Sigma p_j = 1 \quad (\Longleftrightarrow H(\infty) = 1)$,

2^o $\Sigma p_j\alpha_j \geq 0 \quad (\Longleftrightarrow \lim_{x\downarrow 0} H'(x) \geq 0)$,

3^o $p_1 > 0 \quad (\Longleftrightarrow H'(x)$ positief voor voldoende grote $x)$.

Dat deze voorwaarden niet voldoende zijn om (7.3) een verdelingsfunctie te doen definiëren blijkt uit het voorbeeld $H'(x) = e^{-x} - 8e^{-2x} + 12e^{-3x}$, dat aan de drie voorwaarden voldoet, maar negatief is voor $\log 2 < x < \log 6$ en dus geen dichtheid is. Eenvoudige voldoende voorwaarden voor $\{p_j\}$ schijnen niet voorhanden te zijn.

De met stelling 7.1. corresponderende stelling in [1] zegt nu, dat H gedefinieerd door (7.3) een oneindig deelbare verdelingsfunctie is, als de rij $\{p_n\}$ zó is, dat (7.3) een verdelingsfunctie H definieert (dus noodzakelijk $p_1 > 0$), en de rij $\{p_n\}$ bovendien hoogstens één tekenwisseling bevat.

In het geval dat (7.3) een verdelingsfunctie H definieert en $\{p_j\}$ meer tekenwisselingen bevat is een categorische uitspraak over de oneindig-deelbaarheid van H niet meer mogelijk, wat blijkt uit de volgende voorbeelden.

a) $H'(x) = 2e^{-x} - 6e^{-3x} + 5e^{-5x}$ is een dichtheid van een verdelingsfunctie die niet oneindig deelbaar is. Immers, uit $e^x H'(x) = 5y^2 - 6y + 2$ waarin $y = e^{-2x}$ volgt dat $H'(x) > 0$ voor $x > 0$, dus H is een verdelingsfunctie. Dat H niet oneindig deelbaar is, is het snelst te zien aan de bijbehorende karakteristieke functie

$$\phi(\tau) = \frac{2}{1-i\tau} - \frac{6}{3-i\tau} + \frac{5}{5-i\tau} = \frac{15-\tau^2}{(1-i\tau)(3-i\tau)(5-i\tau)},$$

die reële nulpunten bezit en dus niet oneindig deelbaar is wegens stelling 6a.3. Hetzelfde is met iets meer moeite af te leiden uit

$$\check{H}(\lambda) = \frac{15+\lambda^2}{(1+\lambda)(3+\lambda)(5+\lambda)},$$

immers

$$-\frac{d}{d\lambda}\log \check{H}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{3+\lambda} + \frac{1}{5+\lambda} - \frac{2}{15+\lambda^2} = \check{P}(\lambda),$$

waaruit volgt

$$P'(x) = e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} - 2\cos\sqrt{15}\,x \quad \text{voor} \quad x>0.$$

Omdat P' negatieve waarden aanneemt, is P geen verdelingsachtige functie, dus H is niet oneindig deelbaar wegens stelling 6.4.

b) $H'(x) = \frac{1}{4}e^{-x} - e^{-2x} + \frac{15}{4}\,e^{-3x}$ is de dichtheid van een oneindig deelbare verdelingsfunctie F. Want

$$\check{H}(\lambda) = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{1}{1+\lambda} - \frac{4}{2+\lambda} + \frac{15}{3+\lambda}\right\} = \frac{3(4/3+\lambda)(3/2+\lambda)}{(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)}.$$

Met behulp van $\psi = -\log\check{H}$ en $\check{P} = \psi'$ volgt

$$P'(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} - e^{-\frac{4}{3}x} - e^{-\frac{3}{2}x} \quad \text{voor} \quad x>0.$$

Wegens stelling 6.4. is H een oneindig deelbare verdelingsfunctie dan en slechts dan als $P'(x) \geq 0$ voor $x \geq 0$. Dit laatste is het geval daar

(7.10) $\quad P'(x) > 0{,}1426\, e^{-x}$ voor $x \geq 0$.

Bewijs van (7.10): $P'(x) = \phi(x) + \psi(x)$ waarin

$$\phi(x) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\, e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x} + e^{-2x} = e^{-x}(\frac{2}{9}\sqrt{3} - s + s^3) \text{ met } s = e^{-\frac{1}{3}x}$$

en

$$\psi(x) = (1 - \frac{2}{9}\sqrt{3})e^{-x} - e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-3x} = e^{-x}(1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} - t + t^4)$$

$$\text{met } t = e^{-\frac{1}{4}x} .$$

De functie $\frac{2}{9}\sqrt{3} - s + s^3$ is op $[0, 1]$ minimaal voor $s = 3^{-\frac{1}{2}}$ (volgt door differentiëren) en neemt in dit minimum de waarde 0 aan, dus $\phi(x) \geq 0$ voor $x>0$. Op dezelfde wijze volgt dat $1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} - t + t^4$ op $[0, 1]$ minimaal is voor $t = 2^{-2/3}$ en in dit minimum de waarde

$$1 - \frac{2}{9}\sqrt{3} - 2^{-2/3} - 2^{-8/3} = 0,14263\ldots$$

aanneemt, zodat $\psi(x) > 0,1426\, e^{-x}$, waaruit (7.10) volgt.

Stelling 7.2. Zij G een eventueel defectieve verdelingsfunctie met $G(0) = 0$ en defect $d \in [0,1]$, dan is de verdelingsfunctie

$$(7.11) \qquad H(x) = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})dG(\alpha) + d \quad \text{voor} \quad x \geq 0$$

oneindig deelbaar

Bewijs. Als $d=1$, geldt $H = \iota$ en ι is oneindig deelbaar. Stel nu $d \in [0, 1)$. Door limietovergang $\alpha_n \to \infty$ in (7.3) volgt met behulp van stelling 6.2. dat verdelingsfuncties van de vorm

$$(7.12) \qquad \tilde{H}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j(1-e^{-\alpha_j x}) + p_n \quad \text{voor} \quad x \geq 0$$

oneindig deelbaar zijn. Zij G_n voor $n=1,2,\ldots$ gedefinieerd door

$$(7.13) \qquad G_n(x) = \frac{k}{n}(1-d) \quad \text{als} \quad \frac{2k-1}{2n}(1-d) \leq G(x) < \frac{2k+1}{2n}(1-d)$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n)$$

en zij

$$(7.14) \qquad H_n(x) = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})\, dG_n(\alpha) + d \qquad \text{voor} \quad x \geq 0$$

dan is H_n van de vorm (7.12) en dus oneindig deelbaar. Daar $G_n(x)$ wegens (7.13) uniform op $\mathbb{R}$ naar G convergeert, geldt zeker $\lim G_n = G$ (konvergentie), zodat $\lim H_n = H$ wegens stelling 1.7b (toegepast op $G_n/(1-d) \to G/(1-d)$). Dus H is oneindig deelbaar.

Stelling 7.3. Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ twee onderling onafhankelijke niet-negatieve stochastische variabelen zijn en $\underline{y}$ is exponentieel verdeeld, dan is de verdelingsfunctie van $\underline{x}\underline{y}$ oneindig deelbaar.

Bewijs. Zij $1-e^{-\beta x}$ de verdelingsfunctie van $\underline{y}$ en zij de eventueel defectieve stochastische variabele $\underline{z}$ gedefinieerd door

$$(7.15) \qquad \underline{z} = \beta/\underline{x} \quad \text{als} \quad \underline{x} > 0,$$

dan is $d = P\{\underline{x} = 0\}$ het defect van $\underline{z}$. Als G de eventueel defectieve verdelingsfunctie van $\underline{z}$ is, geldt voor $x \geq 0$

$$(7.16) \qquad P\{\underline{x}\,\underline{y} \leq x\} = P\{\beta\underline{y} \leq x\underline{z}\} + d = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})\, dG(\alpha) + d.$$

Wegens stelling 7.2. is de verdelingsfunctie van $\underline{x}\,\underline{y}$ oneindig deelbaar.

Voorgeschiedenig van stelling 7.3.

In een discussie na een voordracht van Kingman in 1964 (zie [5]) merkte Keilson op dat Runnenburg en hij bewezen hadden dat de stationaire wachttijdverdeling in de "Lindley case" (één loket, bediening in volgorde van aankomst) steeds oneindig deelbaar is. Naar aanleiding hiervan vroeg Runnenburg de aanwezigen ook andere stationaire wachttijdverdelingen op oneindig-deelbaarheid te onderzoeken, en dit met name te doen voor een wachttijdverdeling die gezien kan worden als de verdelingsfunctie van het product van twee onderling onafhankelijke exponentieel verdeelde stochastische variabelen (deze treedt op bij één loket, bediening in aselecte volgorde).

Daarna bewees Goldie [4] dat de verdelingsfunctie van het product van twee onderling onafhankelijke niet-negatieve stochastische variabelen waarvan er één exponentieel verdeeld is oneindig deelbaar is. Kort daarop bewees Steutel [1] hetzelfde met volledig andere methoden. Ons bewijs is aan [1] ontleend.*) Het bewijs van deze stelling was voor Steutel aanleiding om ook andere algemenere resultaten af te leiden over mengsels van oneindig deelbare verdelingsfuncties.

<u>Stelling 7.4</u>. Zij d een positief reëel getal. Als alle mengsels van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^d\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar zijn, dan zijn ook alle mengsels van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar voor alle c met $0<c\leq d$.

<u>Bewijs</u>. We zullen aantonen dat er bij $0<c<d$ een verdelingsfunctie $G_{c,d}$ bestaat zó, dat

$$(7.17)\qquad \frac{1}{(1+\lambda)^c} = \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^d dG_{c,d}(\beta) \qquad \text{voor } \lambda \geq 0.$$

Dan is elk mengsel van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ te schrijven als mengsel van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^d\}_{\alpha>0}$, want

$$(7.18)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c dF(\alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\lambda}\right)^d dG_{c,d}(\beta)\, dF(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}\right)^d dH(\gamma),$$

waarin

$$(7.19)\qquad H(\gamma) = \int_0^\infty G_{c,d}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) dF(\alpha).$$

Omdat het laatste lid van (7.18) een LS-getransformeerde van een oneindig

*) Het bewijs van Goldie volgt op het eind van deze paragraaf.

deelbare verdelingsfunctie is, is het eerste lid dat ook, waarmee de stelling is bewezen.

Nu moeten we nog het bestaan van $G_{c,d}$ aantonen. Het rechterlid van (7.17) is gelijk aan

$$(7.20)\qquad \int_0^\infty\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ \frac{\beta^d x^{d-1}}{\Gamma(d)}\ e^{-\beta x}dx\Big)\,dG_{c,d}(\beta) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\ \Big(\frac{x^{d-1}}{\Gamma(d)}\ \int_0^\infty e^{-\beta x}\ \beta^d\ dG_{c,d}(\beta)\Big)\,dx,$$

terwijl het linkerlid van (7.17) gelijk is aan

$$(7.21)\qquad \int_0^\infty e^{-\lambda x}\ \frac{x^{c-1}}{\Gamma(c)}\ e^{-x}\ dx.$$

Vergelijking van het laatste lid van (7.20) met (7.21) geeft wegens de een-eenduidigheid van de Laplacetransformatie

$$(7.22)\qquad \int_0^\infty e^{-\beta x}\ \beta^d\ dG_{c,d}\ (\beta) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)}\ x^{c-d}\ e^{-x}.$$

Het rechterlid van (7.22) is voor $d > c$ de LS-getransformeerde van een verdelingsachtige functie. Terugtransformeren geeft

$$(7.23)\qquad \beta^d dG_{c,d}(\beta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)\ \Gamma(d-c)}\ (\beta-1)^{d-c-1}\ d\beta & \text{als}\quad \beta > 1 \\ 0 & \text{als}\quad \beta < 1 \end{cases}.$$

waaruit volgt dat $G_{c,d}$ een op $[1,\infty)$ geconcentreerde, absoluut continue verdelingsfunctie is met

$$(7.24)\qquad G'_{c,d}(\beta) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)\ \Gamma(d-c)}\ \beta^{-d}\ (\beta-1)^{d-c-1}\quad \text{voor}\quad \beta \geq 1.$$

Gevolg. Elk mengsel van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ is oneindig deelbaar als $0<c\leq 1$ wegens stelling 7.2. We vragen ons af of deze eigenschap behouden blijft als $c>1$. De volgende stelling zal laten zien, dat dit voor $c>2$ zeker niet het geval is.

Voor $c\in(1,2]$ is het probleem nog niet opgelost.

Zij C de verzameling der getallen c waarvoor geldt dat alle mengsels $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar zijn, dan is C wegens Stelling 7.4. en het bovenstaande een interval van de vorm $(0, c_{max})$ of $(0, c_{max}]$, waarin c_{max} een tot nu toe onbekend getal uit $[1,2]$ is. Wegens stelling 6.2 is ook elk mengsel van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^{c_{max}}\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar, daar

$$(7.25)\qquad \lim_{c\uparrow c_{max}} \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c dF(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{c_{max}} dF(\alpha).$$

Dus C is rechts gesloten : $C = (0, c_{max}]$.

Opmerking 7.3. Stelling 7.4. kan men als volgt veralgemenen: Als alle mengsels van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^d\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar zijn en $c(\alpha)$ is een Borel-meetbare functie op $(0,\infty)$ zó, dat $0<c(\alpha)\leq d$ voor $\alpha>0$, dan is elk mengsel van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^{c(\alpha)}\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar.

Stelling 7.5. (Runnenburg). Als $c>2$, dan zijn er mengsels van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ die niet oneindig deelbaar zijn.

Bewijs. Stel, alle mengsels van $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ zijn oneindig deelbaar. Dan zijn in het bijzonder de LS-getransformeerden

$$(7.26)\qquad p\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^c + q\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c \qquad (p, q > 0;\ p+q = 1)$$

oneindig deelbaar, en wegens stelling 6.2 ook hun limiet voor $\alpha\to\infty$

$$(7.27)\qquad \frac{p}{(1+\lambda)^c} + q.$$

We zullen aantonen dat p zo te kiezen is, dat de bijbehorende karakteristieke functie

$$(7.28) \qquad \frac{p}{(1-i\tau)^c} + q$$

een reëel nulpunt bezit. Uit stelling 6a.3 volgt dan dat deze karakteristieke functie niet oneindig deelbaar is, wat in tegenspraak is met de gevolgen van onze veronderstelling.

In (7.28) hebben we alleen dan te doen met een karakteristieke functie als we voor $\phi(\tau) = (1 - i\tau)^{-c}$ die complexwaardige functie nemen, waarvoor geldt

1^o $\phi(0) = 1$

2^o $\phi(\tau)$ is continu voor alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Omdat $\arg (1 - i\tau)^{-1} = -\arg (1 - i\tau) = \operatorname{arctg} \tau \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ voor $\tau \in \mathbb{R}$, passeert $(1 - i\tau)^{-1}$ in het complexe vlak bij continue voortzetting voor reële τ niet de negatieve reële halfrechte, dus $\phi(\tau)$ is voor alle reële τ gelijk aan de hoofdwaarde van $(1 - i\tau)^{-c}$, of

$$(7.29) \qquad \phi(\tau) = (1 + \tau^2)^{-c/2} e^{ic \operatorname{arctg} \tau} .$$

Nu bezit (7.28) dan en slechts dan een reëel nulpunt als er een reële τ is met

$$(7.30) \qquad \phi(\tau) = -\frac{q}{p} .$$

Uit (7.29) ziet men dat de beide leden van (7.30) dan en slechts dan gelijke argumenten kunnen bezitten als $c > 2$. Gelijkstelling der argumenten levert

$$(7.31) \qquad c \operatorname{arctg} \tau = \pi \Longrightarrow \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{c} .$$

De moduli in (7.30) worden ook gelijk indien

(7.32) $\quad \frac{q}{p} = (1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{c})^{-c/2} = (\cos \frac{\pi}{c})^c$.

Er zijn positieve p en q te vinden die aan (7.32) voldoen en aan $p + q = 1$, waarmee we een karakteristieke functie van de vorm (7.28) gevonden hebben met een reëel nulpunt.

Stelling 7.6. Zij ψ een functie op $(0, \infty)$, dan zijn de volgende twee beweringen equivalent:

a) $\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))$ is de LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie voor alle $\alpha > 0$;

b) ψ' is volledig monotoon op $(0, \infty)$ en $\psi(0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \psi(\lambda) = 0$.

Er geldt bovendien dat $\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))$ oneindig deelbaar is voor alle $\alpha > 0$.

Bewijs. Zij a) gegeven, dan is $\alpha n/(\alpha n + \psi(\lambda))$ en dus ook $\{\alpha n/(\alpha n + \psi(\lambda))\}^n$ voor alle $\alpha > 0$ de LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie. Wegens stelling 6.2 geldt hetzelfde voor

(7.33) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\psi(\lambda)/\alpha n}\right)^n = e^{-\psi(\lambda)/\alpha}$$

voor alle $\alpha > 0$. Dus $e^{-\psi(\lambda)/\alpha}$ is oneindig deelbaar en de beweringen over ψ in b) volgen uit stelling 6.3

Zij b) gegeven, dan is $\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))$ wegens stelling 5.7 een volledig monotone functie, daar $\alpha/(\alpha + \lambda)$ en $\psi'(\lambda)$ volledig monotoon zijn. Dus $\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))$ is een LS-getransformeerde en wel van een verdelingsfunctie omdat $\alpha/(\alpha + \psi(0)) = 1$.

Daar $\alpha/(\alpha + \lambda)$ oneindig deelbaar is, is ook $\{\alpha/(\alpha + \lambda)\}^{1/n}$ volledig monotoon, zodat de conclusies van de voorgaande alinea geldig blijven voor $\{\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))\}^{1/n}$.
Dus $\alpha/(\alpha + \psi(\lambda))$ is oneindig deelbaar.

Opmerking 7.4. Steutel bewees in [2] een soortgelijke stelling voor *karakteristieke functies* $\alpha/(\alpha-h(\tau))$. Bewering b) in de stelling moet dan vervangen worden door "$e^{h(\tau)}$ is een oneindig deelbare karakteristieke functie".

Opmerking 7.5. Stelling 7.6 en de overeenkomstige stelling van Steutel blijven geldig, indien $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ resp. $\alpha/(\alpha-h(\tau))$ vervangen worden door $\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}^c$ resp. $\{\alpha/(\alpha-h(\tau))\}^c$, waarin $c > 0$.

Stelling 7.7. Als ψ aan voorwaarde b) van stelling 7.6 voldoet, dan zijn alle mengsels van $\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}_{\alpha>0}$ oneindig deelbaar.

Bewijs. Wegens stelling 7.2 is voor elke verdelingsfunctie F geconcentreerd op $(0,\infty)$

$$\check{H}(\lambda) = {}_0\int^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\, dF(\alpha) \tag{7.34}$$

een oneindig deelbare LS-getransformeerde, dus $\check{H}^{1/n}(\lambda)$ is volledig monotoon op $(0,\infty)$ voor $n=1,2,\ldots$. Wegens stelling 5.7 is dan ook $\check{H}^{1/n}(\psi(\lambda))$ volledig monotoon op $(0,\infty)$ voor $n=1,2,\ldots$. Daar bovendien $\check{H}(\psi(0)) = 1$, is $\check{H}(\psi(\lambda))$ de LS-getransformeerde van een oneindig deelbare verdelingsfunctie.

Opmerking 7.6. Stelling 7.7 blijft geldig indien $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ vervangen wordt door $\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}^c$ met $c \in (0,c_{max}]$.

Voorbeeld 7.1. Alle mengsels van de volgende LS-getransformeerden van verdelingsfuncties zijn oneindig deelbaar (steeds geldt $c \in (0,c_{max}]$ met $1 \leq c_{max} \leq 2$).

a) $\{(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda^\theta})^c\}_{\alpha>0}$ $\quad (0 < \theta \leq 1)$;

b) $\{(\frac{\alpha}{\alpha+1-e^{-\lambda}})^c\}_{\alpha>0}$ (negatief binomiale verdeling) ;

c) $\quad \{(\frac{\alpha}{\alpha+\log(1+\lambda)})^c\}_{\alpha>0}$;

d) $\quad \{(\frac{\alpha}{\alpha-\lambda+\sqrt{(\lambda+1)^2-1}})^c\}_{\alpha>0}$ (vgl. stelling 4.6:
$-\lambda+\sqrt{(\lambda+1)^2-1} = 1-\check{L}(\lambda)$).

In opmerking 7.8 zal blijken dat het mogelijk is, dat $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie is voor sommige, maar niet alle $\alpha > 0$. Wegens stelling 7.6 voldoet ψ dan niet aan de aldaar onder b) genoemde voorwaarden. Aan [2] ontlenen we de volgende voor dit geval belangrijke stelling.

Stelling 7.8. Als $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ voor $\alpha = \alpha_0 > 0$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie is, dan is $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie voor $0 < \alpha \leqq \alpha_0$. Als $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ bovendien oneindig deelbaar is voor $\alpha = \alpha_0$, dan geldt hetzelfde voor $0 < \alpha \leqq \alpha_0$.

Bewijs. Zij $0 < \alpha < \alpha_0$, dan geldt

$$\frac{\alpha}{\alpha+\psi(\lambda)} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\psi(\lambda)} \cdot \frac{\beta}{\beta+1-\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\psi(\lambda)}}, \tag{7.35}$$

waarin $\beta = \alpha/(\alpha_0-\alpha) > 0$. Omdat $\alpha_0/(\alpha_0+\psi(\lambda))$ LS-getransformeerde, dus volledig monotoon is, voldoet $1-\alpha_0/(\alpha_0+\psi(\lambda))$ aan voorwaarde b) van stelling 7.6, dus de tweede factor in het rechterlid van (7.35) is een oneindig deelbare LS-getransformeerde. Omdat de eerste factor in het rechterlid van (7.35) een (oneindig deelbare) LS-getransformeerde is van een verdelingsfunctie, geldt hetzelfde voor het linkerlid van (7.35).

Opmerking 7.7. Stelling 7.8 blijft geldig, indien $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ vervangen wordt door $\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}^c$ met $c > 0$.

Gevolg. Zij F een (oneindig deelbare) verdelingsfunctie, dan is $\alpha/(\alpha+\check{F}^{-1}-1)$ voor $0 < \alpha \leqq 1$ LS-getransformeerde van een (oneindig deelbare) verdelingsfunctie, omdat $1/(1+\check{F}^{-1}-1) = \check{F}$ dat is.

Opmerking 7.8. Kies in het bovenstaande $\check{F}(\lambda) = e^{-\lambda}$ (oneindig deelbaar), dan volgt dat $\phi_\alpha(\lambda) = \alpha/(\alpha+e^{\lambda}-1)$ voor $0 < \alpha \leq 1$ LS-getransformeerde van een oneindig deelbare verdelingsfunctie is. Daar

$$\phi_\alpha(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha} + \lambda^2 \frac{2-\alpha}{2\alpha^2} + O(\lambda^3) \qquad \text{voor} \qquad \lambda \downarrow 0$$

wordt, indien ϕ_α de LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie is, de variantie bij deze verdelingsfunctie gegeven door

$$2\,\frac{2-\alpha}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \quad .$$

Daar deze laatste uitdrukking negatief is voor $\alpha > 1$, kan ϕ_α voor $\alpha > 1$ geen LS-getransformeerde van een verdelingsfunctie zijn.

Stelling 7.9. Als $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ LS-getransformeerde is van een oneindig deelbare verdelingsfunctie voor $\alpha = \alpha_0$ (en dus voor $(0 < \alpha \leq \alpha_0)$, dan is elk mengsel van $\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}_{0<\alpha\leq\alpha_0}$ oneindig deelbaar.

Bewijs. Zij F een verdelingsfunctie geconcentreerd op $(0,\alpha_0]$, dan krijgen we met een splitsing als in (7.34)

$$(7.36) \qquad {}_0\!\int^{\alpha_0} \frac{\alpha}{\alpha+\psi(\lambda)}\, dF(\alpha) = \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\psi(\lambda)} \left\{ {}_0\!\int^{\alpha_0-0} \frac{\dfrac{\alpha}{\alpha_0-\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\alpha_0-\alpha} + 1 - \dfrac{\alpha_0}{\alpha_0+\psi(\lambda)}}\, dF(\alpha) + F(\alpha_0) - F(\alpha_0-0) \right\} .$$

De eerste factor in het rechterlid is krachtens gegeven oneindig deelbaar; de tweede factor is als limiet van LS-getransformeerden, die wegens stelling 7.7 oneindig deelbaar zijn, oneindig deelbaar.

Opmerking 7.9. In stelling 7.8 kan $\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))$ vervangen worden door

$\{\alpha/(\alpha+\psi(\lambda))\}^c$ met $0 < c \leq c_{max}$.

Bij verdelingsfuncties F geconcentreerd op $[0,\infty)$ en met eindig positief eerste moment μ kan men de *vervangingsverdeling* F_0 definiëren door

$$(7.37) \qquad \begin{cases} \check{F}_0(\lambda) = \dfrac{1-\check{F}(\lambda)}{\mu\lambda} ; \\ F_0(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-F(y)}{\mu}\, dy . \end{cases}$$

In een vervangingsproces waar F de verdelingsfunctie van de levensduur is, is F_0 de enige beginverdeling zó, dat het vervangingsproces stationair is.

Nu is gebleken, dat vele wachttijdverdelingen oneindig deelbaar zijn, onafhankelijk van de deelbaarheidseigenschappen van de verdelingsfuncties van de aankomsttijden en bedieningstijden, zou men kunnen vermoeden dat (7.37) oneindig deelbare verdelingsfuncties F_0 aan F toevoegt, of op zijn minst dat de overgang $F \to F_0$ oneindig-deelbaarheid bevorderend werkt, omdat vervangingsprocessen een belangrijke rol in de wachttijdtheorie spelen. In [3] heeft Steutel echter aangetoond dat deze vermoedens onjuist zijn. Hij geeft voorbeelden waarin F wel oneindig deelbaar is en F_0 niet en voorbeelden waarin F niet oneindig deelbaar is en F_0 wel. Bovendien toont hij aan dat wachttijdverdelingen, betrekking hebbende op het geval dat er één loket is en de laatst binnengekomen klant het eerst bediend wordt, niet oneindig deelbaar hoeven te zijn.

Naast deze negatieve resultaten bevat [3] ook twee stellingen over het al of niet oneindig deelbaar zijn van verdelingsfuncties, welke stellingen wij hier zonder bewijs citeren.

<u>Stelling 7.10</u>. Zij F een verdelingsfunctie geconcentreerd op $[0,\infty)$ en met eindig positief eerste moment μ en zij F_0 bij F gedefinieerd door (7.37). Dan geldt

a) Als F discontinu is voor een $x > 0$, dan is F_0 niet oneindig deelbaar.

b) Als $F = p\iota + (1-p)H$ waarin $0 \leq p < 1$ en H een absoluut continue verdelingsfunctie is met dichtheid h, dan is F_0 dan en slechts dan oneindig deelbaar als

$$(7.38) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k}\, h^{k*}(x) \leq 1 \qquad \text{voor alle} \quad x > 0 .$$

Stelling 7.11. Als g een dichtheid is van een absoluut continue verdelingsfunctie G, geconcentreerd op $(0,\infty)$ en als g bovendien voldoet aan:

a) $g(x)$ is niet-stijgend op $(0,\infty)$,

b) $g(0+) = \lim_{x \downarrow 0} g(x) < \infty$,

dan geldt:

(i) G is niet oneindig deelbaar als g niet continu is op $(0,\infty)$;

(ii) als $g(x)$ voor $x > 0$ differentieerbaar is, dan is het voor de oneindig-deelbaarheid van G noodzakelijk dat

$$(7.39) \qquad -g'(x) \leq x^{-1} g(0+) \qquad \text{voor alle} \quad x > 0 .$$

Tot slot zullen we stelling 7.2 nogmaals bewijzen volgens Goldie [4]. We maken daarbij gebruik van een stelling van Kaluza over vervangingsrijen.

Definitie 7.2. Een rij reële getallen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ met $u_0=1$ heet een *vervangingsrij* als er een rij niet-negatieve reële getallen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestaat zó, dat

$$(7.40) \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} f_k \qquad \text{voor} \quad n=1,2,\ldots .$$

De rij $\{u_n\}$ met $u_0=1$ heet een *echte vervangingsrij* als er een rij niet-negatieve reële getallen $\{f_n\}$ bestaat zó, dat aan (7.40) voldaan is en bovendien $\sum f_n \leq 1$.

Opmerking 7.10. Zij $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ een rij reële getallen met $u_n \neq 0$. Door (7.40) wordt dan en slechts dan een rij niet-negatieve reële getallen $\{f_n\}$ gedefinieerd als $\{\frac{u_n}{u_0}\}$ een vervangingsrij is.

Opmerking 7.11. Relatie (7.40) en de voorwaarde $u_0=1$ zijn equivalent met

(7.41) $$U(s) = 1 + U(s)F(s) ,$$

waarin $U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n$ en $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s^n$ formele machtreeksen zijn. Uit (7.40) volgt met volledige inductie dat een vervangingsrij $\{u_n\}$ geen negatieve getallen bevat.

Opmerking 7.12. In de theorie van de *terugkerende patronen* wordt in het geval van een echte vervangingsrij u_n geïnterpreteerd als de kans dat het terugkerend patroon optreedt op tijdstip n en f_n als de kans dat het terugkerend patroon voor het eerst op tijdstip n optreedt.

Stelling 7.12 (Kaluza [6]).
Als $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ een rij niet-negatieve getallen is met $u_0=1$ en

(7.42) $$\begin{vmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad \text{voor} \qquad n \geq 1 ,$$

dan is $\{u_n\}$ een vervangingsrij.

Bewijs.
a) Stel dat $u_n=0$ voor zeker natuurlijk getal n, dan volgt uit (7.42) dat $u_n=0$ voor alle $n \geq 1$. Dus $U(s) = 1 \Rightarrow F(s) = 0 \Rightarrow f_n = 0$ voor $n=1,2,\ldots$.
Dus $\{u_n\}$ is een vervangingsrij.
b) Stel dat alle u_n positief zijn. Dan is (7.42) equivalent met

(7.43) $$\frac{u_1}{u_0} \leq \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{u_3}{u_2} \leq \ldots \leq \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ldots \quad .$$

Uit (7.40) met n+1 in plaats van n volgt

(7.44) $$f_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_{n-k+1} f_k \qquad \text{voor} \qquad n=1,2,\ldots \quad .$$

Wederom met behulp van (7.40) volgt uit (7.44)

$$(7.45)\qquad u_n f_{n+1} = u_n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_n u_{n-k+1} f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} u_{n-k} & u_{n-k+1} \\ u_n & u_{n+1} \end{vmatrix} f_k \qquad \text{voor} \quad n=1,2,\ldots \; .$$

Wegens (7.43) zijn de determinanten in (7.45) niet-negatief. Uit (7.45) en $f_1=u_1> 0$ volgt nu met volledige inductie dat $f_n \geq 0$ voor $n=1,2,\ldots$.

Opmerking 7.13. De stelling en het bewijs van Kaluza staan ook in |7|. Daar wordt bovendien bewezen dat elke *begrensde* rij $\{u_n\}$ die aan de voorwaarden van de stelling van Kaluza voldoet een echte vervangingsrij is. In J. Lamperti (1958), On the coefficients of reciprocal power-series, Am.Math.Monthly 65, 90-94, werd voor het eerst op het belang van de stelling van Kaluza voor de vervangingstheorie gewezen. Hetzelfde artikel bevat een stelling over een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor vervangingsrijen.

Opmerking 7.14. Er zijn vervangingsrijen $\{u_n\}$ die niet aan (7.42) voldoen. Neem $f_2=f_3=\frac{1}{2}$ en $f_n=0$ voor $n=1$ en $n\geq 4$, dan definieert (7.40) een echte vervangingsrij $\{u_n\}$ met $u_1=0$ en $u_n>0$ voor alle $n\geq 2$.

Stelling 7.13 (Goldie).
Zij F een verdelingsfunctie. Als de rij $\{u_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ gedefinieerd door

$$(7.46)\qquad \frac{\check{F}(\lambda+h)}{\check{F}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\lambda)\;(-h)^n \qquad \text{voor} \quad |h| < \lambda$$

voor elke $\lambda > 0$ een vervangingsrij is, dan is F oneindig deelbaar.

Bewijs. Aan de eis $u_0= 1$ is voldaan. Zij $\{f_n(\lambda)\}$ bij $\{u_n(\lambda)\}$ gedefinieerd door (7.40). Daar $\sum u_n(\lambda)\;(-h)^n$ convergeert voor $|h| < \lambda$ en positief is voor h=0, bezit

$$(7.47)\qquad \phi_\lambda(h) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda)\;(-h)^n = 1 - \frac{\check{F}(\lambda)}{\check{F}(\lambda+h)}$$

een positieve convergentiestraal. Gegeven is dat $f_n(\lambda) \geq 0$ voor $n=1,2,\ldots$ en alle $\lambda > 0$, dus dat $\phi_\lambda(h)$ voor elke $\lambda > 0$ volledig monotoon is in een rechteromgeving van $h=0$. Uit

$$(7.48) \qquad \check{F}(\lambda+h) = \frac{\check{F}(\lambda)}{1-\phi_\lambda(h)}$$

en

$$(7.49) \qquad \check{F}'(\lambda+h) = \frac{\check{F}(\lambda)}{\{1-\phi_\lambda(h)\}^2}\,\phi_\lambda'(h)$$

volgt voor $\psi(\lambda) = -\log \check{F}(\lambda)$ dat

$$(7.50) \qquad \psi'(\lambda+h) = -\frac{\check{F}'(\lambda+h)}{\check{F}(\lambda+h)} = \frac{-\phi_\lambda'(h)}{1-\phi_\lambda(h)} = \frac{-\phi_\lambda'(h)\,\check{F}(\lambda+h)}{\check{F}(\lambda)} .$$

Omdat $-\phi_\lambda'(h)$ en $\check{F}(\lambda+h)$ in een rechteromgeving van $h=0$ volledig monotoon zijn, is $\psi'(\lambda+h)$ volledig monotoon in een rechteromgeving van $h=0$, en daar dit geldt voor alle $\lambda > 0$ is ψ' volledig monotoon op $(0,\infty)$. Dus F is oneindig deelbaar wegens stelling 6.4.

Opmerking 7.15. Er zijn oneindig deelbare verdelingsfuncties F die niet aan de voorwaarden van stelling 7.13 voldoen. Neem $\check{F}(\lambda) = (1+\lambda)^{-c}$. Dan geldt

$$(7.51) \qquad \phi_\lambda(h) = 1 - \left(1+\frac{h}{1+\lambda}\right)^c = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}\left(\frac{h}{1+\lambda}\right)^n ,$$

zodat

$$(7.52) \qquad f_n(\lambda) = (-1)^{n+1}\binom{c}{n}(1+\lambda)^{-n} \qquad \text{voor} \quad n=1,2,\ldots .$$

Alleen als $0 < c \leq 1$ zijn alle $f_n(\lambda)$ niet-negatief, terwijl F voor alle $c > 0$ oneindig deelbaar is.

Stelling 7.14. Alle mengsels van de LS-getransformeerden $\{(\alpha/(\alpha+\lambda))^c\}_{\alpha>0}$ zijn oneindig deelbaar als $0 < c \leq 1$.

(Goldie bewees de stelling alleen voor c=1, maar zijn bewijsmethode is ook toepasbaar voor $0 < c < 1$; voor c=1 is de stelling dezelfde als stelling 7.2).

<u>Bewijs</u>. Zij

$$\check{H}(\lambda) = {}_0\int^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c dF(\alpha) \quad , \tag{7.53}$$

waarin $0 < c \leq 1$ en F een verdelingsfunctie is, geconcentreerd op $(0,\infty)$. We zullen aantonen, dat voor alle $\lambda > 0$ de rij $\{u_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ gedefinieerd door

$$\frac{\check{H}(\lambda+h)}{\check{H}(\lambda)} = \sum_{n=0}^\infty u_n(\lambda)\ (-h)^n \qquad \text{voor} \qquad |h| < \lambda \tag{7.54}$$

aan de voorwaarden van de stelling van Kaluza voldoet en dus een vervangingsrij is. Wegens stelling 7.13. is H dan oneindig deelbaar. Daar voor $|h| < \lambda$

$$\begin{aligned}\check{H}(\lambda+h) &= {}_0\int^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda+h}\right)^c dF(\alpha) = \\ &= {}_0\int^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c \left(1 + \frac{h}{\alpha+\lambda}\right)^{-c} dF(\alpha) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \binom{-c}{n}\ {}_0\int^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^c \left(\frac{h}{\alpha+\lambda}\right)^n dF(\alpha) \ ,\end{aligned} \tag{7.55}$$

volgt uit (7.54)

$$v_n(\lambda) \overset{\text{def}}{=\!=} \check{H}(\lambda)\ u_n(\lambda) = (-1)^n\binom{-c}{n}\ {}_0\int^\infty \alpha^c(\alpha+\lambda)^{-c-n}\ dF(\alpha) \ . \tag{7.56}$$

De rij $\{u_n(\lambda)\}$ voldoet aan (7.42) dan en slechts dan als $\{v_n(\lambda)\}$ aan (7.42) voldoet. Dit laatste is het geval, immers

$$\begin{aligned}&v_{n-1}(\lambda)\ v_{n+1}(\lambda) = \\ &= \binom{-c}{n-1}\binom{-c}{n+1}\ {}_0\int^\infty \alpha^c(\alpha+\lambda)^{-c-n+1}dF(\alpha)\ {}_0\int^\infty \alpha^c(\alpha+\lambda)^{-c-n-1}dF(\alpha) \geq\end{aligned} \tag{7.57}$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \binom{-c}{n-1}\binom{-c}{n+1} \left({}_0\int^\infty \alpha^c(\alpha+\lambda)^{-c-n} dF(\alpha)\right)^2 =$$

$$= v_n^2(\lambda) \frac{\binom{-c}{n-1}\binom{-c}{n+1}}{\binom{-c}{n}^2}$$

en

$$(7.58) \qquad \frac{\binom{-c}{n-1}\binom{-c}{n+1}}{\binom{-c}{n}^2} = \begin{cases} \dfrac{(c+n)n}{(c+n)n-(1-c)} > 1 & \text{als} \quad 0 < c < 1 \,, \\ 1 & \text{als} \quad c = 1 \,, \end{cases}$$

zodat $v_{n-1}(\lambda)\ v_{n+1}(\lambda) \geq v_n^2(\lambda)$.

Opmerking 7.16. Het linkerlid van (7.58) is kleiner dan 1 bij $c > 1$, zodat dit bewijs niet voor $c > 1$ gebruikt kan worden.

§ 8 Toepassing van LS-getransformeerden in een vertakkingsproces
Feller 2, XIV 4

We beschouwen een stamboom die de afstammingsrelaties van een stamvader en zijn nageslacht aangeeft en waarin alleen de mannelijke nakomelingen staan vermeld die in rechte mannelijke lijn van de stamvader afstammen, d.w.z. de stamboom vermeldt alleen zonen van vaders en laat dochters en haar kinderen buiten beschouwing. De totstandkoming van een dergelijke stamboom is een *vertakkingsproces*, waarover we het volgende veronderstellen.

1) De levensduren van de verschillende individuen in de stamboom zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen met alle dezelfde verdelingsfunctie F.
2) Onder de voorwaarde dat x de levensduur van een man uit de stamboom is, is het aantal zonen van hem Poissonverdeeld met verwachting cx (c is een positieve constante), m.a.w. zo lang hij leeft krijgt hij zonen op tijdstippen aangewezen door een stationair Poissonproces met intensiteit c. Het aantal van zijn zonen hangt alleen op de aangegeven wijze van de levensduur van de vader af en is onafhankelijk van de levensduren en aantallen zonen van andere personen uit de stamboom.

Bij elk individu A uit de hierboven beschreven stamboom kunnen we een nieuwe stamboom vormen waarin A stamvader is en alleen A en zijn nakomelingen voorkomen. Ook deze stamboom voldoet aan voorwaarden 1) en 2).

We definiëren nu $\underline{v}$ als de som van de levensduren van alle individuen in de stamboom. Het is mogelijk dat de stamboom met positieve kans oneindig veel individuen bevat. In dit geval is $\underline{v}$ met positieve kans oneindig en is $\underline{v}$ dus een defectieve stochastische variabele. Zij $\underline{x}$ de levensduur van de stamvader. Onder de voorwaarde $\underline{x} = x$ geldt

$$(8.1) \qquad \underline{v} = x + \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_{\underline{n}_x} \quad ,$$

waarin $\underline{n}_x$ het aantal zonen is van de stamvader en $\underline{v}_k$ voor $1 \leq k \leq \underline{n}_x$ de som van de levensduren van de k^e zoon en zijn nageslacht. We kunnen nu $\{\underline{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$ zien als een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen, die alle dezelfde verdelingsfunctie, zeg V, als $\underline{v}$ bezitten en $\underline{n}_x$ als een van $\{\underline{v}_k\}$ onafhankelijke Poissonverdeelde stochastische variabele met verwachting cx. Derhalve geldt

$$(8.2) \qquad \mathcal{E}(e^{-\lambda \underline{v}} | \underline{x} = x) = e^{-\lambda x} \mathcal{E}(\check{V}(\lambda))^{\underline{n}_x} =$$

$$= \exp\left[-\lambda x - cx(1-\check{V}(\lambda))\right] ,$$

zodat

$$(8.3) \qquad \check{V}(\lambda) = {}_0\int^{\infty} \mathcal{E}(e^{-\lambda \underline{v}} | \underline{x}=x) dF(x) = \check{F}(\lambda+c-c\check{V}(\lambda)) .$$

In stelling 8.1 zal met analytische hulpmiddelen worden aangetoond dat (8.3) eenduidig een eventueel defectieve verdelingsfunctie V definieert en dat V dan en slechts dan niet-defectief is als het eerste moment μ van F eindig is en $c\mu \leq 1$. Nu is het verwachte aantal zonen van een individu

$$(8.4) \qquad \mathcal{E}\underline{n}_x = \mathcal{E}c\underline{x} = c\mu$$

en uit stelling 8.1 volgt dus dat de som van alle levensduren in de stamboom met kans 1 eindig is dan en slechts dan, als het verwachte aantal zonen per individu ≤ 1 is.

Hoewel $\check{V}$ en dus V meestal niet expliciet uit (8.3) op te lossen is, is het toch mogelijk de momenten van V te berekenen. Door differentiëren van (8.3) krijgen we

$$(8.5) \qquad \check{V}'(\lambda) = \check{F}'(\lambda+c-c\check{V}(\lambda)) (1-c\check{V}'(\lambda)) ,$$

zodat

$$(8.6)\qquad \check{V}'(\lambda) = \frac{\check{F}'(\lambda+c-c\check{V}(\lambda))}{1+c\check{F}'(\lambda+c-c\check{V}(\lambda))} .$$

ls $c\mu \leq 1$ volgt wegens stelling 3.10

$$(8.7)\qquad \mathcal{E}\underline{v} = -\lim_{\lambda\downarrow 0} \check{V}'(\lambda) = \begin{cases} \frac{\mu}{1-c\mu} & \text{als} \quad c\mu < 1 , \\ \infty & \text{als} \quad c\mu = 1 . \end{cases}$$

p dezelfde wijze berekent men door tweemaal differentiëren van (8.4) erst $\mathcal{E}\underline{v}^2$ en vervolgens

$$(8.8)\qquad \operatorname{var} \underline{v} = \frac{\sigma^2 + c\mu^3}{(1-c\mu)^3} \qquad (c\mu \leq 1) ,$$

aarin σ^2 de variantie bij F is. Het rechterlid van (8.8) interpretere en als ∞ als $c\mu = 1$ of als $\sigma^2 = \infty$.

telling 8.1. Zij F een verdelingsfunctie met eerste moment $\mu \leq \infty$ en zij een positief getal. Dan definieert vergelijking (8.3) eenduidig een ventueel defectieve verdelingsfunctie V, die niet defectief is dan en lechts dan als $c\mu \leq 1$.

ewijs. Voor $F = \iota$ is de stelling triviaal. Zij $F \neq \iota$ en beschouw de ergelijking

$$(8.9)\qquad f(\lambda,s) \overset{\text{def}}{=\!=} \check{F}(\lambda+c-cs) - s = 0$$

oor $\lambda \geq 0$ en $0 \leq s \leq 1$. Het linkerlid van (8.9) is voor vaste $\lambda > 0$ en convexe functie van s die negatief is voor $s = 1$ en positief voor $= 0$, zodat $f(\lambda,s) = 0$ voor elke $\lambda > 0$ één en slechts één wortel $= \sigma(\lambda) \in (0,1)$ bezit. We zullen aantonen dat σ volledig monotoon is p $(0,\infty)$. Daartoe definiëren we $\sigma_0(\lambda) = 0$ voor $\lambda > 0$ en verder resursief

$$(8.10)\qquad \sigma_{n+1}(\lambda) = \check{F}(\lambda+c-c\sigma_n(\lambda)) \qquad \text{voor } n=0,1,2,\ldots \quad \text{en} \quad \lambda > 0 .$$

Daar $\check{F}$ niet-stijgend is en $0 = \sigma_0(\lambda) \leq \sigma_1(\lambda) \leq 1$ voor $\lambda > 0$, volgt uit (8.10) met volledige inductie $0 \leq \sigma_n(\lambda) \leq \sigma_{n+1}(\lambda) \leq 1$ voor $\lambda > 0$, dus $\{\sigma_n(\lambda)\}$ is een uniform begrensde niet-dalende rij functies en convergeert derhalve naar een limietfunctie, en wel naar $\sigma(\lambda)$ omdat de limietfunctie voldoet aan (8.9). Eveneens met volledige inductie tonen we aan dat σ_n voor $n=0,1,2,\ldots$ volledig monotoon is op $(0,\infty)$. Immers $\sigma_0(\lambda) \equiv 0$ is volledig monotoon op $(0,\infty)$ en uit de volledige monotonie van σ_n op $(0,\infty)$ volgt met behulp van (8.10) die van σ_{n+1} wegens stelling 5.7. Wegens stelling 5.3 en 2.5 is daarom ook σ volledig monotoon op $(0,\infty)$.

Omdat $\sigma(\lambda)$ niet-stijgend en begrensd is op $(0,\infty)$, bestaat

(8.11) $$\sigma(0) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{\lambda \downarrow 0} \sigma(\lambda)$$

en geldt $0 \leq \sigma(0) \leq 1$. Dus σ is de LS-getransformeerde van een eventueel defectieve verdelingsfunctie V, die niet-defectief is dan en slechts dan als $\sigma(0) = 1$. We gaan nu na wanneer dit het geval is.

Wegens de continuiteit van $\check{F}$ volgt uit (8.9) en (8.11) dat $\sigma(0)$ een wortel is van $f(0,s) = 0$. Nu is $s=1$ altijd een nulpunt van $f(0,s)$. Omdat $f(0,0) > 0$ en $f(0,s)$ een convexe functie van s is, bezit $f(0,s)$ dan en slechts dan een nulpunt $s_0 \in (0,1)$ als $f(0,s)$ stijgt in $s=1$, dus als

(8.12) $$\left[\frac{d}{ds} f(0,s)\right]_{s=1} = \left[-cF'(c-cs) - 1\right]_{s=1} = c\mu - 1 > 0 .$$

Als $c\mu \leq 1$, is $s=1$ de enige wortel in $[0,1]$ van $f(0,s) = 0$, dus $\sigma(0) = 1$ en V is niet-defectief.

Als $c\mu > 1$, dan heeft $f(0,s) = 1$ twee wortels in $[0,1]$ en wel $s_0 \in (0,1)$ en 1. We weten, dat $\sigma(0)$ gelijk is aan één van beide. Daar $f(\lambda,s)$ continue partiële afgeleiden bezit, $f(0,1) = 0$ en $\left[\frac{\partial}{\partial s} f(\lambda,s)\right]_{(0,1)} = c\mu - 1 > 0$ is het mogelijk en slechts op één manier mogelijk in een zekere rechteromgeving van 0 een differentieerbare functie $\tilde{\sigma}(\lambda)$ te definiëren, die voldoet aan $f(\lambda,\tilde{\sigma}(\lambda)) = 0$ en $\tilde{\sigma}(0) = 1$, terwijl bovendien

(8.13) $$\tilde{\sigma}'(\lambda) = -\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big/ \frac{\partial f}{\partial s}\right]_{(\lambda,\tilde{\sigma}(\lambda))}$$

Voor $\lambda=0$ volgt $\tilde{\sigma}'(0) = \mu/(c\mu-1) > 0$, dus $\tilde{\sigma}(\lambda)$ stijgt in 0, zodat er een rechteromgeving van 0 is, waar $\tilde{\sigma}(\lambda) > 1$ is. Omdat $0 \leq \sigma(\lambda) \leq 1$ voor $\lambda \geq 0$, kunnen σ en $\tilde{\sigma}$ niet dezelfde functies zijn, dus $\sigma(0) \neq 1$. Derhalve geldt $\sigma(0) = s_0$ en is V defectief met defect $1-s_0$.

Opmerking 8.1. Zij $\underline{m}$ het aantal personen in de stamboom, dan volgt analoog aan (8.1) dat

$$(8.14) \qquad \underline{m} = 1 + \underline{m}_1 + \underline{m}_2 + \ldots + \underline{m}_{\underline{n}_x} \qquad \text{als} \qquad \underline{x} = x \quad ,$$

waarin $\underline{m}_k - 1$ het aantal nakomelingen is van de k^e zoon van de stamvader. Analoog aan(8.2) volgt

$$(8.15) \qquad \mathcal{E}(e^{-\lambda \underline{m}} | \underline{x} = x) = \exp\left[-\lambda - cx(1 - \mathcal{E}e^{-\lambda \underline{m}})\right] \ ,$$

zodat

$$(8.16) \qquad \mathcal{E}e^{-\lambda \underline{m}} = e^{-\lambda}\check{F}(c - c\mathcal{E}e^{-\lambda \underline{m}}) \ .$$

Daar $\underline{m}$ een geheelwaardige stochastische variabele is, gaan we over op de kansgenererende functie $P(s) = \mathcal{E}s^{\underline{m}}$ voor $|s| < 1$, en (8.16) wordt met $s = e^{-\lambda}$

$$(8.17) \qquad P(s) = s\check{F}(c - cP(s)) \ .$$

Analoog aan het bewijs van stelling 8.1 kan men aantonen dat (8.17) de genererende functie van een eventueel defectieve kansverdeling definieert en dat deze kansverdeling niet-defectief is, dan en slechts dan als $cm \leq 1$. Het geslacht dat door de stamboom beschreven wordt sterft uit dan en slechts dan als $\underline{m}$ eindig is. De kans op uitsterven wordt dus gegeven door

$$(8.18) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\underline{m} = n\} = \lim_{s \uparrow 1} P(s) = s_0 \ ,$$

waarin s_0 de kleinste positieve wortel is van $s = \check{F}(c - cs)$.

Door differentiatie van (8.16) of (8.17) krijgen we in geval $c\mu \leq 1$

$$(8.19)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}\underline{m} = \dfrac{1}{1-c\mu} \,, \\[2ex] \operatorname{var} \underline{m} = \dfrac{c\mu + c^2\sigma^2}{(1-c\mu)^3} \,. \end{cases}$$

Voorbeeld 8.1. *Werkperioden van een loket.*
Klanten komen op zekere tijdstippen aan bij een loket. De eerste klant die binnenkomt wordt meteen bediend. Indien er tijdens zijn bediening andere klanten binnenkomen moeten ze wachten in een rij. Als de eerste klant geholpen is, wordt onmiddellijk een volgende klant uit de rij geholpen, als er tenminste al klanten binnengekomen zijn, enz., totdat er op zeker moment een klant geholpen is, terwijl er geen klant meer wacht. De loketbediende, die vanaf de aankomst van de eerste klant ononderbroken gewerkt heeft, krijgt nu een rustperiode in afwachting van een volgende klant. De lengte van het tijdsinterval gedurende welke de loketbediende ononderbroken gewerkt heeft noemen we de *werkperiode* (*busy period*) van het loket. Deze werkperiode is gelijk aan de som van de bedieningstijden van de klanten die in deze werkperiode geholpen zijn.

We veronderstellen nu dat de bedieningstijden van de verschillende klanten onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn die alle dezelfde verdelingsfunctie F met eerste moment $\mu \leq \infty$ bezitten, dat de bedieningstijden onafhankelijk zijn van de aankomsttijden der klanten, en verder dat de klanten binnenkomen volgens een stationair Poissonproces met intensiteit c. De hierboven geschetste situatie blijkt dan beschreven te kunnen worden door het aan het begin van deze paragraaf ingevoerde vertakkingsproces.

De in een werkperiode geholpen klanten laten we corresponderen met de individuen in een stamboom; de levensduur van een individu uit de stamboom is de bedieningstijd van de corresponderende klant en we zeggen dat individu B een zoon van A is, als klant B tijdens de bediening van A is binnengekomen; in het bijzonder correspondeert de eerst binnengekomen klant met de stamvader van de stamboom. Het zo gedefinieerde vertakkingsproces voldoet aan de voorwaarden die aan het begin van deze paragraaf gesteld zijn; $\underline{v}$ kunnen we nu interpreteren als de werkperiode van het loket en $\underline{m}$ als het aantal klanten dat in deze werkperiode is geholpen. De verdelingsfunctie V van $\underline{v}$ wordt gegeven door (8.3) en de kansgenererende functie P van $\underline{m}$ door (8.17). Wegens stelling 8.1 is de eerste werkperiode en het aantal daarin geholpen klanten dan en slechts dan met kans 1 eindig als $c\mu \leq 1$, d.w.z. als de verwachte totale bedieningstijd van de klanten die in een tijdsinterval van lengte 1 binnenkomen ≤ 1 is.

Opmerking 8.2. In voorbeeld 8.1 doet het er niet toe in welke volgorde de klanten die in de rij staan te wachten bediend worden, als er maar steeds meteen een nieuwe klant geholpen wordt zodra de vorige klaar is. De verdelingsfuncties van de werkperiode en het aantal daarin geholpen klanten zijn onafhankelijk van de bedieningsvolgorde.

Voorbeeld 8.2. Auto's passeren een bepaald punt van de weg volgens een stationair Poissonproces met intensiteit c. Gedurende een tijdsduur δ is de weg ter plaatse gestremd (zeg door een ongeluk of een rood stoplicht). Na opheffing van de stremming heeft zich een file gevormd van $\underline{k}$ auto's, waarin $\underline{k}$ Poissonverdeeld is met verwachting $c\delta$. De auto's zetten zich één voor één in beweging; als een auto is weggereden, zet de volgende auto zich pas in beweging na een zekere reactietijd. We veronderstellen dat de verschillende reactietijden onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn die alle dezelfde verdelingsfunctie F met eerste moment $\mu \leq \infty$ bezitten, en dat de reactietijden onafhankelijk zijn van de aankomsttijden der auto's. Gedurende de tijd dat de auto's zich van voren uit de file losmaken, kunnen zich nieuwe auto's achter de file aansluiten.

We kunnen deze situatie beschrijven met $\underline{k}$ onderling onafhankelijke stambomen, waarin de $\underline{k}$ auto's die de file vormden toen de stremming werd opgeheven de stamvaders zijn. De "kinderen" van een auto A zijn de auto's die zich bij de file hebben aangesloten gedurende de reactietijd tussen het wegrijden van auto A en het wegrijden van de volgende auto uit de file. Wil het model kloppen, dan moeten we aannemen dat, indien de file nog uit één auto bestaat en deze laatste auto wegrijdt, de nu "lege" file nog gedurende een reactietijd $\underline{x}$ (verdelingsfunctie F) blijft bestaan. Komt een auto binnen deze reactietijd aan, dan stopt deze en rijdt door zodra de "lege" reactietijd verstreken is. Deze auto dient nog tot de file gerekend te worden (en hoeft niet de laatste van de file te zijn!). Is binnen de reactietijd geen auto gearriveerd, dan wordt de file geacht te zijn verdwenen na afloop van de reactietijd.

Zij $\underline{\tilde{v}}$ het tijdsverloop na opheffing van de stremming gedurende welke de file bestaat en zij $\underline{\tilde{m}}$ het totaal aantal auto's dat tot deze filevorming heeft bijgedragen. Dan is $\underline{\tilde{v}}$ de som van $\underline{k}$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen $\underline{v}$. Omdat $\underline{k}$ Poissonverdeeld is met verwachting $c\delta$ en onafhankelijk is van de termen van de som, geldt

$$(8.20)\qquad \begin{cases} \mathcal{E} e^{-\lambda\underline{\tilde{v}}} = e^{-c\delta(1-\check{V}(\lambda))} \\ \mathcal{E}\,\underline{\tilde{v}} = c\delta\,\mathcal{E}\underline{v} = \dfrac{c\delta\mu}{1-c\mu} \qquad \text{als} \quad c\mu \leqq 1 \,, \end{cases}$$

waarin $\check{V}$ door (8.3) gedefinieerd wordt.
Op dezelfde wijze volgt

$$(8.21)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{E} s^{\underline{\tilde{m}}} = e^{-c\delta(1-P(s))} \\ &\mathcal{E}\,\underline{\tilde{m}} = c\delta\mathcal{E}\underline{m} = \frac{c\delta}{1-c\mu} \qquad \text{als} \quad c\mu \leqq 1 \,, \end{aligned}$$

waarin P(s) door (8.17) gegeven wordt.

Voorbeeld 8.3. Als F een exponentiële verdelingsfunctie is, dus $\check{F}(\lambda) = \gamma/(\gamma+\lambda)$ voor een $\gamma > 0$, dan wordt (8.3) een vierkantsvergelijking in $\check{V}$, die expliciet oplosbaar is. We krijgen dan

$$(8.22)\qquad \check{V}(\lambda) = \frac{\dfrac{\lambda}{\gamma+c} + 1 - \sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{\gamma+c} + 1\right)^2 - \dfrac{4\gamma c}{\gamma+c}}}{\dfrac{2c}{\gamma+c}} \,.$$

Met behulp van stelling 4.6 volgt

$$(8.23)\qquad V'(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{c}}\, e^{-(\gamma+c)x}\, x^{-1}\, I_1\,(2\sqrt{\gamma c}\; x) \qquad \text{voor} \quad x > 0 \,.$$

Stelling 8.2. Zij F een verdelingsfunctie met eerste moment $\mu \in (0,\infty)$. Vergelijking (8.3) definieert dan en slechts dan voor alle $c \in (0,\mu^{-1}]$ een oneindig deelbare verdelingsfunctie V, als F oneindig deelbaar is.

Bewijs. Wegens stelling 8.1 definieert (8.3) voor $0 < c \leqq \mu^{-1}$ een verdelingsfunctie V_c.

a) Als F oneindig deelbaar is, is $\check{F}^{1/n}$ volledig monotoon op $(0,\infty)$ voor $n=1,2,\ldots$. Daar $\lambda+c-c\check{V}_c(\lambda)$ een op $(0,\infty)$ volledig monotone afgeleide bezit, is

$$\check{V}_c^{1/n}(\lambda) = \check{F}^{1/n}(\lambda+c-c\check{V}_c(\lambda)) \tag{8.24}$$

volledig monotoon op $(0,\infty)$ voor $n=1,2,\ldots$ wegens stelling 5.7. Dus V_c is een oneindig deelbare verdelingsfunctie als $0 < c \leqq \mu^{-1}$.

b) Wegens de monotonie van $\check{F}$ geldt

$$\check{F}(\lambda) \geqq \check{V}_c(\lambda) = \check{F}(\lambda+c-c\check{V}_c(\lambda)) \geqq \check{F}(\lambda+c) , \tag{8.25}$$

zodat $\lim_{c\downarrow 0} \check{V}_c(\lambda) = \check{F}(\lambda)$ voor alle $\lambda \geqq 0$. Als V_c oneindig deelbaar is in een rechteromgeving van $c=0$, dan is F oneindig deelbaar.

Gevolg. De verdelingsfunctie V met dichtheid (8.23) is oneindig deelbaar ($0 < c \leqq \gamma$).

Opmerking 8.3. Het is ons niet bekend of er gevallen zijn, waarin (8.3) voor sommige $c \in (0,\mu^{-1}]$ een oneindig deelbare verdelingsfunctie V definieert en voor andere $c \in (0,\mu^{-1}]$ niet.

Aanhangsel. Stelling van Lagrange-Bürmann.

Dr. Strackee merkte op dat de coëfficiënten van de machtreeksontwikkeling

$$(1) \qquad \Lambda^r(s) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(r)} s^n \qquad \text{voor} \quad r=1,2,\ldots; \quad 4pq|s|^2 < 1$$

berekend kunnen worden met de stelling van Lagrange-Bürmann. Aan Whittaker & Watson, A course of modern analysis, 4th ed. p.133 ontlenen we de volgende stelling en de daarop volgende toepassing.

Stelling. Zij ϕ een functie analytisch op en binnen een contour C om een punt a, en zij het complexe getal t zó, dat alle punten $z \in C$ voldoen aan de ongelijkheid

$$(2) \qquad |t\phi(z)| < |z-a| \,,$$

dan heeft de vergelijking in ζ

$$(3) \qquad \zeta = a + t\phi(\zeta)$$

precies één wortel $\zeta = \zeta(t)$ binnen C en voor iedere functie f die analytisch is op en binnen C geldt

$$(4) \qquad f(\zeta(t)) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f'(z)\, \phi^n(z))\right]_{z=a} .$$

Toepassing. We beschouwen de vergelijking

$$(5) \qquad \zeta = 1 + t\zeta^2 \quad .$$

Voor het bestaan van een contour C om 1 zó, dat

$$(6) \qquad |tz^2| < |z-1| \qquad \text{voor alle } z \in C$$

is het noodzakelijk en voldoende dat $|t| < \frac{1}{4}$.

Noodzakelijk: er moet een reeel getal $z > 1$ bestaan zó, dat $|t|z^2 < z-1$; dan moet $|t|z^2 - z + 1 = 0$ twee verschillende reële wortels bezitten, dus de discriminant $1 - 4|t|$ moet positief zijn.
Voldoende: zij $|t| < \frac{1}{4}$ en C de cirkel $|z-1| = 1$, dan geldt voor $z = 1 + e^{i\theta} \in C$ dat $|tz^2| = |t||z+2\cos\theta| < \frac{1}{4}|z+2\cos\theta| \leq 1 = |z-1|$.

Derhalve geldt dat voor $|t| < \frac{1}{4}$ de wortel $\zeta = \zeta(t)$ van (5) die binnen C ligt voldoet aan

$$(7) \qquad \zeta^r(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (rz^{r-1}z^{2n})\right]_{z=1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{2n+r} \binom{2n+r}{n} t^n \qquad (r=1,2,\ldots) .$$

Van de wortels van (5)

$$(8) \qquad \begin{cases} \zeta_1(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} , \\[2ex] \zeta_2(t) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4t}}{2t} , \end{cases}$$

is $\zeta_1(t)$ analytisch voor $|t| < \frac{1}{4}$ met $\zeta_1(0) = 1$ en is $\zeta_2(t)$ analytisch voor $|t| < \frac{1}{4}$ met uitzondering van de pool $t=0$. Door (7) wordt een functie $\zeta(t)$ gedefinieerd die analytisch is voor $|t| < \frac{1}{4}$ met $\zeta(0) = 1$ en die voor elke t met $|t| < \frac{1}{4}$ gelijk is aan $\zeta_1(t)$ of $\zeta_2(t)$. Dus $\zeta(t) = \zeta_1(t)$ voor $|t| < \frac{1}{4}$.

De functie $\Lambda(s)$ gedefinieerd door (1) voldoet aan

$$(9) \qquad \frac{\Lambda(s)}{ps} = 1 + pqs^2 \left(\frac{\Lambda(s)}{ps}\right)^2 .$$

Wegens het voorgaande geldt voor $|pqs^2| < \frac{1}{4}$

$$(10) \qquad \left(\frac{\Lambda(s)}{ps}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} (pqs^2)^n \frac{r}{2n+r} \binom{2n+r}{n} \qquad (r=1,2,\ldots) ,$$

en dus

$$(11) \qquad \begin{cases} \lambda^{(r)}_{r+2k} = \dfrac{r}{2+k} \dbinom{r+2k}{k} p^{r+k} q^k & \text{voor } k=0,1,\ldots ; \ r=1,2,\ldots ; \\[2ex] \lambda^{(r)}_{n} = 0 & \text{voor } n=0,1,2,\ldots ; \ r=1,2,\ldots \text{ met } n-r \neq 0,2,4,\ldots \end{cases}$$