STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 414

EEN INVOERSYSTEEM VOOR LINEAIRE PROGRAMMERING

door

Jac. M. Anthonisse

september 1969

Samenvatting

Dit rapport bevat een summiere beschrijving van een invoersysteem voor lineaire programmering. In dit systeem kunnen LP problemen in mathematische formulering aan een computer worden aangeboden. Een computer-programma genereert uit deze formules de coefficienten van het LP probleem. Enkele voorbeelden worden gegeven.

Inleiding

Elk lineair programmeringsprobleem kan worden geschreven als:

maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$,

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,m_1) ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=m_1+1,\ldots,m) ,$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n) .$$

In deze formulering zijn n, m_1, m en de c_j, a_{ij}, b_i gegeven getallen.
De optimale waarden voor x_j moeten worden bepaald.
Wordt een praktisch probleem als LP probleem geformuleerd dan ontstaan veelal ingewikkelder formules. Bovenstaande vorm kan worden gevonden door de variabelen en de voorwaarden te her-nummeren.

Computer-programma's die LP problemen oplossen eisen als invoer de waarden van de coefficienten c_j, a_{ij}, b_i.
Gewoonlijk moeten de coefficienten kolomsgewijs worden gegeven, bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{lllll}
n & m_1 & m & & \\
c_1 & a_{11} & \;.\quad.\quad. & a_{m1} & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
c_j & a_{1j} & \ldots\ a_{ij}\ \ldots & a_{mj} & \longleftarrow \text{j-de kolom} \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
c_n & a_{1n} & \;.\quad.\quad. & a_{mn} & \\
 & b_1 & \ldots\ b_i\ \ldots & b_m\ . &
\end{array}$$

Voor veel programma's is het voldoende om, per kolom, de coefficienten $\neq 0$ te geven, elk voorafgegaan door een rij-nummer.

Volgens welke regels de coefficienten ook worden ingevoerd, ze moeten eerst worden berekend. Deze berekeningen zijn in principe eenvoudig, voor elke combinatie (variabele, voorwaarde) volgt de bijbehorende coefficient direct uit de formulering van het LP probleem. Bij gecompliceerde formules wordt het rekenwerk echter zeer tijdrovend, met grote kans op fouten. Bovendien moet dit werk worden gedaan door iemand die formules kan lezen. Deze in wezen eenvoudige berekeningen kunnen beter door een computer worden uitgevoerd.

Syntactische definitie LP problemen

In [1] is een syntactische definitie van LP problemen gegeven die nauw aansluit bij de gebruikelijke formulering. Elk LP probleem kan in overeenstemming met deze definitie worden genoteerd, en in die vorm door een computer worden verwerkt. Om deze overeenstemming te bereiken zijn, vanuit een willekeurige gegeven mathematische formulering, slechts geringe correcties en aanvullingen nodig.

Ter illustratie volgt nu een bespreking van het begrip 'lineaire formule', dat voorkomt als objectfunctie en als linkerlid van een voorwaarde.

De elementaire bouwsteen voor het vormen van lineaire formules is de <simple term>, gedefinieerd als:

<simple term> := <variable>|<real term>×<variable>

Deze definitie betekent: een <simple term>, is eén <variable> óf een <real term> gevolgd door een × teken gevolgd door een <variable> . De definities van <variable> en <real term> worden hier niet gegeven, een <variable> komt overeen met een onbekende uit het LP probleem, in een <real term> komen geen onbekenden voor.
Voorbeelden van <simple term> :

```
           x
           y[3]
           x[i,j×n]
       5 × z[k]
     (a[i,j] + b[l] -3.14)× u[i-j,l]
```

in de gebruikelijke mathematische notatie:

$$x$$
$$y_3$$
$$x_{i,jn}$$
$$5z_k$$
$$(a_{ij} + b_l - 3.14)\ u_{i-j,l} \quad .$$

Met behulp van <real term> wordt een <simple linear form> opgebouwd. Dit gebeurt door een aantal exemplaren <real term> , gescheiden door + of - tekens achter elkaar op te schrijven, de eerste eventueel voorafgegaan door een teken.
Definitie:

<simple linear form> := <simple term>|
+ <simple term>| -<simple term>|
<simple linear form> +<simple term>|
<simple linear form> -<simple term> .

Voorbeelden:

$$- x + 3 \times y$$
$$a[i,j] \times z[i,j]$$
$$+ b[k] \times x[k,l] - z[k] .$$

Een <simple linear form> is 'simple' omdat in de overeenkomstige mathematische formulering het $\sum$ symbool niet voorkomt. Dit wordt nu met het begrip <final sigma> geintroduceerd:

<final sigma>: =
S(<index>,<lower bound> ,<upperbound> ,<simple linear form>).

Een <final sigma> komt overeen met:

$$\sum_{\text{<index>}=\text{<lower bound>}}^{\text{<upperbound>}} \text{<simple linear form>} ,$$

bijvoorbeeld:

S(j,1,n,a[i,j] × x[j])

betekent

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j .$$

In de mathematische formulering kunnen ook meervoudige $\sum$'s voorkomen, via het begrip <sigma> is ook dit toegestaan:

<sigma> :=<final sigma>|
S(<index>,<lower bound> ,<upper bound> ,<sigma>).

Een expressie als

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} x_{ijk}$$

kan nu worden geschreven als

S(i,1,m,S(j,i,n,S(k,i,j,x[i,j,k]))) .

Na het voorgaande zijn de volgende definities duidelijk:

<term>:=<simple term>|<sigma>|
<real term>×<sigma>

<linear form>:=<term>| + <term>| -<term>|
<linear form> +<term>|<linear form> -<term> .

Een <linear form> is dus opgebouwd uit een of meer exemplaren <term> gescheiden door + of - teken, de eerste <term> eventueel voorafgegaan door een teken. Als term kan een <simple term> fungeren (dus een <simple linear form> is een <linear form>), of een <sigma> of een <sigma> voorafgegaan door een <real term> en een × teken.

Voorbeelden van <linear form> :

x
y + z
- 3×y + 4×z
S(i,1,j,x[i]) - 3.14 × S(k,p,q,y[k,1])
- S(j,1,3,a[i,j] × z[i,j] - x[i]) + z .

De expressies

$$5 (x + y)$$

en

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i + a_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_{ij})$$

kunnen niet direct worden overgeschreven, deze moeten eerst worden herleidt tot

$$5 x + 5 y$$

en

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_{ij} y_{ij} \qquad .$$

De uitdrukkingen

$$5 \times x + 5 \times y$$

en

S(i,1,m,x[i]) + S(i,1,m,S(j,1,n,a[i]× b[i,j] × y[i,j]))

voldoen aan de gegeven definitie <linear form>.

Voor verdere bijzonderheden zij verwezen naar [1].

Algol-60 programma

Uitgaande van de in[1] gegeven definities is, in Algol-60, een computer programma geschreven dat de mathematische formulering van een (gemengd) LP probleem als invoer accepteert. Het programma nummert de variabelen en voorwaarden van het probleem in overeenstemming met de volgende standaardvorm:

maximaliseer $\sum_{j=1}^{N} c_j x_j$

onder $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,\ldots,M_1)$

$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=M_1+1,\ldots,M)$

$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad (j=1,\ldots,N)$

$x_j = \text{geheel} \qquad (j=1,\ldots,N_1) \quad .$

Voor elke variabele wordt het nummer en de identificatie in de mathematische formulering getypt. Analoog voor de voorwaarden. Verder worden geponst:

$N_1 \quad N \quad M_1 \quad M \quad ,$

gevolgd door

$b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_M$

en, voor elke variabele,

$j \quad l_j \quad u_j \quad r_1 \quad a_{r_1 j} \quad \ldots \quad r_p \quad a_{r_p j} \quad M+1 \quad c_j ,$

waarbij

j = nummer van de variabele en

$a_{ij} = 0$ als $i \notin \{r_1,\ldots,r_p\}$.

Het ponsresultaat kan dienen als invoer voor een programma dat het LP probleem oplost. Op deze wijze is een aantal problemen door de Electrologica X-8 computer van het Mathematisch Centrum verwerkt.

Voorbeeld 1

In [2] (pag. 4) wordt een produktieprobleem geformuleerd als:

maximaliseer $6\,x_1 + 4\,x_2$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 5\,x_2 &\leq 3600 \\ 10\,x_1 + 4\,x_2 &\leq 3600 \\ x_1\,,\quad x_2 &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Dit probleem kan als volgt in overeenstemming met de definities van [1] worden gebracht:

```
OPEN { produktieprobleem }
continuous x1,x2;

MAXIMIZE :           6 × x1  +  4 × x2
{tijd machine 1}     4 × x1  +  5 × x2  ≤ 3600
{tijd machine 2}    10 × x2  +  4 × x2  ≤ 3600
{niet neg 1 }                      x1   ≥ 0
{niet neg 2 }                      x2   ≥ 0

CLOSE
```

Een wat flexibeler formulering van hetzelfde probleem is:

```
OPEN  {eenvoudig LP probleem}
integer  a,b,c,d,e,f;
continuous  x1,x2;

MAXIMIZE:            a × x1  +  b × x2
{tijd 1}             c × x1  +  d × x2  ≤ 3600
{tijd 2}             e × x1  +  f × x2  ≤ 3600
{teken 1}                x1             ≥ 0
{teken 2}                          x2   ≥ 0
```

```
INIT  {getallen}

  a  +  6          b  +  4
  c  +  4          d  +  5
  e  +  10         f  +  4

CLOSE
```

Het voorbeeld kan ook als algemeen LP probleem worden opgeschreven:

```
OPEN {algemeen LP probleem}
index  i,j;
integer  n,m;
real  c[j]   (1 ≤ j ≤ n) ,
      b[i]   (1 ≤ i ≤ m) ,
     a[i,j]  (1 ≤ i ≤ m,  1 ≤ j ≤ n) ;
continuous  x[j]  (1 ≤ j ≤ n) ;

MAXIMIZE:      S(j,1,n,c[j] × x[j])
{voorwaarden} S(j,1,n,a[i,j] × x[j]) ≤ b[i](1 ≤ i ≤ m)
{niet neg}                  x[j] ≥ 0   (1 ≤ j ≤ n)

INIT  {getallen}

  n + 2               m + 2
  a[i,j]   + 4          + 5
           + 10         + 4
  b[i]     + 3600       + 3600
  c[j]     + 6          + 4

CLOSE
```

Voorbeeld 2

De mathematische formulering van een in [2] (pag.7) besproken inkoop- en voorraadkosten probleem is:

minimaliseer

$$\sum_{j=1}^{t} p_j x_j + c_1 \sum_{j=1}^{t} \left[\sum_{i=1}^{j} x_i - \left(\sum_{i=1}^{j-1} d_i + \tfrac{1}{2} d_j \right) \right] ,$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \leq k \qquad (j=1,\ldots,t) ,$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_i \geq \sum_{i=1}^{j} d_i \qquad (j=1,\ldots,t) ,$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,t) .$$

In dit probleem zijn de x_j $(j=1,\ldots,t)$ de onbekenden.

Binnen de definities van [1] kan dit probleem worden geformuleerd als:

```
OPEN  {inkoop- en voorraadkosten}
index   i,j;
integer    t, c1, k,
           p[j] (1 ≤ j ≤ t) ,
           d[i] (1 ≤ i ≤ t) ;
continuous x[j] (1 ≤ j ≤ t) ;

MINIMIZE:    S(j, 1, t, p[j] × x[j] )
      + c1 × S(j, 1, t, S(i, 1, j, x[i] ))

{voorraad}

 S(i, 1, j, x[i] ) ≤ k + SUM(i, 1, j-1, d[i] ) (1 ≤ j ≤ t)
```

{vraag}

$S(i, 1, j, x[i]) \geq SUM(i, 1, j, d[i]) \qquad (1 \leq j \leq t)$

{niet neg}

$x[j] \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq t)$

INIT {getallen}

t + 3

c1 + 1

k + 100

p[j] + 20 + 30 + 35

d[j] + 60 + 70 + 50

CLOSE

Voorbeeld 3

Zij d_{ik} = de vraag in tonnen naar produkt i (i=1,2,...,5) in planningsperiode k (k=1,2,3).

Zij t_{ij} = het aantal uren dat nodig is om 1 ton van produkt i op machine j (j=1,...,4) te vervaardigen.

In elke planningsmethode is elke machine 168 uren beschikbaar.

Gevraagd wordt

x_{ijk} = het aantal uren dat machine j in periode k produkt i produceert,

zodanig vast te stellen dat aan de vraag in elke periode wordt voldaan, het aantal beschikbare uren niet wordt overschreden en de totale produktietijd minimaal is.

Mathematisch model:

minimaliseer

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{5} t_{ij}\, x_{ijk},$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \geq \sum_{k=1}^{l} d_{ik} \qquad (i=1,\ldots,5;l=1,\ldots,3),$$

$$\sum_{i=1}^{5} t_{ij}\, x_{ijk} \leq 168 \qquad (j=1,\ldots,4;k=1,\ldots,3),$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad .$$

Dit model kan worden geschreven als:

```
OPEN {plannings probleem}

index       i, j, k, l;

integer     d[i,k] (1 ≤ i ≤ 5, 1 ≤ k ≤ 3);

real        t[i,j] (1 ≤ i ≤ 5, 1 ≤ j ≤ 4);

continuous  x[i,j,k] (1 ≤ i ≤ 5, 1 ≤ j ≤ 4, 1 ≤ k ≤ 3);

MINIMIZE:
S(j, 1, 4, S(k, 1, 3, S(i, 1, 5, t[i,j] × x [i,j,k])))

{vraag}
S(j, 1, 4, S(k, 1, l, x[i,j,k])) ≥ SUM(k, 1, l, d[i,k])
                                            (1 ≤ i ≤ 5, 1 ≤ l ≤ 3)

{tijd}
S(i, 1, 5, t[i,j] × x[i,j,k]) ≤ 168
                                            (1 ≤ j ≤ 4, 1 ≤ k ≤ 3)
```

INIT {getallen, t[i,j] = 10^6 geeft aan dat produkt i niet op machine j kan worden gemaakt}

d[i,l]	+ 25	+ 20	+ 30
	+ 44	+ 40	+ 46
	+ 6	+ 7	+ 6
	+ 22	+ 11	+ 32
	+ 28	+ 29	+ 23

t[1,j]	+ 6.28	+ 3.06	+ 10^6	+ 6.07
t[2,j]	+ 4.24	+ 10^6	+ 4.97	+ 5.05
t[3,j]	+ 5.27	+ 10^6	+ 10^6	+ 5.27
t[4,j]	+ 10^6	+ 3.31	+ 10^6	+ 6.33
t[5,j]	+ 10^6	+ 10^6	+ 3.29	+ 4.96

CLOSE

Voorbeeld 4

Een graaf bestaat uit n punten, genummerd 1, 2, ..., n, en m kanten, genummerd 1, 2, ..., m. Kant j verbindt punt s[j] met punt t[j].

Gevraagd wordt een maximaal aantal punten aan te wijzen, zodanig dat geen tweetal van die punten door een kant is verbonden. Dit is een nul-een lineair programmerings probleem, zij x_i = (0) 1 als punt i (niet) in de maximale verzameling is bevat:

$$\text{maximaliseer} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

onder de voorwaarden

$$x_{s_j} + x_{t_j} \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, m) \ ,$$

$$x_i = 0 \text{ of } 1.$$

In het kader van [1] geschreven:

```
OPEN  {maximaal inwendig stabiele verzameling}
index    i, j;
integer     m, n,
            s[j] (1 ≤ j ≤ m), t[j] (1 ≤ j ≤ m);
discrete    x[i] (1 ≤ i ≤ n);
MAXIMIZE:
S(i, 1, n, x[i])
{voorwaarden}
x[s[j]] + x[t[j]] ≤ 1 (1 ≤ j ≤ m)
```

{bovengrens}

$x[i] \leq 1 \quad (1 \leq i \leq n)$

{ondergrens}

$x[i] \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$

INIT {getal voorbeeld}

n + 5			m + 3
s[j]	+ 1	+ 3	+ 4
t[j]	+ 2	+ 1	+ 5

CLOSE

Literatuur

1. Jac.M. Anthonisse

An input system for linear programming problems, part 1: formal description of L.P. problems.

Rapport S 371, Mathematisch Centrum.

2. B. Dorhout, J. Kriens

Leergang Besliskunde, deel 6a
Mathematisch Centrum.