STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 395 a

Syllabus voor het
colloquium Waarschijnlijkheidsrekening

o.l.v. Prof. dr. J.Th. Runnenburg

Hoofdstuk II Reguliere variatie en Laplace-getransformeerden

door

L. de Haan

april 1968 - maart 1969

maart 1969

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inleiding

Het hier behandelde is voor een groot deel ontleend aan de hoofdstukken VIII en XIII van het tweede deel van het boek van Feller [1]. In de paragrafen 1 en 3 worden de definitie en een groot aantal eigenschappen van regulier variërende funkties gegeven; hierbij is gebruik gemaakt van de oorspronkelijke artikelen van Karamata ([3] en [4]). Als toepassingen zijn behandeld: limietverdelingen van maxima van steekproeven (§2; uit [2]), Tauberstellingen (§4; uit [1]), limietverdelingen van steekproefgemiddelden (met alleen een normering door schaaltransformatie; uit [1]) en zwakke wetten van de grote aantallen (uit [1] en [2]).

Gebruikte literatuur:

[1] Feller, W. (1966). An introduction to probability theory and its applications 2. Wiley, New York.

[2] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. of Math. 44 423-453.

[3] Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance régulière. Mathématica (Cluj) 4 38-53.

[4] Karamata, J. (1933). Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. Bull. Soc. Math. France 61 55-62.

Inhoud

II. REGULIERE VARIATIE EN LAPLACE GETRANSFORMEERDEN

§ 1 Reguliere variatie

(Feller 2 VIII 8)

We gebruiken voor $x > 0$ de volgende notatie

1.1
$$x^{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad x > 1 \\ 1 & \text{voor} \quad x = 1 \\ \infty & \text{voor} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$x^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{voor} \quad x < 1 \\ 1 & \text{voor} \quad x = 1 \\ 0 & \text{voor} \quad x > 1 \end{cases}$$

Opmerking 1.1. $\lim_{n\to\infty} x^{n} = x^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} x^{-n} = x^{-\infty}$ voor $x > 0$.

Definitie 1.1. Een positieve funktie U, gedefinieerd op $(0, \infty)$, heet regulier variërend bij oneindig als voor elke $x > 0$.

1.2.
$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\rho}$$

met $-\infty < \rho < \infty$, we noemen ρ de variatie-exponent van U bij oneindig; als $\rho = 0$ heet U langzaam variërend.
Als (1.2) geldt met $\rho = \pm\infty$, dan heet U snel variërend bij oneindig.

Voorbeeld 1.1. Enkele voorbeelden van funkties die regulier of snel variëren bij oneindig, zijn de volgende:

$$U(x) = (1 + x^{2}) \quad \text{met} \quad \rho = 2p$$
$$U(x) = \log(1 + x) \quad \text{met} \quad \rho = 0$$
$$U(x) = e^{x} \quad \text{met} \quad \rho = \infty.$$

Een voorbeeld van een funktie die niet regulier of snel variëert bij oneindig, is

$$U(x) = 2 + \sin x;$$

dit blijkt uit het feit dat bij de keuze $x = \frac{1}{2}$ en $t_n = (2n+1)\pi$ de rij

$$\frac{U(t_n x)}{U(t_n)} = \begin{cases} 3/2 & \text{voor even } n \\ 1/2 & \text{voor oneven } n \end{cases}$$

geen limiet heeft voor $n \to \infty$.

Opmerking 1.2. De betekenis van (1.2) is wellicht wat duidelijker als we de volgende transformatie uitvoeren:

$$V(t) = \log U(e^t);$$

dan volgt uit (1.2)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t+x) - V(t)}{x} = \rho \quad \text{voor alle } x \neq 0.$$

Opmerking 1.3. We zullen laten bewijzen dat als (1.2) geldt,

$$\text{1.3.} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\, U(x) \quad \begin{cases} \infty & \text{voor } \alpha > -\rho \\ 0 & \text{voor } \alpha < -\rho \end{cases}$$

Stelling 1.1. Een positieve monotone functie U op $(0, \infty)$ varieert regulier of snel bij oneindig als er een overal dichte deelverzameling A van $(0, \infty)$ bestaat zó dat voor $x \in A$

$$\text{1.4.} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = \psi(x) \leq \infty$$

bestaat. U varieert regulier bij oneindig als

$$\text{1.5.} \qquad 0 < \psi(x) < \infty$$

voor tenminste één $x \neq 1$.

Bewijs: Uit de monotonie van U volgt de monotonie van ψ.
Stel dat $\psi(x_0) = \infty$ voor een $x_0 > 1$.
Dit kan alleen als U en ψ monotoon niet-dalend zijn. Direkt blijkt dan dat de limiet (1.3) bestaat voor alle $x > x_0$ met $\psi(x) = \infty$. Stel dat er een $1 < x_1 < x_0$ is met $\psi(x_1) < \infty$; we nemen een natuurlijk getal n zodanig dat

$$x_0^{2^{-n}} \leq x_1,$$

dus

$$\frac{U(tx_0^{2^{-n}})}{U(t)} \leq \frac{U(tx_1)}{U(t)} \leq M \leq \infty \quad \text{voor alle } t > 0.$$

Uit de identiteit

$$\frac{U(tx_0^{2^{-(n-1)}})}{U(t)} = \frac{U(tx_0^{2^{-(n-1)}})}{U(tx_0^{2^{-n}})} \circ \frac{U(tx_0^{2^{-n}})}{U(t)}$$

blijkt dan dat

$$\frac{U(tx_0^{2^{-(n-1)}})}{U(t)} \le M^2 \text{ voor alle } t > 0$$

en zo voortgaande vinden we

$$\frac{U(tx_0)}{U(t)} \le M^{n+1} \quad \text{voor alle } t > 0,$$

in tegenspraak met $\psi(x_0) = \infty$. De limiet (1.3) bestaat dus voor alle $x > 1$ met $\psi(x) = \infty$.

Verder geldt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t/x_0)}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{U(tx_0)} = 0.$$

Analoog aan het bovenstaande bewijst men hiermee dat $\psi(x) = 0$ voor $x < 1$ zodat $\psi(x) = x^{\infty}$ voor $x > 0$.

Evenzo bewijst men

$$\psi(x_0) = 0 \text{ voor een } x_0 > 1 \Rightarrow \psi(x) = x^{-\infty}.$$

Uitgaande van een $x_0 < 1$ komt men tot overeenkomstige konklusies.
Hieruit blijkt dat ofwel $\psi(x) = x^{\pm\infty}$ ofwel

$$0 < \psi(x) < \infty \quad \text{voor alle} \quad x > 0.$$

We bekijken nu het laatste geval. Uit de identiteit

1.6. $$\frac{U(tx_1x_2)}{U(t)} = \frac{U(tx_1x_2)}{U(tx_2)} \circ \frac{U(tx_2)}{U(t)}.$$

blijkt dat voor $x_1, x_2 \in A$ geldt: $\psi(x_1x_2)$ bestaat en

1.7 $$\psi(x_1x_2) = \psi(x_1)\,\psi(x_2).$$

De verzameling

1.8 $$B = \{y \mid y = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k};\ x_1, x_2, \ldots, x_k \in A,\ n_1, n_2, \ldots, n_k \text{ geheel}\}$$

vormt een groep t.o.v. de vermenigvuldiging en $A \subset B$. Uit (1.6) en (1.7)

zien we dat deze identiteiten ook gelden voor alle y_1, $y_2 \in B$; ook B ligt dicht in $(0, \infty)$. In feite is het niet nodig te eisen dat A dicht ligt, het is voldoende dit te eisen voor de verzameling B.
De funktie ψ is monotoon op B; we definiëren voor alle $x > 0$

$$\Phi(x) = \lim_{\substack{y \downarrow x \\ y \in A}} \psi(y)$$

Voor de funktie Φ geldt de eigenschap (1.7) en $0 < \Phi(x) < \infty$ voor $x > 0$. We definiëren

$$v(x) = \{\Phi(e)\}^{-x}\ \Phi(e^x),$$

dan geldt
$v(1) = 1$,
$v(x) > 0$ voor alle reële x,
$v(x_1 + x_2) = v(x_1).v(x_2)$ voor alle reële x_1 en x_2,
$v(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = v(x_1).v(x_2) \ldots v(x_n)$ voor alle reële $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Kies $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ dan geldt voor $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

$$v^n(\tfrac{1}{n}) = 1 \Rightarrow v(\tfrac{1}{n}) = 1 \Rightarrow v(\tfrac{m}{n}) = v^m(\tfrac{1}{n}) = 1.$$

Voor elk rationaal getal $r > 0$ geldt dus

$$\{\Phi(e)\}^{-r}\ \Phi(e^r) = 1$$

en wegens de rechtscontinuïteit van Φ

1.9 $$\Phi(x) = x^{\log \Phi(e)} \quad \text{voor } x > 1.$$

Op analoge manier bewijst men (1.9) voor $x < 1$ (neem $w(x) = \{\Phi(e)\}^x\ \Phi(e^{-x})$).
Wegens de continuïteit van $\Phi(x)$ en de monotonie van $\psi(x)$ geldt

$$\psi(x) = \Phi(x) \text{ voor } x \in A \text{ en}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = \Phi(x) \text{ voor alle } x > 0.$$

Opmerking 1.4. Bij een niet-stijgende U hoort een niet-positieve variatie-exponent; ρ is in dit geval te beschouwen als een maat voor de dalingssnelheid van U.

Opmerking 1.5. Het is voldoende te eisen dat de kleinste verzameling B die A omvat en een groep is t.o.v. de vermenigvuldiging, dicht ligt in

$(0, \infty)$. Een verzameling A die dicht ligt in een interval, voldoet aan die eis. We zullen later bewijzen (in het bewijs van lemma 2.1), dat $A = \{x, y\}$ waarbij $\frac{\log x}{\log y}$ irrationaal is, ook aan die eis voldoet.

Voorbeeld 1.2. Onder de monotone funkties zijn voor ons vooral van belang de verdelingsfunkties. Voorbeelden van verdelingsfunkties $F(x)$ waarbij $1 - F(x)$ regulier of snel varieert bij oneindig, zijn:

de normale verdeling: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ met $\rho = -\infty$,

de gammaverdeling: $F(x) = \int_{0}^{x} \frac{u^\alpha}{\alpha!} e^{-u} du$ met $\rho = -\infty$,

De Cauchyverdeling: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{du}{1 + u^2}$ met $\rho = -1$;

men verifieert dit gemakkelijk met de regel van de l'Hôpital. Verder nog een voorbeeld van een discrete verdeling:
de negatief-binomiale verdeling: $F(x) = 1 - q^{[x]}$ met $\rho = -\infty$.
Een monotone funktie die niet regulier of snel varieert, is

$$U(x) = \exp\{-[\log x]\};$$

dit blijkt uit het feit dat bij de keuze $x = e^{\frac{1}{2}}$ en $t_n = e^{n/2}$ de rij

$$\frac{U(t_n x)}{U(t_n)} = \begin{cases} 1 & \text{voor even } n \\ e^{-1} & \text{voor oneven } n \end{cases}$$

geen limiet heeft voor $n \to \infty$.

Stelling 1.2. a. Een positieve monotone functie U op $(0, \infty)$ varieert dan en slechts dan regulier bij oneindig als er twee rijen reële getallen $\{\lambda_n\}$ en $\{a_n\}$ bestaan met

1.10
$$\lambda_n > 0 \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

en een overal dichte deelverzameling A van $(0, \infty)$ zó dat voor $x \in A$

1.11
$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n U(a_n x)$$

bestaat, waarbij voor tenminste twee waarden van $x > 0$ geldt

1.12 $$0 < \chi(x) < \infty.$$

Bovendien geldt dan (1.11) voor alle $x > 0$ en is

1.13 $$\chi(x) = (\frac{x}{c})^{\rho}$$

voor een reële ρ en een $c > 0$.

b. Een positieve monotone funktie U op $(0, \infty)$ varieert dan en slechts dan snel bij oneindig als er een $c > 0$ is zó dat (1.11) geldt voor alle $x \neq c$ (met rijen $\{\lambda_n\}$ en $\{a_n\}$ die opnieuw aan (1.10) voldoen), waarbij

1.14 $$\chi(x) = (\frac{x}{c})^{\pm\infty} \text{ voor die } x.$$

Gevolg 1.1. Als bij een positieve monotone funktie U op $(0, \infty)$ die niet regulier of snel varieert bij oneindig, rijen $\{\lambda_n\}$ en $\{a_n\}$ te vinden zijn zó dat de limiet (1.11) bestaat voor alle x, dan is $\chi(x) \equiv 0$ of $\chi(x) \equiv \infty$.

Bewijs: De beweringen van de stelling voor een niet-dalende funktie U zijn equivalent aan dezelfde beweringen voor de niet-stijgende funktie $\frac{1}{U}$. We zullen het bewijs alleen geven voor het geval U niet-stijgend is. Verder sluiten we het triviale geval $U(\infty) > 0$ uit (in dat geval gelden de beweringen onder a. met $\rho = 0$, $\lambda_n = 1$ en $a_n = n$).

1. Veronderstel dat (1.11) geldt samen met (1.12) of (1.14). We definieren voor $t > 0$

$$n = n(t) = \min_{a_{m+1} > t} m,$$

dan is

$$a_n \leq t < a_{n+1},$$

Voor alle $x, y > 0$ geldt dan

1.15 $$\frac{U(a_n x)}{U(a_{n+1} y)} \geq \frac{U(tx)}{U(ty)} \geq \frac{U(a_{n+1} x)}{U(a_n y)}.$$

a. Stel dat er positieve getallen x_1 en x_2 zijn met

$$0 < \chi(x) < \infty \text{ voor } x = x_1 \text{ en } x = x_2.$$

We definiëren

$$\Psi(x) = \frac{\chi(xx_1)}{\chi(x_1)}$$

Uit (1.15) met $y = x_1$ en (1.11) volgt voor $x \in A$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(txx_1^{-1})}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(tx_1)} = \frac{\chi(x)}{\chi(x_1)} = \psi(xx_1^{-1}) \leq \infty.$$

Uit stelling 1.1 volgt wegens $\psi(x_2x_1^{-1}) < \infty$ het regulier variëren van U en de identiteit (1.13).

b. Stel dat er een $c > 0$ is met

$$\chi(x) = (\tfrac{x}{c})^{-\infty} \quad \text{voor } x \neq c.$$

Voor getallen $x, y \in A$ met $x < c < y$ volgt uit (1.15)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(txy^{-1})}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(ty)} = \infty.$$

De verzameling $\{z \mid z = xy^{-1};\ x, y \in A,\ x < c < y\}$ ligt dicht in $(1, \infty)$; uit stelling 1.1 volgt dan dat U snel varieert bij oneindig met exponent $-\infty$.

2. Veronderstel dat U regulier of snel varieert bij oneindig. We definiëren voor $0 < y < \infty$

1.16 $$V(y) = \inf_{U(x)\leq y} x,$$

dan geldt

$$x > V(y) \Rightarrow U(x) \leq y$$
$$x < V(y) \Rightarrow U(x) > y,$$

dus (met $x \downarrow V(y)$ resp. $x \uparrow V(y)$)

$$U(V(y) + 0) \leq y \leq U(V(y) - 0)$$

en

1.17 $$\frac{U(V(y) + 0)}{U(V(y))} \leq \frac{y}{U(V(y))} \leq \frac{U(V(y) - 0)}{U(V(y))}.$$

Verder geldt

1.18 $$\lim_{x\to\infty} U(x) = 0 \Rightarrow \lim_{y\downarrow 0} V(y) = \infty.$$

a. Stel dat U regulier varieert met exponent $\rho \leq 0$.

Voor elke $\varepsilon > 0$ en elke $x < 1$ geldt voor $t > t(\varepsilon, x)$

$$1 \leq \frac{U(t-0)}{U(t)} \leq \frac{U(tx)}{U(t)} < x^{\rho} + \varepsilon;$$

hieruit volgt

1.19 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t-0)}{U(t)} = 1.$$

Op analoge manier blijkt

1.20 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t+0)}{U(t)} = 1.$$

Uit (1.17) t/m (1.20) volgt

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{U(V(y))}{y} = 1.$$

Met de keuze

1.21 $$\lambda_n = n \quad \text{en} \quad a_n = V(\tfrac{1}{n})$$

geldt dan

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\, U(a_n x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n\, U(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{U(a_n x)}{U(a_n)} = x^{\rho} \text{ voor } x > 0.$$

b. Veronderstel dat U snel varieert bij oneindig met exponent $-\infty$. Uit (1.17) volgt voor $x > 1$

$$\liminf_{y\downarrow 0} \frac{y}{U(xV(y))} \geq \liminf_{y\downarrow 0} \frac{U(V(y)+0)}{U(xV(y))} \geq \liminf_{y\downarrow 0} \frac{U(x^{\frac{1}{2}}V(y))}{U(xV(y))} = \infty$$

en voor $x > 1$

$$\limsup_{y\downarrow 0} \frac{y}{U(xV(y))} \leq \limsup_{y\downarrow 0} \frac{U(V(y)-0)}{U(xV(y))} \leq \limsup_{y\downarrow 0} \frac{U(x^{\frac{1}{2}}V(y))}{U(xV(y))} = 0$$

zodat voor de keuze (1.21) geldt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\, U(a_n x) = x^{-\infty} \quad \text{voor} \quad x \neq 1.$$

Opmerking 1.6. Uit het volgende voorbeeld blijkt dat in (1.14) $c \neq 1$ mogelijk is en tegelijk dat de bewering voor $x = c$ niet juist hoeft te zijn. Neem

$$U(x) = e^{-x},\ a_n = a + \log n,\ \lambda_n = n^c \text{ met } c > 0,$$

dan is

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\, U(a_n x) = \lim_{n\to\infty} e^{-ax}\, n^{c-x} = \begin{cases} \infty & \text{voor } x < c \\ e^{-ac} & \text{voor } x = c \\ 0 & \text{voor } x > c \end{cases}$$

Opmerking 1.7. Uit het bewijs van stelling 1.2 blijkt dat het steeds mogelijk is $\lambda_n = n$ en $a_n = V(\frac{1}{n})$ te kiezen.

<u>Opmerking 1.8.</u> Uit het bewijs van stelling 1.2 blijkt nog dat bij niet-stijgende funkties U de eis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$$

verzwakt kan worden tot de volgende: bij elke $\varepsilon > 0$ is een rij $\{\lambda_n\}$ te vinden met

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} > 1-\varepsilon.$$

§2. Limietverdelingen van maxima van steekproeven

(B. Gnedenko: Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Annals of Math. 44 (1943) p. 423-453)

Definitie 2.1 We zeggen dat een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tot het aantrekkingsgebied van de niet-ontaarde verdelingsfunktie F behoort als er rijen reële getallen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestaan met

2.1 $\qquad a_n > 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$

zodanig dat

2.2 $\qquad F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{\text{cons.}} F(x).$

Stelling 2.1 Laat gegeven zijn een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$, rijen reële getallen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ met

$a_n > 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$

en een niet-ontaarde verdelingsfunktie F zodanig dat

2.3 $\qquad F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{\text{cons.}} F(x).$

Bij rijen reële getallen $\{a_n'\}$ en $\{b_n'\}$ met

$a_n' > 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$

bestaat dan en slechts dan een niet-ontaarde verdelingsfunktie F' zodanig dat

2.4 $\qquad F_n(a_n' x + b_n') \xrightarrow{\text{cons.}} F'(x)$

als de limieten

2.5 $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n'}{a_n} = \alpha \quad$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_n' - b_n}{a_n} = \beta$

bestaan, waarbij $\alpha \neq 0$. Bovendien geldt dan

2.6 $\qquad F'(x) = F(\alpha x + \beta)$

voor alle x.

Bewijs Veronderstel eerst (2.3) en (2.5) gegeven. Met $y = \alpha x + \beta$ geldt voor $n \geq n(\varepsilon)$

$$a_n(y-\varepsilon) + b_n < a_n' x + b_n' < a_n(y+\varepsilon) + b_n,$$

dus

$$F_n(a_n(y-\varepsilon) + b_n) \leq F_n(a_n' x + b_n') \leq F_n(a_n(y+\varepsilon) + b_n).$$

Wegens (2.3) geeft dit (2.4) en 2.6).

Veronderstel anderzijds (2.3) en (2.4) gegeven. Dan zijn er getallen $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, continuïteitspunten van F en F', met

$$0 \leq F(x_1) < F'(x_2) \leq F'(x_3) < F(x_4) \leq 1.$$

Met (2.3) en (2.4) volgt hieruit dat voor $n \geq n_0$

2.7 $$a_n x_1 + b_n < a_n' x_2 + b_n' \text{ en } a_n' x_3 + b_n' < a_n x_4 + b_n.$$

Tellen we deze ongelijkheden bij elkaar op, dan blijkt de rij $\{\frac{a_n'}{a_n}\}$ naar boven begrensd te zijn:

$$\frac{a_n'}{a_n} \leq \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_2} < \infty,$$

Wegens de symmetrie geldt ook $\frac{a_n'}{a_n} > c > 0$. Uit dezelfde ongelijkheden (2.7) blijkt dat de rij $\{\frac{b_n' - b_n}{a_n}\}$ begrensd is:

$$-\infty < c_1 < x_1 - \frac{a_n'}{a_n} x_2 \leq \frac{b_n' - b_n}{a_n} \leq x_4 - \frac{a_n'}{a_n} x_3 < c_2 < \infty .$$

Er is dus een deelrij $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ der natuurlijke getallen waarvoor

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k}'}{a_{n_k}} = \alpha \neq 0 \quad \text{en} \lim_{k \to \infty} \frac{b_{n_k}' - b_{n_k}}{a_{n_k}} = \beta.$$

Uit het eerste deel van de stelling volgt nu

$$F'(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(a_n' x + b_n') = \lim_{k \to \infty} F_{n_k}(a_{n_k}' x + b_{n_k}') = F(\alpha x + \beta).$$

Er blijft nog over te bewijzen dat α en β de enige limietpunten zijn.

Stel dat de rijen $\{\frac{a'_n}{a_n}\}$ en $\{\frac{b'_n - b_n}{a_n}\}$ limietpunten α' resp. β' bezitten met

$$(\alpha',\beta') \neq (\alpha,\beta),$$

dan is

$$F'(x) = F(\alpha' x + \beta'),$$

dat wil zeggen

$$F(x) = F(\alpha \frac{x-\beta}{\alpha} + \beta) = F'(\frac{x-\beta}{\alpha}) = F(\alpha' \frac{x-\beta}{\alpha} + \beta'),$$

zodat met $\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\alpha}$ en $\beta_1 = \beta' - \frac{\alpha'}{\alpha}\beta$ geldt:

$$F(x) = F(\alpha_1 x + \beta_1) \text{ voor alle } x;$$

hierin is $(\alpha_1,\beta_1) \neq (1,0)$.

Als $\alpha_1 = 1$, dan is voor alle x

$$F(x) = F(x + \beta_1) = F(x + n\beta_1) \text{ voor alle } n,$$

zodat F constant is; dit is dus uitgesloten.

Als $\alpha_1 \neq 1$, dan is voor alle x

2.8 $$F(x) = F(\alpha_1 x + \beta_1) = F(\alpha_1^2 x + \alpha_1\beta_1 + \beta_1) = F(\alpha_1{}^n x + \beta_1 \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_1{}^k) =$$
$$= F(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} + \{x - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}\}\alpha_1{}^n).$$

Neemt men in (2.8) de limiet $n \to \infty$ dan volgt zowel voor $\alpha_1 > 1$ als voor $\alpha_1 < 1$

$$F(x) = \mathcal{l}\,(x - \frac{\beta_1}{1-\alpha_1})$$

in strijd met het gegeven.

In het algemeen zal men voor b_n de verwachting en voor a_n^2 de variantie van de verdelingsfunktie F_n - gesteld dat die bestaan - kunnen kiezen. Dit is niet altijd mogelijk; voorbeeld: neem een verdelingsfunktie F met verwachting nul en variantie één.
We definieren

$$F_n = (1-\frac{1}{n})\ F(x) + \frac{1}{n}\ \mathcal{L}\ (x-n);$$

dan geldt

$$F_n(x) \xrightarrow{\text{cons.}} F(x)$$

dus $a_n = 1$ en $b_n = 0$, maar $\sigma_n^2 = 1 - \frac{1}{n} + n - 1$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{a_n} = \infty.$$

We formuleren een stelling die zegt hoe we de rijen coëfficienten kunnen kiezen als funktie van de gegeven rij verdelingsfunkties.
Eerst een definitie:

<u>Definitie 2.2.</u> Bij een verdelingsfunktie F(x) definiëren we de funktie

2.1 $$\tilde{F}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\} \qquad \text{voor } 0 < y < 1 .$$

Dan geldt (zie 1.17 blz. 7)

2.2 $$F(\tilde{F}(y) - 0) \leq y \leq F(\tilde{F}(y)) .$$

<u>Stelling</u> Laat G(x) een verdelingsfunktie zijn waarvoor de vergelijking

$$G(x) = c$$

voor elke c met $0 < c < 1$ precies één oplossing heeft *).

---

*) Dat wil zeggen dat G(x) continu en strikt stijgend is op de verzameling $\{x \mid 0 < G(x) < 1\}$.

Laat verder bij de rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ rijen reële getallen $\alpha_n > 0$ en β_n te vinden zijn zò dat

2.3 $$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x+\beta_n) = G(x) \quad \text{voor alle } x ,$$

dan is

2.4 $$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x+b_n) = G((x_1-x_0)x+x_0) \quad \text{voor alle } x ,$$

waarbij

2.5 $$b_n = \tilde{F}_n(b) , \ a_n = \tilde{F}_n(d) - b_n , \ x_0 = \tilde{G}(b) , \ x_1 = \tilde{G}(d) ;$$

hierbij zijn b en d willekeurig (mits $0 < b < d < 1$) .

Opmerking 2.2 Als we definiëren $G^*(x) = G((x_1-x_0)\, x + x_0)$ dan is $\tilde{G}^*(b) = 0$ en $\tilde{G}^*(d) = 1$.

Bewijs: Bij elke $\varepsilon > 0$ en $\varepsilon_1 > 0$ is er een n_0 te vinden in dat voor $n \geq n_0$

2.6 $$F_n(\alpha_n(x_0-\varepsilon)+\beta_n) < G(x_0-\varepsilon) + \varepsilon_1 \text{ en}$$

2.7 $$F_n(\alpha_n(x_0+\varepsilon)+\beta_n) > G(x_0+\varepsilon) - \varepsilon_1 .$$

Kiezen we

2.8 $$\varepsilon_1 = \min(G(x_0) - G(x_0-\varepsilon), G(x_0+\varepsilon) - G(x_0)) > 0 ,$$

dan is

$$F_n(\alpha_n(x_0-\varepsilon) + \beta_n) < G(x_0) < F_n(\alpha_n(x_0+\varepsilon) + \beta_n).$$

Uit de continuiteit van G volgt

2.9 $$F_n(b_n-0) \leq G(x_0) \leq F_n(b_n) \quad \text{voor alle } n,$$

dus

2.10 $$F_n(b_n-0) < F_n(\alpha_n(x_0+\varepsilon) + \beta_n) \text{ en}$$

$$F_n(\alpha_n(x_0-\varepsilon) + \beta_n) < F_n(b_n) .$$

Hieruit volgt

2.11 $$\alpha_n(x_0-\varepsilon) + \beta_n < b_n \leq \alpha_n (x_0 + \varepsilon) + \beta_n ,$$

dat wil zeggen

2.12 $$\left| \frac{b_n-\beta_n}{\alpha_n} - x_0 \right| \leq \varepsilon \qquad \text{voor } n \geq n_0 .$$

Uit relatie (2.8) met x_1 i.p.v. x_0 volgt via dezelfde redenering

2.13 $$\left|\frac{a_n}{\alpha_n} - (x_1-x_0) + \frac{b_n-\beta_n}{\alpha_n} - x_0\right| \leq \varepsilon \qquad \text{voor } n \geq n_1 .$$

Stelling 2.1 geeft dan het gestelde.

Opmerking 2.3 Voor verdelingsfunkties G(x), die niet overal continu zijn, kan het gebeuren dat $a_n = 0$ voor alle n . Vervangen we in de stelling de eis van continuiteit van G(x) door de eis

2.14 $$\tilde{G}(b) < \tilde{G}(d) ,$$

dan blijft de bewering gelden. Deze eis lijkt ernstiger dan ze is: als G_1 en G_2 tot hetzelfde type behoren en de eis is vervuld voor G_1, dan ook voor G_2. Dit geldt ook voor 2.19 (volgende bladzijde).

Bewijs: Inplaats van een willekeurige $\varepsilon > 0$ nemen we ε zodanig dat de funktie G continu is in $x_0-\varepsilon, x_0 + \varepsilon$, $x_1 - \varepsilon$ en $x_1 + \varepsilon$. Verder kiezen we in (2.6) voor ε_1 in de eerste relatie

2.15 $$\varepsilon_1 = G(x-0) - G(x_0-\varepsilon) > 0$$

en in de tweede relatie

2.16 $$\varepsilon_1 = G(x_0+\varepsilon) - G(x_0) > 0 \text{ ,}$$

dan is

2.17 $$F_n(\alpha_n(x_0-\varepsilon) + \beta_n) < G(x_0-0) \leq b \leq G(x_0) < F_n(\alpha_n(x_0+\varepsilon)+\beta_n).$$

Uit deze ongelijkheden en

2.18 $$F_n(b_n-0) \leq b \leq F_n(b_n)$$

volgt weer (2.10). De rest van het bewijs gaat als tevoren.

Opmerking 2.4 Uit het voorgaande bewijs volgt dat de eis van strikt stijgend zijn van G te vervangen is door de volgende: de verzamelingen

2.19 $$\{x \mid \breve{G}(G(x)) = \breve{G}(a)\} \text{ en } \{x \mid \breve{G}(G(x)) = \breve{G}(b)\}$$

bevatten hoogstens één punt. Dat wil zeggen: er is een $\varepsilon > 0$ zò dat het interval $[x_0, x_0+\varepsilon)$ geen interval bevat waarop de verdelingsfunktie constant is.

Definitie 2.3 We definiëren equivalentieklassen van verdelingsfunkties, typen genaamd, door middel van de volgende equivalentierelatie: F en F' zijn van hetzelfde type als er een $\alpha > 0$ en β bestaan zodanig dat voor alle x

$$F'(x) = F(\alpha x + \beta).$$

<u>Opmerking 2.5</u> Uit stelling 2.1 volgt: aantrekkingsgebieden van verdelingsfunkties van hetzelfde type zijn dezelfde, aantrekkingsgebieden van verdelingsfunkties van verschillend type zijn disjunkt. De uitdrukking "de rij stochastische variabelen $\{\underline{x}_n\}$ is asymptotisch normaal" is nu dus zinvol geworden.

Stel dat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dezelfde verdelingsfunktie F. We definiëren

2.9 $$\underline{x}_{(n)} = \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n),$$

dan is

2.10 $$P\{\underline{x}_{(n)} \leq x\} = F^n(x).$$

We vragen ons af of de rij verdelingsfunkties $F_n = F^n$ tot het aantrekkingsgebied van een niet-singuliere verdelingsfunktie behoort en zo ja, welke typen als limiet mogelijk zijn. We beginnen bij het laatste.

Stelling 2.2 Als bij een niet-ontaarde verdelingsfunktie G een verdelingsfunktie F te vinden is zodanig dat de rij F^n tot het aantrekkingsgebied van G behoort, dan bestaan er rijen reële getallen $\{\alpha_k\}$ en $\{\beta_k\}$ met

$$\alpha_k > 0 \text{ voor } k = 1,2,3, \ldots$$

zodanig dat

2.11 $$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x)$$

voor alle x.

Bewijs Uit

2.12 $$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

volgt

$$\lim_{n \to \infty} \{F^n(a_{nk} x + b_{nk})\}^k = G(x)$$

dat wil zeggen

2.13 $$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{nk}x + b_{nk}) = G^{1/k}(x) \quad \text{voor } k = 1,2,3, \ldots$$

Passen we nu stelling 2.1 toe met $F(x) = G(x)$, $F'(x) = G^{1/k}(x)$,

$a_n' = a_{nk}$ en $b_n' = b_{nk}$, dan volgt (2.11) uit (2.12) en (2.13).

Opmerking 2.3 Uit stelling 2.1 weten we ook, dat voor elke keuze van $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ waarvoor (2.12) geldt, voldaan is aan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{a_n} = \alpha_k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{nk} - b_n}{a_n} = \beta_k \quad \text{voor } k = 1,2,3, \ldots \quad .$$

Opmerking 2.4 Voor elk reël getal $s > 1$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} F^{[ns]}(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) = G(x);$$

dan geldt ook

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) = G^{1/s}(x).$$

Evenals in het bewijs van stelling 2.2 volgt hieruit het bestaan van funkties α_s en β_s met

$$\alpha_s > 0 \text{ voor } s > 1$$

zodanig dat voor $s > 1$

$$G^s(\alpha_s x + \beta_s) = G(x)$$

en

2.14 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{[ns]}}{a_n} = \alpha_s \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} = \beta_s$$

<u>Lemma 2.1</u> Laat G de groep van de reële getallen zijn t.o.v. de optelling en H een ondergroep van G. Dan geldt: ofwel H is dicht in G ofwel er is een element $x_0 \in G$ zodanig dat $H = \{x \mid x = nx_0,\ n \text{ geheel}\}$.

<u>Bewijs</u> We definiëren

2.15 $$x_0 = \inf_{\substack{x \in H \\ x > 0}} x.$$

Stel dat $x_0 = 0$, dan is bij elke $\varepsilon > 0$ een element $x(\varepsilon) \in H$ te vinden zò dat $0 < x(\varepsilon) < \varepsilon$. Voor elke $y \in G$, $y > 0$ geldt

$$\left[\frac{y}{x(\varepsilon)}\right] \cdot x(\varepsilon) \le y < \left\{\left[\frac{y}{x(\varepsilon)}\right] + 1\right\} x(\varepsilon),$$

zodat H dicht ligt in G.
Stel dat $x_0 > 0$ en dat H niet voortgebracht wordt door x_0.
Dan is er een element $y \in H$, $y > 0$ en een natuurlijk getal n zò dat

$$nx_0 < y < (n + 1)\, x_0,$$

ook is er een $y_1 \in H$ met

$$nx_0 \le ny_1 < y < (n + 1)\, x_0.$$

Nu is $y - ny_1 \in H$ en

$$0 < y - ny_1 < (n + 1)\, x_0 - nx_0 = x_0,$$

in tegenspraak met de definitie van x_0.

Gevolg 2.1 Laat G de groep van de positieve reële getallen zijn t.o.v. de vermenigvuldiging en H een ondergroep van G. Dan geldt: ofwel H is dicht in G ofwel er is een element $x_0 \in G$ zodanig dat $H = \{x | x = x_0^n \text{ , n geheel}\}$.

Gevolg 2.2 Hieruit volgt dat als $a,b > 1$ en $\frac{\log a}{\log b}$ irrationaal is, de kleinste groep t.o.v. de vermenigvuldiging die $\{a,b\}$ omvat, dicht ligt in $(0,\infty)$.

Lemma 2.2 Als bij een niet-ontaarde verdelingsfunktie F met

$$F(x) = 0 \text{ voor } x < 0$$

een rij positieve reële getallen $\{a_k\}$ bestaat zodanig dat

2.16 $$F^k(a_k x) = F(x) \quad \text{voor } x > 0 \text{ en } k = 1,2,3, \ldots,$$

dan bestaan er constanten $\alpha > 0$ en $c > 0$ zò dat

2.17 $$F(x) = \boldsymbol{l}(x) \exp\{-(x/c)^{-\alpha}\} \quad \text{voor alle } x.$$

Bewijs Neem een $x > 0$ waarvoor $0 < F(x) < 1$, dan volgt uit

$$F(a_k x) = F^{1/k}(x)$$

dat

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

We bewijzen eerst dat $0 < F(x) < 1$ voor alle $x > 0$.
Stel dat

2.18 $$F(x_0 - 0) = 0 \quad \text{voor } x_0 > 0$$

$$F(x) > 0 \quad \text{voor alle } x > x_0;$$

neem een x_1 met

$$x_1 < x_0 < a_2 x_1;$$

dan geeft

$$F(a_2 x_1) = F^{1/2}(x_1) \leq F^{1/2}(x_0 - 0) = 0$$

de verlangde tegenspraak. Op dezelfde manier ziet men dat $F(x) < 1$ voor $x > 0$. We kunnen nu definiëren

2.19 $$\phi(x) = \frac{\log F(1)}{\log F(x)} ,$$

dan is ϕ niet-stijgend, $\phi(1) = 1$ en $\phi(a_k) = k$, zodat

2.20 $$\phi(a_k x) = k\, \phi(x) = \phi(a_k)\, \phi(x) \quad \text{voor } x > 0 \text{ en } k = 1,2,3, \ldots$$

Als we definiëren

2.21 $$V = \{a \mid a = a_{k_1}^{n_1} \cdot a_{k_2}^{n_2} \ldots a_{k_r}^{n_r} \text{ voor gehele getallen}$$

$$n_1, n_2, \ldots, n_r \text{ en natuurlijke getallen } k_1, k_2 \ldots, k_r\}$$

dan vormt V een groep t.o.v. de vermenigvuldiging en

2.22 $$\phi(ab) = \phi(a)\, \phi(b) \quad \text{voor alle } a,b \in V.$$

Volgens gevolg 2.1 zijn er twee gevallen mogelijk:

1. V ligt dicht in $(0,\infty)$. Uit het bewijs van stelling 1.1, opmerking 1.5 en de monotonie van ϕ volgt dan (2.17).
2. Er is een reëel getal $b > 1$ zodanig dat

$$V = \{a \mid a = b^k \text{ met } k \text{ geheel}\}.$$

Dan is er een stijgende rij natuurlijke getallen (r_k) met

2.23 $$a_k = b^{r_k} \quad \text{voor } k = 1,2,3, \ldots$$

Dan is

$$b > 1,\ \phi(b) > 1,\ r_k \geq k,$$

$$\phi(b^{r_k}) = k,$$

$$\phi(b^k) = \{\phi(b)\}^k,$$

dus

2.24 $$\{\phi(b)\}^{r_k} = k \qquad \text{voor } k = 1,2,3, \ldots,$$

wat in tegenspraak is met

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\{\phi(b)\}^{r_k}}{r_k} = \infty \quad ; \lim_{k \to \infty} \sup \frac{k}{r_k} \leq 1.$$

Geval 2 doet zich dus niet voor.

Stelling 2.3 (R.A. Fisher en L.H.C. Tippett 1928). Een rij verdelingsfunkties $\{F^n\}$ kan slechts tot het aantrekkingsgebied van een van de volgende drie typen behoren:

2.25 $$G_1(x) = \mathcal{L}(x) \exp\{-x^{-\rho}\} \quad \text{voor een } \rho > 0,$$

2.26 $$G_2(x) = 1 - \mathcal{L}(-x)(1 - \exp\{-(-x)^{\rho}\}) \text{voor een } \rho > 0 \quad \text{en}$$

2.27 $$G_3(x) = \exp\{-e^{-x}\}.$$

Bewijs (Gnedenko) We gaan uit van de identiteit

2.28 $$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x) \quad \text{voor alle } x \text{(stelling 2.2) en}$$

onderscheiden drie gevallen:

1. Stel $\alpha_k = 1$ voor $k = 1,2,3, \ldots$. We definiëren

$$\gamma_k = e^{\beta_k} \quad (k = 1,2,3, \ldots) \ ; \ \phi(y) = G(\log y) \text{ voor } y > 0;$$

dan volgt uit (2.28) voor $y > 0$

$$\phi^k(\gamma_k y) = \phi(y) \quad \text{voor } k = 1,2,3, \ldots \quad .$$

Lemma 2.2 geeft dan als oplossing: $G(x)$ behoort tot het type $G_3(x)$.

2. Er is een natuurlijk getal $k > 1$ met $\alpha_k < 1$; dan geldt

$$x \geq \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \Longrightarrow \alpha_k x + \beta_k \leq x \Longrightarrow G(\alpha_k x + \beta_k) \leq G(x).$$

Samen met (2.28) geeft dit

$$G^k(x) \leq G(x) = G^k(\alpha_k x + \beta_k) \leq G^k(x)$$

en dit is alleen mogelijk als $G(x) = 0$ of 1. Dus

2.29 $$G(x) = 1 \quad \text{voor } x \geq \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k}$$

i) We bewijzen eerst dat

2.30 $$0 < G(x) < 1 \quad \text{voor } x < \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \, .$$

Stel

2.31 $$G(x_0) = 1 \quad \text{voor een } x_0 < \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \quad \text{en}$$

$$G(x) < 1 \quad \text{voor alle } x < x_0,$$

dan geldt voor

$$x_1 = x_0 - \frac{\beta_k - x_0\,(1 - \alpha_k)}{2\alpha_k}$$

dat

$$x_1 = x_0 - \frac{\beta_k - x_0(1-\alpha_k)}{2\alpha_k} < x_0 < x_0 + \frac{\beta_k - x_0(1-\alpha_k)}{2} = \alpha_k x_1 + \beta_k,$$

zodat

$$G(x_1) = G^k(\alpha_k x_1 + \beta_k) \geq G^k(x_0) = 1$$

in tegenspraak met (2.31). Op dezelfde manier bewijst men

$$G(x) > 0 \text{ voor alle } x.$$

ij) Stel dat er een natuurlijk getal r is met $\alpha_r = 1$; dan is

$$G^r(x + \beta_r) = G(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Stel $\beta_r = 0$, dan is G(x) konstant; de mogelijkheid $\beta_r < 0$ is uitgesloten omdat G niet-dalend is; stel $\beta_r > 0$ dan krijgen we een tegenspraak bij de keuze

$$x = \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} - \frac{\beta_r}{2}$$

iij) Stel dat er een natuurlijk getal r is met $\alpha_r > 1$. Eenzelfde redenering als boven geeft

$$G(x) = 0 \qquad \text{voor} \quad x < \frac{\beta_r}{1 - \alpha_r}$$

$$0 < G(x) < 1 \qquad \text{voor} \quad x > \frac{\beta_r}{1 - \alpha_r}$$

in strijd met (2.30)

Dus $\alpha_k < 1$ voor alle $k > 1$; uit (2.30) volgt dat

$$\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} = \frac{\beta_2}{1-\alpha_2} \quad \text{voor alle } k.$$

We definiëren

$$\tilde{G}(z) = G\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} - z\right).$$

Met de transformatie

$$z = \frac{\beta_k}{1-\alpha_k} - x$$

geldt dan voor $z > 0$

$$\tilde{G}^k(\alpha_k z) = G^k\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} - \alpha_k z\right) = G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x) = G\left(\frac{\beta_k}{1-\alpha_k} - z\right) =$$

$$= \tilde{G}(z)$$

zodat we m.b.v. lemma 2.2 de tweede vorm van de limietverdeling krijgen.

3. Er is een natuurlijk getal $k > 1$ met $\alpha_k > 1$; analoog aan 2 vinden we dat $G(x)$ van het type $G_1(x)$ is.

We zullen nu voor elk der drie typen nagaan aan welke voorwaarden een verdelingsfunktie F moet voldoen opdat F^n tot het aantrekkingsgebied van dat type behoort.

<u>Lemma 2.3</u> Laten $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ rijen reële getallen zijn met $a_n > 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$. Voor verdelingsfunkties F en G geldt dan en slechts dan

2.32 $$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

als

2.33 $$\lim_{n \to \infty} n\{1 - F(a_n x + b_n)\} = -\log G(x),$$

waarbij voor het rechterlid ∞ gelezen wordt als $G(x) = 0$.

<u>Bewijs</u> Noteren we $1 - F(a_n x + b_n)$ als c_n, dan moeten we voor $0 \leq c_n \leq 1$ en $0 \leq a \leq \infty$ bewijzen

2.34 $$\lim_{n \to \infty} n\, c_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} -n \log (1 - c_n) = a.$$

Als $c_n = 0$ voor alle n, dan geldt de equivalentie met $a = 0$.
Als $c_n > 0$ voor alle n, dan volgt voor $a < \infty$ zowel uit het linker- als uit het rechterlid van (2.34)

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0,$$

dus

$$\lim_{n \to \infty} nc_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{\log (1-c_n)} \lim_{n \to \infty} n \log (1 - c_n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} -n \log (1 - c_n) = a.$$

Stel nu dat b.v. het linkerlid van(2.34) geldt met $a = \infty$ en dat er een deelrij $\{n_k\}$ der natuurlijke getallen bestaat zodanig dat

2.35 $$\lim_{k \to \infty} -n_k \log(1 - c_{n_k}) = a < \infty.$$

Uit (2.35) volgt dan m.b.v. (2.34) $\lim_{k \to \infty} n_k c_{n_k} = a$

in tegenspraak met het gegeven. Op dezelfde manier ziet men de andere implikatie van (2.34) met $a = \infty$ in.

Het geval dat $c_n = 0$ voor oneindig veel n en $c_n > 0$ voor oneindig veel n is nu ook duidelijk als combinatie van de twee voorgaande.

<u>Lemma 2.4</u> Voor rijen reële getallen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ met $a_n > 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$ gelden de volgende implikaties:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c_1 > 1;\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c_2 < 1;\ (c_2 \neq 0)\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$

bestaat en $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b - b_n}{a_n} = 0.$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1;\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}\ b_n}{a_n} = c_3 > 0; \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} b_n = b \leq \infty;$

als $b = \infty$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$, als $b < \infty$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b - b_n}{a_n} = \infty$.

<u>Bewijs 1)</u> Uit de implikatie $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{b_n}{a_n}\right| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ en de ongelijkheid

$$\left|\frac{|b_{n+1}| - |b_n|}{a_n}\right| \leq \left|\frac{b_{n+1} - b_n}{a_n}\right|$$ volgt dat we mogen veronderstellen

$\frac{b_n}{a_n} \geq 0$ voor $n = 1,2,3, \ldots$ Bij elke $\varepsilon > 0$ is een $n_0(\varepsilon)$ te vinden zò dat voor $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$c_1^{1/2} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{a_n} + \varepsilon(c_1^{1/2} - 1).$$

Stel dat de rij $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ naar beneden begrensd is, dat wil zeggen $\frac{b_n}{a_n} > b > 0$ voor alle n; dan geldt voor $\varepsilon < b$ en $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + (c_1^{1/2} - 1)\, b < \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + (c_1^{1/2} - 1)\, \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} =$$

$$= c_1^{1/2} \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{a_n} + \varepsilon(c_1^{1/2} - 1) < \frac{b_n}{a_n} + (c_1^{1/2} - 1)\, b.$$

De rij $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ is dus op de duur monotoon dalend; wegens

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} = 0$$

kan $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$ alleen nul zijn, in tegenspraak met $\frac{b_n}{a_n} > b$.

Er is dus bij de gegeven $\varepsilon > 0$ een index k te vinden zò dat

$k \geq n_0(\varepsilon)$ en $\frac{b_k}{a_k} < \varepsilon$; dan geldt

$$c_1^{1/2} \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} < \frac{b_k}{a_k} + \varepsilon(c_1^{1/2} - 1) < \varepsilon + \varepsilon(c_1^{1/2} - 1) = c_1^{1/2}\,\varepsilon \;;$$

ook voor elke $n > k + 1$ geldt dan $\frac{b_n}{a_n} < \varepsilon$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

2) Er is een index n_0 te vinden zò dat voor $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c_2^{1/2} \qquad \text{dus} \quad a_n < c_2^{\frac{n-n_0}{2}} \cdot a_{n_0} \;;$$

hieruit volgt dat bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_1(\varepsilon)$ te vinden is zò dat voor $n \geq n_1(\varepsilon)$

$$(b_{n+1} - b_n)\, c_2^{n/2} < \varepsilon \;,$$

dus

$$|b_{n+l} - b_n| = \left|\sum_{k=1}^{l} (b_{n+k} - b_{n+k-1})\right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_2^{\frac{n+k}{2}} =$$

$$= \varepsilon \frac{c_2^{\frac{n+1}{2}}}{1 - c_2^{1/2}} < \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 - c_2^{1/2}}$$

voor voldoende grote n dus $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$ bestaat.

Uit het gegeven volgt dat bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_2(\varepsilon)$ te vinden is zò dat voor $n \geq n_2(\varepsilon)$

$$\left|\frac{b_{n+k+1} - b_{n+k}}{a_{n+k}}\right| < \varepsilon \quad \text{en}$$

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} \cdot \frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} < (c_2^{1/2})^k = c_2^{k/2}$$

voor $k = 1,2,3, \ldots$ Dus

$$\left|\frac{b - b_n}{a_n}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n+k+1} - b_{n+k}}{a_n}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} \cdot$$

$$\left|\frac{b_{n+k+1} - b_{n+k}}{a_{n+k}}\right| < \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} c_2^{k/2} = \frac{\varepsilon}{1 - c_2^{1/2}} ,$$

wat te bewijzen was.

3) Voor voldoende grote n is

$$b_{n+1} - b_n > \frac{c_3}{2} \cdot a_n > 0,$$

dat wil zeggen dat $\{b_n\}$ een op de duur monotone rij is zodat

$\lim_{n \to \infty} b_n = b \leq \infty$ bestaat. Stel $b < \infty$; op dezelfde manier als onder 2 ziet men in dat

$$\frac{b - b_n}{a_n} > \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k \cdot \frac{c_3}{2} = \frac{c_3}{2\varepsilon}$$

voor voldoende grote n, zodat

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b - b_n}{a_n} = \infty .$$

In het geval $\lim_{n \to \infty} b_n = \infty$ mogen we aannemen dat $b_n > 0$ voor

$n = 1,2,3, \ldots$

Verder gaan we als onder 1 te werk. Bij elke $\varepsilon > 0$ is een $n_0(\varepsilon)$ te vinden zò dat voor $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$(1+\varepsilon)\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{a_n} + \frac{c_3}{2}.$$

Stel dat $\frac{b_n}{a_n} < d < \infty$ voor alle n, dan geldt voor $\varepsilon < \frac{c_3}{2d}$ en

$n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + \varepsilon\, d > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} + \varepsilon\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{a_n} + \frac{c_3}{2} > \frac{b_n}{a_n} + \varepsilon\, d.$$

De rij $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ is dus op de duur monotoon stijgend; wegens het gegeven

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n}\right) = c_3$$

kan de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ alleen oneindig zijn, in tegenspraak met $\frac{b_n}{a_n} < d$.

Er is dus bij elke $M > 0$ een index k te vinden zò dat $k \geq n_0(\varepsilon)$ en $\frac{b_k}{a_k} > M$. Dan geldt voor alle

$$0 < \varepsilon < \frac{\frac{c_3}{2}}{M + \frac{c_3}{2}} < 1$$

dat

$$(1+\varepsilon)\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > \frac{b_k}{a_k} + \frac{c_3}{2} > M + \frac{c_3}{2},$$

dus

$$\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > \left(M + \frac{c_3}{2}\right)\frac{1}{1+\varepsilon} > M + \frac{c_3}{2} - \varepsilon\left(M + \frac{c_3}{2}\right) > M;$$

ook voor alle $n > k + 1$ geldt dan $\frac{b_n}{a_n} > M$ dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty .$$

<u>Stelling 2.4</u> Voor een verdelingsfunktie F geldt dat de rij $\{F^n\}$ dan en slechts dan tot het aantrekkingsgebied van het type

2.36 $$G_1(x) = \;(x) \exp\{-x^{-\rho}\} \quad \text{voor een } \rho > 0$$

behoort als $1-F(x)$ regulier variëert bij oneindig met exponent $-\rho$.

<u>Bewijs</u> Stel dat $1-F(x)$ regulier variëert met exponent $-\rho$. Volgens stelling 1.2 en opmerking 1.7 (blz. 8) bestaat er een rij reële getallen $a_n > 0$ met

2.37 $$\lim_{n\to\infty} n\{1-F(a_n x)\} = \left(\frac{x}{c}\right)^{-\rho} \quad \text{voor alle } x>0.$$

Uit lemma 2.3 volgt dan

2.38 $$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x) = \exp\left\{-\left(\frac{x}{c}\right)^{-\rho}\right\} \quad \text{voor alle } x>0.$$

Wegens de monotonie van F en $G_1(0) = 0$ volgt dan ook (2.38) voor alle x.

Stel anderzijds dat er rijen reële getallen $\{a_n\}$en $\{b_n\}$ zijn met $a_n > 0$ voor $n = 1,2,3,\ldots$ en

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G_1(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Uit opmerking 2.4 (blz. 15) volgt dat voor elke reële $s>1$

2.39 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{[ns]}}{a_n} = \alpha_s \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} = \beta_s ,$$

waarbij α_s en β_s voldoen aan

$$\{G_1(x)\}^{1/s} = G_1(\alpha_s x + \beta_s) \quad \text{voor alle } x.$$

Door invullen in (2.36) blijkt

2.40 $$\alpha_s = s^{1/\rho} \text{ en } \beta_s = 0.$$

We definiëren voor vaste $s>1$ een deelrij $\{n(i)\}$ der natuurlijke getallen als volgt

$$n(0) = \left[\frac{s}{s-1}\right] > \frac{1}{s-1}$$

$$n(1) = \left[n(0).s\right] > n(0)$$

$$n(i+1) = \left[n(i).s\right] > n(i)$$

Voor deze rij geldt

2.41 $$\lim_{i\to\infty} n(i) = \infty \quad \text{en} \lim_{i\to\infty} \frac{n(i+1)}{n(i)} = s.$$

Uit (2.39), (2.40) en (2.41) volgt

2.42 $$\lim_{i\to\infty} \frac{a_{n(i+1)}}{a_{n(i)}} = s^{1/\rho}>1 \text{ en } \lim_{i\to\infty} \frac{b_{n(i+1)} - b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = 0 \;;$$

toepassing van lemma 2.4 geeft

$$\lim_{i\to\infty} \frac{b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = 0,$$

zodat wegens stelling 2.1

$$\lim_{i\to\infty} F^{n(i)}(a_{n(i)}x) = G_1(x) \text{ voor alle } x.$$

Toepassing van lemma 2.3 geeft

2.43 $$\lim_{i\to\infty} n(i)\ \{1-F(a_{n(i)}x)\} = x^{-\rho} \text{ voor } x>0.$$

Uit (2.42) volgt

2.44 $$\lim_{i\to\infty} a_{n(i)} = \infty$$

We kunnen dus stelling 1.2 en opmerking 1.8 (blz. 9) toepassen op (2.43), samen met (2.41) en (2.44); dan volgt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\rho} \quad \text{voor } x>0.$$

Stelling 2.5 Voor een verdelingsfunktie F geldt dat de rij $\{F^n\}$ dan en slechts dan tot het aantrekkingsgebied van het type

2.45 $$G_2(x) = 1- 1(-x)(1-\exp\{-(-x)\ \})\ \text{met } \rho>0.$$

behoort als er een x_0 is met $F(x_0) = 1$; $F(x)<1$ voor $x<x_0$ en voor de funktie

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x<0. \\ F(x_0 - \frac{1}{x}) & \text{voor } x>0. \end{cases}$$

geldt dat $1-\tilde{F}(x)$ regulier variëert bij oneindig met exponent $-\rho$.

Opmerking 2.5 $\tilde{F}$ is monotoon niet-dalend, $\tilde{F}(0) = F(-\infty) = 0$ en $\tilde{F}(\infty) = 1$ dus $\tilde{F}$ is een verdelingsfunktie.

Bewijs Stel dat $F(x_0) = 1$ en dat $\tilde{F}(x)$ regulier variëert bij oneindig met exponent $-\rho$. Evenals in het bewijs van stelling 2.4 volgt hieruit

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0 - \frac{1}{a_n x}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{F}^n(a_n x) = \exp\{-(\frac{x}{c})^{-\rho}\} \text{ voor alle } x>0,$$

dat wil zeggen

$$\lim_{n\to\infty} F^n \left(x_0 + \frac{x}{a_n}\right) = \exp\{-(-cx)^\rho\} \text{ voor alle } x<0,$$

wat te bewijzen was.

Stel anderzijds det er rijen reële getallen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ zijn met $a_n>0$ en

2.46 $$\lim_{n\to\infty} F^n (a_n x + b_n) = 1-\iota(-x)(\ \{1-\exp\{-(-x)^\rho\} \quad \text{voor alle } x.$$

Uit opmerking 2.4 volgt dat voor $s>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{[ns]}}{a_n} = \alpha_s = s^{-1/\rho} \quad \text{en}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} = \beta_s = 0.$$

We definiëren de deelrij $\{n(i)\}$ der natuurlijke getallen als in het bewijs van stelling 2.4; dan is

2.47 $$\lim_{i\to\infty} \frac{a_{n(i+1)}}{a_{n(i)}} = s^{-1/\rho}<1 \quad \text{en} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{b_{n(i+1)} - b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = 0.$$

Toepassing van lemma 2.4 geeft

2.48 $$\lim_{i\to\infty} b_{n(i)} = x_0 \quad \text{bestaat (met } -\infty<x_0<\infty) \text{ en}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_0 - b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = 0.$$

Uit (2.48) volgt met stelling 2.1

2.49 $$\lim_{i\to\infty} F^{n(i)} (a_{n(i)}x + x_0) = G_2(x) \text{ voor alle } x.$$

nemen we x=0, dan blijkt $F(x_0) = 1$. Relatie (2.49) is equivalent met

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{F}^{n(i)} \left(\frac{x}{a_{n(i)}}\right) = G_1(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Uit het bewijs van stelling 2.4 volgt verder het gestelde.

<u>Stelling 2.6</u> 1) Als voor een verdelingsfunktie F geldt dat de rij $\{F^n\}$ tot het aantrekkingsgebied van het type

2.50 $$G_3(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

behoort, dan geldt:

a. Als $F(x)<1$ voor alle x, dan varieert $1-F(x)$ snel bij oneindig (exponent $-\infty$).

b. Als $F(x_0) = 1$ en $F(x)<1$ voor alle $x<x_0$, dan geldt voor de funktie

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x\leq 0. \\ F(x_0 - \frac{1}{x}) & \text{voor } x>0. \end{cases}$$

dat $1-\tilde{F}(x)$ snel varieert bij oneindig (exponent $-\infty$).

2) Als van een verdelingsfunktie F geldt dat

$$U(x) = 1-F(\log x)$$

regulier varieert bij oneindig ($\rho<0$), dan behoort de rij $\{F^n\}$ tot het aantrekkingsgebied van het type

$$G_3(x) = \exp\{-e^{-x}\}.$$

<u>Bewijs</u> 1. Uit

2.51 $$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G_3\,(x)$$

volgt, evenals in het bewijs van stelling 2.4, dat voor elke $s>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{[ns]}}{a_n} = \alpha_s = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} = \beta_s = \log s > 0.$$

We definiëren de deelrij $n(i)$ der natuurlijke getallen weer als in het bewijs van stelling 2.4; dan is

2.52 $$\lim_{i\to\infty} \frac{a_{n(i+1)}}{a_{n(i)}} = 1 \text{ en } \lim_{i\to\infty} \frac{b_{n(i+1)} - b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = \log s > 0.$$

a. Als $F(x)<1$ voor alle x, dan volgt uit (2.51) met $x=0$

2.53 $$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Toepassing van lemma 2.4 geeft

2.54 $$\lim_{i\to\infty} \frac{b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = \infty.$$

We gaan bewijzen

2.55 $$\lim_{i\to\infty} F^{n(i)}\,(b_{n(i)}x) = \iota\,(x-1) \quad \text{voor alle } x\neq 1.$$

Bij elke $s>0$ is een $x_0(\varepsilon)$ te vinden zò dat voor alle $x>x_0$

$$G_3(x) > 1-{}^{\varepsilon}/_{2}$$

Verder is er een natuurlijk getal $i_0(\varepsilon,x_0)$ zò dat voor $i>i_0$

$$F^{n(i)}(a_{n(i)}x_0 + b_{n(i)}) > G_3(x_0) - \varepsilon/_2 > 1-\varepsilon$$

Nemen we bij een vaste $y>0$ op grond van (2.52) een $i_1>i_0$ zò dat voor $i>i$

$$\frac{b_{n(i)}}{a_{n(i)}}\, y > x_0 ,$$

dan is voor $i>i_1$

$$F^{n(i)}(b_{n(i)}\ (y+1)) = F^{n(i)}(a_{n(i)}\ \frac{b_{n(i)}}{a_{n(i)}}\ y + b_{n(i)}) \geq F^{n(i)}(a_{n(i)}x_0 + b_{n(i)}) >$$

$$> 1-\varepsilon ,$$

zodat

$$\lim_{i\to\infty} F^{n(i)}(b_{n(i)}x) = 1 \text{ voor } x>1.$$

Op analoge manier ziet men in dat

$$\lim_{i\to\infty} F^{n(i)}(b_{n(i)}x) = 0 \text{ voor } x<1.$$

Uit (2.55) volgt wegens lemma 2.3

2.56 $$\lim_{i\to\infty} n(i)\ \{1-F(b_{n(i)}x)\} = x^{-\infty} \quad \text{voor } x>0,\ x\neq 1 ;$$

Uit (2.52),(2.53),(2.56), stelling 1.2 en opmerking 1.7 volgt dat $1-F(x)$ snel varieert met exponent $-\infty$.

b. Als $F(x_0) = 1$ en $F(x)<1$ voor $x<x_0$, dan volgt uit (2.51) met $x=0$ (wegens $0<G(0)<1$)

2.57 $$\lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Toepassing van lemma 2.4 op (2.52) geeft

2.58 $$\lim_{i\to\infty} \frac{x_0 - b_{n(i)}}{a_{n(i)}} = \infty,$$

hieruit volgt dat we kunnen veronderstellen $b_{n(i)}<x_0$ voor alle i.

We gaan bewijzen

2.59 $$\lim_{i\to\infty} \tilde{F}^{n(i)}\left(\frac{x}{x_0-b_{n(i)}}\right) = \imath\ (x-1) \quad \text{voor alle } x\neq 1.$$

Evenals onder a is er bij elke $\varepsilon>0$ en $y>0$ een natuurlijk getal $i_1(\varepsilon,y)$ te vinden zò dat voor $i\geq i_1$

$$F^{n(i)}((b_{n(i)}-x_0)\ (1-y) + x_0) = F^{n(i)}\left(a_{n(i)}.\frac{x_0 - b_{n(i)}}{a_{n(i)}}.y + b_{n(i)}\right) > 1-\varepsilon,$$

zodat

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{F}^{n(i)}\left(\frac{x}{x_0-b_{n(i)}}\right) = \lim_{i\to\infty} F^{n(i)}\left((b_{n(i)}-x_0)\ \frac{1}{x} + x_0\right) = 1 \quad \text{voor } x>1.$$

Op analoge manier ziet men in dat

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{F}^{n(i)}\left(\frac{x}{x_0 - b_{n(i)}}\right) = \lim_{i\to\infty} F^{n(i)}\left((b_{n(i)}-x_0)\ \frac{1}{x} + x_0\right) = 0 \text{ voor } 0<x<1.$$

Volgens lemma 2.3 is deze relatie equivalent met

$$\lim_{i\to\infty} n(i)\ \{1-\tilde{F}\ \left(\frac{x}{x_0 - b_{n(i)}}\right)\} = x^{-\infty} \quad \text{voor } x>0,\ x\neq 1;$$

Uit (2.57), stelling 1.2 en opmerking 1.7 volgt nu dat $1-\tilde{F}(x)$ snel varieert met exponent $-\infty$.

2. Uit het bewijs van stelling 2.4 volgt dat er een rij reële getallen $\{a_n\}$ bestaat met $a_n > 0$ en constanten $\rho > 0$ en c, zô dat

$$\lim_{n\to\infty} F^n(\log\,(a_n y)) = \exp\,\{-(\tfrac{y}{c})^{-\rho}\} \quad \text{voor } y>0;$$

hieruit volgt met de transformatie $y = \exp\,(\frac{x}{\rho})$

$$\lim_{n\to\infty} F^n\,(\rho^{-1}x + \log\,a_n) = \exp\,\{-e^{-x\,+\,\rho\log\,c}\} \quad \text{voor alle } x;$$

hiermee is het gestelde bewezen.

Opmerking 2.6 Gnedenko bewijst dat $\{F^n\}$ dan en slechts dan tot het aantrekkingsgebied van G_3 behoort als

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x+b_n) = G_3(x) \quad \text{voor alle } x,$$

waarbij

$$b_n = \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}$$

2.60 $$a_n = \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{ne}\} - b_n \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Opmerking 2.7 Bij een verdelingsfunktie F kunnen we een getal $x_0 \leq \infty$ definiëren als volgt

$$x_0 = \inf\{x \mid F(x) = 1\}$$

Uit het bewijs van stelling 1.2 volgt (formule 1.19) dat als $\{F^n\}$ tot het aantrekkingsgebied van de typen G_1 of G_2 behoort,

2.61 $$\lim_{x\uparrow x_0} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x-0)} = 1 .$$

Gnedenko bewijst dat ook voor elke verdelingsfunktie F uit het aantrekkingsgebied van G_3 de relatie (2.61) geldt.

Opmerking 2.8 Over de keuze van de aantrekkingscoëfficienten kunnen we het volgende zeggen (dit blijkt uit de verschillende bewijzen). $\{F^n\}$ behoort dan en slechts dan tot het aantrekkingsgebied van $G_1(x)$ als (2.38) geldt met

$$a_n = \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - 1/n\}$$

$$b_n = 0 \qquad \text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\{F^n\}$ behoort dan en slechts dan tot het aantrekkingsgebied van $G_2(x)$ als (2.46) geldt met

$$a_n = x_0 - \inf \{x \mid F(x) \geq 1 - 1/n\}$$
$$b_n = x_0 \qquad \text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

De constante x_0 heeft dezelfde betekenis als in opmerking 2.7. Voor het type $G_3(x)$ hebben we al (2.60). Merk op dat ook voor de andere typen de keuze (2.60) toegelaten is.

Voorbeeld 2.1 Voorbeelden van verdelingsfunkties uit de verschillende aantrekkingsgebieden zijn:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{x} \frac{du}{1+u^2} \quad \text{in het aantrekkingsgebied van } G_1(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{in het aantrekkingsgebied van } G_2(x)$$

$$F(x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{in het aantrekkingsgebied van } G_3(x).$$

Men kan nagaan dat

$$F(x) = 1 - q^{[x]} \qquad (0 < q < 1)$$

niet aan voorwaarde (2.61) voldoet, zodat de rij der maxima van steekproeven uit een negatief-binomiale verdeling geen niet-ontaarde limietverdeling heeft.

Tenslotte wil ik nog een paar opmerkingen over Gnedenko's artikel vastleggen. Lemma 2.4 komt bij Gnedenko niet voor; zijn bewijs van stelling 2.4 (en van stelling 2.5) is dan ook niet algemeen geldig: Laten we het bewijs van Théorème 4 toepassen op de verdelingsfunktie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - \dfrac{2 \log 2}{x \log x} & x \geq 2 \end{cases},$$

die aan de voorwaarden van de stelling (met $\alpha = 1$) voldoet. Relatie (43) (blz. 441) moet gelden voor $n \geq n_0$. Voor $\beta = e$ wordt deze

2.62 $$a_{2n} = e.a_n \qquad \text{voor } n \geq n_0$$

De deelrij $\{n_s\}$ der natuurlijke getallen die Gnedenko definieert, wordt

2.63 $$n_s = e^s \qquad \text{voor } s = 1, 2, \ldots$$

Uit (2.62) en (2.63) volgt dan

$$a_{n_{s+1}} = e\, a_{n_s}$$

en met volledige induktie

$$a_{n_s} = e^{s-s_0}\, a_0 \text{ voor } s \geq s_0 .$$

We schrijven de relatie (44) van Gnedenko voor ons voorbeeld F(x):

$$\lim_{s\to\infty} n_s \left\{1-F(a_{n_s} x)\right\} = \lim_{s\to\infty} \frac{2.\log 2.e^s}{e^{s-s_0}.a_0.\log(e^{s-s_0}.a_0.x)}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{2.a_0.\log 2.e^{s_0}}{s-s_0+\log(a_0 x)} = 0$$

en niet x^{-1} zoals Gnedenko schrijft. De relatie (43) is dan ook niet algemeen geldig. Deze geldt niet voor een rij attraktiecoëfficienten $\{a_n\}$ bij de funktie F(x); een mogelijke keuze hiervoor is de volgende:

$$a_n = \frac{2n \log 2}{\log n} \quad \text{voor } n = 2, 3, \ldots$$

Een beetje misplaatst in deze paragraaf volgen hier nog resultaten die ook bij Feller in dit verband behandeld worden. Feller bewijst alleen stelling 2.7 voor het geval dat $L_1(x) = L_2(x)$, maar zijn bewijsmethode is ook bruikbaar voor het aantonen van algemenere stellingen. Deze bijdrage is geschreven door W. Vervaat.

Stelling 2.7 Als F_1 en F_2 twee verdelingsfuncties zijn met

$$1 - F_i(x) = x^{-\rho} L_i(x) \qquad (i = 1,2) \quad ,$$

waarin L_1 en L_2 langzaam variërende functies zijn en $\rho \geq 0$, dan geldt

$$1 - F_1 * F_2(x) \sim x^{-\rho} \, (L_1(x) + L_2(x)).$$

Bewijs: Als $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijke stochastische variabelen zijn met verdelingsfunkties F_1 resp. F_2, dan geldt voor $x > 1$ en $\varepsilon > 0$

$$\underline{x}_1 > x(1+\varepsilon) \text{ en } |\underline{x}_2| < x\varepsilon, \text{ of } \underline{x}_2 > x(1+\varepsilon) \text{ en } |\underline{x}_1| < x\varepsilon \Longrightarrow \underline{x}_1 + \underline{x}_2 > x \Longrightarrow$$

$$\underline{x}_1 > x(1-\varepsilon) \text{ of } \underline{x}_2 > x(1-\varepsilon) \text{ of: } \underline{x}_1 > x\varepsilon \text{ en } \underline{x}_2 > x\varepsilon$$

dus

2.64 $$P\{\underline{x}_1 > x(1+\varepsilon)\} \, P\{|\underline{x}_2| < x\,\varepsilon\} + P\{\underline{x}_2 > x(1+\varepsilon)\} \, P\{|\underline{x}_1| < x\,\varepsilon\} \leq$$
$$P\{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 > x\} \leq$$
$$\leq P\{\underline{x}_1 > x(1+\varepsilon)\} + P\{\underline{x}_2 > x(1-\varepsilon)\} + P\{\underline{x}_1 > x\varepsilon\} \, P\{\underline{x}_2 > x\varepsilon\}.$$

Delen door $x^{-\rho} \, (L_1(x) + L_2(x))$ geeft

2.65 $$\frac{L_1(x) \dfrac{L_1(x(1+\varepsilon))}{L_1(x)} \, P\{|\underline{x}_2| < x\varepsilon\} + L_2(x) \dfrac{L_2(x(1+\varepsilon))}{L_2(x)} \, P\{|\underline{x}_1| < x\varepsilon\}}{(1-\varepsilon)^{\rho}\{L_1(x) + L_2(x)\}} \leq$$

$$\leq \frac{1 - F_1 * F_2(x)}{x^{-\rho}(L_1(x) + L_2(x))} \leq$$

$$\leq \frac{L_1(x)\dfrac{L_1(x(1-\varepsilon))}{L_1(x)} + L_2(x)\dfrac{L_2(x(1-\varepsilon))}{L_2(x)}}{(1+\varepsilon)^{-\rho}\ (L_1(x) + L_2(x))} + \varepsilon^{-2\rho}\ \frac{L_1(x\varepsilon)}{L_1(x)}\ \frac{L_2(x\varepsilon)}{L_2(x)}\ \frac{x^{-\rho}L_1(x)L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)}\ .$$

De coëfficienten van $L_1(x)$ en $L_2(x)$ in de teller van het eerste lid van (2.65) convergeren naar 1 voor $x \to \infty$, zodat het eerste lid groter is dan $(1-\varepsilon)\ (1+\varepsilon)^{-\rho}$ voor voldoende grote x.

Omdat

$$\frac{x^{-\rho}\ L_1(x)\ L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)} \leq x^{-\rho} \min\ (L_1(x), L_2(x)) = \min\ (1 - F_1(x),$$

$1 - F_2(x)) \longrightarrow 0$ voor $x \to \infty$

en de andere factoren in de laatste term van het laatste lid van (2.65) begrensd zijn, convergeert deze term naar 0 voor $x \to \infty$.

<u>Gevolg 2.3</u> Als $1 - F$ een regulier variërende functie is, dan geldt

$$1 - F^{r*}(x) \quad r(1 - F(x)) \quad \text{voor } x \to \infty.$$

<u>Gevolg 2.4</u> Laten $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijke stochastische variabelen zijn met dezelfde verdelingsfuktie F waarvoor geldt dat $1 - F(x)$ regulier varieert bij oneindig en $F(0) = 0$, dan is

$$\lim_{x\to\infty} P\{\underline{x}_1 > x \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 > x\} = 1/2$$

<u>Bewijs:</u>

$$P\{\underline{x}_1 > x \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 > x\} = \frac{P\{x_1 > x\}}{P\{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 > x\}}\ ;$$

verder passen we stelling 2.7 toe.

Stelling 2.8 Als F_1 en F_2 twee verdelingsfuncties zijn zó, dat $1 - F_2$ regulier varieert en

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_1(x)}{1 - F_2(x)} = 0 \quad ,$$

dan geldt

$$1 - F_1 * F_2(x) \sim 1 - F_2(x) \qquad \text{voor } x \to \infty$$

Bewijs: Zij $U_i = 1 - F_i$ voor $i = 1, 2$, dan geldt wegens (2.64)

$$\frac{U_2(x(1+\varepsilon))}{U_2(x)} \left\{ \frac{U_1(x(1+\varepsilon))}{U_2(x(1+\varepsilon))} \quad P\{|\underline{x}_2| < x\varepsilon\} + P\{|\underline{x}_1| < x\varepsilon\} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1 - F_1 * F_2(x)}{1 - F_2(x)} \leq$$

$$\leq \frac{U_2(x(1-\varepsilon))}{U_2(x)} \left\{ \frac{U_1(x(1-\varepsilon))}{U_2(x(1-\varepsilon))} + 1 \right\} + U_1(x\varepsilon) \frac{U_2(x\varepsilon)}{U_2(x)} \quad .$$

Hieruit volgt, als $-\rho$ de variatie-exponent is van U_2

$$(1+\varepsilon)^{-\rho} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{1 - F_1 * F_2(x)}{1 - F_2(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{1 - F_1 * F_2(x)}{1 - F_2(x)} \leq (1-\varepsilon)^{-\rho} .$$

Stelling 2.9. Als F_1 en F_2 twee verdelingsfuncties zijn en $1 - F_1$ en $1 - F_2$ regulier variëren, dan varieert ook $1 - F_1 * F_2$ regulier.

Bewijs: Combinatie van stelling 2.7 en 2.8. In stelling 2.7 is $L_1 + L_2$ ook een langzaam variërende functie, wat men kan aantonen met behulp van

$$\frac{L_1(xy) + L_2(xy)}{L_1(x) + L_2(x)} = \frac{L_1(x) \dfrac{L_1(xy)}{L_1(x)} + L_2(x) \dfrac{L_2(xy)}{L_2(x)}}{L_1(x) + L_2(x)} \quad .$$

§3 Eigenschappen van regulier variërende funkties

(J. Karamata: Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. Bull. Soc. Math. France 61 (1933) p. 55-62; Feller 2 VIII 9)

In deze paragraaf spreken we uitlsuitend over funkties die Lebesque-sommeerbaar zijn op elk begrensd interval. Eerst twee hulpstellingen:

Lemma 3.1 Stel dat voor positieve funkties f(x) en g(x) geldt

3.1 $$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x g(t)dt = \infty,$$

terwijl

3.2 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c \quad \text{met } 0 \leq c \leq \infty,$$

dan is ook

3.3 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} = c\ .$$

Bewijs: Neem eerst $0 \leq c < \infty$. Bij elke $\varepsilon > o$ is een x_0 te vinden zò, dat voor $x > x_0$

$$(c-\varepsilon)\ .\ g(x) < f(x) < (c+\varepsilon)\ .\ g(x)\ ,$$

zodat ook

3.4 $$c-\varepsilon = (c-\varepsilon)\frac{\int_{x_0}^x g(t)dt}{\int_{x_0}^x g(t)dt} < \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{\int_{x_0}^x g(t)dt} < (c+\varepsilon)\frac{\int_{x_0}^x}{\int_{x_0}^x g(t)dt} = c+\varepsilon.$$

Als we schrijven

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} = \frac{\int_0^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt}{\int_0^{x_0} g(t)dt \quad \int_{x_0}^x g(t)dt},$$

dan blijkt uit (3.1) en (3.4) dat het gestelde geldt. Het gestelde voor $c = \infty$ volgt door de rollen van f en g te verwisselen.

<u>Opmerking 3.1</u> Op analoge manier kan men bewijzen dat als

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt < \infty \text{ en}$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x g(t)dt < \infty,$$

uit (3.2) volgt dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty f(t)dt}{\int_x^\infty g(t)dt} = c\ .$$

<u>Lemma 3.2</u> Stel dat U(x) regulier of snel varieert bij oneindig met exponent ρ ($-\infty \leq \rho \leq \infty$).

a. Als $\rho \geq -1$, dan varieert de funktie

3.5 $$U^*(x) = \int_0^x U(t)\ dt$$

regulier of snel bij oneindig met exponent $\rho + 1$.

b. Als $\rho < -1$, dan is de funktie

3.6 $$U^{**}(x) = \int_x^\infty U(t)dt$$

welgedefinieerd en $U^{**}(x)$ varieert in dit geval regulier of snel bij oneindig met exponent $\rho + 1$. Als U^{**} ook voor $\rho = -1$ welgedefinieerd is, geldt ook voor die waarde van ρ de bewering.

<u>Opmerking 3.2</u> In het bewijs zullen we zien dat $U^{*}(\infty) = \infty$ voor $\rho > -1$ en $U^{*}(\infty) < \infty$ voor $\rho < -1$ zodat de uitspraken alleen voor de aangegeven waarden van ρ niet-triviaal zijn resp. zin hebben.

<u>Bewijs</u> a. We bewijzen eerst dat

3.7 $$\lim_{x\to\infty} U^{*}(x) = \infty \quad \text{voor } \rho > -1 .$$

We veronderstellen eerst $\rho < \infty$
$U(s)$ varieert regulier met exponent $\rho > -1$, er is dus een s_0 te vinden zò dat voor $s \geq s_0$

3.8 $$U(2s) > U(s) \,.\, 2^{-1} ,$$

dus voor $n \geq n_0$ geldt

$$2^{-1} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} U(s)ds = \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(2t)dt > 2^{-1} \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(t)dt .$$

Als we definiëren

$$I_n = \int_{2^n}^{2^{n+1}} U(s)\, ds ,$$

geldt dus voor $n \geq n_0$

$$I_{n+1} > I_n \ ,$$

zodat

$$\int_{s_0}^{\infty} U(s)ds \geq \sum_{n=n_0+1} I_n > I_{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty,$$

waarmee (3.7) bewezen is voor $\rho < \infty$. Voor $\rho = \infty$ geldt (3.8) voor elke eindige ρ dus ook de conclusie.

Voor $\rho > -1$ kunnen we nu lemma 3.1 toepassen:

$$3.9 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{tx} U(s)ds}{\int_0^{t} U(s)ds} = \lim_{t\to\infty} \frac{x\, U(tx)}{U(t)} = x^{\rho+1} \ .$$

Voor $\rho = -1$ kunnen we als

$$3.10 \qquad \int_0^{\infty} U(s)ds = \infty$$

ook via lemma 3.1 reguliere variatie bewijzen; als (3.10) niet geldt, hebben we op triviale wijze langzame variatie zoals de stelling beweert.

b. Op eenzelfde manier als boven kunnen we bewijzen dat

$$\lim_{x\to\infty} U^{*}(x) < \infty \quad \text{voor } \rho < -1 \ ,$$

zodat voor die waarden van ρ

$$\lim_{x\to\infty} U^{**}(x) = 0 \ ,$$

De beweringen betreffende U^{**} volgen dan onmiddellijk uit opmerking 3.1.

Een karakterisering van regulier variërende funkties geeft de volgende stelling.

Stelling 3.1

a. Stel dat U(x) regulier variëert bij oneindig met exponent ρ, dan is

3.11 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,U(x)}{\int_0^x U(t)dt} = \rho + 1 \qquad \text{als } \rho \geq -1$$

en

3.12 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,U(x)}{\int_x^\infty U(t)dt} = -\rho - 1 \qquad \text{als } \rho < -1.$$

Voor $\rho = -1$ geldt (3.12) als de noemer welgedefiniëerd is.

b. Als voor een positieve funktie U

3.13 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,U(x)}{\int_0^x U(t)dt} = \lambda$$

met $0<\lambda<\infty$, dan variëert U regulier bij oneindig met exponent $\lambda-1$.
Als voor een positieve funktie U

3.14 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,U(x)}{\int_x^\infty U(t)dt} = \lambda$$

met $0<\lambda<\infty$, dan variëert U regulier bij oneindig met exponent $-\lambda-1$.

Bewijs

We veronderstellen eerst $\rho>-1$ en definiëren

3.15 $$b(x) = \frac{x\,U(x)}{\int_0^x U(t)dt} .$$

Integreren we links en rechts de relatie

$$\frac{b(x)}{x} = \frac{U(x)}{\int_0^x U(t)dt} ,$$

dan vinden we (de teller in het rechterlid is bijna overal de afgeleide van de noemer)

$$\int_1^x \frac{b(t)}{t}\, dt = \log \{\int_0^x U(t)dt\} + c'$$

dus

3.16 $$\int_0^x U(t)dt = c.\ \exp.\ \{\int_1^x \frac{b(t)}{t}\, dt\} \qquad \text{met } c > 0.$$

Met behulp van (3.15) vinden we dan

3.17 $$U(x) = c.\ \frac{b(x)}{x}\ .\ \exp \int_1^x \frac{b(t)}{t}\, dt = c.\ b(x).\ \exp \{\int_1^x \frac{b(t)-1}{t}\, dt\} .$$

a. Uit lemma 3.2 weten we dat b(x) langzaam varieert bij oneindig. Te bewijzen is dat

3.18 $$\lim_{x\to\infty} b(x) = \rho + 1 .$$

Uit (3.17) volgt dat $\exp \{\int_1^x \frac{b(t)}{t}\, dt\}$ regulier varieert met exponent $\rho+1$, dus

3.19 $$\lim_{x\to\infty} \int_1^s \frac{b(xt)}{t}\, dt = \lim_{x\to\infty} \log \{\frac{\exp (\int_1^{sx} \frac{b(t)}{t}\, dt)}{\exp (\int_1^x \frac{b(t)}{t}\, dt)}\} = (\rho + 1) \log s.$$

Verder geeft het lemma van Fatou

$$\liminf_{x\to\infty} \{b(x)\}^{-1} \geq \int_0^1 \liminf_{x\to\infty} \frac{U(tx)}{U(x)}\, dt = (\rho + 1)^{-1}.$$

zodat

3.20 $$0 \leq \limsup_{x\to\infty} b(x) \leq \rho + 1 \ ;$$

er is dus een x_0 zò, dat $b(x)$ begrensd is op (x_0,∞).

Hieruit en uit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b(xt) - b(x)}{b(x)} = 0$$

volgt

3.21 $$\lim_{x\to\infty} \{b(xt) - b(x)\} = 0 \ ;$$

hieruit volgt, weer in combinatie met (3.20),wegens gemajoreerde convergentie,

3.22 $$\lim_{x\to\infty} \int_1^s \frac{b(xt) - b(x)}{t}\, dt = 0 \qquad \text{voor alle } s>0.$$

Wegens

$$\int_1^s \frac{b(xt) - b(x)}{t}\, dt = \int_1^s \frac{b(xt)}{t}\, dt - b(x).\ \log s$$

volgt met (3.19) en (3.22)

3.23 $$\lim_{x\to\infty} b(x) = \rho + 1.$$

Voor $\rho = -1$ volgt (3.11) onmiddellijk uit (3.20).

De bewering (3.12) wordt op een analoge manier bewezen,ook met behulp van lemma 3.2.

b. Als (3.13) vervuld is, d.w.z. als

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = \lambda > 0 ,$$

dan is bij elke $\varepsilon>0$ een s_0 te vinden zodanig, dat voor $s \geq s_0$

$$\lambda - \varepsilon < b(s) < \lambda + \varepsilon$$

Schrijven we U (zie (3.17)) uit als funktie van b(x), dan is

$$\frac{U(sx)}{U(s)} = \frac{b(sx)}{b(s)} \exp \left\{\int_s^{sx} \frac{b(t) - 1}{t} dt\right\}$$

$$= \frac{b(sx)}{b(s)} \exp \left\{\int_1^{x} \frac{b(ts) - 1}{t} dt\right\} .$$

Voor $s \geq \max(s_0, s_0 x^{-1})$ geldt dan

$$\frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon} \cdot x^{\lambda-1-\varepsilon} = \frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon} \exp \{(\lambda - 1 - \varepsilon) \log x\} < \frac{U(sx)}{U(s)} <$$

$$< \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda - \varepsilon} \exp \{(\lambda - 1 + \varepsilon) \log x\} < \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda - \varepsilon} \cdot x^{\lambda-1+\varepsilon} .$$

Daar ε willekeurig is en x een vast getal, volgt hieruit het gestelde. Eenzelfde bewijsmethode past men toe op de relatie (3.14).

Opmerking 3.3

Als voor een positieve funktie U (3.13) geldt met $\lambda = 0$ of ∞, dan variëert $\int_0^x U(t)dt$ langzaam resp. snel (exponent ∞). Als (3.14) geldt met $\lambda = 0$ of ∞ dan variëert $\int_x^\infty U(t)dt$ langzaam resp. snel (exponent $-\infty$).
Dit volgt uit (3.16) en het equivalent daarvan voor de staartintegraal.

Opmerking 3.4

Als $U_1(x)$ regulier variëert met exponent ρ_1 , dan geeft stelling 3.1 met $U(x) = x^p\ U_1(x)$ beweringen van het volgende genre:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}\ U_1(x)}{\int_0^x t^p U(t)dt} = p + \rho_1 + 1 \qquad \text{voor } p \geq -\rho_1 - 1.$$

Ook lemma 3.2 kan men op deze manier herschrijven.

Opmerking 3.5

Een gevolg van stelling 3.1 is b.v. dat een positieve funktie $U(x)$ dan en slechts dan langzaam variëert bij oneindig als

3.24 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ U(x)}{\int_0^x U(t)dt} = 1 ,$$

dat wil zeggen als de funktiewaarde asymptotisch equivalent is met het voortschrijdend gemiddelde.
De relaties (3.17) en (3.23) uit het bewijs van de voorgaande stelling geven de volgende belangrijke representatiestelling:

Stelling 3.2

Stel dat $U(x)$ regulier variëert bij oneindig met exponent ρ dan bestaan er funkties $c(x)$ en $a(x)$ en een constante $0 < c < \infty$ met

3.25 $$\lim_{x\to\infty} c(x) = c \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to\infty} a(x) = \rho ,$$

zodanig dat

3.26 $$U(x) = c(x) \exp \{\int_1^x \frac{a(t)}{t} dt\} \quad \text{voor alle } x > 0.$$

Opmerking 3.6

Anderzijds is elke funktie van de vorm (3.26) regulier variërend bij oneindig, zodat (3.26) een derde karakterisering is van regulier variërende funkties.

Bewijs

Voor $\rho > -1$ nemen we $c(x) = b(x)$, gedefiniëerd in (3.15) en $a(x) = b(x) - 1$. Voor $\rho < -1$ definiëren we

$$b^{*}(x) = \frac{x\,U(x)}{\int_x^{\infty} U(t)dt} ,$$

we nemen dan $c(x) = b^{*}(x)$ en $a(x) = -b^{*}(x) - 1$. Voor $\rho > -1$ passen we opmerking 3.4 toe.

Opmerking 3.7

Stel

3.27 $$V(t) = \log U(e^{t}) ,$$

dan volgt uit het regulier variëren van U met exponent ρ

3.28 $$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t+x) - V(t)}{x} = \rho \qquad \text{voor alle } x \neq 0 ,$$

de representatie (3.26) is als volgt te vertalen

3.29 $$v(t) = c^{*}(t) + \int_0^t a^{*}(s)ds ,$$

waarbij $\lim_{t\to\infty} c^{*}(t) = c$ (eindig) en $\lim_{t\to\infty} a^{*}(t) = \rho$.

Opmerking 3.8

Stelling 3.2 spreekt alleen maar over integreerbare funkties $U(x)$; de funkties $c(x)$ en $a(x)$ moeten dan ook integreerbaar zijn. Bij Feller wordt deze restriktie niet genoemd.

Lemma 3.2 en stelling 3.1 geven eigenschappen van regulier variërende funkties. Uit de normaalvorm (3.26) volgen er vele waarvan we er hier een aantal registreren.

<u>Gevolg 3.1</u>

1. Stel dat U regulier of snel variëert met exponent ρ ($-\infty \leq \rho \leq \infty$), dan is

3.30 $$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}U(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } \alpha < -\rho \\ \infty & \text{als } \alpha > -\rho \end{cases}$$

en

3.31 $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log U(x)}{\log x} = \rho \ .$$

2. Als U_1 regulier of snel variëert en

$$U_2(x) \sim U_1(x) \quad \text{voor } x \to \infty \ ,$$

dan ook U_2 , met dezelfde exponent.

3. Als U_1 regulier of snel variëert met exponent ρ_1 en U_2 met exponent ρ_2 , dan variëert

$$\{U_1(x)\}^{\alpha_1} . \{U_2(x)\}^{\alpha_2} \qquad (-\infty < \alpha_1 \ , \ \alpha_2 < \infty)$$

regulier met exponent $\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$ (tenzij $\rho_1 = \infty$ en $\rho_1 = -\infty$ of andersom).

4. Als U regulier variëert (exponent ρ) en

3.32 $$\lim_{x\to\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = b \quad (0 < b < \infty) \ , \text{ terwijl } \lim_{x\to\infty} f_1(x) = \infty \ ,$$

dan is

3.33 $$\lim_{x\to\infty} \frac{U(f_1(x))}{U(f_2(x))} = b^{\rho} \ .$$

In het bijzonder: als

3.34 $$f_1(x) \sim f_2(x) \qquad \text{voor } x\to\infty ,$$

dan ook

3.35 $$U(f_1(x)) \sim U(f_2(x)) \qquad \text{voor } x\to\infty .$$

5. Als U_1 regulier variëert met exponent ρ_1 en U_2 met exponent $\rho_2 \geq 0$, terwijl $U_2(\infty) = \infty$, dan varieert

$$\tilde{U}(x) = U_1(U_2(x))$$

regulier met exponent $\rho_1\rho_2$.

6. Als U monotoon niet-dalend is en regulier variërend $(0 \leq \rho < \infty)$, terwijl $U(\infty) = \infty$, dan is

3.40 $$\lim_{x\to\infty} \frac{U(\tilde{U}(x))}{x} = 1 ,$$

waarin

3.41 $$\tilde{U}(x) = \inf \{y \mid U(y) \geq x\} .$$

Als U monotoon niet-stijgend is $(-\infty < \rho \leq 0)$ en $U(\infty) = 0$, dan is

3.42 $$\lim_{x\to\infty} x\, U(\tilde{\tilde{U}}(\tfrac{1}{x})) = 1 ,$$

waarin

3.43 $$\tilde{\tilde{U}}(x) = \inf \{y \mid U(y) \leq x\} .$$

7. Als U monotoon niet-dalend is en regulier of snel variërend bij oneindig $(0 \leq \rho \leq \infty)$, terwijl $U(\infty) = \infty$, dan is $\tilde{U}(x)$ regulier of snel variërend met exponent ρ^{-1}. Als U monotoon niet-stijgend is en regulier

variërend met exponent ρ $(-\infty \leq \rho \leq 0)$ en $U(\infty) = 0$, dan is $U(\frac{1}{x})$ regulier of snel variërend bij $x = \infty$ met exponent $-\rho^{-1}$.

8. Stel dat U regulier variëert met exponent ρ. Als $\rho > 0$ en U begrensd is op begrensde intervallen, dan geldt de definiërende relatie (1.2) uniform op elk interval van de vorm $(0,x_1]$ met $x_1 < \infty$. Als $\rho = 0$, dan geldt (1.2) uniform op elk interval van de vorm $[x_0,x_1]$ met $0 < x_0 < x_1 < \infty$. Als $\rho < 0$ en $\frac{1}{U}$ begrensd is op begrensde intervallen, dan geldt (1.2) uniform op elk interval van de vorm $[x_0,\infty)$ met $x_0 > 0$.

9. Stel dat U begrensd is op begrensde intervallen en regulier variëert met exponent $\rho > 0$. Definiëren we

3.44 $$U^{*}(x) = \sup_{0<t\leq x} U(t) \quad , \quad U^{**}(x) = \inf_{t\geq x} U(t) \quad ,$$

dan is

3.45 $$U(x) \sim U^{*}(x) \sim U^{**}(x) \qquad \text{voor } x \to \infty \; ;$$

dus ook U^{*} en U^{**} variëren regulier bij oneindig met dezelfde exponent. Als U regulier variëert met exponent $\rho < 0$ en $\frac{1}{U}$ begrensd is op begrensde intervallen, geldt de bewering met

3.46 $$U^{*}(x) = \inf_{0<t\leq x} U(x) \quad , \quad U^{**}(x) = \sup_{t\geq x} U(x) \quad .$$

10. Als $U(x)$ regulier variëert met exponent $\rho \neq 0$ en er een funktie $u(x)$ is, zô dat

3.47 $$U(x) = \int_0^x u(t)dt$$

dan is er een funtie $u^{*}(x)$ waarvoor geldt

3.48 $$u(x) = u^{*}(x)$$

voor bijna alle x en

3.49 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\, u^*(x)}{U(x)} = \rho \;,$$

zodat sgn ρ. $u^*(x)$ regulier variëert met exponent $\rho - 1$.

Bewijs

Het eerste deel van eigenschap 1 volgt onmiddellijk uit de standaardvoorstelling (3.26); verder is volgens (3.26)

$$\frac{\log U(x)}{\log x} = \frac{\log c(x)}{\log x} + \frac{1}{\log x}\int_1^x \frac{a(t)}{t}\,dt$$

$$= \frac{\log c(x)}{\log x} + \frac{1}{\log x}\int_1^{\log x} a(e^s)ds$$

en hieruit volgt het tweede deel van eigenschap 1. De eigenschappen 2 en 3 volgen onmiddellijk uit de definitie.

4. Schrijven we U(x) in de standaardvoorstelling (3.26), dan is

$$\frac{U(f_1(x))}{U(b.f_2(x))} = \frac{c(f_1(x))}{c(b.f_2(x)} \cdot \exp\{\int_{b.f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{a(t)}{t}\,dt\} =$$

$$= \frac{c(f_1(x)}{c(b.f_2(x)} \cdot \exp\{\int_{\log(b.f_2(x))}^{\log(f_1(x))} a(e^s)ds\}.$$

Aangezien bij $\varepsilon > 0$ een x_0 bestaat zò dat voor $x \geq x_0$

$c - \varepsilon < c(f_1(x)) < c + \varepsilon$

$c - \varepsilon < c(b.f_2(x)) < c + \varepsilon$

$\rho - \varepsilon < a(e^s) < \rho + \varepsilon$ voor alle $s \geq \max\{\log f_1(x), \log(b.f_2(x))\}$, geldt voor $x \geq x_0$

$$\frac{c-\varepsilon}{c+\varepsilon} \cdot \exp\{(-|\rho|-\varepsilon).\ |\log(f_1(x) - \log(b.f_2(x))\ |\} \leq \frac{U(f_1(x))}{U(b.f_2(x))}$$

$$\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \cdot \exp\{(|\rho|+\varepsilon).\ |\log(f_1(x) - \log(b.f_2(x))\ |\}\ .$$

zodat wegens

$$\lim_{x\to\infty} \log(f_1(x)) - \log(b.f_2(x)) = 0$$

geldt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(f_1(x))}{U(f_2(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{U(f_1(x))}{U(b.f_2(x))} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{U(b.f_2(x))}{U(f_2(x))} = 1.b^{\rho}\ .$$

5. Toepassing van 4 met $U_2(tx) = f_1(x)$ en $U_2(x) = f_2(x)$ geeft onmiddellijk het gestelde.

6. De bewering voor $\rho \geq 0$ is equivalent aan die voor $\rho \leq 0$: neem maar de transformatie $U_1 = \frac{1}{U}$. De bewering (3.42) is al in het bewijs van stelling 1.2 aangetoond (regel 5 van bladzijde 8).

7. We bewijzen de bewering voor $\rho \leq 0$. We gaan eerst eigenschap 7 bewijzen voor regulier variërende funkties U met $-\infty < \rho < 0$. In de bewijzen van stelling 2.2, opmerking 2.4 en stelling 2.4 is geen gebruik gemaakt van het feit dat F rechtscontinu en ≥ 0 is, zodat de resultaten gelden voor een willekeurig monotoon niet-dalende funktie F met $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
We passen stelling 2.2, opmerking 2.4 en stelling 2.4 toe voor $F(x) = 1 - U(x)$. (Hier wordt $-\rho$ gebruikt i.p.v. ρ). Uit opmerking 1.7 (blz. 8) volgt, dat we in het bewijs van stelling 2.4 (blz. 28) mogen nemen $a_n = \tilde{\tilde{U}}(\frac{1}{n})$. De funktie $a(x) = \tilde{\tilde{U}}(\frac{1}{x})$ is monotoon niet-dalend, voor reële $s > 1$ geldt dus

$$\frac{a([s[x]])}{a([x]+1)} \leq \frac{a(s.[x])}{a([x]+1)} \leq \frac{a(sx)}{a(x)} \leq \frac{a(s.([x]+1))}{a([x])} \leq \frac{a([s([x]+1)]+1)}{a([x])}\ . \tag{3.50}$$

Verder is voor alle reële $t > 1$ (we maken gebruik van (2.14) op blz. 15)

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a([nt])}{a(n)} = t^{-\frac{1}{\rho}}$$

zodat

3.51 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 .$$

De combinatie van (2.39) (blz. 28), (3.51) en (3.50) geeft dan het gestelde. Nu het geval $\rho = 0$. Uit stelling 1.2.a. opmerking 1.7 (blz 8) en lemma 2.3 (blz. 22) volgt (met $a(x) = \tilde{\tilde{U}}(\frac{1}{x})$)

3.52 $$\lim_{n\to\infty} \{1 - U(x\, a(n))\}^n = e^{-1} = f(x) \text{ voor alle } x > 0 ,$$

dus

3.53 $$\lim_{n\to\infty} \{1 - U(x.a([ns]))\}^n = e^{-\frac{1}{s}} = f^*(x) \text{ voor alle } x > 0 \text{ en } s > 1.$$

Stel nu dat de rij

$$\left\{\frac{a([ns])}{a(n)}\right\}$$

een eindig limietpunt α heeft (uiteraard is dan $\alpha \geq 1$ wegens $s > 1$), dan geeft een redenering, analoog aan die in het bewijs van stelling 2.1 (blz. 11, eerste vijf regels)

$$f^*(x) = f(\alpha x) \qquad \text{voor } x > 0 ,$$

in tegenspraak met (3.52) en (3.53). Dus

3.54 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a([ns])}{a(n)} = \infty \qquad \text{voor alle } s > 1 .$$

Verder is er bij gegeven $s > 1$ een x_0 te vinden, zodanig dat voor $x \geq x_0$.

$$(s^{1/2} - 1)\,[x] \geq 2 .$$

Dan is dus

$$[x] + 1 \leq s^{1/2}\,[x] - 1 < [s^{1/2}\,[x]],$$

dus

$$\frac{a(sx)}{a(x)} \geq \frac{a(s[x])}{a([x]+1)} \geq \frac{a([s^{1/2}[s^{1/2}[x]]])}{a([s^{1/2}[x]])} .$$

Uit (3.54) volgt dat het rechterlid naar oneindig gaat voor $x \to \infty$, zodat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a(sx)}{a(x)} = \infty \qquad\qquad \text{voor } s > 1.$$

Stel tenslotte dat $\rho = -\infty$. Uit stelling 1.2.a, opmerking 1.7 (blz 8) en lemma 2.3 (blz. 22) volgt (met $a(x) = \tilde{\tilde{U}}(\frac{1}{x})$)

3.55 $$\lim_{x\to\infty} \{1 - U(x.a(n))\}^n = \iota(x-1) \qquad \text{voor alle } x > 0$$

dus ook

3.56 $$\lim_{x\to\infty} \{1 - U(x.a([ns]))\}^n = \iota(x-1) \quad \text{voor alle } x > 0.$$

Analoog aan de redenering boven ziet men dat de rij

$$\left\{ \frac{a([ns])}{a(n)} \right\}$$

geen limietpunt α met $1 < \alpha < \infty$ heeft. Stel dat er een deelrij $\{n_k\}$ van de natuurlijke getallen is met (s vast)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a([n_k s])}{a(n_k)} = \infty ,$$

dan is er bij elke $0 < x < 1$ een k_0 zò dat voor $k \geq k_0$

$$a([n_k.s]) > x^{-2}.a(n_k) \quad ;$$

voor $k \geq k_1 \geq k_0$ geldt dan (voor gegeven $0 < \varepsilon < 1$)

$$\{1 - U(x.a([n_k.s]))\}^{n_k} \geq \{1 - U(x^{-1}.a(n_k))\}^{n_k} > 1 - \varepsilon > 0 ,$$

in tegenspraak met (3.56).

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(\lfloor ns \rfloor)}{a(n)} = 1 \qquad\qquad \text{voor } s > 1.$$

Weer geldt voor alle reële $t > 1$

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a(\lfloor nt \rfloor)}{a(n)} = 1 \ ,$$

zodat uit (3.50) volgt

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{a(sx)}{a(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{a(sx)}{a(x)} \leq$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} \frac{a(\lfloor s(\lfloor x \rfloor+1)\rfloor+1)}{a(\lfloor s(\lfloor x \rfloor+1)\rfloor)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{a(\lfloor x \rfloor+1)}{a(\lfloor x \rfloor)} \cdot \lim \frac{a(\lfloor s(\lfloor x \rfloor+1)\rfloor)}{s(\lfloor x \rfloor+1)} = 1 \text{ voor } s > 1.$$

7. (Vervaat) Bewijs zonder gebruikmaken van §2. We geven het bewijs voor $0 \le \rho \le \infty$. Eerst merken we op dat voor monotone funkties U die regulier variëren met exponent $\rho \neq 0$ eigenschap 4 ook geldt met $b = 0$ en $b = \infty$ (het bewijs hiervan gaat analoog aan dat van eigenschap 8, punt ij).
Voor monotone snel variërende funkties geldt eigenschap 4 ook, nu met $b \neq 1$, $0 \le b \le \infty$ (Stel b.v. $\rho = \infty$ en $b > 1$, dan is voor $x \ge x_0$ $f_1(x) \ge b^{1/2} f_2(x) \Rightarrow$
$\frac{U(f_1(x))}{U(f_2(x))} \ge \frac{U(b^{1/2} f_2(x))}{U(f_2(x))} \to \infty$).

Stel nu dat het gestelde niet geldt, dan is er een getal $x > 0$ $(x \neq 1)$ en een rij $\{t_n\}$ met $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ zodanig dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{U}(t_n x)}{\tilde{U}(t_n)} = b \neq x^{1/\rho}.$$

Wegens de monotonie van U en $\tilde{U}$ gelden nu de volgende ongelijkheden (zie ook (1.17) blz. 7)

$$\frac{U(\tilde{U}(t_n x)-1)}{U(\tilde{U}(t_n)+1)} \le \frac{U(\tilde{U}(t_n x)-0)}{U(\tilde{U}(t_n)+0)} \le \frac{t_n x}{t_n} \le \frac{U(\tilde{U}(t_n x)+0)}{U(\tilde{U}(t_n)-0)} \le \frac{U(\tilde{U}(t_n x)+1)}{U(\tilde{U}(t_n)-1)} .$$

Als nu $\rho = 0$ en $x > 1$, dan is $x^{1/\rho} = \infty$, dus $1 \le b < \infty$; als $\rho = 0$ en $x < 1$, dan is $x^{1/\rho} = 0$, dus $0 < b \le 1$. Als $\rho = \infty$ dan is $x^{1/\rho} = 1$ dus $b \neq 1$. We kunnen dus uit de uitbreiding van eigenschap 4 concluderen dat ongeacht de waarde van ρ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(\tilde{U}(t_n x) \pm 1)}{U(\tilde{U}(t_n) \mp 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{U(\tilde{U}(t_n x))}{U(\tilde{U}(t_n))} = b^{\rho} .$$

In combinatie met de ongelijkheden boven geeft dit

$$x = b^{\rho} ,$$

de gewenste tegenspraak.

8. Stel dat U(x) regulier variëert met exponent $\rho > 0$ en dat de relatie

3.57 $$\lim_{n\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^{\rho}$$

niet uniform geldt op $(0,x_1]$, dan zijn er rijen reële getallen $\{t_n\}$ en $\{x_n\}$ met

3.58 $$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty,\ 0<x_n\le x_1 \text{ voor alle } n,$$

zodanig dat de rij

3.59 $$\frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} - x_n^\rho$$

niet de limiet nul heeft voor $n \to \infty$.

Aangezien we een deelrij n_k van de natuurlijke getallen kunnen vinden waarvoor $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b$ en $\lim_{k\to\infty} t_{n_k} x_{n_k} = a$ bestaan (met $0<b\le x_1$ en $0\le a\le\infty$), kunnen we zonder beperking aannemen dat

3.60 $$\lim_{n\to\infty} x_n = b \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} t_n x_n = a.$$

We gaan nu de verschillende mogelijkheden na.

i. Stel eerst $0<b\le x_1$; dan is $a = \infty$, we kunnen dus eigenschap 4 toepassen met $f_1(n) = t_n x_n$ en $f_2(n) = t_n$ (eigenschap 4 geldt natuurlijk ook voor een rij getallen die naar oneindig gaat i.p.v. een funktie) en vinden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} = b^\rho$$

in tegenspraak met de aanname.

ij. Stel $b = 0$.

α. Als $0\le a<\infty$, dan is er een getal M zò dat

$$U(t_n x_n) \le M < \infty \quad \text{voor alle } n,$$

dus

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{M}{U(t_n)} = 0 = b^\rho,$$

in tegenspraak met de aanname.

β. Stel tenslotte $a = \infty$, dat wil zeggen

3.61 $$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ en } \lim_{n\to\infty} t_n x_n = \infty.$$

Schrijven we $U(x)$ in de standaardvorm (3.26), dan is

$$\frac{U(t_n x)}{U(t)} = \frac{c(t_n x_n)}{c(t_n)} \exp\left\{-\int_{t_n x_n}^{t_n} \frac{a(s)}{s}\,ds\right\} .$$

Uit (3.25) en (3.61) blijkt dat als $0<\varepsilon<\rho$, voor alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ geldt

$$c(t_n x_n) < 2c$$

$$c(t_n) > \frac{c}{2} > 0 \text{ en}$$

$$a(s) > \frac{\rho}{2} > 0 \text{ voor alle } s \geq t_n x_n ,$$

zodat

$$\frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} < 4 \exp\left\{-\frac{\rho}{2}(\log t_n - \log(t_n x_n)\right\} = 4.x_n^{\rho/2}$$

en dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} = 0 ,$$

in tegenspraak met de aanname.

Als $\rho = 0$ hoeven we alleen i te verifiëren en dit gaat op dezelfde manier. Voor $\rho < 0$ gaat het bewijs op een analoge manier.

9. We bewijzen de bewering voor $\rho > 0$, de andere is daarmee equivalent. Stel dat er een rij $\{x_n\}$ bestaat met

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{U^*(x_n)}{U(x_n)} = c > 1 .$$

Bij elke x_n is een y_n met $0<y_n\leq 1$ en

$$U^*(x_n) < U(y_n x_n) + \varepsilon$$

dus

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{U(y_n x_n)}{U(x_n)} > \lim_{n\to\infty} \frac{U^*(x_n)}{U(x_n)} - \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{U(x_n)} = c > 1 \ .$$

Neem een deelrij zò dat $y_{n_k} \to y$ $(0\leq y\leq 1)$.
Uit de uniformiteit volgt dan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U(y_{n_k} x_{n_k})}{U(x_{n_k})} = y^\rho \leq 1 \ ;$$

dit levert de verlangde tegenspraak.

Stel dat er een rij $\{x_n\}$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U^{**}(x_n)}{U(x_n)} = c < 1 \ .$$

Analoog aan het bewijs van eigenschap 8 (ijβ) toont men aan dat voor elke rij $\{y_{n_k}\}$ met $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$ $(1\leq y\leq\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(y_{n_k} x_{n_k})}{U(x_{n_k})} = y^\rho \geq 1,$$

zodat op dezelfde manier als boven een tegenspraak aangetoond kan worden.

10. (gewijzigde versie). Stel eerst $\rho > 0$. Voor $0<a<b<\infty$ is

3.61a $$\frac{U(tb)-U(ta)}{U(t)} = \int_a^b \frac{u(ty).t}{U(t)}\, dy$$

Het bewijs gaat in drie stappen.
α. Eerst bewijzen we dat er een getal $M(a,b)$ bestaat zodanig dat

3.61b $$\left| \frac{u(ty).t}{U(t)} \right| < M(y)$$

voor alle t en $a \le y \le b$. Stel eerst dat u monotoon niet-dalend is en dat er een rij $\{t_k\}$ bestaat met $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ en een $y_1 > 0$ zodanig dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u(t_k y_1).t_k}{U(t_k)} = \infty,$$

dan volgt uit (3.61a) dat voor elke $y_2 > y_1$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U(t_k y_2) - U(t_k y_1)}{U(t_k)} \geq \lim_{k\to\infty} (y_2 - y_1) \frac{u(t_k y_1) t_k}{U(t_k)} = \infty ,$$

in strijd met het regulier variëren van U. Uit het begrensd zijn van

$$\psi(t,y) = \frac{u(ty).t}{U(t)}$$

voor vaste y volgt wegens de monotonie van $\psi(t,y)$ als funktie van y (3.61b). Voor monotoon niet-stijgende u gaat het bewijs analoog.

β. We bewijzen vervolgens dat er een rij $\{t_n\}$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ zodanig dat voor alle y

3.61c $$\lim_{n\to\infty} \frac{u(t_n y).t_n}{U(t_n)} = \rho.y^{\rho-1} .$$

In hoofdstuk I van de syllabus (blz 9) is de volgende stelling van Helly bewezen:

Stelling I.1.6. Iedere rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ bezit een deelrij die naar een eventueel defektieve verdelingsfunktie F konvergeert.

We gebruiken een vrij triviale variant hiervan.

Bij iedere begrensde rij monotone funkties G_m bestaat een begrensde monotone funktie G en een deelrij $\{m_k\}$ van de natuurlijke getallen zodanig dat

$$\lim_{k\to\infty} G_{m_k}(y) = G(y)$$

voor elk continuiteitspunt y van G(y).

Nemen we $G_m(y) = \psi(t_m,y)$ voor $a \le y \le b$ waarbij $\{t_m\}$ een willekeurige rij getallen is met $\lim_{m\to\infty} t_m = \infty$, dan volgt uit de stelling het bestaan van een rij $\{t_n\}$ ($t_n \to \infty$, $\{t_n\}$ deelrij van $\{t_m\}$) en een funktie $\psi(y)$ op $[a,b]$ zodanig dat

$$\lim_{n\to\infty} \psi(t_n,y) = \psi(y)$$

voor elk continuiteitspunt y van $\psi(y)$ ($a\leq y\leq b$).
Wegens α kunnen we uit (3.61a) met gemajoreerde convergentie concluderen dat

$$\int_a^b \psi(y)dy = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \psi(t_n,y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi(t_n,y)dy = b^\rho - a^\rho .$$

Uit het feit dat a en b willekeurig gekozen kunnen worden, volgt wegens de monotonie van ψ dat

$$\psi(y) = \rho y^{\rho-1} .$$

Hiermee is (3.61c) bewezen.

γ. We bewijzen nu

3.61d $$\lim_{t\to\infty} \frac{u(ty).t}{U(t)} = \rho.y^{\rho-1} \quad \text{voor alle y.}$$

Stel dat (3.61d) niet geldt, dan is er een rij $\{t_n^*\}$ met $\lim_{n\to\infty} t_n^* = \infty$ zodanig dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(t_n^* y)t_n^*}{U(t_n^*)} = \phi(y)$$

bestaat voor elk continuiteitspunt van $\phi(y)$, waarbij $\phi(y)$ en $\psi(y)$ niet in alle continuiteitspunten gelijke waarden aannemen. Welnu ook voor $\phi(y)$ geldt de redenering in β zodat

$$\phi(y) = \rho y^{\rho-1} = \psi(y) ,$$

de gewenste tegenspraak.

De relatie (3.61d) geeft voor $y = 1$ de bewering van de stelling. Voor $\rho < 0$ passen we het bovenstaande toe op $U_1 = \frac{1}{U}$; uit $u_1(x) = -u(x).U^{-2}(x)$ volgt dan het gestelde.

Opmerking 3.9

Eigenschap 6 (en 5) is niet juist voor $\rho = \pm \infty$.

Voorbeeld:

$$U(x) = e^{[x]} \text{ , waarbij}$$

$$\tilde{U}(x) = - [-\log x] \text{ en}$$

$$\frac{U(\tilde{U}(x))}{x} = \exp \{ [-[-\log x]] - \log x\} = \exp \{-[-\log x] - \log x\} ,$$

een uitdrukking die geen limiet heeft voor $x \to \infty$. We merken op dat uit opmerking 2.6 volgt dat eigenschap 6 wel geldt voor de staart van een verdelingsfunktie F waarvoor $\{F^n\}$ tot het aantrekkingsgebied van $G_3(x)$ behoort.

Opmerking 3.10

De begrensdheidsconditie bij eigenschap 8 - afwezig bij Karamata - is noodzakelijk. Voorbeeld:

$$U(\frac{1}{2^n}) = 2^n \quad \text{voor } n = 1,2,3,...$$

$$U(x) = x \quad \text{voor } x \notin \{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty} .$$

U(x) variëert regulier bij oneindig met exponent $\rho = 1$ want U8x) = x voor $x > 1/2$. Verder is U sommeerbaar op eindige intervallen. Nemen we de rijen $t_n = 2^n$ en $x_n = 2^{-2n}$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(t_n x_n)}{U(t_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n} = 1 \neq \{ \lim_{n\to\infty} x_n \}^{\rho} = 0 ,$$

zodat voor deze funktie eigenschap 8 niet geldt.

Opmerking 3.11

De intervallen, genoemd in eigenschap 8, waarop relatie (1.2) uniform geldt, kunnen niet algemener genomen worden; men ziet dit gemakkelijk in aan de hand van de funkties $x \log(1+x)$ ($\rho = 1 > 0$), $\log(1+x)$ ($\rho = 0$) en $\{x \log(1+x)\}^{-1}$ ($\rho = -1 < 0$).

Stelling 3.1 kan (in iets uitgebreider vorm) op een andere manier geformuleerd worden als het verdelingsfunkties betreft.

Stelling 3.2

Laat F een verdelingsfunktie zijn en

3.62 $$U_\xi(x) = \int_0^x y^\xi dF(y) \qquad \text{met } \xi > 0.$$

Stel dat $U_\xi(\infty) = \infty$.

1. Als $1-F$ of U_ξ regulier variëert, dan bestaat

3.63 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\xi\{1-F(x)\}}{U_\xi(x)} = c \qquad \text{met } 0 \le c \le \infty .$$

2. Als aan (3.63) voldaan is met $0<c<\infty$, dan variëert $U_\xi(x)$ regulier bij oneindig met exponent $c.\xi.(c+1)^{-1}$. Uit (3.63) volgt dan onmiddellijk het regulier variëren van $1-F(x)$. Als aan (3.63) voldaan is met $c = 0$, dan variëert $U_\xi(x)$ langzaam bij oneindig; als aan (3.63) voldaan is met $c = \infty$, dan variëert $1-F(x)$ langzaam bij oneindig.

Bewijs We formuleren eerst een aantal eigenschappen die met partiële integratie worden bewezen.

3.64 $$U_\xi(x) = \xi \int_0^x \left(\int_0^y t^{\xi-1}dt \right) dF(y) = \xi \int_0^x \left(\int_t^x dF(y) \right) t^{\xi-1}dt =$$

$$= -x^\xi \{1-F(x)\} + \xi \int_0^x \{1-F(t)\} t^{\xi-1}dt.$$

Hieruit volgt dat (we gebruiken lemma 3.1)

3.65 $$\lim_{x\to\infty} x^{-\xi}U_\xi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \{1-F(t)\}t^{\xi-1}dt}{\int_0^x t^{\xi-1}dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{\{1-F(x)\}\, x^{\xi-1}}{x^{\xi-1}} = 0$$

en dat

3.66 $$\xi \int_0^\infty \{1-F(t)\}\, t^{\xi-1}dt \geq U_\xi(\infty) = \infty\ .$$

Uit (3.62) volgt

3.67 $$1-F(x) = \int_x^\infty y^{-\xi}dU_\xi(y)\ ,$$

dus

$$F(z)-F(x) = \xi \int_x^z\left(\int_y^\infty t^{-\xi-1}\ dt\right) dU_\xi(y) = \xi \int_x^z\left(\int_x^t dU_\xi(y)\right) t^{-\xi-1}\ dt\ +$$

$$+\ \xi \int_z^\infty\left(\int_x^z dU_\xi(y)\right) t^{-\xi-1}\ dt =$$

$$= z^{-\xi}U_\xi(z) - x^{-\xi}U_\xi(x) + \xi \int_x^z t^{-\xi-1}\ U_\xi(t)\ dt.$$

Nemen we in deze uitdrukking de limiet $z \to \infty$, dan volgt wegens (3.65)

3.68 $$1-F(x) = -x^{-\xi}U_\xi(x) + \xi \int_x^\infty t^{-\xi-1}U_\xi(t)\ dt.$$

1. Stel eerst dat $1-F(x)$ regulier variëert met exponent ρ. We willen eerst laten zien dat $-\xi\leq\rho\leq 0$. Stel dat $\rho = -\xi-2\delta$ met $\delta > 0$, dan volgt uit eigenschap 1 (gevolg 3.1)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\xi+\delta}\{1-F(x)\} = 0\ ,$$

zodat

$$\int_0^\infty x^{\xi-1}\,\{1-F(x)\}\,dx < \infty\,.$$

Dit is in tegenspraak met (3.66), dus $-\xi\leq\rho\leq 0$.

Verder gebruiken we (3.64) en stelling 3.1 met $U(x) = x^{\xi-1}\{1-F(x)\}$:

$$3.69 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{U_\xi(x)}{x^\xi\{1-F(x)\}} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\xi\int_0^x \{1-F(t)\}t^{\xi-1}dt}{x^\xi\{1-F(x)\}} = -1 + \frac{\xi}{\rho+\xi} = \frac{-\rho}{\rho+\xi}\,.$$

We zien dat de limiet 0 of ∞ kan zijn.
Als gegeven is dat $U_\xi(x)$ regulier variëert met exponent ρ, dan volgt uit (3.65) dat $0\leq\rho\leq\xi$. Uit (3.68) volgt verder (met stelling 3.1; $U(x) = x^{-\xi-1}U_\xi(x)$)

$$3.70 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{x^{-\xi}U_\xi(x)} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\xi\int_x^\infty t^{-\xi-1}U_\xi(t)dt}{x^{-\xi}U_\xi(x)} = -1 + \frac{\xi}{\xi-\rho} = \frac{\rho}{\xi-\rho}\,.$$

Ook deze limiet kan 0 of ∞ opleveren.

2. Als de limiet (3.63) bestaat met $0\leq c<\infty$, dan volgt uit (3.70)

$$\lim_{x\to\infty} \xi\,\frac{\int_x^\infty t^{-\xi-1}U_\xi(t)dt}{x^{-\xi}U_\xi(x)} = c+1>0\,.$$

Met behulp van stelling 3.1 ($U(x) = x^{-\xi-1}U_\xi(x)$) zien we dat $U_\xi(x)$ regulier variëert met exponent $-\xi(c+1)^{-1}+\xi+1-1 = c\xi(c+1)^{-1}$. Op analoge manier zien we voor $c = \infty$ met (3.69) dat

$$\lim_{x\to\infty} \xi\,\frac{\int_0^x \{1-F(t)\}t^{\xi-1}dt}{x^\xi\{1-F(x)\}} = 1$$

en uit stelling 3.1 volgt dan het langzaam variëren van $1-F(x)$.

Opmerking 3.12

Deze stelling is ook voor de linkerstaart van een verdelingsfunktie te formuleren. Een gecombineerde uitspraak is te verkrijgen door de funktie $1-F(x) + F(-x-0)$ te bekijken.

Opmerking 3.13

Voor het geval $U_\xi(\infty)<\infty$, bestaat een analoge stelling voor de funktie $U_\xi(\infty) - U_\xi(x)$ in plaats van $U_\xi(x)$.

Opmerking 3.14

Uit (3.64) volgt dat $U_\xi(x)$ dan en slechts dan langzaam variëert als

$$\int_0^x t^{\xi-1}\{1-F(t)\}dt$$

langzaam variëert.

Opmerking 3.15

In het bewijs van stelling 3.1 is een overgang die nog gemotiveerd moet worden. In regel 3 van bladzijde 48 maken we gebruik van de volgende eigenschap: Als $U(x)$ positief is en sommeerbaar op eindige intervallen, dan is $\log\{\int_0^x U(t)dt\}$ absoluut continu op intervallen van de vorm $[a,b]$ $(0<a<b<\infty)$.

Bewijs Uit de continuiteit van $\int_0^x U(t)dt$ volgt dat er getallen m en M zijn $(0<m\leq M<\infty)$ zodanig dat voor $x\in[a,b]$

$$m \leq \int_0^x U(t)dt \leq M.$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zò dat voor elke rij $a\leq x_1<y_1\leq x_2<y_2\leq\ldots\leq x_n<y_n\leq b$ met

$$\sum_{i=1}^n |x_i-y_i| < \delta$$

geldt

$$\sum_{i=1}^n |U(x_i)-U(y_i)|<\varepsilon;$$

dan is

$$\sum_{i=1}^{n} |\log U(x_i) - \log U(y_i)| = \sum_{i=1}^{n} \log \{1 + \frac{|U(x_i)-U(y_i)|}{\min(U(x_i),U(y_i))}\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|U(x_i)-U(y_i)|}{\min(U(x_i),U(y_i))} \leq \frac{\varepsilon}{m} .$$

Opmerking 3.16

Over de gebruikte terminologie nog een enkel woord: de term "variatie exponent" in definitie 1.1 (blz. 1) lijkt ons achteraf niet zo gelukkig; beter zou geweest zijn "regulariteits exponent" of kortweg "exponent". In plaats van de onhanteerbare uitdrukking "regulier of snel variërend met exponent ρ" zouden we kunnen gebruiken "ρ-variërend".

We besluiten deze paragraaf met een opmerking over Karamata's aangehaalde artikel. Het eerste deel van het bewijs van lemma 3.2 is daar vervangen door een beroep op een stelling van Canchy (Cours d'Analyse, deel 1, hoofdstuk 2, §3) die onjuist is.

"Stelling" van Canchy: Als voor een reële funktie $c(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \{c(x+1) - c(x)\} = \rho \qquad \text{met } -\infty \leq \rho \leq \infty ,$$

dan is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c(x)}{x} = \rho .$$

Tegenvoorbeeld Nemen we

$$c(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{voor } x \neq k + 1/2 \quad (k \text{ geheel}) \\ 0 & \text{voor } x = k + 1/2 , \end{cases}$$

dan is $c(x+1) - c(x) = 0$ en

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{c(x)}{x} = \infty$$

(want de vergelijking $c(x) = x^2$ heeft in elk interval ter lengte één een oplossing).

Stelling 3.3

Als de reële funktie c(x) begrensd is op begrensde intervallen, dan geldt:

$$\lim_{x\to\infty} \{c(x+1) - c(x)\} = \rho \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{c(x)}{x} = \rho \ .$$

Bewijs Bij elke $\varepsilon > 0$ is een $x_0(\varepsilon)$ te vinden zodanig dat voor alle $x \geq x_0$

$$\rho - \varepsilon < c(x+1) - c(x) < \rho + \varepsilon \ ,$$

dus ($n = 1,2,3,\ldots$)

$$n(\rho-\varepsilon) < c(x+n) - c(x) < n(\rho+\varepsilon)$$

en

$$\frac{c(x)}{x+n} + \frac{n(\rho-\varepsilon)}{n+x} < \frac{c(x+n)}{x+n} < \frac{c(x)}{x+n} + \frac{n(\rho+\varepsilon)}{n+x} \ .$$

Stel

$$a = \sup \{ c(x) \mid x \in [x_0,x_0+1) \} < \infty$$

$$b = \inf \{ c(x) \mid x \in [x_0,x_0+1) \} > -\infty \ ,$$

dan is voor alle $x \in [x_0,x_0+1)$

$$\frac{b}{x_0+1+n} + \frac{n(\rho-\varepsilon)}{n+x_0+1} < \frac{c(x+n)}{x+n} < \frac{a}{x_0+n} + \frac{n(\rho+\varepsilon)}{x_0+n} \ ,$$

zodat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(x+n)}{x+n} = \rho$$

uniform voor $x_0 \leq x < x_0 + 1$; dit geeft het gestelde.

§ 4 Tauberstellingen
(Feller 2 XIII 5)

Laat U een verdelingsachtige funktie (monotoon niet dalend, rechts continu, $\lim_{x\to-\infty} U(x) = 0$) zijn waarvoor $U(0) = 0$, terwijl

4.1 $$\check{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dU(x)$$

convergeert voor elke $\lambda > 0$. Uiteraard is $\lim_{x\to\infty} U(x)$ dan en slechts dan eindig als $\lim_{\lambda\downarrow 0} \check{U}(\lambda)$ eindig is. Dit geeft een verband tussen het gedrag van $U(x)$ voor $x \to \infty$ en $\check{U}(\lambda)$ voor $\lambda \downarrow 0$. In het geval van regulier variërende funkties kunnen we veel meer zeggen over dit verband; stellingen daarover heten Tauberstellingen. Voor de bewijzen hebben we de uitgebreide continuiteitsstelling voor verdelingsachtige funkties uit hoofdstuk I (blz. 26) nodig. Hier volgt de formulering van die stelling.

Stelling I.2.5 (Uitgebreide continuiteitsstelling).
Zij $\{U_n\}$ een rij verdelingsachtige funkties.
a) Als er een reëelwaardige funktie ω op (a,∞) bestaat met $\check{U}_n(\lambda) \to \omega(\lambda)$ voor alle $\lambda > a$, dan is er een verdelingsachtige funktie U met $U_n \to U$ en $\check{U} = \omega$ op (a,∞).
b) Als $U_n \to U$ en de rij $\{\check{U}_n(a)\}$ is begrensd, dan geldt $\check{U}_n(\lambda) \to \check{U}(\lambda)$ voor $\lambda > a$.

We formuleren nu de Tauberstelling; daarvoor gebruiken we de notatie $\check{U}^*(\lambda) = \check{U}(\frac{1}{\lambda})$

Stelling 4.1
a. Als $U(x)$ of $\check{U}^*(\lambda)$ ρ-variërend is bij oneindig, dan is

4.2 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{\check{U}^*(t)} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\,.$$

In dit geval zijn dus beide funkties ρ-variërend.

b. Als

4.3 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{\check{U}^*(t)} = \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \text{ voor alle } x > 0,$$

dan zijn U en $\check{U}^*$ ρ-varierend bij oneindig.

Opmerking 4.1 Uit de monotonie van U volgt $0 \leq \rho < \infty$.

Bewijs. We bewijzen de beweringen voor een vaste maar willekeurig gekozen rij $\{t_n\}$ met $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

a.i. Stel eerst dat $\check{U}^*(\lambda)$ ρ-variëert bij oneindig. We definiëren een rij verdelingsachtige funkties

4.4 $$U_n(x) = \frac{U(t_n x)}{\check{U}^*(t_n)} ;$$

dan is

4.5 $$\check{U}_n(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{1}{\check{U}^*(t_n)} \cdot d\{U(t_n x)\} = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{t_n}x} \cdot \frac{1}{\check{U}^*(t_n)} \cdot dU(x) = \frac{\check{U}^*(\frac{t_n}{\lambda})}{\check{U}^*(t_n)} .$$

Uit het gegeven volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \check{U}_n(\lambda) = \lambda^{-\rho} \quad \text{voor } \lambda > 0.$$

Welnu

4.6 $$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx^\rho = \lambda^{-\rho},$$

volgens stelling I.2.5.a is dus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(t_n x)}{\check{U}^*(t_n)} = \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \quad \text{voor } x > 0.$$

Voor x=1 krijgen we (4.2).

ij. Als gegeven is dat U ρ-variëert, definiëren we

4.7 $$U_n(x) = \frac{U(2t_n x)}{U(2t_n)} ;$$

dan is

4.8 $$\acute{U}_n(\lambda) = \frac{\check{U}^*(\frac{2t_n}{\lambda})}{U(2t_n)} .$$

We weten dat

$$V(x) \overset{\text{not}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} U_n(x) = x^\rho \qquad \text{voor } x>0$$

en $$\check{V}(\lambda) = \Gamma(\rho+1)\ \lambda^{-\rho} .$$

Volgens stelling I.2.5.b kunnen we concluderen

4.9 $$\lim_{n\to\infty} \check{U}_n(\lambda) = \check{V}(\lambda) \quad \text{voor } \lambda>1$$

als we kunnen aantonen dat de rij $\{\check{U}_n(1)\}$ begrensd is. Uit (4.9) volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\check{U}^*(\frac{2t_n}{\lambda})}{U(\frac{2t_n}{\lambda})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\check{U}^*(\frac{2t_n}{\lambda})}{U(2t_n)} \cdot \frac{U(2t_n)}{U(\frac{2t_n}{\lambda})} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \quad \text{voor } \lambda>1.$$

De keuze $\lambda=2$ geeft dan het gestelde. We moeten nog de begrensdheidsconditie verifiëren. Voor alle $t>0$ is

4.10 $$\check{U}^*(t) = \check{U}(\tfrac{1}{t}) = \int_0^t e^{-\frac{x}{t}}\, dU(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^m.t}^{2^{m+1}.t} e^{-\frac{x}{t}}\, dU(x) \le$$
$$\le 1.U(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-2^m\}.U(2^{m+1}.t) .$$

U is ρ-variërend dus voor $t>t_0$ is

$$U(2t) < 2^{\rho+1}\, U(t)$$

en

$$U(2^n t) < 2^{n(\rho+1)}\ U(t) \text{ voor } n=1,2,\ldots$$

Invullen in (4.10) geeft voor $t>t_0$

$$\frac{\check{U}^*(t)}{U(t)} \leq 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-2^m\}.2^{(m+1)(\rho+1)} < \infty .$$

b. Uit (4.3) volgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{\check{U}^*(t)} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{\check{U}^*(t)}{U(t)} = x^\rho .$$

Uit a. volgt nu dat ook $\check{U}^*$ ρ-variëert.

Voor snel variërende funkties geldt bovenstaande stelling niet. In dat geval geldt het volgende:

Stelling 4.2

Als voor een $a<1$

4.11 $$\lim_{t\to\infty} \frac{\check{U}^*(ta)}{\check{U}^*(t)} = 0$$

of

4.12 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(ta)}{U(t)} = 0 ,$$

dan is ook

4.13 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{\check{U}^*(t)} = 0$$

Bewijs Uit (4.11) volgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\check{U}^*(t\lambda)}{\check{U}^*(t)} = 0 \text{ voor } \lambda < a.$$

Volgens stelling I.2.5.a is dan (zie het bewijs van de vorige stelling)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{\check{U}^{*}(t)} = 0 \text{ voor } x>0 .$$

Laat nu (4.12) gegeven zijn. Door de afschatting

$$\check{U}^{*}(ta) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{at}} dU(x) \geq \int_0^{t} e^{-\frac{x}{at}} dU(x) \geq e^{-\frac{1}{a}} U(t)$$

zien we dat

$$0 \leq \frac{U(ta)}{\check{U}^{*}(ta)} \leq \frac{U(ta)}{U(t)} e^{\frac{1}{a}} ;$$

samen met (4.12) geeft dit (4.13).

De stellingen 4.1 en 4.2 blijven gelden als we het gedrag van $U(x)$ in de buurt van $x=0$ vergelijken met het gedrag van $\check{U}(\lambda)$ in de buurt van $\lambda=\infty$. We gebruiken de notatie $U^{*}(x) = U(\frac{1}{x})$ om het resultaat te formuleren.

Stelling 4.3

a. Als $U^{*}(x)$ of $\check{U}(\lambda)$ ρ-variëert bij oneindig, dan is

4.14 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{*}(t)}{\check{U}(t)} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} .$$

In dat geval variëren dus beide funkties regulier met dezelfde exponent.

b. Als

4.15 $$\lim_{t\to\infty} \frac{U^{*}(tx)}{\check{U}(t)} = \frac{x^{\rho}}{\Gamma(\rho+1)} \quad \text{voor alle } x>0 ,$$

dan variëren U^{*} en U regulier bij oneindig met exponent ρ.

Bewijs Het bewijs is precies hetzelfde als dat van stelling 4.1, we nemen nu alleen rijen $\{t_n\}$ met $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Stelling 4.4

Als voor een $a<1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\check{U}^*(ta)}{\check{U}^*(t)} = 0$$

of

$$\lim_{t\to 0} \frac{U(ta)}{U(t)} = 0 ,$$

dan is ook

$$\lim_{t\to 0} \frac{U(t)}{\check{U}^*(t)} = 0 .$$

Bewijs Hetzelfde als dat van stelling 4.2, behoudens wijziging van $t\to\infty$ in $t\to 0$.

Bij een verdelingsfunktie F definiëren we

$$U(x) = \int_0^x \{1-F(t)\}dt ;$$

dan is

$$\check{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\{1-F(x)\}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \int_x^\infty dF(t)dx$$
$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-\lambda x}dx\, dF(x) = \frac{1-\check{F}(\lambda)}{\lambda} .$$

Stelling 4.1 zegt dat $\int_0^x \{1-F(t)\}dt$ dan en slechts dan regulier varieert als $1-\check{F}(\frac{1}{\lambda})$ regulier varieert bij $\lambda=\infty$. We willen graag een dergelijk verband leggen tussen het gedrag van $1-F(x)$ bij oneindig en $1-\check{F}(\lambda)$ bij nul. We formuleren een stelling, die we op het bovenstaande geval zullen toepassen.

<u>Stelling 4.5</u>

Stel dat U een verdelingsachtige funktie is met $U(0) = 0$ en dat er een funktie u bestaat die monotoon is op een interval van de vorm $[x_0, \infty)$, zodanig dat

$$U(x) = \int_0^x u(t)\,dt.$$

Voor $\rho > 0$ geldt dat als $u(x)$ $(\rho-1)$-variëert bij oneindig of $\check{U}^*(\lambda)$ ρ-variëert bij oneindig, dan is

4.16 $$\lim_{t\to\infty} \frac{t.u(t)}{\check{U}^*(t)} = \frac{1}{\Gamma(\rho)} .$$

In dat geval variëren dus beide funkties regulier.

<u>Bewijs</u> Het gestelde volgt uit eigenschap 10 van gevolg 3.1 (blz. 55) en stelling 4.1.

<u>Gevolg 4.1</u>

Laat F een verdelingsfunktie zijn en $-1<\rho\leq 0$. Als $1-F(x)$ of $1-\check{F}^*(\lambda)$ ρ-variëert bij oneindig, dan is

4.17 $$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(t)}{1-\check{F}^*(t)} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}$$

In dat geval variëren dus beide funkties regulier.

<u>Bewijs</u> Toepassing van stelling 4.4 met $U(x) = \int_0^x \{1-F(t)\}dt.$

Tenslotte bewijzen we nog een Tauberstelling voor machtreeksen.

Eerst een hulpstelling.

Lemma 4.1 Als voor een positieve monotone funktie U geldt

4.18 $$\lim_{n\to\infty} \frac{U(n.m)}{U(n)} = m^{\rho} \quad \text{voor } m = 1,2,3 \ldots,$$

dat is U ρ-varierend.

Bewijs. We veronderstellen eerst dat U monotoon niet-dalend is.

Eerst bewijzen we

4.19 $$\lim_{n\to\infty} \frac{U(n+1)}{U(n)} = 1.$$

Veronderstel dat (4.19) niet geldt, dan is er een rij natuurlijke getallen $\{k_r\}$ zodanig dat

$$\lim_{r\to\infty} \frac{U(k_r+1)}{U(k_r)} = c > 1 \ (c \leq \infty).$$

Neem m zodanig dat

$$1 < \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\rho} \leq c^{\frac{1}{2}}$$

of een willekeurige eindige constante als $c = \infty$.

We definiëren

$$n_r = [k_r.m^{-1}] ;$$

dan is voor $n_r > m$

$$n_r.m \leq k_r < (n_r+1)m < n_r(m+1)$$

en

$$\lim_{r\to\infty} \frac{U(n_r(m+1))}{U(n_r.m)} = \lim_{r\to\infty} \prod_{k=n_r m}^{n_r(m+1)-1} \frac{U(k+1)}{U(k)} \geq \lim_{r\to\infty} \frac{U(k_r+1)}{U(k_r)} = c,$$

terwijl uit (4.18) volgt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{U(n_r(m+1))}{U(n_r.m)} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{\rho} \leq c^{\frac{1}{2}}.$$

Uit deze tegenspraak volgt dat (4.19) juist is. Neem nu een willekeurige $x > 0$, $\varepsilon > 0$ en daarbij natuurlijke getallen m en r zodanig dat

$$x - \varepsilon < \frac{m}{r} \leq x < \frac{m+1}{r} < x + \varepsilon.$$

Verder definiëren we bij een reëel getal t

$$n_t = [tr^{-1}];$$

dan is

$$n_t.r \leq t < (n_t+1)r$$

en

$$\frac{U(n_t r.\frac{m}{r})}{U((n_t+1)r)} \leq \frac{U(tx)}{U(t)} \leq \frac{U((n_t+1)r.\frac{m+1}{r})}{U(n_t.r)}$$

Wegens (4.18) en (4.19) is dan

$$(x - \varepsilon)^\rho \leq (\tfrac{m}{r})^\rho \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} \leq (\tfrac{m+1}{r})^\rho \leq (x + \varepsilon)^\rho.$$

Hieruit volgt het gestelde. Voor monotoon niet-stijgende funkties gaat het bewijs analoog.

Opmerking 4.2 Men kan aantonen dat het voldoende is (4.18) te eisen voor natuurlijke getallen m_1 en m_2 waarovoor $\frac{\log m_1}{\log m_2}$ irrationaal is (zie ook gevolg 2.1 op blz. 17).

Stelling 4.6 Veronderstel dat de machtreeks

4.20 $$Q(s) = \sum_{h=1}^{\infty} q_n s^n ,$$

waarin $q_n \geq 0$ voor $n = 1, 2, 3 \ldots$, een convergentiestraal ≥ 1 heeft.

a. Voor $\rho \geq 0$ geldt dat als $Q(1 - \frac{1}{s})$ regulier varieërt bij $s = \infty$ met exponent ρ of als

4.21 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n.m} q_k}{\sum_{k=1}^{n} q_k} = m^\rho \text{ voor } m = 1, 2, 3,\ldots,$$

dan is

4.22 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{Q(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} ,$$

zodat dan ook (4.21) geldt resp. $Q(1-\frac{1}{s})$ regulier varieërt.

b. Stel dat de rij $\{q_n\}$ monotoon is. Voor $\rho > 0$ geldt dat als $Q(1-\frac{1}{s})$ regulier varieërt bij $s = \infty$ met exponent ρ of als

4.23 $$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n.m}}{q_n} = m^{\rho-1} \text{ voor } \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

dan is

4.24 $$\lim_{n\to\infty} \frac{n.q_n}{Q(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{\Gamma(\rho)},$$

zodat dan ook (4.23) geldt resp. $Q(1-\frac{1}{s})$ regulier varieërt.

Bewijs a. We definiëren een verdelingsachtige funktie

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \, \iota(x-k) = \sum_{k=1}^{[x]} q_k.$$

Dan is
$$\check{U}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \, e^{-k\lambda} = Q(e^{-\lambda}) \text{ voor } \lambda > 0,$$

dus

4.25 $\check{U}^{*}(\lambda) = Q(e^{-\frac{1}{\lambda}})$.

Uit lemma 4.1 volgt dat U dan en slechts dan ρ-varieert als (4.21) geldt. Anderzijds geldt dat $U^{*}(\lambda)$ (dat wil zeggen $Q(e^{-\frac{1}{\lambda}})$) dan en slechts dan ρ-varieert als $Q(1-\frac{1}{\lambda})$ ρ-varieert bij oneindig. Want stel dat $Q(e^{-\frac{1}{\lambda}})$ ρ-varieert bij $\lambda = \infty$ dan volgt uit

$$\lambda \sim -\{\log(1-\frac{1}{\lambda})\}^{-1} \text{ voor } \lambda \to \infty$$

met eigenschap 4 van gevolg 3.1 (blz. 53)

$$U^{*}(\lambda) = Q(e^{-\frac{1}{\lambda}}) \sim Q(e^{\log(1-\frac{1}{\lambda})}) = Q(1-\frac{1}{\lambda}) \quad \text{voor } \lambda \to \infty.$$

Als gegeven is dat $Q(1 - \frac{1}{\lambda})$ ρ-varieert bij $\lambda = \infty$ dan volgt uit

$$\lambda \sim \{1 - e^{-\frac{1}{\lambda}}\}^{-1} \quad \text{voor } \lambda \to \infty$$

met eigenschap 4 (blz. 53)

$$Q(1 - \tfrac{1}{\lambda}) \sim Q(1 - (1 - e^{-\frac{1}{\lambda}})) = Q(e^{-\frac{1}{\lambda}}) = U^{*}(\lambda) \text{ voor } \lambda \to \infty.$$

De beweringen van de stelling volgen nu uit stelling 4.1, toegepast op $U(x)$ en $\check{U}^{*}(\lambda)$.

b. We definiëren de funktie $v(x)$ als volgt

$$v(x) = q_k \text{ als } k \leq x < k + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

De funktie

$$V(x) = \int_0^x v(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{[x]-1} q_k + q_{[x]} \cdot (x-[x])$$

is dan een verdelingsachtige funktie met monotone dichtheid.

Verder is

$$\check{V}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int_k^{k+1} e^{-\lambda x}dx = \sum_{k=1}^{\infty} -q_k \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-k\lambda} (e^{-\lambda}-1) \sim \check{U}(\lambda) \text{ voor } \lambda \to 0$$

en, als $V(x)$ of $U(x)$ ρ-varieert, $V(x) \sim U(x)$ voor $x \to \infty$.

De beweringen van de stelling volgen nu uit stelling 4.4 samen met deel a van deze stelling.

Opmerking 4.3 De relatie (4.21) is equivalent met de volgende: er is een regulier variërende funktie $U_1(x)$ met exponent ρ zodanig dat

4.26 $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{U_1(n)} = 1; \qquad \text{neem maar } U_1(x) = \sum_{k=1}^{[x]} q_k.$$

Opmerking 4.4. Uit het bewijs blijkt dat het in het b-gedeelte van de stelling voldoende is te eisen dat de rij $\{q_n\}$ op de duur monotoon is.

Voorbeeld 4.1 Voor een rij positieve getallen $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ geldt dat dan en slechts dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q_k = c \qquad \text{met } 0 < c < \infty$$

als

$$\lim_{s\uparrow 1} (1-s)\, Q(s) = c$$

waarin $Q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k s^k$.

De rest van deze paragraaf is geschreven door W. Vervaat.

Gevolg 4.1 handelt over asymptotische relaties tussen $1 - F$ en $1 - \check{F}^{*}$ in het geval dat $1 - F$ en $1 - \check{F}^{*}$ ρ-variërend zijn met $-1 < \rho \leq 0$. De volgende stelling geeft hiervan een generalisatie.

Stelling 4.7 Zij F een verdelingfunctie met $F(-0) = 0$ en zij $\rho \leq 0$ $\rho \neq -1, -2, \ldots$. Zij verder voor $k \geq 0$

$$\mu_k = \int_{0-}^{\infty} x^k \, dF(x).$$

Als $1 - F$ of

$$\sum_{k=0}^{[-\rho]} \frac{(-1)^k \mu_k}{k!\, x^k} - \check{F}^{*}(x) \tag{4.27}$$

ρ-variërend is bij ∞, geldt voor $x \to \infty$

$$1 - F(x) \sim \Gamma(1+\rho) \left\{ \sum_{k=0}^{[-\rho]} \frac{(-1)^k \mu_k}{k!\, x^k} - \check{F}^{*}(x) \right\}. \tag{4.28}$$

Gevolg 4.2 $1 - F$ is ρ-variërend dan en slechts dan als (4.27) dat is.

Opmerking 4.5 Uitgaande van $\Gamma(z)$ voor $\mathrm{Re}\, z > 0$ kan men $\Gamma(z)$ voor $\mathrm{Re}\, z \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ definiëren door $\Gamma(z) = z^{-1}\, \Gamma(z+1)$.

Bewijs van stelling 4.7 We noteren $n = [-\rho]$.
Taylor-reeksontwikkeling van $e^{-y/x}$ in

$$F^{*}(x) = \int_{0-}^{\infty} e^{-y/x} \, dF(y)$$

geeft

4.29 $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mu_k}{k!\ x^k} - \check{F}^{*}(x) = \frac{(-1)^n}{n!\ x^{n+1}} \int_0^\infty \int_0^y (y-z)^n e^{-z/x} dz\ dF(y) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\ x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-z/x} \int_z^\infty (y-z)^x\ dF(y)\ \ dz =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\ x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-z/x}\ \ V_n(z)\ \ dz,$$

waarbij voor $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

4.30 $$V_k(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_z^\infty (y-z)^k\ dF(y)\ ;$$

V_k is niet-stijgend. Daar

$$k \int_z^\infty V_{k-1}\ (u)\ du = k \int_z^\infty \int_u^\infty (y-u)^{k-1}\ dF(y)\ \ du =$$

$$= \int_z^\infty \int_z^y k(y-u)^{k-1}\ du\ dF(y) = \int_z^\infty (y-z)^k\ dF(y) = V_k(z),$$

geldt

4.31 $$V_k(z) = k \int_0^\infty V_{k-1}\ (u)\ du - k \int_0^z V_{k-1}\ (u)\ du =$$

$$= V_k(0) - k \int_0^z V_{k-1}\ (u)\ du.$$

Door n-maal toepassen van eigenschap 10 op blz. 55 volgt dat V_n $(\rho+n)$-variërend is dan en slechts dan als $V_0 = 1 - F$ ρ-variërend is tenzij V_i langzaam variëert voor een i tussen 1 en n, wat hier niet het geval is. Met behulp van (3.49) volgt dat voor $x \to \infty$

4.32 $$V_n(x) \sim \frac{(-1)^n \, n!}{(\rho+n)\,(\rho+n-1)\ldots\ldots(\rho+1)} \; x^n \,(1 - F(x)).$$

Wegens stelling 4.5 is V_n $(\rho+n)$-variërend dan en slechts dan als

$$\int_0^\infty e^{-z/x}\, V_n(z)\, dz$$

als functie van x $(\rho + n + 1)$ - variërend is. In dat geval geldt voor $x \to \infty$

4.33 $$\int_0^\infty e^{-z/x}\, V_n(z)\, dz \;\sim\; \Gamma(\rho + n + 1)\; x\; V_n(x)\;.$$

Uit (4.29) en de twee in dit bewijs afgeleide equivalenties volgt dat (4.27) ρ-variërend is dan en slechts dan als $1 - F$ dat is; (4.28) volgt door combinatie van (4.29), (4.32) en (4.33).

Opmerking 4.6 Voor $\rho = -1, -2, -3, \ldots$ schijnt het niet mogelijk een eenvoudige stelling van hetzelfde soort te formuleren. Wel is in het geval dat het $|\rho|^{\text{de}}$ moment nog juist bestaat stelling I. 3.10 van toepassing. Daaruit volgt dat

$$\check{F}(\lambda) = \sum_{k=0}^{|\rho|} \frac{(-1)^k \mu_k \lambda^k}{k!} + o(\lambda^{|\rho|}) \quad \text{voor } \lambda \downarrow 0.$$

§ 5 Limierverdelingen van steekproefgemiddelden (positieve stochastische variabelen)

(Feller 2 XIII 6)

We brengen eerst in herinnering

Definitie 2.1 We zeggen dat de rij verdelingsfunkties $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tot het aantrekkingsgebied van de niet-ontaarde verdelingsfunktie F behoort als er rijen reële getallen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestaan met

5.1 $$a_n > 0 \quad \text{voor} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

zodanig dat

5.2 $$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{\text{cons}} F(x).$$

De rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ noemen we rijen aantrekkingscoëfficienten.

In paragraaf 2 vroegen we ons af wanneer de rij verdelingsfunkties $F_n = F^n$ (bij gegeven F) tot het aantrekkingsgebied van een niet-ontaarde verdelingsfunktie behoort en zo ja, welke typen als limiet mogelijk zijn. Hier stellen we dezelfde vragen voor de rij $F_n = F^{n*}$ (bij gegeven F). In zijn algemeenheid zijn deze vragen pas na veel voorbereidend werk te beantwoorden. Als we echter in een situatie zijn waarin de techniek van de Laplacetransformatie te gebruiken is, zijn deze vragen met behulp van de theorie van de vorige paragraaf betrekkelijk eenvoudig te beantwoorden. We kunnen de techniek van de Laplacetransformatie toepassen als de verdelingsfunkties waarover we spreken op de niet-negatieve halfrechte geconcentreerd zijn. Dit geeft twee belangrijke beperkingen: we spreken alleen over verdelingsfunkties F met $F(0)^- = 0$ dat wil zeggen $F(x) = 0$ voor $x < 0$, en we eisen dat in (5.2) $b_n = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

Definitie 5.1 We zeggen dat de rij verdelingsfunkties $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tot het translatievrije aantrekkingsgebied van de niet-ontaarde verdelingsfunktie F behoort als er een rij positieve getallen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestaat zodanig dat

5.3 $$F_n(a_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} F(x) \quad .$$

Voorbeeld 5.1 Aan hoofdstuk I van de syllabus (I. 4.V blz. 70) ontlenen we het volgende. Bij een stochastische wandeling met verplaatsingskansen $p = q = \frac{1}{2}$ en beginpunt 0 definiëren we $\underline{t}_1$ als het tijdstip van de eerste terugkeer naar 0 en $\underline{t}_r$ als het tijdsverloop tussen de $(r-1)^e$ en r^e terugkeer naar $0 (r \geq 2)$. Dan is $\{\underline{t}_r\}$ een rij onderling onafhankelijke stochastische variabelen met gelijke kansverdeling F. In hoofdstuk I is bewezen

$$\lim_{r\to\infty} P\{r^{-2} \sum_{k=1}^{r} \underline{t}_k \leq x\} = \int_0^x (2\pi t^3)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(2t)^{-1}\}\, dt ,$$

dat wil zeggen

$$F^{n*}(n^2.x) \xrightarrow{\text{cons.}} \int_0^x (2\pi t^3)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(2t)^{-1}\}\, dt .$$

Bij de theorie van de maxima hebben we de bovenstaande vragen na elkaar behandeld. In de situatie van deze paragraaf kunnen beide vragen tegelijk beantwoord worden.

Stelling 5.1 a. Een rij verdelingsfunkties $\{F^{n*}\}$ (waarbij $F(0)^- = 0$) kan slechts tot het translatievrije aantrekkingsgebied behoren van een verdelingsfunktie G met Laplacegetransformeerde

5.1 $$\check{G}(\lambda) = \exp\{-(\tfrac{\lambda}{c})^{\alpha}\} \qquad \text{voor } \lambda \geq 0$$

voor zekere $c > 0$, $0 < \alpha < 1$. We schrijven verder G_α i.p.v. G.

b. Voor een verdelingsfunktie F met $F(0)^- = 0$ geldt dat $\{F^{n*}\}$ dan en slechts tot het translatievrije aantrekkingsgebied van de verdelingsfunktie G_α behoort als $1 - F(x)$ regulier varieert met exponent $-\alpha$.

Bewijs. De continuiteitsstelling voor verdelingsfunkties uit hoofdstuk I van de syllabus (stelling I. 2.3 blz. 21) zegt dat de rij verdelingsfunkties F_n met $F_n(0)^- = 0$ dan en slechts dan conservatief naar de verdelingsfunktie G convergeert als

5.3 $$\lim_{n\to\infty} \check{F}_n(\lambda) = \check{G}(\lambda) \qquad \text{voor alle } \lambda \geq 0.$$

De relatie

5.4 $$F^{n*}(a_n\, x) \xrightarrow{\text{cons.}} G(x)$$

is dus equivalent met

5.5 $$\lim_{n\to\infty} \check{F}^{n}(\tfrac{\lambda}{a_n}) = \check{G}(\lambda) .$$

Deze relatie is weer equivalent met

5.6 $$\lim_{n\to\infty} n\{1 - \check{F}(\frac{\lambda}{a_n})\} = - \log \check{G}(\lambda)$$

(zie lemma 2.3 blz. 22 : $\check{F}(\frac{1}{\lambda})$ en $\check{G}(\frac{1}{\lambda})$ zijn verdelingsfunkties).

$\underline{\alpha}$. Stel dat (5.4) gegeven is. Dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Uit (5.6) en stelling 1.2a (blz. 5) volgt dan (met $U(x) = \check{F}(\frac{1}{x})$ en $\chi(x) = \check{G}(\frac{1}{x})$) dat $1 - F(x)$ regulier varieërt (zeg met exponent $-\alpha$) en dat

5.7 $$- \log \check{G}(\frac{1}{\lambda}) = (\lambda.c)^{-\alpha},$$

5.8 $$\check{G}(\lambda) = \exp \{ -(\frac{\lambda}{c})^{\alpha}\} \text{ voor } \lambda \geq 0.$$

We gaan nu na voor welke α het rechterlid van (5.8) de Laplacegetransformeerde van een niet-ontaarde verdelingsfunktie is. Voor $0 < \alpha < 1$ heeft de funktie $(\frac{\lambda}{c})^{\alpha}$ een volledig monotone afgeleide op $(0, \infty)$ (zie definitie I 5.2 blz. 73 hoofdstuk I van de syllabus). De funktie $e^{-\lambda}$ is volledig monotoon. Volgens stelling I 5.7 (blz. 78) is dus ook het rechterlid van (5.8) volledig monotoon; volgens stelling I 5.3 (blz. 75) is het rechterlid van (5.8) dus voor $0 < \alpha < 1$ de Laplacegetransformeerde van een verdelingsfunktie. Het geval $\alpha = 1$ geeft een ontaarde verdelingsfunktie; die hebben we uitgesloten. Door twee keer te differentiëren blijkt dat het rechterlid van (5.8) voor $\alpha > 1$ niet volledig monotoon is dat wil zeggen de funktie is voor die waarden van α niet de Laplacegetransformeerde van een verdelingsfunktie (stelling I 5.3). Blijft dus slechts over $0 < \alpha < 1$, zoals de stelling beweert.

$\underline{\beta}$ Stel nu dat gegeven is dat $1 - F(x)$ $(-\alpha)$-varieert $0 < \alpha < -1$. Uit stelling 1.2a (blz. 5) en opmerking 1.7 (blz. 8) volgt dan (5.6) en (5.8) ; hieruit volgt zoals we boven gezien hebben (5.4)

<u>Gevolg 5.1</u> Als bij de niet-ontaarde verdelingsfunktie G een verdelingsfunktie F met $F(0)^{-}= 0$) te vinden is zodanig dat $\{F^{n*}\}$ tot het translatievrije aantrekkingsgebied van G behoort, dan zijn er getallen α en c $(0 < \alpha < 1, c > 0)$ zodanig dat

5.9 $$G^{k*}(k^{1/\alpha}.x) = G(x) \text{ voor } k = 1, 2, 3, \dots \text{ en alle } x,$$

5.10 $$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\{1 - G(x)\} = \frac{1}{c.\ \Gamma(1-\alpha)}$$

en

5.11 $$\lim_{x\to\infty} G(x) \exp\{(cx)^{-\alpha}\} = 0\ .$$

Bewijs. Uit (5.1) volgt

$$\check{G}^{k}(k^{-1/\alpha}.\lambda) = \check{G}(\lambda) \quad \text{voor} \quad \lambda \geq 0.$$

Uit de eenduidigheid van de Laplacetransformatie volgt (5.9).
Uit (5.1) zien we nog dat

$$1 - \check{G}^{*}(t) \overset{\text{def}}{=} 1 - \check{G}(\tfrac{1}{t}) \sim (ct)^{-\alpha} \quad \text{voor } t \to \infty\ .$$

Met gevolg 4.1 (blz. 80) geeft dit (5.10). De relatie (5.11) volgt uit stelling 4.4 (blz. 79) met $U(t) = G(t)$ dat wil zeggen $\check{U}^{*}(t) = \exp\{-(tc)^{-\alpha}\}$.

Definitie 5.2 Een verdelingsfunktie G $(G(x) \not\equiv \ell(x))$ heet translatievrij stabiel (of strikt stabiel) als er een rij positieve getallen $\{\alpha_k\}$ bestaat zodanig dat

5.12 $$G^{k*}(\alpha_k.x) = G(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Uit 5.12 blijkt dat de rij $\{G^{k*}\}$ in het translatievrije aantrekkingsgebied van G ligt zodat (stelling 5.1) als $G(0)^{-} = 0$ (5.12) geldt met $\alpha_k = k^{1/\alpha}$ voor een $\alpha (0 < \alpha < 1)$.
Het getal α heet de exponent van de stabiele verdeling. Uit het bovenstaande blijkt dat de klasse der translatievrij stabiele verdelingsfunkties op $[0, \infty)$ valt dus samen met de klasse van limieten van rijen van de vorm $\{F^{n*}(a_n x)\}$ met $F(0)^{-} = 0$. Bovendien is bij elke α maar één type stabiele verdeling (zie definitie 2.3 blz. 13c). We geven nog een stelling over de keuze van de aantrekkingscoëfficienten. Vooraf een hulpstelling die eigenlijk onder gevolg 3.1 zou thuishoren.

<u>Lemma 5.1</u> Laten U_1 en U_2 monotoon niet-dalende ρ-variërende funkties zijn ($\rho > 0$) dan geldt

5.14 $$\lim_{x\to\infty} \frac{U_1(x)}{U_2(x)} = c \quad \text{met } 0 \leq c \leq \infty$$

dan en slechts dan als

5.15 $$\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{U}_1(x)}{\tilde{U}_2(x)} = c^{-1/\rho} ,$$

waarin

$$\tilde{U}_i(x) = \inf \{ y \mid U(y) \leq x\} \quad \text{voor } i = 1, 2 .$$

<u>Bewijs a</u>. Veronderstel dat (5.14) geldt en (5.15) niet, dan is er een rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ zodanig dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{U}_1(x_n)}{\tilde{U}_2(x_n)} = b \neq c^{-1/\rho} ,$$

waarbij $0 \leq b \leq \infty$. Dan volgt uit eigenschap 4 van gevolg 3.1 (blz. 53), die voor monotone funkties geldt met $0 \leq b \leq \infty$, dat

5.16 $$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1(\tilde{U}_1(x_n))}{U_1(\tilde{U}_2(x_n))} = b^{\rho} \neq c^{-1}.$$

Anderzijds volgt uit het gegeven en eigenschap 6 van gevolg 3.1 (blz. 54)

5.17 $$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1(\tilde{U}_1(x_n))}{U_1(\tilde{U}_2(x_n))} = \lim_{n\to\infty} c^{-1} \frac{U_1(\tilde{U}_1(x_n))}{U_2(\tilde{U}_2(x_n))} = c^{-1},$$

wat de gewenste tegenspraak geeft.

b. Stel dat gegeven is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{U}_1(x)}{\tilde{U}_2(x)} = c^{-1/\rho} \text{ met } 0 \leq c \leq \infty .$$

Uit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U_i(x-0)}{U_i(x+0)} = 1$$

(zie (1.19) en (1.20) blz. 8) volgt dat het toepassen van de operator $\sim$ op de funktie $\tilde{U}_i(x)$ een funktie oplevert die aymptotisch equivalent is aan $U_i(x)$. Het gestelde volgt dan verder uit deel a van de stelling.

Stelling 5.2

Een verdelingsfunktie F met $F(0)^- = 0$, waarvoor $\{F^{n*}\}$ in het translatievrije aantrekkingsgebied van een translatievrije stabiele verdelingsfunktie G_α ligt, voldoet aan $F^{n*}(a_n x) \xrightarrow{\text{cons}} G_\alpha(x)$ met

$$a_n \sim c_0 \,.\, \inf \{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\} \text{ voor } n \to \infty.$$

Bewijs. Uit opmerking 1.7 (blz. 8) blijkt dat voor de aantrekkingscoëfficienten geldt (zie stelling 2.1 blz. 10)

5.18 $$a_n \sim c_1 \,.\, \inf \{t \mid \check{F}^{*}(t) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\} \text{ voor } n \to \infty.$$

Passen we nu lemma 5.1 toe met $U_1(x) = \{1 - \check{F}^{*}(x)\}^{-1}$, $U_2(x) = \{1 - F(x)\}^{-1}$ en $c = \{\Gamma(1-\alpha)\}^{-1}$, dan volgt met gevolg 4.1 (relatie 4.17)

5. $$\inf \{x \mid \check{F}^{*}(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\} \sim \{\Gamma(1-\alpha)\}^{1/\alpha} \,.\, \inf \{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}.$$

Combineren we (5.19) met (5.20), dan volgt het gevraagde (met $c_0 = c_1 . \{\Gamma(1-\alpha)\}^{1/\alpha}$).

Opmerking 5.2 Men kan nagaan dat de keuze

5. $$a_n = \{\Gamma(1-\alpha)\}^{1/\alpha} \,.\, \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\}$$

een limiet G_α geeft waarbij in relatie (5.14) $c = 1$ staat.

§ 6 Zwakke wetten der grote aantallen.

(Feller 2 VII 7)

We bewijzen eerst de bekende klassieke zwakke wet van de grote aantallen.

Stelling 6.1 Als van een verdelingsfunktie F gegeven is dat

6.1 $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

bestaat, dan is

6.2 $$F^{n*}(nx) \xrightarrow{\text{cons}} \iota(x-\mu).$$

<u>Bewijs .</u> Laten $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$, ... onafhankelijke stochastische variabelen zijn met verdelingsfunktie F. We definieren voor i = 1, 2, ...

$$\underline{x}_i^{(u)} = \begin{cases} \underline{x}_i & \text{als } |\underline{x}_i| \leq u \\ 0 & \text{als } |\underline{x}_i| > u \end{cases}$$

en noteren

$$\mu_u = E\,\underline{x}_i^{(u)} ,$$

$$\underline{s}_n = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_n \quad \text{en}$$

$$\underline{s}_n^{(u)} = \underline{x}_1^{(u)} + \underline{x}_2^{(u)} + \ldots + \underline{x}_n^{(u)} .$$

Dan is voor y > 0

$$\begin{aligned} P\{|\underline{s}_n - n\,.\mu_u| > y\} &= P\{|\underline{s}_n - n.\mu_u| > y \text{ en } \underline{s}_n = \underline{s}_n^{(u)}\} + \\ &\quad + P\{|\underline{s}_n - n\,\mu_u| > y \mid \underline{s}_n \neq \underline{s}_n^{(u)}\}.\ P\{\underline{s}_n \neq s_n^{(u)}\} \\ &\leq P\{|\underline{s}_n^{(u)} - n\,\mu_u| > y\} + P\{\underline{s}_n \neq \underline{s}_n^{(u)}\} . \end{aligned}$$

De eerste term schatten we af met behulp van de ongelijkheid van Bienaymé-Chebyshev en de tweede met behulp van de implikatie

$$\underline{s}_n \neq \underline{s}_n^{(u)} \Longrightarrow \underline{x}_i \neq \underline{x}_i^{(u)} \quad \text{voor minstens één i } (1 \leq i \leq n) ;$$

dan komt er

$$\begin{aligned} P\{|\underline{s}_n - n\,\mu_u| > y\} &\leq \frac{\operatorname{Var}\,(\underline{s}_n^{(u)})}{y^2} + n.P\{|\underline{x}_i| > u\} \\ &\leq \frac{n.E(\underline{x}_i^{(u)2})}{y^2} + n.P\{|\underline{x}_i| > u\} , \end{aligned}$$

dat wil zeggen (met y = n.x)

$$P\{|n^{-1}.\underline{s}_n - \mu_u| > x\} \le \frac{E(\underline{x}_i^{(u)2})}{n.x^2} + n.P\{|\underline{x}_i| > u\}.$$

Met u = n wordt dit

6.3 $$P\{|n^{-1}.\underline{s}_n - \mu_n| > x\} \le \frac{1}{nx^2}\int_{-n}^{n} t^2 dF(t) + n.\{1 - F(n) + F(-n)^-\}.$$

Welnu

6.4 $$0 \le x\{1 - F(x) + F(-x)^-\} \le \int_{|t|>x} |t|\, d\, F(t) \text{ voor } x > 0;$$

verder is (partiële integratie)

6.5 $$\frac{1}{n}\int_{-n}^{n} t^2\, dF(t) = -n\{1 - F(n) + F(-n)^-\} + \frac{2}{n}\int_0^n t\{1-F(t) + F(-t)^-\}dt.$$

Met (6.4) en (6.5) volgt uit (6.3)

$$\lim_{n\to\infty} P\{|n^{-1}.\ \underline{s}_n - \mu_n| > x\} = 0 \text{ voor alle } x > 0.$$

Aangezien $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ is hiermee de stelling bewezen.

Opmerking 6.1 Uit (6.3) en (6.5) blijkt dat als in plaats van (6.1) gegeven is

6.6 $$\lim_{n\to\infty} x\{1 - F(x) + F(-x)^-\} = 0,$$

de relatie

6.7 $$\lim_{n\to\infty} P\{|n^{-1}\ \underline{s}_n - \mu_n| > t\} = 0$$

geldt waarin

6.8 $$\mu_n = \int_{-n}^{n} t\, dF(t)\ .$$

Feller bewijst nog (Feller 2 VII 7 blz. 232) dat als (6.7) geldt voor een rij getallen μ_n, de relaties (6.6) en (6.8) vervuld zijn.

Opmerking 6.1 geeft een generalisatie van de klassieke wet van de grote aantallen die we voor een willekeurige rij verdelingsfunkties als volgt definiëren.

<u>Definitie 6.1.</u> Een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ voldoet aan de <u>(additieve) zwakke wet van de grote aantallen</u> als er een rij reële getallen $\{b_n\}$ bestaat zodanig dat

6.9 $$F_n(x + b_n) \xrightarrow{\text{cons.}} (x)$$

Anderzijds kunnen we relatie (6.2) als volgt schrijven

6.10 $$F^{n*}(n\,\mu\,x) \xrightarrow{\text{cons.}} (x-1).$$

Dit suggereert de generalisatie

$$F^{n*}(a_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} (x-1)$$

voor een rij positieve getallen $\{a_n\}$. Voor een willekeurige rij verdelingsfunkties geven we de volgende definitie.

<u>Definitie 6.2.</u> Een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ met $F_n(0) = 0$ voldoet aan de <u>multiplikatieve zwakke wet van de grote aantallen</u> als er een rij positieve getallen $\{a_n\}$ bestaat zodanig dat

6.11 $$F_n(a_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} (x-1)$$

We zullen eerst een algemeen kriterium geven voor het voldoen aan de definities 6.1 en 6.2 ; vervolgens zullen we de gevallen $F_n = F^{n*}$ en $F_n = F^n$ behandelen.

We brengen eerst in herinnering de notatie

6.12 $$\tilde{F}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$$

waarbij F een verdelingsfunktie is; dan geldt (blz. 13)

6.13 $$F(\tilde{F}(y)-0) \leq y \leq F(\tilde{F}(y)).$$

$\tilde{F}(y)$ is een y-kwantiel voor de verdeling.

<u>Stelling 6.2</u> Voor een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ zijn de volgende beweringen equivalent:

<u>a</u>. De rij $\{F_n\}$ voldoet aan de (additieve) zwakke wet van de grote aantallen

<u>b</u>. Voor elk getal c $(0 < c < 1)$ geldt

6.14 $$F_n(x + \tilde{F}_n(c)) \xrightarrow{\text{cons}} (x)$$

c. Voor elke a en b ($0 < a < b < 1$) geldt

6.15 $$\lim_{n\to\infty} \{\tilde{F}_n(b) - \tilde{F}_n(a)\} = 0$$

Bewijs.

b $\Longrightarrow$ a: Triviaal.

a $\Longrightarrow$ b: Kies een getal $c (0 < c < 1)$ en een getal ε ($\varepsilon > 0$), dan volgt uit

6.16 $$\lim_{n\to\infty} F_n(x+b_n) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

dat voor $n \geq n_0$

$$F_n(b_n - \varepsilon) < c < F_n(b_n + \varepsilon).$$

Dit geeft samen met (6.13) voor $y = c$ wegens de monotonie van F_n

6.17 $$b_n - \varepsilon < \tilde{F}_n(c) \leq b_n + \varepsilon$$

en

$$F_n(x + b_n - \varepsilon) \leq F_n(x + \tilde{F}_n(c)) \leq F_n(x + b_n + \varepsilon)$$

voor $n \geq n_0$ en alle x.

Dit geeft in combinatie met (6.16) de relatie (6.14).

a, b $\Longrightarrow$ c: Uit (6.17) volgt

$$\lim_{n\to\infty} \{\tilde{F}_n(c) - b_n\} = 0.$$

Aangezien dit voor elke $c (0 < c < 1)$ geldt, volgt hieruit (6.15).

c $\Longrightarrow$ b: Kies getallen c ($0 < c < 1$), x ($x > 0$) en ε ($\varepsilon > 0$) willekeurig en ε_1 zodanig dat $0 < \varepsilon_1 < x$. Voor $n \geq n_0$ volgt dan uit (6.15)

$$\tilde{F}_n(1 - \varepsilon) - \varepsilon_1 < \tilde{F}_n(c),$$

dus (met 6.13)

$$1 - \varepsilon < F_n(\tilde{F}_n(1 - \varepsilon)) \leq F_n(x - \varepsilon_1 + \tilde{F}_n(1 - \varepsilon)) \leq F_n(x + \tilde{F}_n(c)) \leq 1,$$

dat wil zeggen

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x + \tilde{F}_n(c)) = 1.$$

Op eenzelfde manier bewijst men (6.14) voor $x < 0$.

Uit stelling 6.2 volgt op een eenvoudige manier een analoge stelling voor de multiplikatieve wet.

<u>Stelling 6.3</u> Voor een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ met $F_n(0)^- = 0$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn de volgende beweringen equivalent:

a. De rij $\{F_n\}$ voldoet aan de multiplikatieve zwakke wet van de grote aantallen,

b. Voor elk getal c $(0 < c < 1)$ geldt

6.18 $$\lim_{n\to\infty} F_n(x.\ \tilde{F}_n(c)) \xrightarrow{\text{cons.}} \varepsilon(x-1)$$

c. Voor elke a en b $(0 < a < b < 1)$ geldt $\tilde{F}_n(a) > 0$ voor voldoende grote n en

6.19 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{F}_n(b)}{\tilde{F}_n(a)} = 1.$$

<u>Bewijs.</u>

De rij $\{F_n\}$ voldoet dan en slechts dan aan de voorwaarden van stelling 6.3 als de rij verdelingsfunkties

$$G_n(x) = F_n(e^x)$$

aan de voorwaarden van stelling 6.2 voldoet, want

$$\tilde{G}_n(y) = \inf\{x \mid G_n(x) \geq y\} = \inf\{x \mid F_n(e^x) \geq y\} = \inf\{\log t \mid F_n(t) \geq y\}$$

$$= \log \inf\{t \mid F_n(t) \geq y\} = \log \tilde{F}_n(y).$$

Dat $\tilde{F}_n(a)$ positief is voor voldoende grote n, volgt uit (6.17) met bovenstaande transformatie.

<u>Gevolg 6.1</u> Veronderstel dat voor een rij verdelingsfunkties $\{F_n\}$ met $F_n(0)^- = 0$ geldt

$$F_n(a_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} \varepsilon(x-1).$$

Voor een rij positieve getallen $\{\alpha_n\}$ geldt dan en slechts dan

6.20 $$F_n(\alpha_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} \varepsilon(x-1)$$

als

6.21 $$\alpha_n \sim a_n \qquad \text{voor} \quad n \to \infty$$

We zullen nu kriteria geven voor sommen van onafhankelijke variabelen om te voldoen aan de beide gegeven definities. De wet van de grote aantallen is al in opmerking 6.1 genoemd.

<u>Stelling 6.4</u> Voor een verdelingsfunktie F geldt dat de rij $\{F^{n*}(nx)\}$ dan en slechts dan aan de wet van de grote aantallen voldoet als

6.22 $$\lim_{x \to \infty} x\{1 - F(x) + F(-x)^-\} = 0.$$

In dat geval geldt

6.23 $$F^{n*}(nx + n\mu_n) \xrightarrow{\text{cons}} \varepsilon(x)$$

met

6.24 $$\mu_n = \int_{-n}^{n} x \, dF(x).$$

<u>Bewijs.</u> Zie opmerking 6.1 als (6.22) gegeven is. Het bewijs van de andere implikatie zullen we niet geven (zie Feller <u>2</u> VII 7 blz. 232).

<u>Stelling 6.5</u> Voor een verdelingsfunktie F met $F(0)^- = 0$ geldt dat de rij $\{F^{n*}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dan en slechts dan aan de multiplikatieve zwakke wet van de grote aantallen voldoet als de funktie

$$\int_0^x t \, dF(t) \text{ langzaam varieërt bij oneindig.}$$

In dat geval geldt

6.25 $$F^{n*}(a_n x) \xrightarrow{\text{cons.}} \varepsilon(x-1)$$

met

6.26 $$a_n = \inf\{x \mid \frac{1}{x} \int_0^x t \, dF(t) \leq \frac{1}{n}\} \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Bewijs.</u> De relatie

6.27 $$\lim_{n\to\infty} F^{n*}(a_n x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

is volgens de continuiteitsstelling voor verdelingsfunkties (stelling I 2.3 blz. 21) equivalent met

$$\lim_{n\to\infty} \check{F}^n \left(\frac{\lambda}{a_n}\right) = e^{-\lambda} \qquad \text{voor } \lambda \geq 0.$$

Dit is volgens lemma 2.3 (blz. 22) equivalent met ($\check{F}^*(\lambda) = \check{F}(\frac{1}{\lambda})$ is een verdelingsfunktie)

6.28 $$\lim_{n\to\infty} n\{1 - \check{F}^*(\frac{a_n}{\lambda})\} = \lambda \qquad \text{voor } \lambda > 0$$

en dit laatste is volgens stelling 1.2a (blz. 5) en opmerking 1.7 (blz. 8) equivalent met het (-1)-variëren van $1 - \check{F}^*(\lambda)$ bij oneindig. Definiëren we een verdelingsachtige funktie

$$U(x) = \int_0^x \{1-F(t)\}dt,$$

dan is (blz. 79)

$$\check{U}^*(\lambda) = \lambda\, \{1 - \check{F}^*(\lambda)\} \;;$$

volgens stelling 4.1 is het (-1)-variëren van $1 - \check{F}^*(\lambda)$ equivalent met het langzaam variëren van $\int_0^x \{1 - F(t)\}dt$.

Als $\int_0^x \{1 - F(t)\}dt$ langzaam varieërt dan volgt uit (3.49) van gevolg 3.1 (blz. 56; in het bewijs van deze relatie is geen gebruik gemaakt van de voorwaarde $\rho \neq 0$)

6.29 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\{1-F(x)\}}{\int_0^x \{(1-F(t)\}dt} = 0.$$

Hieruit en uit

$$\int_0^x t\, dF(t) = -x\,\{1 - F(x)\} + \int_0^x \{1 - F(t)\}dt \tag{6.30}$$

volgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x t\, dF(t)}{\int_0^x \{1-F(t)\}dt} = 1 \,, \tag{6.31}$$

dus ook $\int_0^x t\, dF(t)$ varieërt langzaam.

Stel nu dat gegeven is dat $\int_0^x t\, dF(t)$ langzaam varieërt, dan volgt uit (zie stelling 3.2 blz. 68)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\{1 - F(x)\}}{\int_0^x t\, dF(t)} = 0$$

en (6.30) de relatie (6.31) zodat dan ook de funktie $\int_0^x \{1 - F(t)\}dt$ langzaam varieërt en (6.27) geldt.

Uit (6.26) , opmerking 1.7 (blz. 8) en gevolg 6.1 volgt voor de aantrekkingscoëfficienten $\{a_n\}$

$$a_n \sim \inf\{\lambda \mid \check{F}^{*}(\lambda) \geq 1 - \frac{1}{n}\} \,.$$

Uit lemma 5.1 (geldt ook voor funkties die niet monotoon zijn maar begrensd op begrensde intervallen) en

$$1 - F^{*}(x) \sim \frac{1}{x} \int_0^x \{1 - F(t)\}dt \sim \frac{1}{x} \int_0^x t\, dF(t) \text{ voor } x \to \infty$$

volgt dan

$$a_n \sim \inf\{x \mid \frac{1}{x} \int_0^x t\, dF(t) \leq \frac{1}{n}\} \qquad \text{voor } n \to \infty.$$

<u>Opmerking 6.1</u> Het langzaam variëren van $\int_0^x t\,dF(t)$ is equivalent met

6.32 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x\{1 - F(x)\}}{\int_0^x t\,dF(t)} = 0$$

als het eerste moment oneindig is (stelling 3.2 blz. 68). In het andere geval geldt ook (6.29) en is $\int_0^x t\,dF(t)$ langzaam variërend. Dit is de vorm waarin Feller het kriterium van de stelling geeft.

Tenslotte zullen we kriteria geven voor maxima van steekproeven om te voldoen aan de beide definities.

<u>Stelling 6.6</u>. Voor een verdelingsfunktie F met $F(0)^- = 0$ en $F(x) < 1$ voor alle x geldt dat de rij $\{F^n\}$ dan en slechts dan aan de multiplikatieve zwakke wet van de grote aantallen voldoet als $1 - F(x)$ $(-\infty)$-varieert bij oneindig.

In dat geval geldt

$$F^n(a_n x) \xrightarrow{\text{cons}} \iota(x-1) \tag{6.33}$$

met

$$a_n = \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\} \qquad \text{voor } n = 1,2,3,\ldots \tag{6.34}$$

<u>Bewijs</u>

Ofschoon het mogelijk is deze stelling te zien als een gevolg van stelling 6.2, zullen we een ander bewijs geven. Het is duidelijk dat uit $F(x) < 1$ (voor alle x) en

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 1 \\ 1 & \text{voor } x > 1 \end{cases} \tag{6.25}$$

volgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty . \tag{6.26}$$

Volgens lemma 2.3 (blz. 22) is (6.25) equivalent met

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{1 - F(a_n x)\right\} = x^{-\infty} \tag{6.27}$$

en dit laatste is volgens stelling 1.2.b (blz. 6) en opmerking 1.7 (blz. 8) equivalent met het snel variëren van $1 - F$ (exponent $-\infty$). Ook volgt hieruit (6.33) met (6.34).

<u>Opmerking 6.2</u>. Men verifieert gemakkelijk dat voor elke verdelingsfunktie F waarbij een getal $0<x_0<\infty$ bestaat zodanig dat $F(x_0) = 1$ en $F(x) < 1$ voor $x < x_0$, (6.33) geldt met $a_n = x_0$ voor $n = 1,2,3,\ldots$

Stelling 6.7. Voor een verdelingsfunktie F met $F(x) < 1$ voor alle x geldt dat de rij $\{F^n\}$ dan en slechts dan aan de (additieve) zwakke wet van de grote aantallen voldoet als voor elke $x > 0$

6.28 $$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(t+x)}{1-F(t)} = 0.$$

In dat geval geldt

6.29 $$F^n(x+b_n) \xrightarrow{\text{cons}} \iota(x)$$

met

6.30 $$b_n = \inf\{x \mid F(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n}\} \; .$$

Bewijs Definiëren we

6.31 $$G(y) = F(\log y),$$

dan voldoet F dan en slechts dan aan de beweringen van stelling 6.7 als G aan die van stelling 6.6 voldoet.

We besluiten met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 6.1. Voor de verdelingsfunktie

$$F(x) = c.\int_2^x \frac{dt}{t^2 \log t} \qquad \text{voor } x \geq 2$$

geldt

$$\int_0^x t\,dF(t) = c.\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = c.(\log\log x - \log\log 2)$$

zodat F niet aan stelling 6.1 maar wel aan stelling 6.4 voldoet.

Voorbeeld 6.2. Voor de Cauchy-verdeling

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

geldt

$$1 - F(x) \sim \frac{2}{\pi . x} \qquad \text{voor } x \to \infty,$$

zodat deze verdeling niet aan stelling 6.4 maar wel aan stelling 6.5 voldoet. Omgekeerd is makkelijk in te zien dat voor elke verdelingsfunktie die aan stelling 6.4 voldoet, de voorwaarden van stelling 6.5 vervuld zijn.

Voorbeeld 6.3. De voorwaarden van stelling 6.5 zijn vervuld als $1 - F(x)$ (-1)-varieert. Het omgekeerde is niet juist: neem

$$F(x) = 1 - \exp\{-[\log x]\} \qquad \text{voor } x \geq 1,$$

dan is $1 - F(x)$ niet regulier variërend (zie blz. 5); toch voldoet de verdelingsfunktie aan de voorwaarden van stelling 6.5, want de funktie

$$\int_0^x t dF(t) = \sum_{k=1}^{[\log x]} e^k . e^{-k} (e-1) = (e-1)[\log x] \sim (e-1) \log x$$

$$\text{voor } x \to \infty$$

variëert langzaam bij oneindig.

Voorbeeld 6.4. Het is eenvoudig na te gaan dat voor de negatief-binomiale verdeling

$$F(x) = 1 - \exp\{-[x]\}$$

geldt dat $1 - F(x)$ $(-\infty)$-varieert, zodat $F(x)$ aan de voorwaarden van stelling 6.6 voldoet.

Voorbeeld 6.5. Uit het voorbeeld hierboven en de transformatie van het bewijs van stelling 6.7 blijkt dat voor de verdelingsfunktie

$$F(x) = 1 - \exp\{-[e^x]\}$$

stelling 6.7 geldt.

Correcties bij rapport S 395: Colloquium Waarschijnlijkheidsrekening, hoofdstuk II.

blz.	regel	oud	nieuw
1	5	0 voor $x > 1$	0 voor $x < 1$
	12	<u>Definitie 1.1</u>.	(zie opmerking 3.16 blz. 72)
	8 v.o.	$(1+x^2)$	$(1+x^2)^p$
	7 v.o.	$\log(1+x)$	$\{\log(1+x)\}^p$
4	6 v.o.	$x\to\infty$	$t\to\infty$
6	8	$x \neq c$	$x \neq c$, $x \in A$
7	9	$(1,\infty)$	$(0,1)$
8	13	$x > 1$	$x < 1$
	2 v.o.	dat het steeds	dat het in het geval $\rho<0$ steeds
14	7	niet.singuliere	niet-ontaarde
18	8	niet-stijgend	niet-dalend
24	5	bestaat	bestaat $(-\infty<b<\infty)$
25	8 v.o	$(b_{n+1} - b_n)$	$\lvert b_{n+1} - b_n\rvert$
	6 v.o.	$= \sum_{k=1}^{l} (b_{n+k}-b_{n+k-1})\rvert$	$\leq \sum_{k=1}^{l} \lvert b_{n+k} - b_{n+k-1}\rvert$
29	7	$> n(i)$	$> n(i)$ voor alle i.
30	9	$\exp\{-(-x)\}$	$\exp\{-(-x)^\rho\}$
31	5	$(\{1-\exp\{-(-x)^\rho\}$	$(1-\exp\{-(-x)^\rho\})$
35	5	$i(x-1)$	$(x-1)$
38	10	∞	$-\infty$
39	5 v.o.	$2.a_0.\log 2$	$2.a_0^{-1}.\log 2$
42	4	uitlsuitend	uitsluitend
	1 v.o.	$\int_{x_0}^{x}$	$\int_{x_0}^{x} g(t)dt$

blz.	regel	oud	nieuw
43	2	$\int_0^{x_0} g(t)dt \quad \int_{x_0}^{x} g(t)dt$	$\int_0^{x_0} g(t)dt + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$
44	11	We veronderstellen eerst $\rho<\infty$	(valt weg)
	12	regulier	regulier of snel
45	4	$\sum\limits_{n=n_0+1}$	$\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty}$
	5/6	Voor $\rho=\infty$ ... conclusie.	(valt weg)
48	3	dan vinden we	(zie opmerking 3.15 blz. 71)
51	3	$\int_0^x t^p U(t)dt$	$\int_0^x t^p U_1(t)dt$
52	6	$c(x) = b(x)$	$c(x) = c.b(x)$
	9	$c(x) = b^*(x)$	$c(x) = c.b^*(x)$
		$\rho > -1$	$\rho = -1$
	6 v.o.	$v(t)$	$V(t)$
54	7	$\tilde{U}$	U
55	1	$U(\frac{1}{x})$	$\tilde{\tilde{U}}(\frac{1}{x})$
	6 v.o.	Punt 10 dient vervangen te worden door het volgende:	

10. Als $U(x)$ regulier variëert en er een monotone funktie $u(x)$ bestaat zodanig dat

$$U(x) = \int_0^x u(t)dt \tag{3.47}$$

dan is

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x.u(x)}{U(x)} = \rho, \tag{3.49}$$

zodat voor $\rho \neq 0$ de funktie $\mathrm{sgn}\rho.u(x)$ regulier variëert met exponent $\rho-1$.

blz.	regel	oud	nieuw
56	7	$\int_1^{\log x}$	$\int_0^{\log x}$

blz.	regel	oud	nieuw
57	2	$\frac{U(f_1(x))}{U(b.f_2(x))}$	$\frac{U(f_1(x))}{U(b.f_2(x))} \leq$
	3	$\frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}$	$\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}$
	5	$\lim\limits_{x\to\infty} \log(f_1(x))-\log(b.f_2(x))$	$\lim\limits_{x\to\infty}\{\log(f_1(x))-\log(b.f_2(x))\}$
	2 v.o.	(2.14) op blz. 15	(2.39) op blz. 28 en (2.40) op blz. 29
60	1 v.o.	lim	$\lim\limits_{x\to\infty}$
		$s([x]+1)$	$a([x]+1)$
64	5 v.o.	$0<a<b<\infty$	$0<a<1<b<\infty$
	1 v.o.	$M(y)$	$M(a,b)$
65	11	y	$y\in[a,b]$
	7 v.o.	hiervan.	hiervan:
66	9 v.o.	alle y.	alle $y\in[a,b]$.
	3 v.o.	zodat	zodat voor $a\leq y\leq b$
67	5 v.o.	U8x)	$U(x)$
71	9	$U_\xi(x)$ dan en slechts dan langzaam variëert als	als $U_\xi(x)$ langzaam variëert ook
	2 v.o.	geldt	geldt (met $U^*(x) = \int_0^x U(t)dt$)
	1 v.o.	$U\ (2x)$	$U^*\ (2x)$
72	2/3	$U\ (10x)$	$U^*\ (10x)$
	12/14	Canchy	Cauchy
76	2	ij.	aij.
79	6 v.o.	$dF(x)$	$dF(t)$
80	1 v.o.	4.4	4.5
81	13	$1 <$	$1 \leq$
82	8 v.o.	waarovoor	waarvoor

blz.	regel	oud	nieuw
88	1	Limierverdelingen	Limietverdelingen
93	2	aymptotisch	asymptotisch
	6	translatievrije	translatievrij
	7	Fn^{*}	F^{n*}
	14	5.	5.19
	15	(5.19)	(5.18)
		(5.20)	(5.19)
	8 v.o.	5.	5.20
99	7	de wet	de (additieve) zwakke wet
101	6 v.o.	}.	} voor $n\to\infty$.