stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK S 7001-b1 MAART

SC 21/70

SYLLABUS VAN HET COLLOQUIUM WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING
O.L.V. PROF.DR. J.TH. RUNNENBURG

A.A. BALKEMA
HOOFDSTUK III: MARKOV PROCESSEN EN CONTRACTIE HALFGROEPEN

APRIL 1969 - FEBRUARI 1970

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inleiding

Het is de opzet geweest van deze serie lezingen - gegeven tussen april 1969 en februari 1970 in het colloquium waarschijnlijkheidsrekening van het Mathematisch Centrum - een bewijs te geven van de stelling van Hille-Yosida (over het bestaan van eèn halfgroep contracties met voorgeschreven infinitesimale voortbrenger) aan de hand van Fellers An introduction to probability theory and its applications, vol. 2 (XIII, 10). (Zie literatuur p. 89).

De serie voordrachten valt uiteen in vier onderdelen:

§1 - §4: De stelling van Hille-Yosida is zuiver analytisch. Om de betekenis voor de waarschijnlijkheidsrekening duidelijk te maken wordt de existentie van een stationair Markov-proces by gegeven halfgroep overgangswaarschijnlijkheden bewezen. Een overgangswaarschijnlijkheid wordt hierbij opgevat als operator op de ruimte der begrensde reële meetbare functies.

§5 - §6: Twee voorbeelden: Halfgroeptheorie in het geval van een eindige toestandsruimte en de representatiestelling van Kolmogorov voor oneindig deelbare reële stochasten met eindige variantie. (Feller 2. IX).

§7 - §8: §8 bevat de stelling van Hille-Yosida en een aantal verwante stellingen. §7 bevat het benodigde materiaal over integratie in Banachruimten. (Literatuur: Dynkin, 1 ch I). We beperken ons tot het geval van sterke convergentie (in de ruimte $C_0(\mathbb{R})$ der continue functies op $\mathbb{R}$ die naar nul gaan in ∞ is dit uniforme convergentie).

§9 - §10: Nadat het verband tussen positieve contractie-halfgroepen op $C_0(\mathbb{R})$ (algemener $C(X)$) en overgangswaarschijnlijkheden op $\mathbb{R}$ behandeld is, wordt een Fellerproces gedefinieerd en aangetoond (Loéve, §41) dat we de kansruimte bij een Fellerproces steeds zó kunnen kiezen dat de realizaties van het proces in elk tijdstip t linker- en rechterlimiet hebben. Op de consequenties (meetbaarheid en de sterke Markoveigenschap) wordt niet ingegaan.

N.B. Hoofdstuk I (getiteld: Laplace-Stieltjesgetransformeerden door W. Vervaat) en Hoofdstuk II (getiteld: Reguliere variatie en Laplace-getransformeerden door L.de Haan) zijn verschenen onder de rapportnummers S 395 (C 18f) resp. S 395 (C 18g).

III. Markov processen en contractie halfgroepen

§1. Overgangswaarschijnlijkheden

Definitie 1.1: Zij X een verzameling en $\mathcal{M}$ een klasse van deelverzamelingen van X. $\mathcal{M}$ is een monotone klasse als geldt:

1) $M_n \in \mathcal{M}$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ dan $\bigcap M_n \in \mathcal{M}$.
2) $M_n \in \mathcal{M}$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$ dan $\bigcup M_n \in \mathcal{M}$.

Opmerking: Zij X een verzameling en $\mathcal{C}$ een willekeurige klasse deelverzamelingen van X. De machtsverzameling van X is een monotone klasse en de doorsnede van een willekeurige collectie monotone klassen is een monotone klasse. Hieruit volgt dat $\mu\mathcal{C}$, de doorsnede van alle monotone klassen die $\mathcal{C}$ omvatten een monotone klasse is die $\mathcal{C}$ omvat. $\mu\mathcal{C}$ is de monotone klasse voortgebracht door $\mathcal{C}$.

Stelling 1.1: Zij X een verzameling en $\mathcal{A}$ een algebra van deelverzamelingen van X. Zij $\mu\mathcal{A}$ de monotone klasse voortgebracht door $\mathcal{A}$ en $\sigma\mathcal{A}$ de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{A}$. Er geldt $\mu\mathcal{A} = \sigma\mathcal{A}$.

Bewijs: $\sigma\mathcal{A}$ is een monotone klasse en omvat $\mathcal{A}$, dus omvat $\mu\mathcal{A}$. We bewijzen nu nog $\mu\mathcal{A} \supset \sigma\mathcal{A}$. Daartoe bewijzen we eerst dat $\mu\mathcal{A}$ een algebra is.

Zij $\mathcal{C} = \{M \in \mu\mathcal{A} \mid M^c \in \mu\mathcal{A}\}$. $\mathcal{C}$ is een monotone klasse en $\mathcal{C}$ omvat $\mathcal{A}$, dus $\mathcal{C}$ omvat $\mu\mathcal{A}$, dus $\mathcal{C} = \mu\mathcal{A}$, d.w.z.

(1.1) als $M \in \mu\mathcal{A}$ dan $M^c \in \mu\mathcal{A}$.

Voor iedere $L \in \mu\mathcal{A}$ definiëren we

$$\mathcal{A}(L) = \{M \in \mu\mathcal{A} \mid M \cap L \in \mu\mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{A}(L)$ is dan een monotone klasse, immers als (M_n) een monotone rij is in $\mathcal{A}(L)$ met limiet M dan is $(M_n \cap L)$ een monotone rij met limiet $M \cap L \in \mu\mathcal{A}$ en ligt M dus ook in $\mathcal{A}(L)$. Als $L \in \mathcal{A}$, dan $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}(L)$ en $\mathcal{A}(L) = \mu\mathcal{A}$. Zij nu $\mathcal{L} = \{L \in \mu\mathcal{A} \mid \mathcal{A}(L) = \mu\mathcal{A}\}$. $\mathcal{L}$ is een monotone klasse, immers is (L_n) een monotone rij in $\mathcal{L}$ met limiet L, dan $M \cap L_n \in \mu\mathcal{A}$ voor iedere $M \in \mu\mathcal{A}$, dan ook $M \cap L \in \mu\mathcal{A}$ voor iedere $M \in \mu\mathcal{A}$, d.w.z. $\mathcal{A}(L) = \mu\mathcal{A}$ ofwel $L \in \mathcal{L}$. Daar $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}$ is dus $\mathcal{L} = \mu\mathcal{A}$, d.w.z. $\mathcal{A}(L) = \mu\mathcal{A}$ voor elke $L \in \mu\mathcal{A}$, ofwel

(1.2) als $L, M \in \mu\mathcal{A}$ dan $L \cap M \in \mu\mathcal{A}$.

Uit (1.1) en (1.2) volgt dat $\mu\mathcal{A}$ een algebra is.

Ligt $A_n \in \mu\mathcal{A}$ voor n = 1, 2, ..., dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ limiet van de stijgende rij verzamelingen $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ uit $\mu\mathcal{A}$, dus $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mu\mathcal{A}$. $\mu\mathcal{A}$ is dus een σ-algebra die $\mathcal{A}$ omvat: $\mu\mathcal{A} \supset \sigma\mathcal{A}$.

Definitie 1.2: Een meetbare ruimte $(X,\mathcal{A})$ is een verzameling X met een σ-algebra van $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X.

Definitie 1.3: Zij $(X,\mathcal{A})$ een meetbare ruimte. $B(\mathcal{A})$ is de verzameling van alle begrensde reële meetbare functies op $(X,\mathcal{A})$.

Voordat we de definitie van een overgangswaarschijnlijkheid geven, brengen we eerst enige bekende eigenschappen van kansmaten en integralen in herinnering.

Laat $(Y,\mathcal{B})$ een meetbare ruimte zijn en $\mathcal{B}_0$ een halfring die de σ-algebra $\mathcal{B}$ voortbrengt en die Y bevat. Zij $P_0 : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ een verzamelingsfunctie, die voldoet aan:

1) $P_0 B \geq 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}_0$

2) $P_0 Y = 1$

3) Als (B_n) een rij disjuncte verzamelingen is in $\mathcal{B}_0$, zó dat $\cup B_n \in \mathcal{B}_0$, dan $\sum P_0 B_n = P_0 \cup B_n$.

Uit de maattheorie is bekend dat P_0 eenduidig voortzetbaar is tot een kansmaat P op $\mathcal{B}$, d.w.z.

1) $PB = P_0 B$ voor iedere $B \in \mathcal{B}_0$

2) $PB \geq 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}$

3) $PY = 1$

4) Als (B_n) een rij disjuncte verzamelingen is in $\mathcal{B}$ dan $\sum PB_n = P \cup B_n$.

Er bestaat dus een 1-1 correspondentie tussen de kansmaten op $\mathcal{B}$ en op $\mathcal{B}_0$.

Bij de kansmaat P definiëren we een functie $E: B(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ door

$$E\phi := \int \phi \, dP \quad \text{voor } \phi \in B(\mathcal{B}).$$

Voor iedere $B \in \mathcal{B}$ is de indicator $\chi_B \in B(\mathcal{B})$ en geldt $E\chi_B = PB$.

De functie E heeft de eigenschappen:

E1) E is lineair, d.w.z. $E(\phi+\psi) = E\phi + E\psi$ $\qquad \phi,\psi \in B(\mathcal{B})$

$E(\lambda\phi) = \lambda E\phi$ $\qquad \phi \in B(\mathcal{B}), \lambda \in \mathbb{R}$

E2) E is positief, d.w.z. $\phi \geq 0 \implies E\phi \geq 0$ $\qquad \phi \in B(\mathcal{B})$

E3) $E1 = 1$ $\qquad 1 = \chi_Y \in B(\mathcal{B})$

E4) Als $\phi_n \in B(\mathcal{B})$ en $\phi_n(y) \downarrow 0$ als $n \to \infty$ voor iedere $y \in Y$, dan $E\phi_n \downarrow 0$.

Wegens de lineariteit van E volgt uit E4) dat voor iedere begrensde monotone rij (ϕ_n) met $\phi_n \in B(\mathcal{B})$ geldt:

$$\lim E\phi_n = E \lim \phi_n .$$

Als $E' : B(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ voldoet aan E1), ..., E4) en zó dat $E'\chi_B = PB$ voor alle $B \in \mathcal{B}$, dan $E' = E$.

De gelijkheid $E'\phi = E\phi$ geldt immers als ϕ de indicator is van een verzameling $B \in \mathcal{B}$, dus wegens de lineariteit voor trapfuncties $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{B_k}$ en wegens E4) dan ook voor iedere $\phi \in B(\mathcal{B})$ die te schrijven is als limiet van een begrensde monotone rij trapfuncties. Dit is het geval voor iedere $\phi \in B(\mathcal{B})$: als

$$\phi_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} k.2^{-n} \chi_{\{k.2^{-n} \leq \phi < (k+1)2^{-n}\}}$$

dan is ϕ_n voor $n = 1, 2, \ldots$ een trapfunctie en $\phi_n \uparrow \phi$.

Is nu F een willekeurige functie op $B(\mathcal{B})$ die aan E1), ..., E4) voldoet, dan bestaat er een unieke kansmaat Q op $\mathcal{B}$ zó dat $F\phi = \int \phi \, dQ$ voor alle $\phi \in B(\mathcal{B})$.

Immers, als Q bestaat moet gelden: $QB = F\chi_B$ voor $B \in \mathcal{B}$, dus Q is dan eenduidig bepaald door F. Definieer nu $QB := F\chi_B$ voor $B \in \mathcal{B}$, dan geldt

$QB = F\chi_B \geq 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}$ wegens E2)

$QY = F\chi_Y = F1 = 1$ wegens E3).

Zij (B_n) een rij disjuncte verzamelingen uit $\mathcal{B}$.

$$Q(\cup B_n) = F\chi_{\cup B_n} = F \sum \chi_{B_n} = F \lim \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}$$

$$= \lim F \sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k} \text{ wegens E4) daar } \left(\sum_{k=1}^{n} \chi_{B_k}\right) \text{ monotoon}$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} F\chi_{B_k} \text{ daar F lineair is}$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} QB_k = \sum QB_n.$$

Uit het voorgaande volgt dat er een 1-1 correspondentie bestaat tussen kansmaten op $\mathcal{B}$ een reële functies op $B(\mathcal{B})$ die voldoen aan E1), ..., E4).

Definitie 1.4: Laten $(X,\mathcal{A})$ en $(Y,\mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn. Een overgangswaarschijnlijkheid - afkorting o.w. - van X naar Y is een functie $K: X \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan:

K1) voor iedere $x \in X$ is $K(x,.)$ een kansmaat op $\mathcal{B}$,

K2) voor iedere $B \in \mathcal{B}$ is $K(.,B)$ meetbaar op $\mathcal{A}$.

Opmerking 1.4.1: Is in definitie 1.4 $\mathcal{B}$ geen σ-algebra maar een halfring, die Y bevat, en is K een functie op $X \times \mathcal{B}$ die aan K1) en K2) voldoet, dan bestaat er een eenduidig bepaalde voortzetting $K_1: X \times \sigma\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ die o.w. is van X naar Y.

Bewijs: Voor vaste x is $K(x,.)$ een kans op $\mathcal{B}$, dus voortzetbaar tot een kans $K_1(x,.)$ op $\sigma\mathcal{B}$. Wegens de eenduidigheid van de maatuitbreiding is er dan juist één voortzetting van K tot $K_1: X \times \sigma\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan K1). We moeten nu nog aantonen dat voor iedere $B \in \mathcal{B}$ de functie $K_1(.,B)$ meetbaar is op $\mathcal{A}$.

Zij $\mathcal{E} = \{B \in \sigma\mathcal{B} \mid K_1(.,B) \text{ is meetbaar op } \mathcal{A}\}$. Als $B \in \mathcal{B}$ dan $K_1(.,B) = K(.,B)$, dus $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}$. Zij $\mathcal{B}_1$ de algebra voortgebracht door $\mathcal{B}$. Iedere $B \in \mathcal{B}_1$ is te schrijven als vereniging van een eindig aantal disjuncte verzamelingen uit $\mathcal{B}$: $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ met $B_k \in \mathcal{B}$ voor $k = 1, \ldots, n$. Voor iedere $x \in X$ geldt $K_1(x,B) = \sum_{k=1}^{n} K_1(x,B_k)$; voor iedere $B \in \mathcal{B}_1$ is $K_1(.,B)$ de som van een eindig aantal meetbare functies, dus zelf meetbaar, d.w.z. $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}_1$.

We tonen nu aan dat $\mathcal{E}$ een monotone klasse is. Is (E_n) een monotone rij verzamelingen uit $\mathcal{E}$, dan is $K_1(.,E_n)$ een monotone rij meetbare functies en dus is ook $K_1(.,\lim E_n) = \lim K_1(.,E_n)$ meetbaar, d.w.z. met de verzamelingen E_n ligt ook E in $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E} \supset \mathcal{B}_1$ en $\mathcal{E}$ is een monotone klasse. Hieruit volgt $\mathcal{E} \supset \mu\mathcal{B}_1$. $\mathcal{B}_1$ is een algebra, dus $\mu\mathcal{B}_1 = \sigma\mathcal{B}_1$ (stelling 1.1). Hieruit volgt $\mathcal{E} \supset \sigma\mathcal{B}_1 = \sigma\mathcal{B}$: voor iedere $B \in \sigma\mathcal{B}$ is $K_1(.,B)$ meetbaar op $\mathcal{A}$. K_1 voldoet ook aan E2) en is dus een o.w. van X naar Y, wat te bewijzen was.

Is $\phi \in B(\mathcal{B})$ en $x \in X$, dan kunnen we de integraal van ϕ t.o.v. de kansmaat $K(x,.)$ op $\mathcal{B}$ definiëren. We schrijven hiervoor $(K^*\phi)(x) := \int K(x,dy)\phi(y)$. K voegt dus aan iedere begrensde meetbare reële functie ϕ op $(Y,\mathcal{B})$ een functie $K^*\phi$ op X toe. Deze afbeelding K^* zullen we nu nader onderzoeken.

<u>Stelling 1.2</u>: Laten $(X,\mathcal{A})$ en $(Y,\mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn en K een o.w. van X naar Y. Definieer K^* op $B(\mathcal{B})$ door

$$(K^*\phi)(x) = \int K(x,dy)\phi(y).$$

Er geldt:

$K^*1)$ K^* is lineair

$K^*2)$ K^* is positief

$K^*3)$ $K^*1 = 1$ ofwel $K^*\chi_Y = \chi_X$

$K^*4)$ Als $\phi_n \in B(\mathcal{B})$ en $\phi_n \downarrow 0$ dan $K^*\phi_n \downarrow 0$.

$K^*5)$ K^* beeldt $B(\mathcal{B})$ af in $B(\mathcal{A})$.

<u>Bewijs</u>: Zij $x \in X$. $K(x,.)$ is een kansmaat op $\mathcal{B}$ en $(K^*.)(x)$ is dus een reële functie op $B(\mathcal{B})$ die voldoet aan E1), ..., E4). Dit geldt voor iedere $x \in X$, dus K^* voldoet aan $K^*1)$, ..., $K^*4)$.

Is $|\phi(y)| \leq M$ voor iedere $y \in Y$ dan $|\int K(x,dy)\phi(y)| \leq M$ voor iedere $x \in X$, dus $K^*\phi$ is begrensd als $\phi \in B(\mathcal{B})$.

Is (ϕ_n) een begrensde monotone rij in $B(\mathcal{B})$ dan $\lim \phi_n \in B(\mathcal{B})$ en $K^* \lim \phi_n = \lim K^*\phi_n$, immers dit geldt in elke $x \in X$.

$K^*\phi \in B(\mathcal{A})$ als ϕ de indicator is van een $B \in \mathcal{B}$, dus ook als ϕ een trapfunctie is en als ϕ limiet is van een begrensde monotone rij trapfuncties. Iedere $\phi \in B(\mathcal{B})$ is limiet van zulk een rij, dus $K^*\phi \in B(\mathcal{A})$ voor alle $\phi \in B(\mathcal{B})$ waarmee bewezen is dat K^* voldoet aan $K^*5)$.

Stelling 1.3: Laten $(X,\mathcal{A})$ en $(Y,\mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn en $L: B(\mathcal{B}) \to B(\mathcal{A})$ een positieve lineaire afbeelding zó dat

$L1 = 1$

Als $\phi_n \downarrow 0$ en $\phi_n \in B(\mathcal{B})$ voor $n = 1, 2, \ldots$ dan $L\phi_n \downarrow 0$

dan bestaat er een o.w. K van X naar Y zó dat $L = K^*$.

Bewijs: L voldoet aan $K^*1), \ldots, K^*5)$ uit de vorige stelling.

Definieer $K(x,B) := (L\chi_B)(x)$ voor $x \in X$ en $B \in \mathcal{B}$. $(L.)(x)$ voldoet aan E1), ..., E4) dus $K(x,.)$ is een kans op $\mathcal{B}$ voor iedere $x \in X$ en $(L\phi)(x) = \int K(x,dy)\phi(y)$ voor alle $\phi \in B(\mathcal{B})$. Daar $L\chi_B$ meetbaar is op $\mathcal{A}$ is de stelling bewezen.

Voorbeelden:

1) Zij $(X,\mathcal{A}) = (Y,\mathcal{B})$.
Definieer $K(x,A) := \begin{Bmatrix} 1 \text{ als } x \in A \\ 0 \text{ als } x \notin A \end{Bmatrix} = \chi_A(x)$.

Voor vaste x is $K(x,.)$ de kansmaat geconcentreerd op het punt x. Daar χ_A meetbaar is voor iedere $A \in \mathcal{A}$ is K een o.w. van X naar X.
$K^*\chi_A = K(.,A) = \chi_A$. Hieruit volgt dat K^* de identieke afbeelding is op $B(\mathcal{A})$. Deze afbeelding voldoet immers aan $K^*1), \ldots, K^*5)$ en induceert dus een o.w. Het is een voortzetting van K en wegens de eenduidigheid dus juist K^*.

2) Zij $f: (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ meetbaar, d.w.z. $f^{-1}B \in \mathcal{A}$ voor iedere $B \in \mathcal{B}$.
Definieer $K^*\phi := \phi \circ f$. K^* voldoet aan $K^*1), \ldots, K^*5)$ en induceert een o.w. K:
$K(x,B) = (K^*\chi_B)(x) = \chi_B f(x) = \begin{cases} 1 & f(x) \in B \\ 0 & f(x) \notin B. \end{cases}$

3) Laten $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ en $(Z,\mathcal{C})$ meetbare ruimten zijn en laten $K^*: B(\mathcal{B}) \to B(\mathcal{A})$ en $L^*: B(\mathcal{C}) \to B(\mathcal{B})$ voldoen aan $K^*1), \ldots, K^*4)$, dan voldoet ook de samenstelling $K^*L^*: B(\mathcal{C}) \to B(\mathcal{A})$ aan $K^*1), \ldots, K^*4)$ en induceert een o.w. KL:

$$(KL)(x,C) = \int K(x,dy)L(y,C) \quad x \in X,\ C \in \mathcal{C}.$$

Bewijs: K^*L^* is lineair en positief daar K^* en L^* het zijn, $K^*L^*1 = K^*1 = 1$ en als $\psi_n \in B(\mathcal{C})$ en $\psi_n \downarrow 0$ dan $L^*\psi_n \in B(\mathcal{B})$ en $L^*\psi_n \downarrow 0$ daar L^* voldoet aan $K^*4)$ en dus $K^*L^*\psi_n \downarrow 0$ daar K^* voldoet aan $K^*4)$.

Zij $x \in X$, $C \in \mathcal{C}$.

$(KL)(x,C) = (K^{*}L^{*}\chi_C)(x) = \int K(x,dy)L^{*}\chi_C(y) = \int K(x,dy)L(y,C)$.

4) Zij $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $\mathbb{R}^2$ en zij P een kans op $\mathcal{B}$ met continue strikt positieve dichtheid $f(x,y)$ t.o.v. de Lebesguemaat op $\mathcal{B}$.
Definieer

$$K(x,B) = \frac{\int_B f(x,y)dy}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy}$$

voor alle $B \in \mathcal{B}$ die slechts van de y-coördinaat afhangen.
$\mu B := \int_B f(x,y)dy$ is een maat op deze verzameling die genormeerd wordt door de factor $[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy]^{-1}$. Teller en noemer zijn meetbare functies van x. K is dus een o.w.

5) Zij $(Y,\mathcal{B},P)$ een kansruimte, $(X,\mathcal{A})$ een maatruimte.
Definieer $K(x,B) = PB$. Dan is K een o.w. en $K^{*}\phi = \int \phi \, dP$ voor iedere $\phi \in B(\mathcal{B})$.

Definitie 1.5: Zij ϕ een reële functie op X, ψ een reële functie op Y, $\phi \otimes \psi: X \times Y \to \mathbb{R}$ is de functie

$$(\phi \otimes \psi)(x,y) = \phi(x) \cdot \psi(y).$$

Lemma 1.1: Zij ϕ_i een reële functie op X en ψ_i een reële functie op Y voor $i = 1, 2$. Als $\phi_1 \otimes \psi_1 = \phi_2 \otimes \psi_2 \neq 0$ dan bestaat er een $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, zó dat

$$\phi_1 = \gamma\phi_2$$

$$\psi_1 = \gamma^{-1}\psi_2.$$

Bewijs: Er is een $(a,b) \in X \times Y$ zó dat

$$\phi_1(a)\psi_1(b) = \phi_2(a)\psi_2(b) \neq 0.$$

Zij $\gamma := \frac{\phi_1(a)}{\phi_2(a)}$. Dan $\gamma \neq 0$ en $\psi_1(b) = \gamma^{-1}\psi_2(b)$.

Zij $\phi = \gamma\phi_2$ en $\psi = \gamma^{-1}\psi_2$.

Voor iedere $x \in X$ geldt:

$\phi(x)\psi_1(b) = \gamma\phi_2(x)\gamma^{-1}\psi_2(b) = \phi_2(x)\psi_2(b) = \phi_1(x)\psi_1(b)$

dus $\phi(x) = \phi_1(x)$.

Voor iedere $y \in Y$ geldt

$\phi_1(a)\psi(y) = \gamma\phi_2(a)\gamma^{-1}\psi_2(y) = \phi_2(a)\psi_2(y) = \phi_1(a)\psi_1(y)$

dus $\psi(y) = \psi_1(y)$.

Hiermee is het lemma bewezen.

<u>Stelling 1.4</u>: Zij K_i een o.w. van $(X_i, \mathcal{A}_i)$ naar $(Y_i, \mathcal{B}_i)$ voor $i = 0, 1$. Dan is $K_0 \times K_1$ een o.w. van de productruimte $(X_0 \times X_1, \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)$ naar de productruimte $(Y_0 \times Y_1, \mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_1)$ als we definiëren:

$$(K_0 \times K_1)((x_0, x_1), B_0 \times B_1) := K_0(x_0, B_0)K_1(x_1, B_1)$$

als $x_i \in X_i$ en $B_i \in \mathcal{B}_i$, $i = 0, 1$.

<u>Bewijs</u>: De verzamelingen $B_0 \times B_1$ met $B_i \in \mathcal{B}_i$ voor $i = 0, 1$ vormen een halfring op $Y_0 \times Y_1$ die de σ-algebra $\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_1$ voortbrengt en de verzameling $Y_0 \times Y_1$ bevat. Voor iedere $(x_0, x_1) \in X_0 \times X_1$ is $K_0(x_0, .) \cdot K_1(x_1, .)$ een kansmaat op deze halfring. Voor iedere verzameling $B_0 \times B_1$ uit deze halfring is $K_0(., B_0) \cdot K_1(., B_1)$ een meetbare functie op $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1$ (als product van twee meetbare functies). Uit de opmerking 1.4.1 volgt dat $K_0 \times K_1$ een o.w. is.

<u>Opmerking</u>: Er geldt:

$$(K_0 \times K_1)^*(\phi_0 \otimes \phi_1) = K_0^* \phi_0 \otimes K_1^* \phi_1 \qquad \phi_i \in B(\mathcal{B}_i),\ i = 0, 1.$$

Deze relatie geldt als ϕ_0 en ϕ_1 indicatoren zijn van verzamelingen $B_0 \in \mathcal{B}_0$ en $B_1 \in \mathcal{B}_1$. Wegens $K^*1)$ dan ook voor trapfuncties en wegens $K^*4)$ voor willekeurige $\phi_0 \in B(\mathcal{B}_0)$ en $\phi_1 \in B(\mathcal{B}_1)$.
Wegens lemma 1.1 en de lineariteit van K_0^* en K_1^* veranderen de beide leden van de gelijkheid niet als we voor $\phi_0 \otimes \phi_1$ een andere representant, $\psi_0 \otimes \psi_1$ kiezen.

Zij $T \subset \mathbb{R}$ en zij $(X_t, \mathcal{A}_t\ q{=}1)$ een meetbare ruimte voor iedere $t \in T$. (In de toepassingen zal dit voor iedere t dezelfde ruimte (y, B) zijn, voor de theorie is het echter eenvoudiger ze te onderscheiden door indices). Laat voor elk paar $(s,t) \in T^2$ met $s < t$ een o.w. K_{st} van X_s naar X_t gegeven zijn. Het is de bedoeling om hierbij een Markov proces met toestandsruimte $(y, \mathcal{B})$ te construeren:

$\underline{x}_t$, $t \in T$, $P(\{\underline{x}_t \in A\} \mid \{\underline{x}_s = x\}) = K_{st}(x, A)$

voor alle $s, t \in T$ met $s < t$, $x \in y$ en $A \in \mathcal{B}$. Hiertoe moeten we een geschikt kansveld $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ construeren, en op $(\Omega, \mathcal{A})$ voor iedere t een geschikte meetbare functie $x_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}) = (X_t, \mathcal{A}_t)$. We doen dit eerst voor het geval dat T eindig is. In de volgende paragraaf behandelen we het geval dat T oneindig is.

<u>Stelling 1.6</u>: Laten $(x_i, \mathcal{A}_i)$ meetbare ruimten zijn voor $i = 0, \ldots, n$ en K_i een o.w. van X_{i-1} naar X_i voor $i = 1, \ldots, n$. Er bestaat een o.w. K van $(X_0, \mathcal{A}_0)$ naar $(\prod_{i=0}^{n} X_i, \prod_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i)$. Deze voldoet aan

(1.1) $K^*(\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_n) = \phi_0 . K_1^*(\phi_1 . K_2^*(\ldots K_{n-1}^*(\phi_{n-1} K_n^* \phi_n)\ldots))$ voor $\phi_i \in B(\mathcal{A}_i)$ voor $i = 0, \ldots, n$.

(1.2) $(K^* \sigma)(x_0) = \iint\ldots\int K_1(x_0, dx_1)\, K_2(x_1, dx_2) \ldots K_n(x_{n-1}, dx_n)\, \sigma(x_0, \ldots, x_n)$ voor $\sigma \in B(\mathcal{A}_0 \times \ldots \times \mathcal{A}_n)$.

<u>Bewijs</u>: Wegens stelling 1.5 bestaat er voor $k = 1, \ldots, n$ een o.w. L_k van X_{k-1} naar $X_{k-1} \times X_k$ zó dat

$$L_k^*(\phi_{k-1} \otimes \phi_k) = \phi_{k-1} . K_k^* \phi_k$$

$M_k^* := id_0 \times \ldots \times id_{k-1} \times L_k^*$ induceert een o.w. M_t van $X_0 \times \ldots \times X_{k-1}$ naar $X_0 \times \ldots \times X_k$ (id_i is de identieke afbeelding op $B(\mathcal{A}_i)$) en

$$M_k^*(\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_k) = \phi_0 \otimes \ldots \otimes (\phi_{k-i}\, K_k^*\, \phi_k) .$$

Zij K de samenstelling van $M_1, \ldots, M_n$. Dan is

$$K^*(\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_n) = M_1^* \ldots M_n^* (\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_n)$$
$$= \phi_0 . K_1^*(\phi_1 . K_2^*(\ldots K_{n-1}^*(\phi_{n-1} . K_n^* \phi_n) \ldots)).$$

ofwel $(K^*(\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_n))(x_0) = \phi_0(x_0) \int K_1(x_0, dx_1)\phi_1(x_1) \int K_2(x_1, dx_2)\phi_2(x_2) \ldots$

$$\int K_n(x_{n-1}, dx_n)\ \phi_n(x_n).$$

Uit het voorgaande volgt dat K^* een o.w. K induceert van$(X_0, \mathfrak{A}_0)$ naar $(\prod_{i=0}^{n} X_i, \prod_{i=0}^{n} \mathfrak{A}_i)$en dat $K(x_0, A_0 x \ldots x\ A_n) = \int \int \ldots \int K_1(x_0, dx_1)$

$$K_2(x, 2x_2) \ldots K_n(x_{n-1}, dx_n)\ \chi_{A_0 x \ldots x A_n}.$$

waaruit (1.2) volgt.

<u>Opmerking</u>: Zij $K_{ij}^* = K_{i+1}^* \ldots K_j^* = B(\mathfrak{A}_i) \longrightarrow B(\mathfrak{A}_j)$ voor $0 \leq i < j \leq n$.
Zij $E = \{i_1, \ldots, i_k\}$ met $0 = i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n$.
Het stelsel o.w.'s $K_{i_r i_{r+1}}$ van X_{i_r} naar $X_{i_{r+1}}$ induceert volgens stelling 1.6 en o.w. L van x_{i_1} naar $X_{i_1} x \ldots x\ X_{i_k}$ zó dat

$$L^*(\phi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \phi_{i_k}) = \phi_{i_1}\ K_{i_1 i_2}^*(\phi_{i_2}\ K_{i_r i_3}^*(\ldots \phi_{i_{k-1}}\ K_{i_{k-1} i_k}^*\ \phi_{i_k} ..))$$

$$= \phi_0 .\ K_1^*\ (\phi_1 .\ K_2^*\ (\ldots K_{n-1}^*\ (\phi_{n-1}\ K_n^*\ \phi_n) \ldots))$$

$$= K^*(\phi_0 \otimes \ldots \otimes \phi_n)$$

waarbij $\phi_i = \phi_{i_j}$ als $i = i_j \in E$
$= 1$ als $i \notin E$.

Dus $L(x_0, A_{i_1} x \ldots x\ A_{i_k}) = K(x_0, A_0\ x \ldots x\ A_n)$
waarbij $A_{i_j} = A_i$ als $i = i_j \in E$
$= X_i$ als $i \notin E$
d.w.z. voor iedere $x_0 \in X_0$ is $L(x_0, \bullet)$ de beperking van de maat $K(x_0, \bullet)$ tot de verzamelingen die slechts van de coördinaten $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ afhangen.

Kansmaten op oneindige productruimten.

Is X een verzameling en f een afbeelding van X in een meetbare ruimte $(y, \mathcal{B})$ dan bestaat er een σ-algebra $\mathcal{A}$ op X, zó dat f meetbaar is op $\mathcal{A}$, d.w.z. $f^{-1} B \in \mathcal{A}$ voor iedere $B \in \mathcal{B}$. Men neme bv. voor $\mathcal{A}$ de machtsverzameling van X. Is $(\mathcal{A}_\alpha)$ een collectie σ-algebras op X zó dat f meetbaar is op iedere σ-algebra $\mathcal{A}_\alpha$, dan is f meetbaar op de σ-algebra $\bigcap_\alpha \mathcal{A}_\alpha$. Hieruit volgt dat er een kleinste σ-algebra bestaat op X waarop f meetbaar is (= doorsnede van alle σ-algebra's waarop f meetbaar is).

Laat T een indexverzameling zijn en $(X_t, \mathcal{A}_t)$ een meetbare ruimte voor iedere $t \in T$. Voor iedere $t \in T$ zij π_t de projectie van het cartesisch product $X = \prod_{t \in T} X_t$ op de t^e coordinaat X_t. Als $S \subset T$, dan is er een kleinste σ-algebra $\mathcal{A}^S$ op X zó dat $\pi_s : (X, \mathcal{A}^S) \longrightarrow (X_s, \mathcal{A}_s)$ meetbaar is voor iedere $s \in S$. Merk op dat $\mathcal{A}^U \subset \mathcal{A}^V$ als $U \subset V$ en dat $\mathcal{A}^{U \cup V}$ de σ-algebra is die wordt voortgebracht door $\mathcal{A}^U$ en $\mathcal{A}^V$.

Is voor iedere eindige deelverzameling $E \subset T$ en kansmaat P^E op $\mathcal{A}^E$ gegeven zó dat

$E \subset F \Rightarrow P^E$ is de beperking van P^F tot $\mathcal{A}^E$ dan bestaat er onder zekere voorwaarden een kans P op $\mathcal{A}^T$ zó dat voor iedere eindige deelverzameling $E \subset T$ geldt:

P^E is de beperking van P tot $\mathcal{A}^E$.

Merk op dat $\mathcal{A} = \bigcup \{\mathcal{A}^E \mid E \subset T \text{ \& } E \text{ eindig}\}$ en algebra is, en dat het stel kansmaten (P^E) op deze algebra een eindig additieve kansmaat P_0 induceert waarvoor geldt:

P^E is de beperking van P_0 tot $\mathcal{A}^E$ voor iedere eindige deelverzameling $E \subset T$. Immers voor iedere $A \in \mathcal{A}$ is er een E zó dat $A \in \mathcal{A}^E$. Als ook $A \in \mathcal{A}^F$, dan zeker $A \in \mathcal{A}^{E \cup F}$ zodat $P^E A = P^{E \cup F} A$ en $P^F A = P^{E \cup F} A$, d.w.z. P_0 is eenduidig bepaald.

<u>Stelling 2.1:</u> Zij $X_t = [0,1]$ voor iedere $t \in T$ en zij $\mathcal{A}_t$ de σ-algebra der Bovelverzamelingen van $[0,1]$. Dan is P_0 σ-additief, d.w.z. er bestaat een kansmaat P op $(X, \mathcal{A}^T)$ zó dat voor iedere eindige $E \subset T$ geldt:

P^E is de beperking van P tot $\mathcal{A}^E$.

Voor het bewijs van deze stelling hebben we twee definities en een hulpstelling nodig.

Definitie 2.1: Zij X een verzameling en $\mathfrak{A}$ een algebra van deelverzamelingen van X. Een eindig additieve kans P op $\mathfrak{A}$ is een functie $P : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ zó dat

$PX = 1$

$PA \geq 0$ voor iedere $A \in \mathfrak{A}$

Als A en B disjuncte verzamelingen zijn uit $\mathfrak{A}$, dan geldt $P(A \cup B) = PA + PB$.

Definitie 2.2: Zij $(X, \dot{\mathfrak{A}})$ een topologische Hansdorff-ruimte en $\mathfrak{A}$ een algebra op X. Een eindig additieve kans P op $\mathfrak{A}$ is regulier als geldt:

voor iedere $A \in \mathfrak{A}$ en iedere $\varepsilon > 0$ is er een compacte verzameling $K \in \mathfrak{A}$ zó dat

$K \subset A$

$P(A \setminus K) < \varepsilon$

Opmerking: De enige eigenschap die we van een topologische Hansdorff-ruimte zullen gebruiken is, dat er een klasse deelverzamelingen K bestaat de klasse der compacte deelverzamelingen waarvoor geldt:

$$K_1, K_2 \in \mathcal{K} \implies K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$$

Als $K_n \in \mathcal{K}$ voor $n = 1, 2, \dots$ en $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ dan is er een n_0 zó dat $\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$.

Opmerking: Is $\mathfrak{A}$ een algebra op een topologische Hansdorff ruimte zodat iedere $A \in \mathfrak{A}$ te schrijven is als vereniging van een rij compacte verzamelingen uit $\mathfrak{A}$, dan is iedere kans op $\mathfrak{A}$ regulier. Immers als $A = \cup K_n$, dan $PA = P \cup K_n = \lim_n P \bigcup_{k=1}^{n} K_k$: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een n_ε zó dat $P(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} K_k) < \varepsilon$.

Voorbeelden:

1) X is aftelbaar. $\mathcal{O} = \mathcal{Q}$ is de machtsverzameling van X. De eindige verzameling zijn compact, dus iedere $A \in \mathcal{Q}$ is te schrijven als vereniging van een rij compacte verzamelingen

2) $X = \mathbb{R}$. Open verzamelingen zijn willekeurige verenigingen van open intervallen (a, b), $\mathcal{Q}$ is de algebra bestaande uit eindige verenigingen van disjuncte intervallen. Ieder interval is te schrijven als vereniging van een rij compacte (d.i. begrensde en gesloten) intervallen, dus ook iedere verzameling uit $\mathcal{Q}$

3) $X = \mathbb{R}^k$. Open verzamelingen zijn willekeurige verenigingen van open bollen $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$ met $\varepsilon > 0$ en $x \in \mathbb{R}^k$. $\mathcal{Q}$ is de algebra bestaande uit eindige verenigingen van disjuncte blokken (producten van intervallen).

<u>Stelling 2.2</u>: Zij $(X,\mathcal{O})$ een topologische Hansdorff ruimte en P een eindig additieve reguliere kansmaat op een algebra $\mathcal{Q}$ op X. P is aftelbaar additief.

<u>Bewijs:</u> Zij (A_n) een rij disjuncte verzamelingen uit $\mathcal{Q}$ zó dat $\bigcup A_n \in \mathcal{Q}$. Dan is

$$\bigcup_{n > m} A_n = \bigcup_n A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_m) \in \mathcal{Q}$$

$$P \bigcup A_n = PA_1 + \ldots + PA_m + P \bigcup_{n > m} A_n$$

Het is voldoende te bewijzen dat $P \bigcup_{n > m} A_n \to 0$. $(\bigcup_{n > m} A_n) = (B_m)$ is een dalende rij verzamelingen uit $\mathcal{Q}$ met $\bigcap B_n = \emptyset$. Zij $\varepsilon > 0$. Kies een rij (ε_n) met $\varepsilon_n > 0$ en $\sum \varepsilon_n = \varepsilon$. Kies bij iedere B_n een compacte verzameling $K_n \in \mathcal{Q}$ zó dat

$$K_n \subset B_n$$

$$P(B_n \setminus K_n) < \varepsilon_n .$$

Zeker geldt $\bigcap K_n = \emptyset$. Er bestaat dus een index m zó dat $\bigcap_{k=1}^{m} K_k = \emptyset$.

$$B_m = \bigcap_{k=1}^{m} B_k \subset \left(\bigcap_{k=1}^{m} K_k \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (B_k \setminus K_k) \right).$$

(immers, als $x \in B_k$ voor $k = 1, \ldots, m$ dan $x \in K_k$ voor $k = 1, \ldots, m$ of er is een k zó dat $x \in B_k$ en $x \notin K_k$) dus $P\, B_m \leq \sum_{k=1}^{m} P(B_k - K_k) < \varepsilon$.

<u>Bewijs van stelling 2.1</u>: Voor iedere $t \in T$ zij J_t de algebra op $[0,1]$ bestaande uit eindige verenigingen van disjuncte intervallen. J_t is een algebra die $\mathcal{A}_t$ voortbrengt. Voor $E \subset T$, E eindig, zij J^E de algebra op X bestaande uit eindige verenigingen van disjuncte blokken $\bigcap_{t \in E} \pi_t^{-1} I_t$ met I_t een interval in X_t. Zij $J = \bigcup \{J^E \mid E \subset T \;\&\; E \text{ eindig}\}$. J is een algebra en iedere verzameling uit J is eindige vereniging van disjuncte blokken $\bigcap_{t \in E} \pi_t^{-1} I_t$, dus te schrijven als aftelbare vereniging van compacte blokken. P_0 is eindig additief op J dus wegens stelling 2.2 aftelbaar additief en dus voorzetbaar tot een kans op $\sigma J = \mathcal{A}^T$.

De beperking $X_t = [0,1]$ is minder ernstig dan hij op het eerste gezicht lijkt. We noemen zonder bewijs de volgende

<u>Stelling 2.3</u>: Zij (M, d) een volledige separabele metrische ruimte (d.w.z. iedere fundamentaalrij in M convergeert en er bestaat een rij (x_n) in M zó dat ieder punt uit M limietpunt is van de rij (x_n)). Zij $\mathcal{A}$ de σ-algebra voortgebracht door de open bollen $B_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ met $x \in M$ en $\varepsilon > 0$. Voor iedere overaftelbare $A \in \mathcal{A}$ bestaat er een bijectie $\phi : A \longrightarrow [0,1]$ zó dat ϕ en ϕ^{-1} meetbaar zijn t.o.v. de σ-algebra $A \cap \mathcal{A}$ op A en de σ-algebra $\mathcal{B}$ der Borelverzamelingen op $[0,1]$. D.w.z. de meetbare ruimten $(A, \mathcal{A} \cap A)$ en $([0,1], B)$ zijn als meetbare ruimten niet te onderscheiden.

<u>Voorbeeld</u>: Definieer $\psi : [0,1] \longrightarrow [0,1)$ door

$$\psi(x) = \frac{1}{n+1} \quad \text{als } x = \frac{1}{n}$$
$$= x \quad \text{elders}$$

dan is ψ een bijectie en ψ en ψ^{-1} zijn meetbaar t.o.v. de σ-algebra's der Bovelverzamelingen op $[0,1]$ en $[0,1)$.

Analoog zijn $[0,1)$ en $(0,1)$ als meetbare ruimten isomorf en daar $(0,1)$ homeomorf is met $\mathbb{R}$ volgt dat $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ als meetbare ruimten niet te onderscheiden zijn.

Stelling 2.4: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en kansruimte en $W \subset \Omega$ een verzameling zó dat $PA = 1$ voor iedere $A \in \mathcal{A}$ die W omvat. (W zelf hoeft geen element te zijn van $\mathcal{A}$). Zij $B = \mathcal{A} \cap W = \{A \cap W \mid A \in \mathcal{A}\}$ en definieer $Q : B \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$Q\ (A \cap W) = PA$$

Dan is (W, B, Q) een kansruimte.

Bewijs: Merk op dat voor $A, B \in \mathcal{A}$:

$A \cap W = B \cap W \Longrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset W^c$

$P[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] = 0 \Longrightarrow PA = PB$, d.w.z. Q is eenduidig gedefinieerd op B.

Duidelijk is $QW = Q\ (\Omega \cap W) = P\Omega = 1$ en $Q(A \cap W) \geq 0$ voor iedere $A \in \mathcal{A}$.

Zij nu $(A_n \cap W)$ en rij disjuncte verzamelingen in B. De verzamelingen A_n hoeven niet disjunct te zijn. Definieer $U = \bigcup_{\substack{(n,m) \\ n < m}} (A_n \cap A_m)$ dan $U \subset W^c$ dus $PU = 0$.

Als $B_n = A_n \setminus U$, dan is (B_n) een rij disjuncte verzamelingen en $B_n \cap W = A_n \cap W$. Dus ook

$\bigcup B_n \cap W = \bigcup A_n \cap W$ en $Q \bigcup (A_n \cap W) =$

$Q \bigcup B_n \cap W = P \bigcup B_n = \sum PB_n = \sum Q(B_n \cap W) =$

$\sum Q(A_n \cap W)$. Dus Q is σ-additief.

Stelling 2.5: Zij Y_t een Borelverzameling van $X_t = [0,1]$ en B_t de σ-algebra der Boreldeelverzamelingen van Y_t : $B_t = \mathcal{A}_t \cap Y_t$

Zij $Y = \prod_{t \in T} Y_t$ en zij Q^E voor iedere eindige $E \in T$ een kansmaat op Y , B^E) zó dat voor $E \subset F \subset T$ en F eindig geldt:

$$Q^E \text{ is de beperking van } Q^F \text{ tot } B^E.$$

Dan bestaat er een kansmaat Q op (Y, B^T) zó dat voor iedere eindige $E \subset T$ geldt:

$$Q^E \text{ is de beperking van } Q \text{ tot } B^E.$$

Bewijs: Voor iedere $S \subset T$ is $B^S = \mathcal{A}^S \cap Y$. Immers B^S is de σ-algebra voortgebracht door de verzamelingen

$B \times \prod_{\substack{t \in T \\ t \neq s}} Y_t$ met $B \in B_s \subset \mathcal{A}_s$ en $s \in S$. Dus $B^S \subset \mathcal{A}^S \cap Y$

Is nu $\mathcal{E}^S = \{E \in \mathcal{A}^S \mid E \cap Y \in B^S\}$, dan is $\mathcal{E}^S$ een σ-algebra die de verzamelingen $A \times \prod_{\substack{t \in T \\ t \neq s}} X_t$ met $A \in \mathcal{A}_s$ en $s \in S$ bevat, dus $\mathcal{E}^S = \mathcal{A}^S$

ofwel $B^S \supset \mathcal{A}^S \cap Y$.

Definieer voor eindige $E \subset T$ nu $P^E A = Q^E (A \cap Y)$ voor $A \in \mathcal{A}^E$.
Als E en F eindig en $E \subset F \subset T$, dan geldt:

$$P^F A = Q^F (A \cap Y) = Q^E (A \cap Y) = P^E A.$$

Er bestaat een kansmaat P op $(X = \Pi X_t, \mathcal{A}^T)$ zó dat voor eindige $E \subset T$ geldt:

$$P^E \text{ is de beperking van } P \text{ tot } \mathcal{A}^E.$$

Als we kunnen bewijzen dat $PA = 1$ voor iedere $A \in \mathcal{A}^T$ met $A \supset Y$, dan bestaat er volgens stelling 2.4 een kansmaat Q op $(Y, \mathcal{A}^T \cap Y) = (Y, B^T)$ zó dat $Q(A \cap Y) = PA$ voor alle $A \in \mathcal{A}^T$.

Voor eindige $E \subset T$ geldt dan voor alle $B \in B^E$ dat $B = A \cap Y$ met $A \in \mathcal{A}^E$ en

$$Q^E B = P^E A = PA = QB$$

d.w.z. Q^E is de beperking van Q tot B^E.

Zij $A \in \mathcal{A}^T$ en $Y \subset A$. Er bestaat een aftelbare deelverzameling $S \subset T$ zódat $A \in \mathcal{A}^S$. Immers $\bigcup \{\mathcal{A}^R \mid R \subset T \ \& \ R \text{ aftelbaar}\}$ is een σ-algebra en omvat de algebra

$\bigcup \{\mathcal{A}^E \mid E \subset T \ \& \ E \text{ eindig}\}$, dus omvat $\mathcal{A}^T$.

Hieruit volgt $A \supset \bigcap_{t \in s} \pi_t^{-1} Y_t$. $s = \{s_1, s_2, \ldots\}$ en

$P\left(\bigcap_{k \leq n} \pi_{s_k}^{-1} Y_{s_k}\right) = 1$ voor iedere n, dus $P\left(\bigcap_{t \in s} \pi_t^{-1} Y_t\right) = 1$,

dus zeker $PA = 1$.

<u>Opmerking</u>: De eis dat Y_t meetbaar is mag niet weggelaten worden in stelling 2.5 . Immers zij $T = \{1,2,..\}$, en zij

$\Delta = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\} \subset X$. Dan is

Δ het beeld van het interval $[0,1]$. Zij P de kans op Δ die overeenkomt met de Lebesguemaat λ op $[0,1]$.

Het is bekend dat er een rij niet meetbare verzamelingen (Y_n) bestaat zó dat voor iedere n geldt $[0,1] \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots, \bigcap Y_n = \emptyset$ en $\lambda A = 1$ voor iedere meetbare A die Y_n omvat.

Zij $P^{\{1, \ldots, n\}}$ de restrictie van P tot $\mathcal{A}^{\{1, \ldots, n\}}$ en $Q^{\{1, \ldots, n\}}$ de kansmaat op $Y = \Pi\, Y_t$ geïnduceerd door $P^{\{1, \ldots, n\}}$.
Voor iedere n is $Q^{\{1, \ldots, n\}}$ een kansmaat geconcentreerd op de verzameling $\Delta_n = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_1 = \ldots = x_n \in Y_n\}$.
Dus als Q bestaat, dan $Q(\Delta \cap Y) = \lim Q(\Delta_n \cap Y) = 1$. Echter $\Delta \cap Y = \emptyset$ dus $Q(\Delta \cap Y) = 0$.

<u>Stelling 2.6</u>: Zij $T \subset \mathbb{R}$ met minimaal element q. Zij voorts gegeven:

1) voor iedere $t \in T$ is X_t een Borelverzameling van $\mathbb{R}$ en $\mathcal{A}_t$ de σ-algebra der Borelverzamelingen van X_t,

2) voor elk paar $(s,t) \in T^2$ met $s < t$ is K_{st} een o.w. van X_s naar X_t zó dat voor $r < s < t$ geldt:

$$K_{rs}K_{st} = K_{rt}.$$

Dan bestaat er een unieke o.w. K van $(X_q, \mathcal{A}_q)$ naar $(X = \prod_{t \in T} X_t, \mathcal{A}^T)$ zó dat voor iedere verzameling $\{q, t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ met $q < t_1 < \ldots < t_n$ en voor alle $A \in \mathcal{A}_q$, $A_i \in \mathcal{A}_{t_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ en voor iedere $x \in X_q$ geldt:

$$K(x, \{\pi_q \in A, \pi_{t_1} \in A_1, \ldots, \pi_{t_n} \in A_n\}) =$$

$$= \iint \ldots \int K_{qt_1}(x,dx_1)\, K_{t_1t_2}(x_1,dx_2) \ldots K_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1},dx_n) \cdot$$

$$\cdot\ \chi_{A \times A_1 \times \ldots \times A_n}(x,x_1,\ldots,x_n).$$

<u>Bewijs</u>: Zij $x \in X_q$ willekeurig. Zij $E = \{q, t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ met $q < t_1 < \ldots < t_n$. Definieer voor $A \in \mathcal{A}_q$, $A_i \in \mathcal{A}_{t_i}$ voor $i = 1, \ldots, n$;

$$K_E(x, \{\pi_q \in A, \pi_{t_1} \in A_1, \ldots, \pi_{t_n} \in A_n\}) =$$

$$= \iint \ldots \int K_{qt_1}(x,dx_1)\, K_{t_1t_2}(x_1,dx_2) \ldots K_{t_{n-1}t_n}(x_{n-1},dx_n) \cdot$$

$$\cdot\ \chi_{A \times A_1 \times \ldots \times A_n}(x,x_1,\ldots,x_n).$$

Wegens stelling 1.6 is $K_E(.,.)$ een o.w. van X_q naar $(X, \mathcal{A}^E)$, dus voor vaste x een kans op $\mathcal{A}^E$. Als $E \subset F \subset T$ en F eindig, dan is $K_E(x,.)$ de beperking van $K_F(x,.)$ tot $\mathcal{A}^E$. (Opmerking na stelling 1.6.)
Er bestaat dus een kansmaat $K(x,.)$ op $\mathcal{A}^T$ zó dat $K_E(x,.)$ de beperking is van $K(x,.)$ tot $\mathcal{A}^E$ voor iedere eindige $E \subset T$ (stelling 2.5).

Om aan te tonen dat K een o.w. is van X_q naar $(X, \mathcal{A}^T)$ is het voldoende te bewijzen dat $K(.,A)$ meetbaar is op $\mathcal{A}_q$ voor iedere A uit de algebra $\mathcal{A} = \bigcup \{\mathcal{A}^E \mid E \subset T \ \&\ E \text{ eindig}\}$ die $\mathcal{A}^T$ voortbrengt. (Opmerking na def. 1.4.) Zij dus $A \in \mathcal{A}$. Er is een eindige $E \subset T$ zó dat $A \in \mathcal{A}^E$. Nu is $K(.,A) = K_E(.,A)$ meetbaar op $\mathcal{A}_q$.

§3. Voorwaardelijke verwachtingen

Stelling 3.1: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte. Zij $\mathcal{A}_0$ een deel σ-algebra van $\mathcal{A}$ en P_0 de beperking van P tot $\mathcal{A}_0$. Zij $\underline{x}$ een stochast met eindige verwachting. Dan bestaat er een stochast $\underline{x}_0$ zó dat:

1) $\underline{x}_0$ is meetbaar op $\mathcal{A}_0$
2) $\mathcal{E}\, \underline{x}_0 y = \mathcal{E}\, \underline{xy}$ voor iedere $y \in B(\mathcal{A}_0)$.

$\underline{x}_0$ is tot op een P_0-nulfunctie bepaald.

Bewijs: Definiëer de eindige reële maat μ door $d\mu = x dP$. Zij μ_0 de beperking van μ tot $\mathcal{A}_0$. Er geldt $\mu_0 \ll P_0$ (dwz $P_0 A = 0 \Longrightarrow \mu_0 A = 0$), immers: $P_0 A = 0 \Longrightarrow PA = 0 \Longrightarrow \mu A = \int_A x dP = 0 \Longrightarrow \mu_0 A = 0$.
Wegens de stelling van Radon-Nikodym (Maattheorie) bestaat er een $\mathcal{A}_0$-meetbare functie x_0, zó dat $d\mu_0 = x_0 dP_0$. Is $y \in B(\mathcal{A}_0)$, dan
$\mathcal{E}\, \underline{x}_0 \cdot \underline{y} = \int y x_0 dP = \int y x_0 dP_0 = \int y d\mu_0 = \int y d\mu = \int y x dP = \mathcal{E}\, \underline{xy}$.
Als ook $\underline{x}_1$ voldoet aan 1) en 2), dan
$\mathcal{E}\, (\underline{x}_1 - \underline{x}_0)\underline{y} = \mathcal{E}\, (\underline{x} - \underline{x})\underline{y} = 0$ voor iedere $y \in B(\mathcal{A}_0)$, dwz $P\{\underline{x}_1 = \underline{x}_0\} = 1$.

Definitie 3.1: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en $\mathcal{A}_0$ een deel σ-algebra van $\mathcal{A}$. Laten $\underline{x}$ en $\underline{x}_0$ stochasten zijn gedefiniëerd op $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\underline{x}_0$ is een voorwaardelijke verwachting van $\underline{x}$ t.o.v. $\mathcal{A}_0$ als geldt:

1) $\underline{x}_0$ is meetbaar op $\mathcal{A}_0$
2) $\mathcal{E}\, \underline{x}_0 y = \mathcal{E}\, \underline{xy}$ voor iedere $y \in B(\mathcal{A}_0)$.

Notatie: $\mathcal{E}(\underline{x} \mid \mathcal{A}_0)$ of $\mathcal{E}_0 \underline{x}$ is de verzameling van voorwaardelijke verwachtingen van $\underline{x}$ t.o.v. $\mathcal{A}_0$. We schrijven $\underline{x}_0 \in \mathcal{E}(\underline{x} \mid \mathcal{A}_0)$ of $\underline{x}_0 \in \mathcal{E}(\underline{x} \mid f)$ als de σ-algebra $\mathcal{A}_0$ geïnduceerd wordt door een meetbare afbeelding $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$.

Definitie 3.2: Zij $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ een kansruimte en laten $\mathfrak{A}_0$ en $\mathfrak{A}_1$ deel σ-algebras zijn van $\mathfrak{A}$. Een voorwaardelijke kans op $\mathfrak{A}_1$ t.o.v. $\mathfrak{A}_0$ is een o.w. K van $(\Omega,\mathfrak{A}_0)$ naar $(\Omega,\mathfrak{A}_1)$ zó dat:

$$K(\cdot,A) \in (\underline{X}_A \mid \mathfrak{A}_0) \text{ voor iedere } A \in \mathfrak{A}_1.$$

Notatie en opmerking: $P(\cdot \mid \mathfrak{A}_0)$ is de verzameling van voorwaardelijke kansen op $\mathfrak{A}_1$ t.o.v. $\mathfrak{A}_0$. We schrijven $K(\cdot,A) \in P(A \mid \mathfrak{A}_0)$ of $K(\cdot,A) \in P(A \mid f)$ als $f: (\Omega,\mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ de σ-algebra $\mathfrak{A}_0$ op Ω induceert. $P(\cdot \mid \mathfrak{A}_0)$ kan leeg zijn. Loève geeft een voorbeeld aan het eind van §27 in de 3e uitgave van Probability Theory (1963). (Foutief?).
Gewoonlijk wordt met één keus uit de klasse $P(\cdot \mid \mathfrak{A}_0)$ gewerkt en kan alke andere keus (consequent) zonder essentiële wijziging gebruikt worden.

Definitie 3.3: Zij $T \subset \mathbb{R}$. Een stochastisch proces $\underline{x}_t$, $t \in T$ is een Markov proces als:

1) voor elk paar $(s,t) \in T^2$ met $s < t$ bestaat er een voorwaardelijke kans op $\underline{x}_t$ t.o.v. $\underline{x}_s$;

2) voor $t_1 < \ldots < t_n < t$ met $t_1, \ldots, t_n, t \in T$ geldt:

$$P(\{\underline{x}_t \in \cdot\} \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}) \supset P(\{\underline{x}_t \in \cdot\} \mid \underline{x}_{t_n}).$$

Opmerking: Het inclusieteken ontstaat doordat het verschil van twee o.w. uit de linkerklasse voor iedere verzameling uit de σ-algebra voortgebracht door $\underline{x}_t$ een nulfunctie is die meetbaar is t.o.v. de σ-algebra voortgebracht door de stochasten $\underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}$, terwijl in het rechterlid dit verschil meetbaar moet zijn t.o.v. de kleinere σ-algebra voortgebracht door de stochast $\underline{x}_n$.
Uit 2) volgt:

$$\in(\gamma(\underline{x}_t) \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}) \supset \in(\gamma(\underline{x}_t) \mid \underline{x}_{t_n})$$

voor iedere begrensde meetbare functie γ.

Stelling 3.2: Zij $T \subset \mathbb{R}$ met minimaal element q. Laten $\underline{x}_t$, $t \in T$, en $\underline{y}_t$, $t \in T$, Markovprocessen zijn met dezelfde toestandsruimte $(X, \mathcal{B})$, waarvoor geldt:

1) $P\{\underline{x}_q \in B\} = P\{\underline{y}_q \in B\}$ voor iedere $B \in \mathcal{B}$;
2) $P(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_s) = P\{\underline{y}_t \in B\} \mid \underline{y}_s)$

voor alle paren $(s,t) \in T^2$ met $s < t$ en alle $B \in \mathcal{B}$.

Dan geldt:

$\ast$ $P\{\underline{x}_{t_1} \in B_1, \ldots, \underline{x}_{t_n} \in B_n\} = P\{\underline{y}_{t_1} \in B_1, \ldots, \underline{y}_{t_n} \in B_n\}$ voor alle n, $t_1, \ldots, t_n \in T$ en $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$.

Bewijs: Inductie naar n:

$$\begin{aligned} n = 1: P\{\underline{x}_t \in B\} &= \mathcal{E}\chi_B(\underline{x}_t) \\ &= \mathcal{E}(\underline{\mathcal{E}}(\chi_B(\underline{x}_t) \mid \underline{x}_q)) \\ &= \mathcal{E}(\underline{P}(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_q)) \\ &= \mathcal{E}(\underline{P}(\{\underline{y}_t \in B\} \mid \underline{y}_q)) \\ &= P\{\underline{y}_t \in B\}. \end{aligned}$$

De verwachting is onafhankelijk van de keuze van de o.w. uit de klasse $P(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_q)$.

We merken op dat $\ast$) gelijkwaardig is met:

($\ast\ast$) $\quad \gamma(\underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}) = \gamma(\underline{y}_{t_1}, \ldots, \underline{y}_{t_n})$ voor iedere begrensde meetbare reële functie γ op de productruimte $\prod_{k=1}^{n} (X, \mathcal{B})$.

Stel dat de bewering $\ast$ geldt voor vaste k voor alle $t_1, \ldots, t_k \in T$ en $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$.

Zij $t_1 < \ldots < t_{k+1}$, dan:

$P\{\underline{x}_{t_1} \in B_1, \ldots \underline{x}_{t_{k+1}} \in B_{k+1}\} =$

$$= \mathcal{E}\, \chi_{B_1}(\underline{x}_{t_1}) \ldots \chi_{B_{k+1}}(\underline{x}_{t_{k+1}})$$

$$= \mathcal{E}\, \chi_{B_1}(\underline{x}_{t_1}) \ldots \chi_{B_k}(\underline{x}_{t_k})\, \underline{\mathcal{E}}\, (\chi_{B_{k+1}}(\underline{x}_{t_{k+1}}) \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n})$$

$$\overset{(1)}{=} \mathcal{E}\, \chi_{B_1}(\underline{x}_{t_1}) \ldots \chi_{B_k}(\underline{x}_{t_k})\, \underline{\mathcal{E}}\, (\chi_{B_{k+1}}(\underline{x}_{t_{k+1}}) \mid \underline{x}_{t_n})$$

$$\overset{(2)}{=} \mathcal{E}\, \gamma(\underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_k})$$

$$\overset{(**)}{=} \mathcal{E}\, \gamma(\underline{y}_{t_1}, \ldots, \underline{y}_{t_k})$$

$$= P\{\underline{y}_{t_1} \in B_1, \ldots, \underline{y}_{t_{k+1}} \in B_{k+1}\}$$

(1) Markov eigenschap

(2) $\mathcal{E}(\chi_{B_{k+1}}(\underline{x}_{t_{k+1}}) \mid \underline{x}_{t_k})$ bevat een begrensde meetbare functie van $\underline{x}_{t_k}$.

<u>Stelling 3.3</u>: Zij $T \subset \mathbb{R}$ met minimaal element q. Zij voorts gegeven:

1) X_t, een Borelverzameling van $\mathbb{R}$ en $\mathcal{A}_t$, de σ-algebra der Borelverzamelingen van X_t (voor iedere $t \in T$);

2) een o.w. K_{st} van X_s naar X_t (voor ieder paar $(s,t) \in T^2$ met $s < t$) zó dat voor $r < s < t$ geldt:

$$K_{rs} K_{st} = K_{rt};$$

3) een kansmaat Q op $\mathcal{A}_q$.

Er bestaat dan een Markovproces $\underline{x}_t$, $t \in T$, zó dat

a) $P\{\underline{x}_q \in B\} = QB$ voor alle $B \in \mathcal{A}_q$

b) $P(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_s) \ni K_{st}(\underline{x}_s, B)$ als $B \in \mathcal{A}_t$.

Bewijs: Volgens stelling 2.6 bestaat er een o.w. K van $(X_q, \mathcal{A}_q)$ naar $(X, \mathcal{A}^T)$. Definieer nu P door

$$PA = \int K(x,A)\, dQ(x) \quad A \in \mathcal{A}^T.$$

P is een kans op $\mathcal{A}^T$.
Zij $x_t = \pi_t$ (projectie op de t^e coordinaat).
Voor iedere $B \in \mathcal{A}_q$ is $\{\underline{x}_q \in B\} \in \mathcal{A}^q$, dus

$$K(x, \{\underline{x}_q \in B\}) = \int K_{qt}(x, dx_t)\, \chi_B(x) = \chi_B(x)$$

en

$$P\{\underline{x}_q \in B\} = \int \chi_B(x)\, dQ(x) = QB.$$

We hoeven nog slechts te bewijzen dat $\underline{x}_t$, $t \in T$, een Markovproces is dat aan b) voldoet. Hiervoor is het voldoende te laten zien dat

$$(*) \quad K_{t_n t}(\underline{x}_{t_n}, B) \in \mathcal{E}(\chi_{\{\underline{x}_t \in B\}} \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n})$$

voor alle n, $t_1 < \ldots < t_n < t \in T$ en $B \in \mathcal{A}_t$.

(Immers voor een Markovproces moeten we aantonen dat er een voorwaardelijke kans bestaat, hier $K_{t_n t}$, die ligt in
$P(\{\underline{x}_t \in \cdot\} \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}) \subset \mathcal{E}(\chi_{\{\underline{x}_t \in \cdot\}} \mid \underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n})$,

per definitie van voorwaardelijke kans.)
Zij dus $t_1 < \ldots < t_n < t \in T$ en $\gamma_i \in B(\mathcal{A}_{t_1})$, $i = 1, \ldots, n$.

Er geldt:

$$\mathcal{E}\gamma(\underline{x}_{t_1}) \ldots \gamma_n(\underline{x}_{t_n}) \cdot K_{t_n t}(\underline{x}_{t_n}, B) =$$

$$= \int K^*(\gamma_1(\underline{x}_{t_1}) \ldots \gamma_n(\underline{x}_{t_n}) \cdot K_{t_n t}(\underline{x}_{t_n}, B))\, dQ$$

$$\overset{(1)}{=} \int K^*_{qt_1}(\gamma_1 \cdot K^*_{t_1 t_2}(\gamma_2 \cdot \ldots K^*_{t_{n-1} t_n}(\gamma_n \cdot K^*_{t_n t}\chi_B) \ldots))\, dQ$$

$$\overset{(1)}{=} \int K^{*}(\gamma_1(\underline{x}_{t_1}) \cdots \gamma_n(\underline{x}_{t_n})\, \chi_B(\underline{x}_t))dQ$$

$$= \mathcal{E}\, \gamma_1(\underline{x}_{t_1}) \cdots \gamma_n(\underline{x}_{t_n})\, \chi_B(\underline{x}_t).$$

Per definitie van voorwaardelijke verwachting is dus $K_{t_n t}(\underline{x}_{t_n},B)$ een voorwaardelijke verwachting van $\chi_B(\underline{x}_t)$ op de σ-algebra voortgebracht $\underline{x}_{t_1}, \ldots, \underline{x}_{t_n}$, wat te bewijzen was.

§ 4. Stationaire Markov-processen

In het vervolg is X een lokaal compacte Hausdorffruimte met aftelbare basis. Voorbeelden zijn:

a) X is een eindige of aftelbare verzameling met de discrete topologie (iedere deelverzameling van X is open);
b) X = $\mathbb{R}$, algemener X = $\mathbb{R}^n$ (met de gebruikelijke definitie van open verzamelingen;
c) X is de Hilbertbalk = topologisch product van aftelbaar veel gesloten intervallen $[0,1]$;
d) X is een open, een gesloten, of de doorsnede van een open en een gesloten deelverzameling van een van de ruimten uit a), b) of c).

$C_0(X)$ is de lineaire ruimte van alle continue functies $f\colon X \to \mathbb{R}$ met de eigenschap:

$\{x \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ is compact voor iedere $\varepsilon > 0$.

Met de sup-norm, $||f||: = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$, is C(X) een Banachruimte.

$\mathcal{B}$ is de σ-algebra der Baireverzamelingen van X, d.w.z. $\mathcal{B}$ is de kleinste σ-algebra op X zó dat iedere continue reële functie op X meetbaar is. $\mathcal{B}$ is ook te beschrijven als de kleinste σ-algebra op X die de open verzamelingen bevat.

We zullen Markov-processen beschouwen met toestandsruimte X.

De klasse der locaalcompacte Hausdorffruimten met aftelbare basis omvat niet alleen alle in de praktijk voorkomende toestandsruimten; voor deze ruimten geldt ook de stelling over maatuitbreiding in §2. (X is homeomorf met een volledige separabele metrische ruimte en $(X, \mathcal{B})$ is dus als meetbare ruimte niet te onderscheiden van een (geschikte) meetbare deelverzameling van $[0,1]$). Voorts geldt de

<u>Stelling van Riesz:</u> Bij iedere continue lineaire positieve functionaal L op $C_0(X)$ bestaat er een unieke eindige maat μ op $\mathcal{B}$ zó dat geldt:

$$Lf = \int f d\mu \qquad\qquad f \in C_0(x)$$

Omgekeerd is voor iedere eindige maat μ de afbeelding $f \to \int f d\mu$ een continue lineaire functionaal op $C_0(X)$.

Bewijs: De omkering is triviaal. Zij nu $\mathcal{C}$ de halfring op X x $(0,\infty)$ van verschillen van ordinaatverzamelingen van positieve trapfuncties op $(X,\mathcal{B})$ en $\mathcal{C}^1$ de halfring van verschillen van ordinaatverzamelingen Tf van positieve functies $f \in C_0(X)$. De halfringen $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}^1$ brengen dezelfde σ-algebra $\mathcal{U}$ voort. De functionaal L op $C_0(x)$ induceert een unieke maat $\bar{\mu}$ op $\mathcal{C}^1$ (en dus op $\mathcal{U}$) zó dat

$$\bar{\mu}(Tf \setminus Tg) = L(f-g) \text{ als } 0 \leq g \leq f \in C_0(X)$$

(Zie maattheorie I, § ; de σ-additiviteit van $\bar{\mu}$ volgt uit de stelling van Dini). De restrictie van $\bar{\mu}$ tot ordinaatverzamelingen van karakteristieke functies levert de gewenste maat μ op $(X,\mathcal{B})$.

Gevolg: Als λ en μ eindige maten zijn op $\mathcal{B}$ en $\int f d\lambda = \int f d\mu$ voor iedere $f \in C(X)$, dan $\lambda = \mu$

Een o.w. van $(X,\mathcal{B})$ naar $(X,\mathcal{B})$ is voor vaste x een maat op $\mathcal{B}$; als Q en Q^1 o.w. zijn op $(X,\mathcal{B})$ en $Qf=Q^1f$ voor iedere $f \in C_0(X)$, dan $Q = Q^1$.

Definitie 4.1: Een continue halfgroep o.w. op X is een familie o.w. $(Q^t)_{t \geq o}$ van $(X,\mathcal{B})$ naar $(X,\mathcal{B})$ met de eigenschappen:

1) $Q^tQ^s = Q^{t+s}$ voor iedere $s,t \geq o$

2) $\lim\limits_{t \downarrow o} Q^tf = f$ voor iedere $f \in B(\mathcal{B})$.

Opmerkingen: We vatten de o.w. Q^t in 2) op als operator op $B(\mathcal{B})$. In §2 en §3 werd dit als Q^{t*} genoteerd. Ter vereenvoudiging van de notatie laten we het $*$ vallen.

Is K een o.w. op $(X,\mathcal{B})$, dan zijn ook K^2, K^3, ...o.w. en de familie o.w. $(K^n)_{n=0,1,2,\ldots}$ vormen een halfgroep, immers $K^nK^m = K^{n+m}$ voor alle $n,m \geq o$. We interesseren ons slechts voor stelsels Q^t die gedefinieerd zijn voor alle reële $t \geq o$.

Is μ een kansmaat op $(X,\mathcal{B})$, dan is $Q(x,B) := \mu B$ een o.w. op $(X,\mathcal{B})$. Zij $Q^t(x,B) = Q(x,B)$ voor alle $t \geq o$. Nu is $Qf = \int f d\mu$, dus $QQf = Qf$ voor iedere $f \in B(\mathcal{B})$. Het stelsel $(Q^t)_{t \geq o}$ vormt wel een halfgroep maar is niet continu.

Uit 1) en 2) volgt dat Q^0 de identiteit is. Immers:

$$Q^0f = \lim_{t \downarrow o} Q^t(Q^0f) = \lim_{t \downarrow o} (Q^tQ^0)f = \lim_{t \downarrow o} Q^tf = f$$

voor iedere $f \in B(\mathcal{B})$.

Uit de theorie van de vorige paragraaf volgt dat er bij iedere continue halfgroep o.w. $(Q^t)_{t\geq o}$ op X en iedere kansmaat μ op $\mathcal{B}$ een Markovproces $\underline{x}_t$, $t\geq t_o$, te vinden is, met toestandsruimte $(X, \mathcal{B})$ zó dat

1) $P\{\underline{x}_{t_o} \in B\} = \mu B \qquad B \in \mathcal{B}$

2) $Q^t(x_s(.),B) \in P(\{\underline{x}_{s+t} \in B\}|\underline{x}_s)$ voor alle

$s\geq o, t\geq o$ en $B \in \mathcal{B}$.

Opmerking: In 2)staat links een o.w. van Ω (de kansruimte waarop het proces $\underline{x}_t$ gedefinieerd wordt) naar $\mathcal{B}$, rechts een verzameling van dergelijke o.w.

Definitie 4.2 Een Markovproces $\underline{x}_t$, $t\geq t_o$, met toestandsruimte $(Y, \mathcal{A})$ is stationair als er van iedere $t>o$ een o.w. Q^t op $(Y, \mathcal{A})$ bestaat zó dat

$$Q^t\ (x_s(.),\ A) \in P(\{\underline{x}_{s+t} \in A\}|\underline{x}_s) \text{ voor alle}$$

$s\geq t_o$, $A \in \mathcal{A}$.

Voorbeeld: $\underline{x}_t$, $t\geq o$, zijn o.o. gelijkverdeelde stochasten. $Q^t(x,A) = P\{\underline{x}_o \in A\}$.

§ 5. Stationaire Markovprocessen met eindige toestandsruimte.

Ter illustratie van de theorie van continue halfgroepen van o.w. op locaalcompacte Hausdorffruimten met aftelbare basis behandelen we eerst het geval dat de ruimte slechts eindig veel punten bevat:

$$X = \{1, \ldots, n\}.$$

Definitie 5.1: Zij I een verzameling. Een matrix $(P_{ij})_{i,j \in I}$ is een Markovmatrix als:

$$P_{ij} \geq 0 \quad \text{voor alle } i,j \in I$$

$$\sum_{j \in I} P_{ij} = 1 \quad \text{voor alle } i \in I.$$

Een o.w. P op X kan voorgesteld worden door een Markovmatrix $(P_{ij})_{i,j \in X}$ als we definieren:

$$P(i,B) := \sum_{j \in B} P_{ij} \quad \text{voor } i \in X,\ B \subset X.$$

Omgekeerd levert iedere Markovmatrix (P_{ij}) een o.w. op X.

Laat P een O.W. zijn op X met matrix (P_{ij}) en $\phi \in B(\mathcal{B})$, d.w.z. ϕ is een vector $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$. Dan $(P\phi)(i) = \sum_{j \in X} P_{ij}\,\phi_j$. Is ook Q een o.w. op X met matrix (q_{ij}), dan $(QP\phi)(k) = \sum_{i \in X} q_{ki}(P\phi)(i) =$

$= \sum_{j \in M} \sum_{i \in X} q_{ki}\,P_{ij}\,\phi_j$. QP heeft dus de matrix $\left(\sum_{i \in X} q_{ki}\,P_{ij}\right)$, m.a.w. samenstellen van o.w. komt overeen met matrixvermenigvuldiging.

Laat $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, een stationair Markovproces zijn met toestandsruimte $X = \{1, \ldots, n\}$. Iedere realisatie van het proces is dus een afbeelding: $[0,\infty) \longrightarrow X$. Neem nu aan dat er op elk eindig interval $[0,t]$ bijna zeker slechts eindig veel sprongpunten voorkomen. We veronderstellen dat de halfgroep P^t continu is, d.w.z.:

$$P_{ij}^{\,t} = P_{ij}^{(t)} = \delta_{ij} + O(1) \quad \text{als } t \downarrow 0.$$

Als $i \neq j$, dan geldt:

$$P_{ij}(t+s) = P_{ii}(t)\,P_{ij}(s) + P_{ij}(t)\,P_{jj}(s) + \sum_{k \neq i,j} P_{ik}(t)\,P_{kj}(s)$$

$$= P_{ij}(s) + P_{ij}(t) + \sum_k (P_{ik}(t) - \delta_{ik})(P_{kj}{}^{(s)} - \delta_{kj})$$

$$= P_{ij}(s) + P_{ij}(t) + [o(1)]^2 \qquad t \to 0$$

We mogen dan verwachten dat

$$P_{ij}(t) = t.a_{ij} + o(t) \quad \text{voor } t \downarrow 0 \text{ en } i \neq j$$

en

$$P_{ii}(t) = 1 + t\, a_{ii} + o(t) \text{ voor } t \downarrow 0.$$

In matrixnotatie levert dit:

$$P^t - I = t.A + o(t) \qquad t \downarrow 0$$

ofwel A is de afgeleide van P^t in $t = 0$. We zullen het verband tussen A en P^t nu nader onderzoeken.

<u>Lemma 5.1</u>: Zij $\phi: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continu en zó dat $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ voor iedere $x, y > 0$, dan is ϕ linear.

<u>Bewijs:</u> $\phi(\frac{m}{n}) + \ldots + \phi(\frac{m}{n}) = n\,\phi(\frac{m}{n}) = \phi(m) = m\,\phi(1)$, dus $\phi(q) = q.\phi(1)$ voor rationale q 0. Wegens continuiteit is dan $\phi(\lambda) = \lambda.\phi(1)$ voor reële $\lambda > 0$.

<u>Gevolg</u>: Zij $\phi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continu en zó dat $\phi(s+t) = \phi(s) + \phi(t)$ voor alle s en $t > 0$, dan is ϕ lineair.

<u>Bewijs:</u> Voor iedere lineaire functionaal ξ op $\mathbb{R}^n$ geldt $\xi 4$ is lineair.

<u>Stelling 5.1</u>: Er bestaat een norm $\|\ \ \|$ op $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, de verzameling der lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, zó dat $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ met deze norm een Banachalgebra is, d.w.z.:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|\lambda A\| = |\lambda|\ \|A\|$$
$$\|A\| = 0 \longleftrightarrow A = 0$$

$$\|A\,B\| \leq \|A\| \,.\, \|B\|$$

$$\|I\| = 1.$$

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is volledig in deze norm.

Bewijs: Zie Inleiding Lineaire Analyse.

Lemma 5.2: Is $F(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n y^m$ absoluut convergent op het gebied $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, en geldt bovendien dat $F(x,y) = 0$ op $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, dan $a_{nm} = 0$ voor alle n,m.

Bewijs: Voor vaste x met $|x| < \varepsilon$ is F een machtreeks in y die convergent voor $|y| < \varepsilon$, en hier identiek nul is. Dus de coefficient $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n$ van y^m is nul voor iedere m. Dit geldt voor alle $|x| < \varepsilon$, dus de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n$ $(m = 1,2,\ldots)$ zijn identiek nul, waaruit weer volgt dat alle coefficienten nul zijn.

Lemma 5.3: Zij $A_m \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Als $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$ convergeert, dan ook $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$.

Bewijs: $\|\sum_{m=1}^{n_1} A_m - \sum_{m=1}^{n_2} A_m\| = \|\sum_{m=n_1+1}^{n_2} A_m\| \leq \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \|A_m\| \leq \varepsilon$

als $n_2 \geq n_2 \geq n(\varepsilon)$ daar $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$ convergeert. Dus de rij der partieelsommen $\sum_{m=1}^{n} A_m$ is een fundamentaalrij.

Daar $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ met de norm $\| \quad \|$ volledig is, bestaat de limiet.

Lemma 5.4: Als $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeert voor $|z| < R$, dan convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ voor $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ met $\|A\| < R$ en de limiet $f(A)$ is daar continu.

Bewijs: Zij $A \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $\|A\| < R$. Dan geldt $\|A^n\| \leq \|A\|^n < R^n$, dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ convergeert.

Continuiteit: $(A + H)^n - A^n = HA..A+AHA..A+ \ldots + H^n$ (2^n-1 termen), dus

$\|(A+H)^n - A^n\| \leq (\|A\| + \|H\|)^n - \|A\|^n \leq n \|H\| (\|A\| + \|H\|)^{n-1}$.

Kies nu bij A een H zó dat $||H|| + ||A|| < R$, dan

$$||f(A+H) - f(A)|| \leq ||H|| \sum_{n=1}^{\infty} n\ |a_n|\ (\ ||A|| + ||H||\ )^{n-1} \to 0 \text{ als } H \to 0$$

We definiëren $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ $\qquad (A^o = I)$.

De machtreeks convergeert voor iedere $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en is overal continu.

Er geldt:

a) Halfgroep eigenschap: $e^{A+B} = e^A.e^B$ als $AB = BA$.

Beschouw de machtreeksen $e^{x+y} = \sum a_n(x+y)^n = \sum a_{nm}\ x^n\ y^m$ en

$e^x.e^y = (\sum a_n\ x^n)(\sum a_n\ y^n) = \sum b_{nm}\ x^n\ y^m$. Deze convergeren absoluut, dus

$a_{nm} = b_{nm}$ voor alle n,m. Dan geldt ook

$$e^{A+B} = \sum a_{nm}\ A^n\ B^m = \sum b_{nm}\ A^n\ B^m = (e^A)(e^B).$$

In het bizonder geldt:

$$e^{A+\lambda I} = e^{\lambda}.e^A \qquad \text{voor } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$e^{A(t+s)} = e^{At}.e^{As} \qquad \text{voor } t,s \in \mathbb{R}$$

b) Positiviteit: Als $(A)_{ij} \geq 0$ voor alle i en j dan $(e^A)_{ij} \geq 0$ voor alle i en j.

Immers $(A^n)_{ij} \geq 0$ voor alle i en j en n = 0, 1, 2, ...

Hieruit volgt:

$$(e^{A-\lambda I})_{ij} = e^{-\lambda}(e^A)_{ij} \geq 0 \quad \text{voor alle } i,j.$$

$$(e^{t(A-\lambda I)})_{ij} = e^{-\lambda t}(e^{tA})_{ij} \geq 0 \text{ voor alle } i,j;t \geq 0$$

c) Normering: Zij $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Als $Au = 0$, dan $(e^{At})u = u$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$ want het geldt voor de partieelsommen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}\ u$

d) Differentieerbaarheid: Uit de definitie van e^A volgt:

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{At}-I}{t} = A$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{e^{At}-e^{At_0}}{t-t_0} = e^{At_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah}-I}{h} = A\ e^{At_0}\quad .$$

Stelling 5.2:

Zij A een matrix zó dat

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \text{als } i \neq j$$

$$\sum_j a_{ij} = 0 \qquad \text{voor iedere } i$$

en zij $Q^t = e^{At}$ voor $t \geq 0$. Dan is Q^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep o.w. op X. Voorts geldt $q_{ij}(t) = \delta_{ij} + t.a_{ij} + 0(t)$ voor $t \to 0$.

Bewijs: Volgt uit de eigenschappen a), b), c), d) van de exponentiaalfunctie e^{At}.

We laten nu zien dat ook de omkering geldt.

Definieer $\log(1-B) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n}{n}$ voor $||B|| < 1$.

De functie $\log(1-B)$ is continu voor $||B|| < 1$.
$\log(AB) = \log A + \log B$ als $AB = BA$ en als A,B en AB in de buurt van I liggen. Immers zij $S = I-A$ en $T = I-B$. Dan $\log AB = \log(I-(S+T-ST)) =$

$= - \sum \frac{(S+T-ST)^n}{n}$ en $\sum \frac{(\,||S|| + ||T|| + ||ST||\,)^n}{n}$ convergeert absoluut

als $||S||$ en $||T|| < \frac{1}{3}$, dus

$$\sum \frac{(S+T-ST)^n}{n} = \sum a_{nm} S^n T^m = \sum \frac{S^n}{n} + \sum \frac{T^m}{m} .$$

Analoog geldt $e^{\log B} = B$ als $||1-B|| < 1$. Immers

$$e^{\log B} = \sum \frac{(\log B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(I-B)^m}{m}\Big)^n \quad \text{en}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{||1-B||^m}{m}\Big)^n \quad \text{convergeert absoluut.}$$

Zij Q^t een continue halfgroep o.w. op X. Dan geldt $\lim_{t \downarrow 0} Q^t = I$, dus $I - Q^t \longrightarrow 0$ als $t \downarrow 0$ en $\log(I-(I-Q^t)) = \log Q^t$ bestaat voor $t \in [0,\delta]$ voor zekere $\delta > 0$. Zij $A(t) = \log Q^t$.

(*) $A(t) + A(s) = A(t+s)$ als t,s en $t+s \in [0,\delta]$.

en $A(t)$ is continu in $t \in [0,\delta]$. Definieer nu

$A(x) = n\,A(\delta) + A(t)$ als $x = n\delta + t$ met $t \in [0,\delta)$. (*)

geldt nu voor $t > 0$ en $s > 0$. Wegens lemma 5.1 is $A(t)$ lineair in t, dus $A(t) = A.t = \log Q^t$. Dus $Q^t = e^{At}$.

Er geldt $\lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{Q^t - I}{t} = A$, dus $a_{ij} \geq 0$ als $i \neq j$ en $\sum a_{ij} = 0$,

daar $0 \leqq q_{ij}(t)$ en $\sum\limits_j q_{ij}(t) - \delta_{ij} = 0$. Hiermee is bewezen:

<u>Stelling 5.3</u>: Zij Q^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep o.w. op $X = \{1, \ldots, n\}$. Er bestaat een matrix A met de eigenschappen:

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \text{als } i \neq j \text{ en } i,j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_j a_{ij} = 0 \qquad \text{voor iedere } i$$

en zó dat $Q^t = e^{At}$ voor $t \geq 0$.

Uit stelling 5.2 en stelling 5.3 blijkt dat er voor eindige toestandsruimten X een een-eenduidig verband bestaat tussen de continue halfgroepen o.w. op $X = \{1, \ldots, n\}$ en een deelverzameling van $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Zodra we buiten het kader van een eindige toestandsruimte komen, wordt de situatie ingewikkelder.

In de eindigdimensionale ruimte $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is er maar een topologie zó dat optelling en scalaire vermenigvuldiging continu zijn. Voor niet-eindige X is op $L(B(\mathcal{B}), B(\mathcal{B}))$ een convergentiebegrip op verschillende manieren zinvol te definiëren. Het is nu mogelijk aan de halfgroep Q^t zulke sterke continuiteitseisen op te leggen (bv. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ zó dat $\|Q^t f - f\| < \varepsilon\ \|f\|$ voor alle $f \in B(\mathcal{B})$ als $t < \delta$) dat de stellingen voor eindige ruimten zonder wezenlijke veranderingen in het bewijs ook nu weer gelden. Het blijkt echter, dat we op deze manier een groot aantal interessante processen in de ban doen.

De limiet $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{Q^t f - f}{t}$ hoeft niet meer voor iedere f te bestaan.

In een zuiver geboorte proces geldt

$$P_{ii+1}(t) = t.\lambda_i + o(t) \quad t \downarrow 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$
$$P_{ii}(t) = 1-\lambda_i t + o(t) \quad t \downarrow 0$$
$$P_{ij}(t) = o(t) \quad t \downarrow 0 \quad \text{als } j \notin \{i, i+1\}.$$

$\lambda_i t$ is voor kleine t ongeveer gelijk aan de verwachting voor het aantal geboorten in het interval $(x, x+t)$ onder de veronderstelling dat de populatiegrote op tijdstip x juist i is. Het is natuurlijk te veronderstellen dat λ_i evenredig is aan i. Men kan bewijzen dat er een continue halfgroep o.w. $Q^t = P_{ij}(t)$ bestaat op $X = \{0,1,2, \ldots\}$ zó dat

$$P_{ii+1}(t) = it + o(t) \quad t \downarrow 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$
$$P_{ii}(t) = 1 - it + o(t) \quad t \downarrow 0$$
$$P_{ij}(t) = o(t) \quad t \downarrow 0 \text{ en } j \notin \{i, i+1\}.$$

Voor iedere i en j bestaat dus $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(t) - \delta_i}{t} = a_{ij}$ met

$a_{ii+1} = -a_{ii} = i$ en $a_{ij} = 0$ overigens. De matrix (a_{ij}) is niet be-begrensd en e^{At} is niet gedefinieerd.

In de algemene theorie wordt gebruik gemaakt van de operatoren $(s-A)^{-1} = R_s$ $(s > 0)$. R_s blijkt de Laplacegetransformeerde te zijn van de halfgroep Q^t en is voor iedere $s > 0$ een positieve begrensde lineaire operator. De operatie $\frac{"d"}{dt}$ of "log" waarmee we A uit Q^t bepalen wordt zo door de eenvoudiger operatie "inverteren" vervangen.

<u>Stelling 5.4:</u> Zij $Q^t = e^{At}$, $t \geq 0$, een continue halfgroep o.w. op $X = \{1, \ldots, n\}$. Zij $R_s = \int_0^\infty Q^t e^{-st} dt =$ voor $s > 0$.

Er geldt $(s-A)R_s = I$ voor iedere $s > 0$.

<u>Bewijs</u>: (We integreren en differentieren componentsgewijs).
Daar $\frac{d}{dt} Q^t = A\, Q^t$ vinden we met partiële integratie:

$$A\, R_s = \int_0^\infty A\, Q^t e^{-st} dt = Q^t e^{-st} \Big/_0^\infty + s \int_0^\infty Q^t e^{-st} dt = I + s\, R_s.$$

§ 6. Oneindigdeelbare verdelingen.

Definitie 6.1: Een stochast $\underline{x}$ met waarden in een abelse groep is oneindig deelbaar, o.d., als $\underline{x}$ voor ieder natuurlijk getal n te schrijven is als som van n o.o gelijkverdeelde stochasten.

Is $\underline{x}$ een reële stochast, met karakteristieke functie $f(u) = \mathcal{E}\, e^{i\underline{x}u}$, dan is uit de waarschijnlijkheidsrekening bekend:

1) $f(u) \neq 0$ voor iedere $u \in \mathbb{R}$,

2) f^t is een karakteristieke functie voor iedere $t \geq 0$.

Beschouw nu het stochastisch proces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, dat gegeven wordt door de volgende eisen op te leggen aan de eindigdimensionale verdelingen:

1) $\underline{x}_t$ heeft de karakteristieke functie $\mathcal{E}\, e^{iu\underline{x}_t} = f^t(u)$

2) voor ieder natuurlijk getal n en $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ geldt:

a) $\underline{x}_{t}, \underline{x}_{t_2} - \underline{x}_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n} - \underline{x}_{t_{n-1}}$ zijn 0.0

b) $\underline{x}_t - \underline{x}_s$ heeft de verdeling van $\underline{x}_{t-s}$ voor $0 \leq s < t$.

Laat de locaalcompacte Hausdorffruimte met aftelbare basis, X, de algebraïsche structuur hebben van een abelse groep, zódat de operaties "optellen" en "het nemen van de tegengestelde" continu zijn. Is $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, een stochastisch proces met waarden in X zódat voldaan is aan 2a) en 2b) boven, dan is $\underline{x}_t$ voor iedere $t \geq 0$ een o.d. stochast.
Immers, neem $t_i = \frac{i}{n} t$ voor $i = 1, \dots, n$. Dan is $\underline{x}_t$ de som van de n o.o stochasten $\underline{x}_{t_{i+1}} - \underline{x}_{t_i}$ elk met de verdeling van $\underline{x}_{t_{i+1}-t_i} = \underline{x}_{t_1}$. Daar X een loxaalcompacte Hausdorffruimte met aftelbare basis is, volgt uit § 2 dat er een kansruimte bestaat waarop dit proces gedefinieerd kan worden.

Definitie 6.2: Zij X een abelse groep. Een o.w. Q op X is homogeen als er een kansmaat μ op X bestaat, zódat:

$$Q(x,x+B) = \mu B \qquad \text{voor } x \in X,\ B \in \mathcal{B} \quad .$$

We zullen nu aantonen dat er een - een - eenduidig verband bestaat tussen o.d. stochasten en halfgroepen van homogene o.w.

<u>Stelling 6.1</u>: Het proces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, zoals hierboven gedefinieerd is een stationair Markov proces, en de o.w. Q^t, $t \geq 0$, zijn homogeen. De maat μ_t behorend bij de o.w. Q^t is de kansverdeling van $\underline{x}_t$. Is Q^t, $t \geq 0$, een halfgroep homogene o.w., dan is voor iedere $t \geq 0$ de bijbehorende maat μ_t de kansverdeling van een o.d. stochast.

<u>Bewijs</u>: Beschouw het proces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$. Neem willekeurig $n \in \mathbb{N}$ en $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t$ en $B \in \mathcal{B}$:

$$P(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n}) =$$

$$= P(\{\underline{x}_{t_n} + (\underline{x}_t - \underline{x}_{t_n}) \in B\} \mid \underline{x}_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n})$$

$$= P(\{\underline{x}_{t_n} + (\underline{x}_t - \underline{x}_{t_n}) \in B\} \mid \underline{x}_{t_n}).$$

(Immers $\underline{x}_{t_n}$ hangt slechts af van $\underline{x}_{t_n}$ en $\underline{x}_t - \underline{x}_{t_n}$ is onafhankelijk van $x_{t_1}, \dots, \underline{x}_{t_n}$).

Uit de onafhankelijkheid van $\underline{x}_t - \underline{x}_{t_n}$ en $\underline{x}_{t_n}$ volgt:

$$\mu_{t-t_n}(B - x_{t_n}(\cdot)) \in P(\{\underline{x}_t \in B\} \mid \underline{x}_{t_n})$$

waarbij μ_{t-t_n} de kansmaat is op X behorende bij $\underline{x}_{t-t_n}$. De o.w. Q^t gedefinieerd door

$$Q^t(x,B) = \mu_t(B-x)$$

is homogeen en voldoet als o.w. voor het proces.

Is de halfgroep homogene o.w. Q^t, $t \geq 0$, gegeven, dan bestaat er een Markovproces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, met $\underline{x}_0 = 0$ b.z. waarvan dit de halfgroep o.w. is. Er geldt:

$$P\{\underline{x}_t \in B\} = P(\underline{x}_t \in B\} \mid \{\underline{x}_0 = 0\}) = Q^t(0,B) = \mu_t B.$$

$$P\{\underline{x}_t \in B,\ \underline{x}_{t+s} - \underline{x}_t \in A\} =$$

$$= \int_B (P\{\underline{x}_{t+s} \in A - \underline{x}_t\} \mid \underline{x}_t)\ dP\{\underline{x}_t\}$$

$$= \int_B Q^s(x,\ A-x)\ Q^t(0,dx)$$

$$= \int_B Q^s(0,A)\ Q^t(0,dx)$$

$$= Q^s(0,A)\ Q^t(0,B) = \mu_s A . \mu_t B$$

Opmerkingen:

1) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.d. en o.o, dan is ook $\underline{x} + \underline{y}$ o.d. Zij P^t, $t \geq 0$, de halfgroep o.w. behorende bij $\underline{x}_t$, $t \geq 0$ en Q^t, $t \geq 0$, die bij $\underline{y}_t$, $t \geq 0$. Dan is P^tQ^t, $t \geq 0$, de halfgroep behorende bij $\underline{x}_t + \underline{y}_t$, $t \geq 0$, immers

$$P\{\underline{x}_t + \underline{y}_t \in B\} = P\{\underline{y}_t \in B - \underline{x}_t\}$$

$$= \int Q^t(0,B-x)\ P^t(0,dx)$$

$$= \int Q^t(x,B)\ P^t(0,dx)$$

$$= (P^tQ^t)\ (0,B).$$

I.h.b. geldt: homogene o.w.'s commuteren, d.w.z. $P^tQ^s = Q^sP^t$ voor alle s, $t \geq 0$.

2) Als $\underline{x} = c$ b.z., dan is $\underline{x}$ o.d. De bijbehorende maat μ_t is geconcentreerd in het punt ct, $t \geq 0$, en de o.w. Q^t induceert een translatie op $B(\mathcal{B})$:

$$(Q^t\phi)(x) = \int \phi(y)\ Q^t(x,dy) = \phi(x+ct).$$

3) Zij $X = \mathbb{R}$ en zij $\phi_u(x) = e^{ixu}$. Is Q een homogene o.w. dan geldt:

$$(Q\phi_u)(x) = \int \phi_u(y)\ Q(x,dy)$$

$$= \int \phi_u(y+x)\ Q(0,dy)$$

$$= \phi_u(x) \int \phi_u(y)\ d\mu(y).$$

ϕ_u is een eigenfunctie van Q met eigenwaarde $\int e^{ixu}\, d\mu(x)$. Is Q^t, $t \geq 0$, een halfgroep homogene o.w. zó dat $Q^1 = Q$, dan geldt voor de karakteristieke functies $f_t(u) = \int e^{ixu}\, d\,\mu_t(x)$ de relatie:

$$f_t(u)\, f_s(u) = f_{t+s}(u)$$

daar links de eigenwaarde van $Q^t Q^s$ en rechts die van Q^{t+s} staat bij de eigenfunctie ϕ_u. Wegens continuiteit geldt dus

$$f_t(u) = f^t(u).$$

Definitie 6.3: Zij Q^t, $t \geq 0$, een willekeurige halfgroep o.w. De (infinitesimale) voortbrenger A is de operator gedefinieerd door

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{Q^t f - f}{t} \qquad \text{(uniforme limiet)}$$

voor die f waarvoor deze limiet bestaat, dom A is de verzameling der $f \in B(\mathcal{B})$ waarvoor de limiet bestaat.

Voorbeelden:

1) translatie, $c > 0$.

$\mu_t B = \chi_B(ct)$ $\qquad$ $f_t(u) = \mathcal{E}\, e^{iu\underline{x}_t} = e^{iutc}$

dom $A = \{f \mid f$ differentieerbaar van rechts en f' begrensd$\}$

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+ct) - f(x)}{t} = c\, f'(x).$$

2) Poissonverdeling op $\{0, c, 2c, \ldots\}$ met verwachting cm.

$\mu_t\{cn\} = e^{-mt} \frac{(mt)^n}{n!}$ $\qquad$ $f_t(u) = \mathcal{E} e^{iu\underline{x}_t} = e^{mt(e^{iuc}-1)}$

dom $A = B(\mathcal{B})$

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{Q^t f(x) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{-f(x) + e^{-mt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mt)^n}{n!}\, f(x+cn)}{t}$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left((e^{-mt}-1) f(x) + e^{-mt} mt\, f(x+c) + O(t^2)\right)$$

$$= m(f(x+c) - f(x))$$

3) Normale verdeling; $N(0, \sigma^2)$

$$\mu_t B = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_B e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t\sigma^2}} dx \qquad f_t(u) = e^{-\frac{1}{2} t\sigma^2 u^2}$$

dom $A \supset \{f \mid f''$ bestaat, continu en begrensd$\}$

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (Q^t f(x) - f(x))$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(-f(x) + \int f(x+y)\, d\mu_t(y)\right)$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int f(x+y) - f(x)\, d\mu_t(y)$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int y\, f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x+\theta y)\, d\mu_t(y)$$

Er geldt: $\int y\, d\mu_t(y) = 0 \qquad \forall\, t \geq 0$

$$\frac{1}{t} \int y^2\, d\mu_t(y) = \sigma^2 \qquad \forall\, t > 0$$

en daar f'' continu in x en $\frac{1}{t} \int_{|y| > \varepsilon} y^2\, d\mu_t(y) \longrightarrow 0$ als $t \longrightarrow 0$

volgt dat

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int y\, f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x+\theta y)\, d\mu_t(y)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} f''(x)$$

4) Normale verdeling; $N(0, \sigma^2 I)$ op $\mathbb{R}^n$.

$$\mu_t\, B = (2\pi t\sigma^2)^{-n/2} \int_B e^{-\frac{1}{2} \frac{||x||^2}{t\sigma^2}} dx \qquad f_t(u) = e^{-\frac{1}{2} t\sigma^2 ||u||^2}$$

dom $A \supset \{f \mid \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$ bestaat, continu en begrensd voor $0 < i, j \leq n\}$

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (Q^t f(x) - f(x))$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int y\, f'(x) + \tfrac{1}{2} \sum y_i y_j \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} f(x+\theta y) \quad d\mu_t(y)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \quad \Delta f(x).$$

5) Cauchyverdeling:

$$\mu_t\ B = \frac{1}{ct\pi} \int_B \left(\left[\frac{x}{ct}\right]^2 + 1 \right)^{-1} dx \qquad f_t(u) = t\ e^{iu\underline{x}_t} = e^{-|ctu|}$$

dom A $\supset \{f \mid f''$ bestaat, is continu en begrensd$\}$

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \ (Q^t f(x) - f(x))$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{et^2\pi} \int (f(x+y) - f(x)) \left(\left[\frac{y}{ct}\right]^2 + 1 \right)^{-1} dy$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{c}{\pi} \int (f(x+y) - f(x))(y^2 + c^2 t^2)^{-1} dy$$

$$= \frac{c}{\pi} \int \frac{f(x+y) - f(x)}{y^2} \quad dy$$

6) Het samengestelde Poisson proces.

Laat $\underline{n}_t$, $t \geq 0$, het Markovproces zijn bij een o.d. stochast $\underline{n} = \underline{n}_1$ met Poissonverdeling en verwachting $\mathcal{E}\,\underline{n} = m$.

Laten $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... stochasten zijn met waarden in de abelse groep X, o.o en onafhankelijk van het proces $\underline{n}_{ts}$ alle met dezelfde kansverdeling μ.

Definieer $\underline{y}_t = \sum_{k=1}^{\underline{n}_t} \underline{x}_k$ voor $t \geq 0$. Dan is $\underline{y}_t$, $t \geq 0$, een Markovproces van o.d. stochasten.

Bewijs: We laten zien dat:

1) $\underline{y}_t - \underline{y}_s$ de verdeling heeft van $\underline{y}_{t-s}$ voor $t > s \geq 0$.

2) voor iedere $m \in \mathbb{N}$ en $0 < t_1 < \ldots < t_m$ geldt dat de stochasten

$$\underline{y}_{t_1}, \underline{y}_{t_2} - \underline{y}_{t_1}, \ldots, \underline{y}_{t_m} - \underline{y}_{t_{m-1}}$$

o.o zijn.

1) Zij $B \in \mathcal{B}$ en $0 \leq s < t$.

$$P\{\underline{y}_t - \underline{y}_s \in B\} = P\{\sum_{k=1}^{\underline{n}_t} \underline{x}_k - \sum_{k=1}^{\underline{n}_s} \underline{x}_k \in B\}$$

$$= P\{\sum_{k=\underline{n}_s+1}^{\underline{n}_t} \underline{x}_k \in B\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} P\{\sum_{k=n+1}^{n+d} \underline{x}_k \in B\} P\{\underline{n}_s = n , \underline{n}_t - \underline{n}_s = d\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} P\{\sum_{k=1}^{d} \underline{x}_k \in B\} P\{\underline{n}_s = n\} P\{\underline{n}_t - \underline{n}_s = d\}$$

$$= \sum_{d=0}^{\infty} P\{\sum_{k=1}^{d} \underline{x}_k \in B\} P\{\underline{n}_{t-s} = d\}$$

$$= P\{\underline{y}_{t-s} \in B\}$$

2) $\underline{n}_0 = 0$ b.z. dus $\underline{y}_0 = 0$ b.z. dus $\underline{y}_{t_1} = \underline{y}_{t_1} - \underline{y}_{t_0}$ als we $t_o = 0$ stellen.

Verder voeren we in de notaties

$$\underline{d}_i = \underline{n}_{t_i} - \underline{n}_{t_{i-1}} \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$d_i = n_{t_i} - n_{t_{i-1}} \qquad i = 1, \ldots, m, \quad n_{t_0} = 0$$

Stel $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{B}$ willekeurig. Er geldt:

$$P\{\underline{y}_{t_i} - \underline{y}_{t_{i-1}} \in B_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

$$= P\{\sum_{k=\underline{n}_{t_{i-1}}+1}^{\underline{n}_{t_i}} \underline{x}_k \in B_i, \ i = 1, \ldots, m\}$$

$$= \sum_{n_{t_1}, \ldots, n_{t_m}} P\{\sum_{k=n_{t_{i-1}}+1}^{n_{t_i}} \underline{x}_k \in B_i, \ i = 1, \ldots, m\} \ P\{\underline{n}_{t_i} = n_{t_i}, \ i = 1, \ldots, m\}$$

$$= \sum_{n_{t_1}, \ldots, n_{t_m}} \prod_{i=1}^{m} P\{\sum_{k=n_{t_{i-1}}+1}^{n_{t_i}} \underline{x}_k \in B_i\} \ P\{\underline{n}_{t_i} = n_{t_i}, \ i = 1, \ldots, m\}$$

$$= \sum_{d_1, \ldots, d_m} \prod_{i=1}^{m} P\{\sum_{k=1}^{d_i} \underline{x}_k \in B_i\} \prod_{i=1}^{m} P\{\underline{d}_i = d_i\}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \sum_{d_i} P\{\sum_{k=1}^{d_i} \underline{x}_k \in B_i\} \ P\{\underline{d}_i = d_i\}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} P\{\underline{y}_{t_i - t_{i-1}} \in B_i\}$$

Opmerkingen: Als $\underline{x}_1 = c$ b.z, dan is $\underline{y}_t$ een Poisson proces op $\{0, c, 2c, \ldots\}$ en $\mathcal{E}\underline{y}_t = mct$.

Als $\mathcal{E}\underline{x}_1$ en $\sigma^2\underline{x}$, bestaan , dan

$$\mathcal{E}\underline{y}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(\sum_{k=0}^{n} \underline{x}_k) . \ P\{\underline{n}_t = n\} = mt . \mathcal{E}\underline{x}_1$$

$$\mathcal{E}\underline{y}_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}(\sum_{k=0}^{n} \underline{x}_k)^2 \ P\{\underline{n}_t = n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n\sigma^2\underline{x}_1 + n^2 \mathcal{E}^2 \underline{x}_1) \ P\{\underline{n}_t = n\}$$

$$= mt . \mathcal{E}\underline{x}_1^2$$

Laat Q^t, $t \geq 0$, de halfgroep homogene o.w. zijn bij $\underline{y}_t$, $t \geq 0$, en $P(x,B) = \mu(B-x) = P\{\underline{x}_1 \in B-x\}$ de homogene o.w. bij $\underline{x}_1$. Dan geldt:

$$P^n(x,B) = P\{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n \in B-x\}$$

dus
$$Q^t(x,B) = P\{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{\underline{n}_t} \in B-x\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n \in B-x\} \; P\{\underline{n}_t = n\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,B)\; P\{\underline{n}_t = n\} \;= \mathcal{E}\, P^{\underline{n}_t}(x,B).$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(Q^t f(x) - f(x))$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \int f(x+y) - f(x)\; P^n(0,dy)\; P\{\underline{n}_t = n\}$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int f(x+y) - f(x)\; P(0,dy)\; e^{-mt}\, .mt + O(t^2)$$
$$= m \int f(x+y) - f(x)\; P(0,dy) = m \int f(x+y) - f(x)\; d\mu(y)$$

als $f \in B(\mathcal{B})$.

<u>Lemma 6.1</u> : Q_0, Q_1, P_0 en P_1 zijn o.w. op X zó dat $RS = SR$ als $R,S \in \{Q_0,Q_1,P_0,P_1\}$. Er geldt:

$$\|Q_0\, Q_1 f - P_0 P_1 f\| \leq \|Q_0 f - P_0 f\| + \|Q_1 f - P_1 f\|$$

<u>Bewijs</u>: $\|Q_0 Q_1 f - P_0 P_1 f\| \leq$

$$\leq \|Q_1(Q_0 f - P_0 f)\| + \|P_0(Q_1 f - P_1 f)\|$$
$$\leq \|Q_0 f - P_0 f\| + \|Q_1 f - P_1 f\| .$$

<u>Lemma 6.2</u>: Als $\|Q_0^t f - f - t g_0\| = \phi(t) \in o(t)$ en

$||Q_1^t f - f - tg_1|| = \psi(t) \in O(t)$ voor $t \downarrow 0$, en $Q_0^t\, Q_1^s = Q_1^s\, Q_0^t$ voor alle $s, t \geq 0$, dan

$$||Q_1^t f - Q_0^t f|| \leq t\, ||g_1 - g_0||.$$

Bewijs: Zij $t > 0$. Zij $\varepsilon > 0$. Kies n zo groot, dat

$$\phi(\tfrac{t}{n}) < \varepsilon \frac{t}{n} \quad \text{en} \quad \psi(\tfrac{t}{n}) < \varepsilon \frac{t}{n}.$$

$$\begin{aligned} ||Q_1^t f - Q_0^t f|| &\leq n||Q_1^{t/n} f - Q_0^{t/n} f|| \\ &\leq n\, ||\frac{t}{n} g_1 - \frac{t}{n} g_0|| + n\, \phi(\tfrac{t}{n}) + n\, \psi(\tfrac{t}{n}) \\ &\leq t\, ||g_1 - g_0|| + \varepsilon t. \end{aligned}$$

ε is willekeurig, dus

$$||Q_1^t f - Q_0^t f|| \leq t\, ||g_1 - g_0||.$$

Lemma 6.3: Q_i is voor $i = 1, \ldots, n$ een o.w. op X en $Q_i Q_j = Q_j Q_i$ voor alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ Voorts zijn $f, g_1, \ldots, g_n \in B(\mathcal{B})$ zó dat

$$||Q_i f - f - g_i|| \leq \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$||Q_{i-1} \cdots Q_2\, Q_1\, g_i - g_i|| \leq \varepsilon\, ||g_i|| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dan geldt:

$$||Q_n \cdots Q_1 f - f - \sum_{i=1}^{n} g_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i + \varepsilon\, ||g_i||).$$

Bewijs: Volledige inductie. Triviaal voor $n = 1$.

Stel bewezen voor $n - 1$. Zij $Q = Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1$, $g = g_1 + \ldots + g_{n-1}$.

$$\begin{aligned} &||Q\, Q_n f - f - (g+g_n)|| \leq \\ &\leq ||Q(Q_n f - f - g_n)|| + ||Q_f - f - g|| + ||Q\, g_n - g_n \\ &\leq \varepsilon_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i + \varepsilon\, ||g_i||) + \varepsilon\, ||g_n||. \end{aligned}$$

<u>Gevolg</u>: Zij Q^t een continue halfgroep o.w. op X.

Stel $t_n \downarrow 0$ en

$$Q^{t_n} f - f = t_n g + o(t_n) \qquad t_n \downarrow 0$$

Dan geldt:

$$* \qquad Q^t f - f = tg + o(t) \qquad t \downarrow 0$$

<u>Bewijs</u>: Zij $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_0, \delta_1$ zó dat

$$\| Q^{t_n} f - f - t_n g \| < 2 t_n \qquad \text{als } t_n < \delta_0$$

$$\| Q^t g - g \| < \varepsilon \; \| g \| \qquad \text{als } t < \delta_1$$

Zij $s = s_1 + \ldots + s_n$, $s_i \in \{t_n \mid t_n < \delta_0\}$ en $s < \delta_1$.

Zij $Q_i = Q^{s_i}$, $g_i = s_i g$, $\varepsilon_i = \varepsilon s_i$.

$$\| Q^s f - f - sg \| = \| Q_n \ldots Q_1 f - f - \sum_{i=1}^n g_i \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i + \varepsilon \; \| g_i \|) \; < \; = s \; \varepsilon (1 + \| g \|).$$

Deze ongelijkheid geldt op een dichte deelverzameling van $(0, \delta_1)$, wegens de continuiteit van linker en rechterlid dus op het hele interval. ε is willekeurig klein te kiezen, dus * geldt.

<u>Gevolg</u>: Zij Q_i^t , $t \geq 0$ een continue halfgroep o.w. voor $i = 0,1$ zó dat $Q_0^t \, Q_1^s = Q_1^s \, Q_0^t$ voor alle s,t .

Zij $Q^t = Q_0^t \, Q_1^t$. Q^t, $t \geq 0$ is dan een continue halfgroep o.w.

Zij A_i de voortbrenger van Q_i voor $i = 0,1$ en A de voortbrenger van Q.

Als $A_0 f$ en $A_1 f$ bestaan, dan bestaat Af en $Af = A_0 f + A_1 f$.

<u>Bewijs:</u> Het bewijs dat Q^t, $t \geq 0$ continu is, laten we aan de lezer over.

Laten $A_0 f = g_0$ en $A_1 f = g_1$ bestaan, en zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor $t < \delta$ geldt:

$$\| Q_i^t f - f - t g_i \| < \varepsilon \, t \qquad i = 0,1$$

$$\| Q_0^t g_i - g_i \| < \varepsilon \; \| g_i \|$$

$$\text{dus} \qquad \| Q^t f - f - t(g_0 + g_1) \| \leq \varepsilon t (2 + \| g_1 \| + \| g_2 \|).$$

Definitie 6.3:

$C_0^2\ (\mathbb{R})$ is de verzameling van alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ zó dat

$$f' \in C_0(\mathbb{R}) \quad \text{en } f'' \in C_0(\mathbb{R})$$

$C_{00}(\mathbb{R})$ is de verzameling van alle continue functies met compacte drager, d.w.z. $\forall f \in C_{00}\ \exists\ t > 0$ zó dat

$$f(x) = 0 \quad \text{als } |x| > t.$$

$$C_{00}^2(\mathbb{R}) = C_{00}(\mathbb{R}) \cap C_0^2(\mathbb{R})$$

Lemma 4: Zij $f \in C_0^2\ (\mathbb{R})$ en zij

$$g(x,y) = \frac{f(x+y) - f(x) - y\ f'(x)}{y^2}$$

$$g(x,0) = \frac{1}{2}\ f''(x)$$

Dan $g \in C_0(\mathbb{R}^2)$.

Bewijs: g is continu buiten de x-as.

$$|g(x',0) - g(x,y)| \leq |g(x',0) - g(x,0)| + |g(x,0) - g(x,y)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\ |f''(x') - f''(x)| + \frac{1}{2}\ |f''(x) - f''(x+\theta y)|$$

dus g is continu in elk punt van de x-as.

Zij $M = \max\limits_x |f(x)|$, $M' = \max\limits_x |f'(x)|$ er $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $x_0 > 0$ zó dat $|f''(x)| < \varepsilon$ als $|x| > x_0$

$$|g(x,y)| \leq \frac{2M + yM'}{y^2} \leq \varepsilon \quad \text{als } |y| > y_0.$$

$$|g(x,y)| = \left|\frac{1}{2}\ f''(x+\theta y)\right| \leq \varepsilon \quad \text{als } |y| \leq y_0 \text{ en } x > x_0 + y_0.$$

Lemma 6.5: Zij $g \in C_0(\dot{\mathbb{R}}^2)$ en zij μ_n een rij kansmaten op $\dot{\mathbb{R}}$ zó dat $\mu_n \longrightarrow \mu$ zwak, dan

$$\int g(x,y)\ d\ \mu_n(y) \longrightarrow \int g(x,y)\ d\mu(y) \quad \text{uniform in } x.$$

Bewijs: g is uniform continu. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $\delta > 0$ zó dat

$$|g(x,y) - g(x',y)| < \varepsilon \quad \text{als } |x - x'| < \delta$$

Er bestaat een $x_0 > 0$ zó dat

$$|g(x,y)| < \varepsilon \qquad \text{als } |x| \geq x_0.$$

Kies n punten x_i zó dat $-x_0 = x_1 < \ldots < x_n = x_0$ en zó dat $x_{i+1} - x_i < \delta$.

Er bestaat een $n_\varepsilon > 0$ zó dat

$$|h_m(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n$$

als $m \geq n_\varepsilon$. Hierbij is

$$h_m(x) = \int g(x,y)\, d\mu_m(y)$$

$$h(x) = \int g(x,y)\, d\mu(y).$$

Zij x willekeurig. Als $|x| \geq x_0$, dan

$$|h_m(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{en } |h(x)| \leq \varepsilon$$

dus

$$|h_m(x) - h(x)| \leq 2\varepsilon$$

Als $|x| < x_0$, dan is er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ zó dat

$$|x - x_i| < \delta$$

dus

$$|g(x,y) - g(x_i,y)| < \varepsilon \qquad \text{voor alle } y$$

d.w.z.

$$|h_m(x) - h(x)| \leq |h_m(x) - h_m(x_i)| + \varepsilon + |h(x_i) - h(x)|$$
$$\leq 3\,\varepsilon$$

Lemma 6.6: $C^2_{00}(\mathbb{R})$ ligt uniform dicht in $C_0(\mathbb{R})$

d.w.z. bij iedere $f \in C_0(\mathbb{R})$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $f_1 \in C^2_{00}(\mathbb{R})$ zó dat

$$||f_1 - f|| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Zij $\underline{x}$ een o.d. reële stochast. We habben hierbij geconstrueerd:

1) een homogeen Markovproces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, zó dat

$$f_{r+s}(u) = f_r(u)\, f_s(u) \qquad r, s \geq 0$$

waarbij $f_t(u) = \mathcal{E} e^{i\underline{x}_t u}$ $t \geq 0$ en $f_1(u) = \mathcal{E}\, e^{i\underline{x}u}$

2) een verzameling kansmaten μ_t, $t \geq 0$ op $\mathbb{R}$ waarbij

$$\mu_t B = P\{\underline{x}_t \in B\}$$

3) een continue halfgroep homogene o.w. Q^t, $t \geq 0$ met voortbrenger A zó dat

$$Q^t(0,B) = \mu_t B = P\{\underline{x}_t \in B\}$$

<u>Stelling 6.2</u>: Zij $\underline{x}$ o.d. met eindige variantie en $\mathcal{E}\, \underline{x} = 0$. Er geldt:

Af bestaat voor alle $f \in C_0^2(\mathbb{R})$

Er bestaat een unieke eindige maat γ op $\mathbb{R}$

zó dat voor alle $f \in C_0^2(\mathbb{R})$:

$$(Af)\ (x) = \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\, d\gamma(y)$$

$$d\gamma(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{x^2\, d\mu_t(x)}{t} \quad \text{zwak}$$

$$\gamma\, \mathbb{R} \leq \sigma^2 \underline{x}.$$

<u>Bewijs</u>: Er geldt $\mathcal{E}\underline{x}_t = 0$ voor iedere $t > 0$ en $\int x^2\, d\mu_t = \mathcal{E}\, \underline{x}_t^2 = t\, \sigma^2 \underline{x}$

Zij $d\gamma_t(x) = \dfrac{x^2\, d\mu_t(x)}{t}$ voor $t > 0$.

$\gamma_t\, \mathbb{R} = \frac{1}{t} \int x^2\, d\, \mu_t(x) = \sigma^2 \underline{x}$. Voor iedere $t > 0$.

Er bestaat dus een rij $t_n \downarrow 0$ zó dat γ_{t_n} zwak convergeert naar een eindige maat γ op $\mathbb{R}$ en $\gamma\, \mathbb{R} \leq \sigma^2 \underline{x}$. (Dus $\int f\, d\gamma_{t_n} \longrightarrow \int f\, d\gamma\ \forall f \in C_0(\mathbb{R})$).

Zij $f \in C_0^2(\mathbb{R})$.

$$(Q^t f)(x) = \int f(x+y)\, d\gamma_t(y)$$

dus

$$\frac{(Q^{t_n}f - f)(x)}{t_n} = \int \{f(x+y) - f(x)\} \frac{d\mu_{t_n}(y)}{t_n}$$

$$= \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2} \frac{y^2 d\mu_{t_n}(y)}{T_N} \quad (\mathcal{E}\underline{x}_t = 0)$$

$$= \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\, d\,\gamma_{t_n}(y)$$

$$\longrightarrow \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\, d\gamma(y) = h(x) \quad \text{uniform in } x$$

daar de integrant een element is van $C_0(\mathbb{R}^2)$. Uit Lemma 6.2 volgt dat

$$\frac{Q^t f - f}{t} \longrightarrow h \text{ als } t \downarrow 0$$

Af bestaat en $Af = \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\, d\,\gamma(y)$ en

$\gamma_t \longrightarrow \gamma$ zwak als $t \downarrow 0$.

We hoeven slechts nog te bewijzen dat γ uniek is. Stel dat ook γ_1 voldoet. Zij $f(x) = x^2.\phi(x)$ met $\phi \in C^2_{00}(\mathbb{R})$. Dan $f \in C^2_0(\mathbb{R})$, $f(0) = f'(0) = 0$, dus

$$\frac{f(x+y) - f(0) - y\, f'(0)}{y^2} = \phi(y)$$

en er geldt

$$\int \phi(y)\, d\,\gamma(y) = \int \phi(y)\, d\,\gamma_1(y) \quad \forall\, \phi \in C^2_{00}(\mathbb{R})$$

Dan is echter $\gamma = \gamma_1$.

Zij nu $\mathcal{E}\underline{x} = m$, en zij $\underline{y} = \underline{x} - m$; $\underline{y}$ en m zijn o.d,
dus de voortbrenger A van de halfgroep Q^t bij $\underline{x}$ wordt gegeven door

$$Af(x) = m\, f'(x) + \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\, d\,\gamma(y)$$

waarbij γ de maat is, bepaald door $\underline{y}$.

Als γ geconcentreerd is in $\{0\}$, dan is $\underline{x}_t$ normaal verdeeld met variantie $\sigma^2 \underline{x}_t = t\,\gamma\{0\}$ (Zie vb.3).

Bij een kansmaat ρ op $\mathbb{R}$ en een $r > 0$ is (zie vb. 6) een samengesteld Poissonproces $\underline{y}_t = \sum_{k=1}^{\underline{n}_t} \underline{u}_k$ geconstrueerd ($\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ... zijn o.o met verdeling ρ;

$\underline{n}_t$, $t \geq 0$, is een Poissonproces onafhankelijk van $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ... en met verwachting $\mathcal{E}\underline{n}_t = rt$). De voortbrenger bij dit samengestelde Poissonproces heeft de vorm:

$$A\, f(x) = \int f(x+y) - f(x)\; r d\rho(y)$$

Als γ een maat is op $\mathbb{R}$ van de gedaante:

$$d\,\gamma(x) = r\, x^2\, d\rho(x)$$

met $r > 0$ en ρ een kansmaat op $\mathbb{R}$, dan

$$\underline{x}_t = \underline{y}_t - rt \int x\, d\rho(x).$$

Immers de voortbrenger van $\underline{x}_t$ is

$$\int f(x+y) - f(x)\; r\, d\rho(y) - f'(x) \int y\; r\, d\rho(y)$$

$$= \int \; f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)\; r\, d\rho(y)$$

$$= \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2}\; d\,\gamma(y).$$

Voorts geldt:

$$\sigma^2 \underline{x}_t = \sigma^2 \underline{y}_t = rt \int x^2\, d\rho = t.\ \gamma\mathbb{R}$$

Als γ een willekeurige eindige maat is op $\mathbb{R}$, dan bestaat er een rij $\gamma_n \uparrow \gamma$ zwak zó dat

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} x^{-2}\; d\,\gamma_n(x) \text{ is eindig voor } n = 1, 2, \ldots$$

(Neem b.v. voor γ_n de beperking van γ tot $\{|x| > \frac{1}{n}\} \cup \{0\}$)

Bij γ_n bestaat een continue halfgroep o.w. Q_n^t, $t \geq 0$, met voortbrenger A_n. Daar $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ zwak, volgt:

$A_n f$ convergeert voor iedere $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ uniform naar een limietfunctie Af. Later zal een stelling bewezen worden waaruit volgt dat $Q_n^t f$ voor iedere $t \geq 0$ en $f \in C_0(\mathbb{R})$ uniform convergeert naar een limietfunctie $Q^t f$, en dat de operatoren Q^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep homogene o.w. vormen.

Nu is $\int x^2 \, Q_n^t(0,dx) = \gamma_n \mathbb{R} \leq \gamma\mathbb{R}$, dus $\int x^2 \, Q^t(0,dx) \leq \gamma\mathbb{R}$. Hiermee is bewezen:

<u>Stelling 6.3</u>: Zij γ een eindige maat op $\mathbb{R}$. Er bestaat een o.d. stochast $\underline{x}$ zó dat

$$(Af)(x) = \int \frac{f(x+y) - f(x) - y\, f'(x)}{y^2} \, d\,\gamma(y) \qquad f \in C_0^2(\mathbb{R})$$

$$\sigma^2 \, \underline{x} \leq \gamma\mathbb{R}$$

§ 7 Integratie in Banachruimten

$(B, \| \ \|)$ is een separabele Banachruimte en $\mathfrak{C}$ is de kleinste σ-algebra op B die de open verzamelingen bevat. Dus is iedere continue functie $X \to B$ en iedere continue functie $B \to \mathbb{R}$ merkbaar. I.h.b. is de functie $\| \ \| : B \to \mathbb{R}$ merkbaar.

Stelling 7.1: Zij $(A, \mathfrak{A})$ een meetbare ruimte en $f_n : A \to B$ een meetbare functie voor $n = 1, 2, \ldots$. Als f_n puntsgewijs convergeert naar een functie $f : A \to B$, dan is f meetbaar.

Bewijs: B is separabel, dus iedere open verzameling is aftelbare vereniging van open bollen. Het is dan voldoende aan te tonen dat vòor iedere $b \in B$ en iedere $\beta > 0$ de verzameling

$$\{ x \in A \mid \| f(x) - b \| < \beta \}$$

meetbaar is.

$f_n - b$ is meetbaar $\Longrightarrow \| f_n - b \|$ is meetbaar. Er geldt $\| f_n - b \| \to \| f - b \|$ puntsgewijs, dus de reële functie $\| f - b \|$ is meetbaar, d.w.z.

$$\{ x \in A \mid \| f(x) - b \| < \beta \}$$

meetbaar voor iedere $\beta \in R$.

Definitie 7.1:
Zij $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ een kansruimte $\underline{x}, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots$ een rij stochasten op Ω met waarden in B.

$\underline{x}_n \xrightarrow{P} \underline{x}$ als $\| \underline{x}_n - \underline{x} \| \xrightarrow{P} 0$, d.w.z. voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt $P\{ \| \underline{x}_n - \underline{x} \| > \varepsilon \} \to 0$.

$\underline{x}_n \xrightarrow{L^p} \underline{x}$ als $\| \underline{x}_n - \underline{x} \| \xrightarrow{L^p} 0$.

Merk op als f een willekeurige functie is op Ω met waarden in B, en

$\underline{x}_n \overset{P}{\to} f$, dan geldt $||\underline{x}_n - f|| \overset{P}{\to} 0$, dus er is een deelrij $\underline{x}_{n_k}$ zó dat $||\underline{x}_{n_k} - f|| \to 0$ b.z., d.w.z. f is meetbaar buiten een nulverzameling.

Als de σ-algebra $\mathfrak{A}$ volledig is, dan is de limiet van een rij stochasten die in wh convergeert weer een stochast. (Analoog voor de limiet van een rij stochasten die in eerste of p^e gemiddelde convergeert). We zullen nu bewijzen dat ook iedere stochast te schrijven is als limiet in wh van een rij trapfuncties (= stochasten met een eindige waardeverzameling).

Stelling 7.2.

Zij $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ een kansruimte en $\underline{x} : \Omega \to B$ een stochast. Er bestaat een rij trapfuncties $\underline{t}_n : \Omega \to B$ zó dat

$$||\underline{t}_n|| \leq ||\underline{x}|| \qquad \text{voor} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\underline{t}_n \xrightarrow{P} ||\underline{x}||.$$

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$. B is separabel, m.a.w. er bestaat een aftelbare deelverzameling $\{b_1, b_2, \dots\} \subset B$ zó dat iedere $x \in B$ limiet is van een deelrij b_{n_k}. Zij U_n de open bol met middelpunt b_n en straal ε.

$B \subset \bigcup_n U_n$, dus er bestaat een n_ε zó dat

$$P\{\underline{x} \in \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} U_n\} > 1 - \varepsilon.$$

Zij a_n het punt op de straal door b_n gedefinieerd door:

$$a_n = b_n - \varepsilon \frac{b_n}{||b_n||} \qquad \text{als } ||b_n|| > \varepsilon$$

$$= 0 \qquad \text{als } ||b_n|| \leq \varepsilon .$$

Definieer nu de trapfunctie $\underline{t}$ als volgt:

$$t(\omega) = a_n \qquad \text{als } x(\omega) \in U_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k \text{ en } n \leq n_\varepsilon$$

$$= 0 \qquad \text{als } x(\omega) \notin \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} U_n$$

Dan geldt

$$||t(\omega)|| \leq ||x(\omega)|| \quad \text{voor alle } \omega \in \Omega .$$

$$P\{ || \underline{x} - \underline{t} || > 2\varepsilon \} \leq P\{ \underline{x} \notin \bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} U_n \} < \varepsilon .$$

Opmerking:

Zij f: $(\Omega, \mathfrak{A}) \to (B, \mathfrak{C})$ een meetbare functie. Er bestaat een rij meetbare trapfuncties t_n zó dat

1) $|| t_n || \leq || f ||$

2) $t_n(\omega) \to f(\omega)$ voor iedere $\omega \quad \Omega$.

Bewijs: Voor het gemak nemen we voor B een getallenruimte : elementen van B zijn rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$.
Er geldt:

a) $x^{(n)} \to x$ voor $n \to \infty$

b) $|| x^{(n)} || \uparrow || x ||$ voor $n \to \infty$

waarbij

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots , x_n, 0, 0, \ldots)$$

c) $L^{(n)} = \{ x \in B \mid x = x^{(n)} \}$ is n-dimensionaal.

Dit is geen beperking daar iedere separabele Banachruimte isomorf is met een dergelijke ruimte.

Definieer nu voor n = 1, 2, ... een afbeelding $s_n : L^{(n)} \to L^{(n)}$ zó dat

s_n is een trapfunctie

$s_n(x) = 0$ als $|| x || > n$

$|| x - s_n(x) || < \frac{1}{n}$ als $|| x || \leq n$

$|| s_n(x) || \leq || x ||$

en zij $t_n(\omega) := s_n(f(\omega)^{(n)})$. Dan is t_n een trapfunctie en

$|| t_n(\omega) || \leq || f(\omega)^{(n)} || \leq || f(\omega) ||$, dus aan 1) is voldaan.

Zij $\omega \in \Omega$, en $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $n > \frac{1}{\varepsilon}$

zó dat

$$|| f(\omega) - f(\omega)^{(n)} || < \varepsilon$$

$$|| f(\omega) || \leq n$$

dus $|| f(\omega) - t_m(\omega) || \leq || f(\omega) - f(\omega)^{(m)} || + || f(\omega)^{(m)} - t_m(\omega) ||$

$$< \varepsilon + \frac{1}{m} < 2\varepsilon \qquad \text{als} \quad m \geq n.$$

Opmerking: Door de rij s_n handig te kiezen, b.v. zó dat het beeld van s_{n+1} het beeld van s_n omvat, kunnen we nog bereiken dat $||f(\omega) - t_n(\omega)||$ voor iedere $\omega \in \Omega$ monotoon naar nul convergeert.

Lemma 7.1: Zij $\underline{x}_n$ een stochast met waarden in B voor $n = 1, 2, \ldots$ en zij α een niet negatieve reële stochast, zó dat

$$|| \underline{x}_n || \leq \underline{\alpha} \text{ voor } n = 1, 2, \ldots \text{ en } \underline{\alpha} \text{ eindig.}$$

Er geldt:

$$\underline{x}_n \xrightarrow{p} \underline{x} \iff \underline{x}_n \xrightarrow{L_1} \underline{x}$$

Bewijs: Als $||\underline{x}_n - \underline{x}|| \to 0$ in eerste gemiddelde, dan zeker

$$||\underline{x}_n - \underline{x}|| \to 0 \text{ in wh.}$$

Stel $\underline{x}_n \xrightarrow{p} \underline{x}$. Er is een deelrij $\underline{x}_{n_k} \longrightarrow \underline{x}$ b.z., dus $||\underline{x}|| \leq \underline{\alpha}$ b.z. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon)$ zó dat $PA < \delta \Rightarrow \mathcal{E}\, \underline{\alpha}\, \chi_A < \varepsilon$.
Er bestaat een n_ε zó dat $n > n_\varepsilon \Rightarrow P\{ || \underline{x} - \underline{x}_n || > \varepsilon \} < \delta$

dus als $n > n_\varepsilon$, dan

$$\mathcal{E} || \underline{x} - \underline{x}_n || < \varepsilon + 2\mathcal{E}\, \underline{\alpha}\, \chi_{\{ || \underline{x} - \underline{x}_n || > \varepsilon \}} < 3\varepsilon.$$

Stelling 7.3: Voor iedere stochast $\underline{x}$ met waarden in B waarvoor $\mathcal{E} || \underline{x} ||$ eindig is, bestaat er een vector $\mathcal{E}\, \underline{x} \in B$

zó dat voldaan is aan:

1) $\mathcal{E}\,\underline{t} = \sum t\, P\{\,\underline{t} = t\,\}$ als $\underline{t}$ een trapfunctie is

2) Als $\underline{x}_n \xrightarrow{p} \underline{x}$ en $\mathcal{E} \sup_n \|\,\underline{x}_n\,\|$ is eindig, dan $\mathcal{E}\,\underline{x}_n \to \mathcal{E}\,\underline{x}$.

Voorts geldt:

a) $\|\,\mathcal{E}\,\underline{x}\,\| \leq \mathcal{E}\,\|\,\underline{x}\,\|$

b) $\mathcal{E}\,(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{E}\,\underline{x} + \mathcal{E}\,\underline{y}$

c) $\mathcal{E}\,\underline{x}$ is door 1) en 2) eenduidig bepaald.

Bewijs: Merk op dat a) en b) gelden voor trapfuncties.
Zij $\underline{x}$ een stochast met waarden in B en $\mathcal{E}\,\|\,\underline{x}\,\|$ eindig.
Er bestaat een niet negatieve reële stochast $\underline{\alpha}$ met eindige verwachting en een rij trapfuncties $\underline{t}_n$ zó dat

$$\|\,t_n\,\| \leq \underline{\alpha} \qquad \text{voor } n = 1, 2, \ldots$$

$$\underline{t}_n \xrightarrow{p} \underline{x}.$$

(Volgens stelling 7.2 mogen we zelfs $\underline{\alpha} = \|\,\underline{x}\,\|$ nemen).

Uit lemma 7.1 volgt

$$\mathcal{E}\,\|\,\underline{x} - \underline{t}_n\,\| \to 0$$

dus

$$\mathcal{E}\,\|\,\underline{t}_n - \underline{t}_m\,\| \to 0$$

dus $\|\,\mathcal{E}\,\underline{t}_n - \mathcal{E}\,\underline{t}_m\,\| \to 0$ wegens a) en b).

d.w.z. $\mathcal{E}\,\underline{t}_n$ is een fundamentaalrij. B is volledig, $\lim \mathcal{E}\,\underline{t}_n$ bestaat.
Noem deze $\mathcal{E}\,\underline{x} = \lim \mathcal{E}\,\underline{t}_n$. De definitie van $\mathcal{E}\,\underline{x}$ is onafhankelijk van de rij $\underline{t}_n$.
We moeten nog aantonen dat 2) geldt. Uit de constructie van $\mathcal{E}\,\underline{x}$ volgt dan automatisch de eenduidigheid (c).

We bewijzen eerst a) en b).

a) We kiezen een rij $\underline{t}_n$ zó dat $|| \underline{t}_n || \leq || \underline{x} ||$, dan geldt:

$$|| \in \underline{t}_n || \leq \in || \underline{t}_n || \leq \in || \underline{x} || \text{ voor } n = 1,2,\ldots \text{ dus}$$

$$|| \in \underline{x} || = \lim || \in \underline{t}_n || \leq \in || \underline{x} ||.$$

b) Als $\underline{t}_n \overset{p}{\to} \underline{x}$, $\underline{s}_n \overset{p}{\to} \underline{y}$ en $|| \underline{t}_n || \leq \underline{\alpha}$ en

$|| \underline{s}_n || \leq \underline{\beta}$ voor $n = 1, 2, \ldots$ met $\in \underline{\alpha}$ en $\in \underline{\beta}$ eindig,

dan $|| \underline{t}_n + \underline{s}_n || \leq \underline{\alpha} + \underline{\beta}$ voor $n = 1, 2, \ldots$,

$\in (\alpha + \beta)$ is eindig

en $\underline{t}_n + \underline{s}_n \overset{p}{\to} \underline{x} + \underline{y}$. Immers

$$p \{ || \underline{t}_n + \underline{s}_n - (\underline{x} + \underline{y}) || > 2\varepsilon \}$$

$$\leq p \{ || \underline{t}_n - \underline{x} || > \varepsilon \} + p \{ || s_n - \underline{y} || > \varepsilon \} \to 0.$$

Dus $\in (\underline{x} + \underline{y}) = \lim \in (\underline{t}_n + \underline{s}_n)$

$$= \lim \in \underline{t}_n + \lim \in \underline{s}_n = \in \underline{x} + \in \underline{y}.$$

Stel $\underline{x}_n \overset{p}{\to} \underline{x}$ en $\in \sup_n || \underline{x}_n ||$ is eindig, dan

$\in || \underline{x}_n - \underline{x} || \to 0$, dus $|| \in \underline{x}_n - \in \underline{x} || \to 0$ wat nog te bewijzen was.

Merk op als $\underline{x}_n \overset{p}{\to} \underline{x}$ en $\in \sup_n || \underline{x}_n ||$ is eindig,

dan $|| x_n || \overset{p}{\to} || x ||$, dus $|| x || \leq \sup_n || \underline{x}_n ||$ b.z.

en $\in || x ||$ is eindig.

<u>Definitie 7.2:</u> Zij $\underline{x}$ een stochast met waarden in B.

$\in \underline{x}$ <u>bestaat</u> als $\in || \underline{x} ||$ eindig is. $\in \underline{x}$ is de <u>verwachting</u> van $\underline{x}$.

Stelling 7.4. Als $\underline{x}_n \to \underline{x}$ b.z. en $\mathcal{E} \sup || \underline{x}_n ||$ is eindig, dan bestaat $\mathcal{E}\,\underline{x}$ en $\mathcal{E}\,\underline{x}_n \to \mathcal{E}\,\underline{x}$.

Bewijs: $|| \underline{x}_n || \to || x ||$ b.z., dus $|| x || \leq \sup || \underline{x}_n ||$ b.z.

en $\mathcal{E}\,\underline{x}$ bestaat.

$|| \underline{x} - \underline{x}_n || \to 0$, dus $\quad || \mathcal{E}(\underline{x} - \underline{x}_n) || \leq \mathcal{E} || \underline{x} - \underline{x}_n || \to 0$

wegens gemajoreerde convergentie.

Stelling 7.5: Zij A een begrensde lineaire afbeelding van B in een Banachruimte B', zij $\underline{x}$ een stochast met waarden in B. Als $\mathcal{E}\,\underline{x}$ bestaat, dan $\mathcal{E} A\underline{x} = A \mathcal{E}\,\underline{x}$.

Bewijs: Het geldt als $\underline{x}$ een trapfunctie is. Stel $\underline{t}_n \to \underline{x}$ in kans, dan $A\underline{t}_n \to A\underline{x}$ in kans (immers als

$$|| \underline{t}_n - \underline{x} || \leq \varepsilon \text{ , dan } || A\underline{t}_n - A\underline{x} || \leq M\varepsilon \text{ , dus}$$

$$p\{ || A\underline{t}_n - A\underline{x} || > M\varepsilon \} \leq p\{ || \underline{t}_n - \underline{x} || > \varepsilon \} \to 0 \text{) .}$$

Als $\quad \mathcal{E} \sup\limits_n || \underline{t}_n ||$ eindig is, dan ook $\mathcal{E} \sup\limits_n || A\underline{t}_n ||$, dus

$$\mathcal{E}\, A\underline{x} = \lim \mathcal{E}\, A\underline{t}_n = \lim A\mathcal{E}\,\underline{t}_n = A\mathcal{E}\,\underline{x}.$$

Lemma 7.2 Zij $\underline{x}_n$ een stochast met waarden in B, en zij $f : B \to B'$ uniform continu. Als $\underline{x}_n \xrightarrow{p} \underline{x}$, dan $f(\underline{x}_n) \xrightarrow{p} f(\underline{x})$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta > 0$ zó dat

$$|| x - x' || \leq \delta \Longrightarrow || f(x) - f(x') || \leq \varepsilon$$

dus $\quad p\{ || (\underline{x}_n) - f(x) || > \varepsilon \} \leq p\{ || \underline{x}_n - \underline{x} || > \delta \} \to 0.$

Definitie 7.3 Een lineaire afbeelding $Q : B \to B$ is een contractie als $|| Qx || \leq || x ||$ voor iedere $x \in B$. (Een contractie is dus zeker begrensd).

Definitie 7.4: Zij L (B,B) de verzameling van alle begrensde lineaire afbeeldingen $B \to B$. Een afbeelding

$$Q : [0, \infty) \to L(B,B)$$

is een continue halfgroep operatoren als geldt:

1) $Q^t Q^s = Q^{t+s}$ voor alle $t, s \in [0, \infty)$.

2) $\lim\limits_{t \downarrow 0} Q^t x = x$ voor alle $x \in B$.

Opmerking: Zij Q een continue halfgroep contracties, en zij $x \in B$. De functie $Qx : [0, \infty) \to B$ isuniform continu. Immers

$$|| Q^{t+s}x - Q^t x || = || Q^t (Q^s x - x) ||$$

$$\leq || Q^s x - x || < \varepsilon \quad \text{als } s < \delta(\varepsilon) .$$

Stelling 7.6: Zij Q een continue contractiehalfgroep, en laten $\underline{u}$ en $\underline{v}$ o.o. niet-negatieve stochasten zijn.
Voor iedere $x \in B$ bestaan $\mathcal{E} Q^{\underline{u}} x$, $\mathcal{E} Q^{\underline{v}} x$ en $\mathcal{E} Q^{\underline{u}+\underline{v}} x = \mathcal{E} Q^{\underline{u}} (\mathcal{E} Q^{\underline{v}} x)$.

Bewijs: Zij $x \in B$. De stochast $\underline{u}$ is een meetbare afbeelding $\Omega \to [0, \infty)$, Qx is een continue afbeelding : $[0, \infty) \to B$, dus $Q^{\underline{u}}x$ is meetbaar.
Voorts geldt $|| Q^{\underline{u}} x || < || x ||$ en $\mathcal{E} || x ||$ is eindig, dus $\mathcal{E} Q^{\underline{u}} x$ bestaat.
Er bestaan trapfuncties $\underline{u}_n \xrightarrow{p} \underline{u}$ en $\underline{v}_n \xrightarrow{p} \underline{v}$ zó dat $\underline{u}_n$ en $\underline{v}_n$ o.o. zijn voor $n = 1, 2, \ldots$.

$$\mathcal{E} (Q^{\underline{u}_n} (\mathcal{E} Q^{\underline{v}_n})) = \sum_u Q^u \Big(\sum_v Q^v x p \{ \underline{v}_n = v \} \Big) p \{ \underline{u}_n = u \}$$

$$= \sum_{u,v} Q^{u+v} x \, p \{ \underline{u}_n = u, \underline{v}_n = v \}$$

$$= \sum_{u+v} Q^{u+v} x \, p \{ \underline{u}_n + \underline{v}_n = u + v \} = \mathcal{E} Q^{\underline{u}_n + \underline{v}_n} x .$$

$\underline{v}_n \xrightarrow{p} \underline{v}$, dus $Q^{\underline{v}_n} x \xrightarrow{p} Q^{\underline{v}} x$ (Qx is uniform continu) en

$\mathcal{E}\, Q^{\underline{v}_n} x \to \mathcal{E}\, Q^{\underline{v}} x \quad (\ ||\ Q^{\underline{v}_n} x\ ||\ \leq\ ||\ x\ || \qquad n = 1, 2, \ldots\ )$.

Analoog geldt $\underline{u}_n + \underline{v}_n \xrightarrow{p} \underline{u} + \underline{v} \Longrightarrow \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n + \underline{v}_n} x \to \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}+\underline{v}} x$.

Zij $y_n = \mathcal{E}\, Q^{\underline{v}_n} x$, $y = \mathcal{E}\, Q^{\underline{v}} x$. We moeten bewijzen :

$$\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y_n \to \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}} y.$$

$$||\,\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y_n - \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}} y\ ||\ \leq\ ||\,\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y_n - \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y\ ||\ +$$

$$||\ \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y - \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}} y\ ||\ \leq\ ||\ y_n - y\ ||\ +\ ||\,\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_n} y - \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}} y\ || \to 0.$$

Stelling 7.7.: Zij $\underline{u}_t$, $t \geq 0$, het Markovproces bij een o.d. niet negatieve reële stochast $\underline{u}$. Zij Q^u een continue halfgroep contracties. Voor iedere $x \in B$, $t \geq 0$ bestaat $\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} x = p^t x$, en p is een continue contractiehalfgroep.

p^t is lineair:

$$p^t(x+y) = \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t}(x+y) = \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} x + \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} y = p^t x + p^t y$$

$$p^t \lambda x = \mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} \lambda x = \mathcal{E}\,\lambda\, Q^{\underline{u}_t} x = \lambda\,\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} x = \lambda p^t x$$

p^t is een contractie:

$$||\ p^t x\ || = ||\,\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} x\ ||\ \leq\ \mathcal{E}\ ||\ Q^{\underline{u}_t} x\ ||\ \leq\ \mathcal{E}\,||\ x\ || = ||\ x\ ||$$

$\lim_{t \downarrow 0} p^t x = x$:

$$||\ p^t x - x\,|| = ||(\mathcal{E}\, Q^{\underline{u}_t} x\ ) - x\ || = ||\,\mathcal{E}(\ Q^{\underline{u}_t} x - x\ )\ ||$$
$$\leq\ \mathcal{E}\,||\ Q^{\underline{u}_t} x - x)\,||$$

Zij $\varepsilon > 0$. $\exists\, \delta > 0$ zó dat

$$u < \delta \Longrightarrow ||\ Q^u x - x\ || < \varepsilon$$

$\exists\, \eta > 0$ zó dat

$$t < \eta \implies p\{\underline{u}_t > \delta\} < \varepsilon .$$

Als $t < \eta$, dan

$$\mathcal{E}\,||\, Q^{\underline{u}_t}x - x\,|| \leq \varepsilon + \mathcal{E}\,||\, Q^{\underline{u}_t}x - x\,||\, \chi_{\{\underline{u}_t > \delta\}}$$

$$\leq (2\,||\,x\,|| + 1)\,\varepsilon$$

daar $||\, Q^{\underline{u}_t}x - x\,|| \leq 2\,||\,x\,||$.

$p^{t+s}x = p^t p^s x$:

Volgt uit stelling 7.6 daar $\underline{u}_{t+s}$ verdeeld is als de som van o.o. stochasten met de verdeling van $\underline{u}_t$ en $\underline{u}_s$.

<u>Stelling 7.8:</u> (Hahn - Banach). Zij L een gesloten lineaire deelruimte van een Banachruimte B en zij ξ een continue lineaire functionaal op L, d.w.z. $\sup\limits_{||x||\leq 1} |\xi x| = ||\,\xi\,||$ is eindig. Er bestaat een voortzetting ξ_1 van ξ, gedefinieerd op de hele ruimte B, zó dat $||\,\xi_1\,|| = ||\,\xi\,||$.

<u>Bewijs:</u> Lineaire Analyse.

<u>Gevolg:</u> Voor iedere $x \in B$ bestaat er een continue lineaire functionaal

$$\xi : B \to \mathbb{R} \text{ zó dat}$$

$$\xi x = ||\,x\,|| \quad \text{en} \quad ||\,\xi\,|| = 1.$$

<u>Opmerking:</u> Is B separabel, dan is er een rij continue lineaire functionalen ξ_n zó dat geldt:

$$\xi_n x = 0 \text{ voor } n = 1, 2, \ldots \implies x = 0.$$

<u>Bewijs:</u> Er bestaat een rij (a_n) die dicht ligt in B. Kies bij a_n een functionaal ξ_n zó dat $\xi_n a_n = ||\,a_n\,||$ en $||\,\xi_n\,|| = 1$, voor $n = 1, 2, \ldots$

Zij x willekeurig, $x \neq 0$. Voor iedere a_n geldt:

$$|\xi_n x| = |\xi_n a_n + \xi_n(x-a_n)|$$

$$\geq |\xi_n a_n| - |\xi_n(x-a_n)|$$

$$\geq \| a_n \| - \| x-a_n \|$$

en dit is > 0 als we a_n geschikt kiezen.

Stelling 7.9: Is $f : [0, \infty) \to R$ meetbaar en

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)dx = 0 \qquad \text{voor iedere } \lambda > 0$$

dan $f(x) = 0$ voor bijna iedere x (t.a.v. de Lebesquemaat).

Bewijs: Zie deel I van de syllabus.

Stelling 7.10: Is $f : [0, \infty) \to B$ meetbaar en

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)\, dx = 0 \qquad \text{voor iedere } \lambda > 0$$

dan $f(x) = 0$ voor bijna iedere $x \in [0, \infty)$.

Bewijs: Merk op dat de Lebesquemaat op $[0, \infty)$ geen kansmaat is. De maat $e^{-x}dx$ is dat echter wèl. We kunnen dus de voorgaande theorie zonder bezwaar toepassen.

Kies een rij continue lineaire functionalen ξ_n op B zó dat

$$\xi_n x = 0 \text{ voor alle } n \Longrightarrow x = 0.$$

Er geldt:

$$0 = \xi_n \left(\int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)dx \right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \xi_n(f(x))\, dx$$

voor iedere $\lambda > 0$, dus volgens stelling 7.9:

$$\xi_n\ (\ f(x)\ ) = 0 \qquad \text{voor } x \in [0,\infty) - A_n$$

waarbij A_n een nulverzameling is. Dan is ook $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ een

nulverzameling, en voor $x \notin A$ geldt:

$$\xi_n\ (f(x)\ ) = 0 \qquad \text{voor iedere } n$$

dus $f(x) = 0$.

<u>Opmerking:</u> Is f continu , dan volgt uit f = 0 b.a. dat $f(x) = 0\ \forall\ x$.

<u>Stelling 7.11</u>: Zij $f : \mathbb{R} \to B$ continu. Dan geldt:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(u)du = f(t).$$

<u>Bewijs:</u> Voor vaste t is $||\ f(u) - f(t)\ ||$ continu in u,

dus

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} ||\ f(u) - f(t)\ ||\ du = 0$$

Dan geldt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u)du = f(t) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u) - f(t)du = f(t).$$

§ 8 De stelling van Hille-Yosida

T^t, $t \geq 0$, is een halfgroep contracties op de separabele Banachruimte B. We definiëren:

$$L_0 = \{x \in B \mid \lim_{t \downarrow 0} T^t x = x\}$$

$$Au = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T^t u - u}{t} \quad \text{als deze bestaat}$$

$$D = \operatorname{dom} A = \{u \in B \mid Au \text{ bestaat}\}.$$

Stelling 8.1:

1) L_0 en D zijn lineaire deelverzamelingen van B en L_0 is de topologische afsluiting van D.
2) $x \in L_0 \Longrightarrow T^t x \in L_0$ voor alle $t \geq 0$
   $u \in D \Longrightarrow Au \in L_0$
3) $x \in L_0 \Longrightarrow T^t x$ is uniform continu in $t \in [0,\infty)$
   $u \in D \Longrightarrow T^t u$ is differentieerbaar naar
   $t \in [0,\infty)$ en $\frac{d}{dt} T^t x = T^t Ax = AT^t x$.
4) A is een gesloten operator, d.w.z. als voor een rij (u_n, Au_n) met $u_n \in D$ geldt dat $u_n \to x \in B$ en $Au_n \to y \in B$, dan $x \in D$ en $y = Ax$. (De grafiek van A is een gesloten lineaire deelverzameling van $B \times B$).

Bewijs:

1) L_0 en D zijn lineair. Triviaal.
   L_0 is gesloten:
   Stel $x_n \in L_0$ en $x_n \longrightarrow x \in B$. Zij $\varepsilon > 0$.
   Kies n zódat $\|x - x_n\| < \varepsilon$, dan geldt:

$$\|T^t x - x\| \leq \|T^t(x-x_n)\| + \|T^t x_n - x_n\| + \|x_n - x\|$$
$$< 2\varepsilon + \|T^t x_n - x_n\| < 3\varepsilon$$

   als t voldoend klein daar $T^t x_n \to x_n$. Dus $x \in L_0$.

Duidelijk is $D \subseteq L_0$. We bewijzen eerst 2) en 3) voordat we laten zien dat D dicht ligt in L_0.

2) Zij $x \in L_0$, $t \geq 0$.

$$||T^sT^tx - T^tx|| = ||T^t(T^sx-x)||$$
$$\leq ||T^sx - x|| \longrightarrow 0 \quad \text{als } s \downarrow 0$$

dus $T^tx \in L_0$.

Zij $u \in D$.

Dan $u \in L_0$ en $\frac{T^tu - u}{t} \in L_0$ voor alle $t > 0$.

L_0 is gesloten, dus ook $Au = \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{T^tu - u}{t} \in L_0$

3) Zij $x \in L_0$. Zij $\varepsilon > 0$. Zij $0 \leq t < t + s$

$$||T^{t+s}x - T^tx|| = ||T^t(T^sx-x)||$$
$$\leq ||T^sx - x|| < \varepsilon$$

als s voldoend klein (uniform in t)

Zij $u \in D$, en $t \geq 0$.

Zij $h > 0$. Als $h \downarrow 0$, dan

$\frac{1}{h}(T^{t+h}u - T^tu) = T^t . \frac{1}{h}(T^hu - u) \longrightarrow T^t\ Au.$

T^tu is continu, de rechterafgeleide bestaat overal en is continu

$\Longrightarrow$ T^tu is differentieerbaar. Immers de functie

$f(t) = u + \int_0^t T^s\ Au\ ds - T^tu$ is continu, heeft rechterafgeleide 0,

en $f(0) = 0$, dus $f(t) = 0$ voor alle t wegens lemma 8.1 (zie hieronder), d.w.z. $T^tu = u + \int_0^t T^s\ Au\ ds$ dus differentieerbaar.

Ook geldt:

$\frac{1}{h}(T^{t+h}u - T^tu) = \frac{1}{h}(T^hT^tu - T^tu)$ convergeert voor $h \downarrow 0$, dus $T^tu \in D$ en $A\ T^tu = T^t\ Au$.

1) D ligt dicht in L_0.

Zij $x \in L_0$. Zij $t > 0$. Definieer:

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T^s x \, ds$$

$$T^h x_t - x_t = \frac{1}{t}\left(\int_0^t T^{s+h} x \, ds - \int_0^t T^s x \, ds\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(\int_t^{t+h} T^s x \, ds - \int_0^h T^s x \, ds\right)$$

en $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T^h x_t - x_t) = \frac{1}{t}(T^t x - x)$, dus $x_t \in D$.

Daar $x_t \to x$ als $t \downarrow 0$ volgt: D dicht in L_0.

4) Stel $u_n \in D$, $u_n \to x \in B$ en $Au_n \to y \in B$.

Zij $t > 0$.

$$T^t u_n - u_n = \int_0^t T^s \, Au_n \, ds$$

De rij Au_n convergeert, dus $||Au_n||$ is begrensd en daar $||T^s \, Au_n|| \leq ||Au_n||$ convergeert de gelijkheid hierboven naar:

$$T^t x - x = \int_0^t T^s y \, ds$$

x en $y \in L_0$ wegens 1) en 2), dus

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T^t x - x) = y$$

d.w.z. $x \in D$ en $y = Ax$.

<u>Opmerking</u> De halfgroep T^t, $t \geq 0$, is continu als $T^t x \to x$ als $t \downarrow 0$ voor iedere $x \in B$. Wegens stelling 8.1 levert iedere halfgroep contracties op B een continue halfgroep contracties op (de separabele Banachruimte) L_0.

We veronderstellen voortaan dat de halfgroep T^t, $t \geq 0$, continu is.

<u>Lemma 8.1</u>: $F : [0,x) \to B$ is continu en $f(0) = 0$.
De rechter afgeleide van f is 0 op $[0,x)$. Dan $f(t) = 0$ voor iedere $t \in [0,x)$.

<u>Bewijs</u>: Zij $\varepsilon > 0$. Definieer

$$T_\varepsilon = \{t \in [0,x) \mid s < t \Longrightarrow ||f(s)|| \le \varepsilon\, s\}$$

Als $T_\varepsilon \neq [0,x)$, dan $T_\varepsilon = [0,u]$ voor zekere $u \in [0,x)$. Immers

$$t \in T_\varepsilon \ \&\ t_0 < t \Longrightarrow t_0 \in T_\varepsilon$$

$$t_n \in T_\varepsilon \ \&\ t_n \uparrow t < x \Longrightarrow t \in T_\varepsilon$$

Voorts geldt $||f(u)|| \le \varepsilon u$, en daar $\lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h} = 0$ ook $||f(u+h)|| \le \varepsilon(u+h)$ als $h \le \delta(\varepsilon,u) > 0$. Dus $u + h \in T^\varepsilon$ voor een $h > 0$. Tegenspraak.

Er geldt $||f(s)|| \le \varepsilon\, s$ voor alle $s \in [0,x)$.
Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus $f(s) = 0$.

<u>Stelling 8.2</u>: Zij T^t, $t \ge 0$, een continue halfgroep contracties op B, met voortbrenger A. Voor iedere $\lambda > 0$ is de operator $\lambda I - A$: dom $A \to B$ een bijectie, met inverse R_λ. De operator λR_λ is een contractie, en voor iedere $x \in B$ geldt:

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t x\, dt.$$

<u>Bewijs</u>: Zij $\lambda > 0$.
$\lambda - A$ is injectief:
Stel $\lambda u = Au$, dan

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}\, T^t u) = -\lambda\, e^{-\lambda t}\, T^t u + e^{-\lambda t}\, T^t\, Au = 0$$

dus $e^{-\lambda t}\, T^t u = u$ voor alle t, en daar dan

$$||u|| = ||e^{-\lambda t}\, T^t u|| \le e^{-\lambda t}\, ||u|| \text{ en } e^{-\lambda t} < 1 \text{ als } t > 0$$

moet $||u|| = 0$.

Definieer $R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t x\, dt$. Dan is λR_λ een contractie, daar $||T^t x|| \le ||x||$ en $\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = 1$. Als $u \in$ dom A, dan

$$u = (\lambda - A) R_\lambda u = R_\lambda (\lambda - A) u.$$

Immers

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t u \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t \, Au \, dt$$

Voor Riemannsommen $s = \sum e^{-\lambda t_i}\, T^{t_i} u \, \chi[t_{i-1}, t_i]$ geldt dat

$$A \int_0^\infty s \, dt = \int_0^\infty A \, s \, dt.$$

A is gesloten, dus de relatie geldt ook voor de limiet.

$$R_\lambda(\lambda - A)u = \int_0^\infty \lambda \, e^{-\lambda t}\, T^t u \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t \, Au \, dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{-\lambda t}\, T^t u \, dt = u$$

Zij nu $x \in B$.

Kies $u_n \in \text{dom } A$ zó dat $u_n \to x$. Dan geldt:

$$R_\lambda u_n \to R_\lambda x$$

$$(A - \lambda)R_\lambda u_n = u_n \to x$$

en daar A gesloten is, geldt dus

$$(A - \lambda)R_\lambda x = x.$$

Opmerking: Definieer $Rx = \int_0^\infty T^t x \, dt$ voor die x waarvoor de integraal convergeert. Dan geldt:

$$- AR\, x = x.$$

Bewijs:

$$\frac{1}{t}(Rx - T^t Rx) = \frac{1}{t}\int_0^t T^s x \, ds \to x \qquad \text{als } t \downarrow 0.$$

Opmerking: Stel dom $A \subset D_1$ en A_1 is een voortzetting van A tot D_1. Als geldt:

$$A_1 z = z \Longrightarrow z = 0 \qquad (z \in D_1)$$

dan $D_1 = \text{dom } A$.

Bewijs: Zij $z \in D_1$.

Definieer $u = R_\lambda(z - A_1 z)$ met $\lambda = 1$.

$$z - A_1 z = u - Au$$

dus $z - u = A_1(z-u) \Longrightarrow z = u$.

i.h.b. $z \in \text{dom } A$.

Stelling 8.3: (Eenduidigheidsstelling):

T^t, $t \geq 0$, en $T_1^{\ t}$, $t \geq 0$, zijn continue contractie halfgroepen op B met voortbrengers A en A_1. Als $A = A_1$ (en dus ook dom A = dom A_1) dan $T_1^{\ t} = T^t \ \forall t$.

Bewijs: Zij $\lambda > 0$, $x \in B$.

$A = A_1 \Longrightarrow \lambda - A = \lambda - A_1 \Longrightarrow R_\lambda = R_{1\lambda}$, d.w.z.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T^t x\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_1^{\ t} x\, dt.$$

Dit geldt voor iedere $\lambda > 0$, dus (stelling 7.10 en opmerking)
$T^t x = T_1^{\ t} x$ voor alle $t \geq 0$.
x is willekeurig dus $T^t = T_1^{\ t}$ voor alle $t \geq 0$.

Lemma 8.2: Zij γ de verzameling van alle lineaire contracties op B. Er geldt:

1) De samenstelling van twee contracties is een contractie;
2) γ is gesloten t.o.v. de sterke topologie, d.w.z.

Als $T_n \in \gamma$ voor $n = 1,2,\ldots$, en $(T_n x)$ is een f.r. voor alle $x \in B$, dan bestaat er een contractie $T \in \gamma$ zó dat

$$T_n x \to Tx \quad \text{voor alle } x \in B.$$

3) De samenstelling is continu in de sterke topologie, d.w.z.

Als T_n en $S_n \in \gamma$ voor $n = 1,2,\ldots$
en $T_n x \to Tx$ en $S_n x \to Sx$ voor iedere $x \in B$, dan $T_n S_n x \to TSx$ voor iedere $x \in B$.

Bewijs: 1) $||TSx|| \leq ||Sx|| \leq ||x||$

2) $||Tx|| = ||\lim T_n x|| = \lim ||T_n x|| \leq ||x||$, analoog bewijst men dat T lineair is.

3) $||TSx - T_n S_n x|| \leq ||(T-T_n)Sx|| + ||T_n(S-S_n)x||$

$T_n y \to T_y$ (ihb voor $y = Sx$) dus de eerste term $\to 0$

$||T_n(S-S_n)x|| \leq ||(S-S_n)x|| \to 0$.

Opmerking: De verzameling $L(B,B)$ van alle begrensde lineaire operatoren op B bezit deze 3 eigenschappen ook. Voor het bewijs moeten we dan de uniforme begrensdheidsstelling gebruiken:
Is de rij $||T_n x||$ voor iedere x begrensd, dan ook de rij $||T_n||$.

Stelling 8.4 (Convergentiestelling): Zij T_n^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep contracties op B met voortbrenger A_n ($n = 1,2,\ldots$). Zij D een dichte lineaire deelverzameling van B en $D \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom} A_n$.
Zij $T_n^t T_m^s = T_m^s T_n^t$ voor $s,t \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$.
Als $A_n u$ convergeert voor iedere $u \in D$, dan bestaat er een unieke contractiehalfgroep T^t, $t \geq 0$, met voortbrenger A zó dat:

$$T_n^t x \to T^t x \qquad \text{voor alle } x \in B,\ t \geq 0$$

$$A_n u \to Au \qquad \text{voor alle } u \in D$$

Voorts geldt $T^t T_m^s x = T_m^s T^t x$ voor $s, t \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Bewijs: Zij $u \in D$ en $t \geq 0$. Wegens lemma 6.2 geldt:

$||T_n^t n - T_m^t n|| \leq t||A_n u - A_m u|| \to 0$, dus $T_n^t u$ is een f.r. met limiet zeg $T^t u$.

$||T^t u|| = \lim ||T_n^t u|| \leq ||u||$

T^t is een lineaire contractie van D in B. Daar D dicht ligt in B, is T^t voortzetbaar tot een lineaire contractie T^t op B.

Zij $x \in B$ en $t \geq 0$. Zij $\varepsilon > 0$ en $u \in D$ zó dat $||u - x|| < \varepsilon$.

$$||T^t x - T_n^{\,t} x|| \leq ||T^t x - T^t u|| + ||T^t u - T_n^{\,t} u|| + ||T_n^{\,t} u - T_n^{\,t} x||$$

$$\leq ||x - u|| + ||T_n^{\,t} - T_n^{\,t} u|| + ||x - u|| < 3\varepsilon \text{ als } n \geq n_\varepsilon.$$

We hebben nu voor iedere $t \geq 0$ een contractie T^t gedefinieerd en bewezen dat $T_n^{\,t} x \to T^t x$ voor alle $x \in B$. Wegens lemma 8.2 geldt dan:

$$T^{t+s} x = \lim T_n^{\,t+s} x = \lim T_n^{\,t}\, T_n^{\,s} x = T^t\, T^s x$$

en

$$T^t T_m^{\,s} x = \lim_{n\to\infty} T_n^{\,t}\, T_m^{\,s} x = \lim_{n\to\infty} T_m^{\,s}\, T_n^{\,t} x = T_m^{\,s}\, T^t x.$$

Dus T^t, $t \geq 0$, is een halfgroep contracties die commuteren met de contracties $T_n^{\,s}$, $n \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$.

Definieer nu $Au = \lim\limits_{n\to\infty} A_n u$ voor $u \in D$. Er valt nog slechts te bewijzen dat

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T^t u - u}{t} = Au \quad \text{voor alle } u \in D.$$

Er geldt:

$$\left|\left|\frac{T^t u - T_m^{\,t} u}{t}\right|\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left|\frac{T_n^{\,t} u - T_m^{\,t} u}{t}\right|\right| \leq ||Au - A_m u||$$

daar $||T_n^{\,t} u - T_m^{\,t} u|| \leq t\, ||A_n u - A_m u||$ als $t \geq 0$ en $n \in \mathbb{N}$

en $A_n u \to Au$ als $n \to \infty$.

Dus zij $u \in D$ en $\varepsilon > 0$. Kies n zó dat $||Au - A_n u|| < \varepsilon$

$$\text{dan } \left|\left|\frac{T^t u - u}{t} - Au\right|\right| \leq \left|\left|\frac{T^t u - T_n^{\,t} u}{t}\right|\right| + \left|\left|\frac{T_n^{\,t} u - u}{t} - A_n u\right|\right| + ||A_n u - Au||$$

$$\leq 2\, ||A_n u - Au|| + \left|\left|\frac{T_n^{\,t} u - u}{t} - A_n u\right|\right| \leq 3\varepsilon$$

als $t \leq \delta(n,u)$ zó dat $\left|\left|\dfrac{T_n^{\,t} u - u}{t} - A_n u\right|\right| \leq \varepsilon$

<u>Stelling 8.5</u>: (Hille-Yosida):

A is een (niet noodzaaklijk begrensde) lineaire operator op B, d.w.z. $A : \text{dom } A \to B$.

Er geldt:

1) dom A ligt dicht in B.
2) voor iedere $\lambda > 0$ is $\lambda - A : \text{dom } A \to B$ surjectief.
3) $||(\lambda-A)u|| \geq ||\lambda u||$ voor iedere $u \in \text{dom } A$.

Dan bestaat er een unieke continue contractiehalfgroep T^t, $t \geq 0$, op B met voortbrenger A.

<u>Opmerking</u>: Eigenschappen 1), 2) en 3) zijn noodzaaklijk:

1) stelling 8.1, 1) met $L_0 = B$.
2) stelling 8.2 : $\lambda - A$ is bijectief.
3) stelling 8.3 : λR_λ is een contractie ($u = R_\lambda x$).

<u>Bewijs</u>:

1) $\lambda - A$ is een bijectie.

Stel $(\lambda-A)u = 0$, dan

$$||\lambda u|| \leq ||(\lambda-A)u|| = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0.$$

2) Zij $R_\lambda = (\lambda-A)^{-1}$, d.w.z.

$$R_\lambda(\lambda-A)u = u \qquad u \in \text{dom } A$$

$$(\lambda-A)R\, x = x \qquad x \in B$$

dan $||\lambda R_\lambda x|| = ||\lambda R_\lambda(\lambda-A)u|| = \lambda||u|| \leq ||x||$, dus

λR_λ is een contractie.

3) Resolventenvergelijking.

$$R_\mu A\, R_\lambda x = \lambda R_\mu\, R_\lambda x - R_\mu x$$

$$= \mu R_\mu\, R_\lambda x - R_\lambda x$$

dus

$$(\lambda-\mu)\, R_\mu\, R_\lambda = R_\mu - R_\lambda \qquad \text{(resolventenvergelijking).}$$

I.h.b. is de verzameling $\{R_\lambda \mid \lambda > 0\}$ commutatief.

4) $\lambda R_\lambda x \to x$ als $\lambda \to \infty$.

Zij $u \in \mathrm{dom}\, A$:

$$||\lambda R_\lambda u - u|| = ||R_\lambda Au|| \leq \frac{1}{\lambda} ||Au|| \to 0.$$

Zij $x \in B$, $\varepsilon > 0$:

Kies $u \in \mathrm{dom}\, A$ zó dat $||x-u|| < \varepsilon$, dan

$$||\lambda R_\lambda x - x|| \leq ||\lambda R_\lambda (x-u)|| + ||\lambda R_\lambda u - u|| + ||x-u||$$

$$\leq 2\varepsilon + \frac{1}{\lambda} ||Au|| \leq 3\varepsilon \quad \text{als} \quad \lambda \geq \lambda_\varepsilon.$$

5) Zij $A_\lambda := A\lambda R_\lambda$, dan geldt:

a) A_λ is begrensd

b) de contractiehalfgroepen T_λ voortgebracht door A_λ commuteren, en

c) $A_\lambda u \to Au$ als $\lambda \to \infty$ en $u \in \mathrm{dom}\, A$.

Immers $||A_\lambda x|| = ||\lambda(\lambda R_\lambda x + x)|| \leq 2\lambda ||x||$.

$T_\lambda{}^t = e^{tA_\lambda} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(tA_\lambda)^n}{n!}$ is een contractiehalfgroep met voortbrenger A_λ. (zie § 5. Er geldt zelf, dat

$\frac{1}{t}(T_\lambda{}^t x - x) \to A_\lambda x$ uniform op $\{x \in B \mid ||x|| \leq 1\}$.)

$A_\lambda A_\mu x = A_\mu A_\lambda x$, dus

$$T_\lambda{}^t T_\mu{}^t = e^{t(A_\lambda + A_\mu)} = T_\mu{}^t T_\lambda{}^t.$$

en als $u \in \mathrm{dom}\, A$, dan $A_\lambda u = \lambda R_\lambda Au \to Au$

wegens 4).

Uit a), b) en c) volgt met stelling 8.4 dat de contractiehalfgroepen T_λ voor $\lambda = 1,2,\dots$ convergeren naar een contractiehalfgroep T met voortbrenger A_1 en $A_1 u = Au$ als $u \in \mathrm{dom}\, A$.
T^t, $t > 0$, is continu daar dom A dicht ligt in B.
$\lambda - A$ is surjectief en $\lambda - A_1$ is injectief, dus $\lambda - A = \lambda - A_1$ en $A = A_1$.

Uit stelling 8.3 volgt dat T uniek is.

Voordat we op het verband tussen de stelling van Hille-Yosida en stationaire Markov processen ingaan, bewijzen we nog twee stellingen.

Stelling 8.6: A is de voortbrenger van een continue contractiehalfgroep T^t, $t \geq 0$, op B. De functie $x: [0,\infty) \to B$ voldoet aan:

1) $\dot{x}(t) = Ax(t)$ en $x(0) \in \text{dom } A$
2) $x(t)$ is begrensd
3) $\dot{x}(t)$ is continu.

Dan geldt: $x(t) = T^t x(0)$.

Bewijs: $T^t x(0)$ voldoet, immers $||T^t x(0)|| \leq ||x(0)||$ en $\frac{d}{dt} T^t x(0) =$ $= AT^t x(0) = T^t Ax(0)$.

Te bewijzen dat deze oplossing uniek is, d.w.z.:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \;\&\; x(0) = 0 \implies x(t) = 0 \text{ voor alle } t.$$

(Onder de voorwaarden 2) en 3).)

Zij $\lambda > 0$.

Definieer $y(t) = e^{-\lambda t} x(t)$.

Dus $\dot{y}(t) = (A - \lambda) y(t)$ of $y(t) = - R_\lambda \dot{y}(t)$ waaruit volgt

$$\int_0^t y(s)ds = - R_\lambda y(t).$$

Nemen we de limiet voor $t \to \infty$, dan vinden we:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} x(t)dt = 0$$

dus, stelling 7.10, $x(t) = 0$.

Lemma 8.3: Zij $f: \mathbb{R} \to B$ meetbaar en laat $\int f(u)du$ bestaan. Definieer voor $h \in \mathbb{R}$ de functie $h(f)$ door $(h(f))(u) = f(u - h)$. Er geldt:

$$\int ||f - h(f)||du \to 0 \quad \text{als} \quad h \to 0.$$

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$.

Kies een trapfunctie $t = \sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{A_i}$ zó dat $\int ||f - t||du < \varepsilon$ en zij $M = \max_{i=1,\dots,n} ||t_i||$.

Kies bij iedere A_i, $i = 1, \ldots, n$, een verzameling B_i, eindige vereniging van intervallen, zó dat

$$\lambda(A_i \Delta B_i) < \frac{\varepsilon}{Mn} \quad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, n$$

waarbij λ de Lebesguemaat op $\mathbb{R}$.

Definieer $s = \sum_{i=1}^{n} t_i \chi_{B_i}$, dan

$$\int ||s - t|| d\lambda \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{Mn} \cdot 2M = 2\varepsilon.$$

Kies $\delta > 0$ zó dat

$$|h| < \delta \implies \int ||s - h(s)|| d\lambda < \varepsilon.$$

Als $|h| < \delta$, dan

$$\int ||f - h(f)|| d\lambda \leq \int ||f - t|| d\lambda + \int ||t - s|| d\lambda +$$

$$\int ||s - h(s)|| d\lambda + \int ||h(s) - h(t)|| d\lambda + \int ||h(t) - h(f)|| d\lambda$$

$$< 7\varepsilon$$

daar $\int ||h(f) - h(g)|| d\lambda = \int ||f - g|| d\lambda$.

Gevolg: $\int_a^b ||f - h(f)|| du \to 0$ als $h \to 0$ en $||f||$ sommeerbaar over een open interval dat $[a,b]$ omvat.

Stelling 8.7: Zij T^t, $t \geq 0$, een contractiehalfgroep op B en $x \in B$.
$T^t x$ meetbaar op $[0,\infty)$ $\implies$ $T^t x$ continu op $(0,\infty)$.

Bewijs: Zij $h > 0$. Als $0 \leq s \leq t$, dan

$$||T^{t+h}x - T^t x|| = ||T^{t-s}(T^{s+h}x - T^s x)||$$

$$\leq ||T^{s+h}x - T^s x||.$$

De functie $T^t x$ wordt "gladder" met stijgende t.

Als $t \geq \delta > 0$:

$$||T^{t+h}x - T^t x|| \leq \delta^{-1} \int_0^\delta ||T^{s+h}x - T^s x|| ds$$

$$= \delta^{-1} \int_0^\delta ||h(T^s x) - T^s x|| ds \to 0 \text{ als } h \downarrow 0.$$

§9. Contractiehalfgroepen en Markovprocessen

Zij B een Banachruimte van functies en zij B^+ de verzameling der niet negatieve functies, dan geldt gewoonlijk:

1) B^+ is een kegel, d.w.z.:
$f, g \in B^+ \implies f + g \in B^+$
$f \in B^+,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0 \implies \lambda f \in B^+$

2) B^+ is gesloten, d.w.z.:
$f_n \in B^+\ \&\ f_n \to f \implies f \in B^+$

3) $B^+ \cap -B^+ = \{0\}$, d.w.z.:
$f \in B^+\ \&\ -f \in B^+ \implies f = 0$

4) $B^+ - B^+ = B$, d.w.z.:
$\forall f \in B\ \exists g \in B^+$ zó dat $f \leq g$ $(g - f \in B^+)$.

Deze eigenschappen gelden zeker als B de ruimte is van alle continue (of meetbare) functies op X of $B = C_0(X)$.

Definitie 9.1: Een operator $A: B \to B$ is positief als geldt:

$$f \in B^+ \implies Af \in B^+.$$

I, de identiteit, is positief, zo ook 0. De positieve operatoren vormen een gesloten kegel d.w.z. $A_n \geq 0$ en $A_n x \to Ax$ voor alle x dan $A \geq 0$. Als A_0 en A_1 positief, dan ook $A_0 A_1$.

Zij nu T^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep contracties op B. Als voor zekere $\delta > 0$ geldt T^t is positief voor alle $t \in [0,\delta)$, dan is T^t positief voor alle $t \geq 0$. Dan is ook R_λ positief voor alle $\lambda > 0$. (Immers, $R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t x dt \in B^+$ als $x \in B^+$ daar B^+ gesloten is.) Omgekeerd geldt:

Stelling 9.1: Zij R_λ, $\lambda > 0$, de resolvente van een continue contractiehalfgroep T^t, $t \geq 0$. Als R_λ positief is voor alle $\lambda > 0$ dan ook T^t voor alle $t \geq 0$.

Bewijs: Zij $\lambda > 0$, A de voortbrenger van T^t en $A_\lambda = A \cdot \lambda R_\lambda =$
$= \lambda(\lambda R_\lambda x - x)$. A_λ is begrensd. $T^t_\lambda = e^{A_\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A_\lambda t)^n$ is een contractiehalfgroep met voortbrenger A_λ (zie §5 en stelling 8.5). Daar
$A_\lambda + \lambda I = \lambda^2 R_\lambda \geq 0$, geldt $e^{A_\lambda + \lambda I} \geq 0$ dus $T^t_\lambda = e^{-\lambda t}\, e^{(A_\lambda + \lambda I)t} \geq 0$.
$T^t_\lambda x \to T^t x$ als $\lambda \to \infty$ dus $T^t \geq 0$.

Stelling 9.2: Zij X een compacte metrische ruimte, dan is $C(X)$ separabel.

Bewijs: X is separabel. Zij $\{a_n\}$ dicht in X. Kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $\alpha > 0$ de functie $\phi_{n\alpha} \in C(X)$ zó dat

$$\chi_{B_\alpha(a_n)} \leq \phi_{n\alpha} \leq \chi_{B_{2\alpha}(a_n)}$$

waarbij $B_\alpha(x)$ de open bol met straal α en middelpunt x.
(Bv. $\phi_{n\alpha}(x) = 0 \vee 2(1 - \alpha^{-1} \cdot d(x,a_n)) \wedge 1$.)
Zij $\Phi = \{\lambda \cdot \phi_{n\alpha} \mid \lambda, \alpha \in \mathbb{Q},\ \lambda \geq 0,\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Zij $f\colon X \to [0,\infty)$ en zij $\varepsilon > 0$.
Voor iedere $x \in X$ is er een $\phi \in \Phi$ zó dat

1) $\phi \leq f$
2) $f(x) < \phi(x) + \varepsilon$.

Zij $U(x) = \{y \mid f(y) < \phi(y) + \varepsilon\}$. $U(x)$ is een open verzameling die x bevat, dus $\bigcup_{x \in X} U(x) \supset X$. X is compact, dus er bestaat een eindig stel $x_1, \dots, x_n$ zó dat $X \subset U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$. Laten $\phi_1, \dots, \phi_n$ de functies zijn bij $x_1, \dots, x_n$, dan geldt:

$$\max\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \leq f < \max\{\phi_1, \dots, \phi_n\} + \varepsilon.$$

Dus iedere positieve continue functie willekeurig dicht te benaderen door de aftelbare verzameling der maxima van eindige deelverzamelingen van de aftelbare verzameling Φ.

Opmerking: Een compacte Hausdorffruimte met aftelbare basis is metrizeerbaar, idem voor een lokaal compacte Hausdorffruimte met aftelbare basis.

Zij X een lokaal compacte metrische ruimte met metriek d. X is niet compact d.e.s.d. als $\sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\} = \infty$. Stel dit is het geval. Zij $\Delta \notin X$. We kunnen op $X \cup \{\Delta\} = X_\Delta$ een nieuwe metriek d_Δ definiëren zó dat

1) X_Δ is een compacte metrische ruimte

2) d en de beperking van d_Δ tot $X \subset X_\Delta$ geven X dezelfde topologie.

X_Δ is de eenpunts Hausdorffcompactificatie van X. Zij $C_0(X_\Delta) = \{\phi \in C(X_\Delta) \mid \phi(\Delta) = 0\}$. Dan geldt:

$$C_0(X_\Delta) \text{ is isometrisch isomorf met } C_0(X)$$

$$C(X_\Delta) = C_0(X_\Delta) + \mathbb{R}\cdot 1.$$

<u>Gevolg</u>: $C_0(X)$ is separabel.

Zij T^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep positieve contracties op $C(X)$, X compact. Zij $x \in X$ en $t \geq 0$. De afbeelding $\phi \mapsto (T^t\phi)(x)$ is een continue positieve lineaire functionaal op $C(X)$ met norm ≤ 1 daar T^t een contractie is. Uit de stelling van Riesz volgt dat er een reguliere maat μ op X bestaat zó dat

$$(T^t\phi)(x) = \int \phi \, d\mu.$$

μ is een kansmaat d.e.s.d. als $(T^t 1)(x) = 1$. In dit geval is T^t, $t \geq 0$, de beperking van een halfgroep o.w. op X tot $C(X) \subset B(\mathcal{B})$ (vgl. §4). Hetzelfde geldt als X slechts lokaal compact.

<u>Definitie 9.1</u>: Een stationair Markovproces $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, op een lokaal compacte metrische ruimte X met halfgroep o.w. P^t, $t \geq 0$, is een <u>Fellerproces</u> als geldt:

1) $\phi \in C_0(X) \implies P^t\phi \in C_0(X) \quad \forall t \geq 0$

2) $\|P^t\phi - \phi\| \to 0$ als $t \downarrow 0$

(vervang in 1) $C_0(X)$ door $C(X)$ als X compact is).

Zij R_λ, $\lambda \geq 0$, de resolvente van een continue halfgroep positieve contracties T^t, $t \geq 0$, op $C(X)$, X compact. Er geldt:

$$(\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda = R_\mu - R_\lambda$$

dus

$$\begin{aligned} &\mu R_\mu 1 - \lambda R_\lambda 1 \\ &= (\mu - \lambda)R_\mu 1 - \lambda(R_\lambda - R_\mu)1 \\ &= (\mu - \lambda)R_\mu 1 - \lambda(\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda 1 \\ &= (\mu - \lambda)R_\mu(1 - \lambda R_\lambda 1) \end{aligned}$$

waarmee bewezen is:

<u>Stelling 9.3</u>: Zij T^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep positieve contracties op $C(X)$, X compact, met resolvente R_λ, $\lambda \geq 0$. Dan geldt:

$$T^t 1 \text{ daalt in } t$$

$$\lambda R_\lambda 1 \text{ stijgt in } \lambda.$$

Voorts zijn equivalent:

1) $\exists t > 0: T^t 1 = 1$

2) $\forall t > 0: T^t 1 = 1$

3) $\forall \lambda > 0: \lambda R_\lambda 1 = 1$

4) $\exists \lambda > 0: \lambda R_\lambda 1 = 1.$

<u>Opmerking</u>: De stelling geldt ook voor $C_0(X)$ en X locaal compact.

<u>Stelling 9.4</u>: Zij X locaal compact niet compact, en zij T^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep positieve contracties op $C_0(X)$. Zij $X_\Delta = X \cup \{\Delta\}$ de éénpunts Hausdorff compactificatie van X. $C(X_\Delta) = C_0(X) + \mathbb{R}1$. Definieer $T^t_\Delta: C(X_\Delta) \to C(X_\Delta)$ door

$$T^t_\Delta \phi = T^t \phi \qquad \phi \in C_0(X)$$

$$T^t_\Delta 1 = 1.$$

Dan is T^t_Δ, $t \geq 0$, een continue halfgroep positieve contracties op $C(X_\Delta)$. T^t_Δ, $t \geq 0$, induceert een o.w. Q van $(X_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$ naar een meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{A}) = (X_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)^{[0,\infty)}$ zó dat voor iedere kansverdeling μ op $(X_\Delta, \mathcal{B}_\Delta)$ de coördinaatfuncties x_t, $t \geq 0$, op $(\Omega,\mathcal{A})$ t.o.v. de kansmaat μQ een Fellerproces vormen.

<u>Bewijs</u>: We hoeven slechts na te gaan dat T_Δ^t, $t \geq 0$, een continue halfgroep positieve contracties is. Dit geldt op de beide deelruimten $C_0(X) = C_0(X_\Delta)$ en $\mathbb{R}1$ dus op $C(X_\Delta)$.

<u>Opmerking</u>: $\Delta \in X_\Delta$ is absorberend, d.w.z. $Q(\Delta,\{\Delta\}) = 1$ waarbij $\{\Delta\}$ de verzameling bestaande uit de constante functie Δ: $[0,\infty) \to \Delta \in X_\Delta$.

<u>Stelling 9.5</u>: Zij $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, het Markovproces bij een o.d. verdeling op $\mathbb{R}^n$ met o.w. P^t, $t \geq 0$. Dan is $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, een Fellerproces.

<u>Bewijs</u>: $(P^t\phi)(x) = \int \phi(x + y)d\mu_t(y)$, dus $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n) \implies P^t\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, en daar $\mu_t \to \iota_0$ zwak als $t \downarrow 0$ (ι_0 de kansmaat geconcentreerd in 0) geldt $(P^t\phi)(x) \to \phi(x)$ als $t \downarrow 0$ voor $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. We moeten slechts bewijzen dat deze convergentie uniform is.

Zij $\varepsilon > 0$, $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\exists r > 0$, $\delta > 0$ zó dat

1) $\mu_t B_r(0) \geq 1 - \varepsilon$ als $t \leq \delta$ (immers $\mu_t B_r(0) \to 1$)

2) $||x|| \geq r \implies |\phi(x)| < \varepsilon$.

Zij $\tilde{\mu}_t$ de beperking van μ_t tot $B_r(0)$ en zij $M = ||\phi||$.
Zij $\psi_0(x,y) \in C_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ zó dat

$$||x|| + ||y|| \leq 3r \implies \psi_0(x,y) = 1$$

$$||x|| + ||y|| \geq 4r \implies \psi_0(x,y) = 0$$

$$0 \leq \psi_0(x,y) \leq 1$$

en zij $\psi(x,y) = \phi(x + y) \cdot \psi_0(x,y)$.

$$\begin{aligned} |P^t\phi(x) - \phi(x)| &\leq \left|\int \phi(x + y)d\mu_t(y) - \int \phi(x + y)d\tilde{\mu}_t(y)\right| \\ &+ \left|\int \phi(x + y) - \psi(x,y)d\tilde{\mu}_t(y)\right| \\ &+ \left|\int \psi(x,y)d\tilde{\mu}_t(y) - \psi(x,0)\right| + |\psi(x,0) - \phi(x)| \\ &\leq \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon \text{ wegens lemma 6.5.} \end{aligned}$$

§10. Continuïteitseigenschappen van het proces

In deze paragraaf beperken we ons tot de volgende situatie: X is een compacte metrische ruimte; $d(x,y)$ is de afstand tussen x en y in X; $\mathcal{B}$ is de σ-algebra der Borelverzamelingen van X; $C(X)$ is de lineaire ruimte der continue functies $f: X \to \mathbb{R}$ met de sup-norm, $||f|| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. $C(X)$ is een separabele Banachruimte.
T^t, $t \geq 0$, is een continue halfgroep positieve contracties op $C(X)$ met de eigenschap: $T^t 1 = 1$ voor alle $t \geq 0$.
Er bestaat dan een meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{A})$, voor iedere $t \geq 0$ een meetbare afbeelding $x_t: \Omega \to X$ en een o.w. Q van X naar Ω zó dat:

Voor iedere kansverdeling μ op X is $\underline{x}_t$, $t \geq 0$, een stationair markovproces op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P = \mu Q)$ met toestandsruimte X, en er geldt:

1) $\mathcal{E}(\phi(\underline{x}_{s+t}) \mid \underline{x}_s) = (T^t\phi)(\underline{x}_s)$ voor iedere $\phi \in C(X)$, $s \geq 0$, $t \geq 0$;
2) $P\{\underline{x}_0 \in B\} = \mu B$ voor alle $B \in \mathcal{B}$.

Stelling 10.1: Zij μ_t de kansverdeling die $\underline{x}_t$ induceert op X, d.w.z. $\mu_t B = P\{\underline{x}_t \in B\}$ voor iedere $B \in \mathcal{B}$. De kansverdeling μ_t hangt continu af van t en van de beginkans $\mu = \mu_0$:

$$\left.\begin{array}{l} \mu^{(n)} \xrightarrow{\text{zwak}} \mu \\ t^{(n)} \longrightarrow t \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu^{(n)}_{t^{(n)}} \xrightarrow{\text{zwak}} \mu_t .$$

Bewijs: Zij $\phi \in C(X)$. $\int \phi d\mu_s = \int T^s\phi d\mu = \mu T^s \phi$.

$$\left|\int \phi d\mu^{(n)}_{t^{(n)}} - \int \phi d\mu_t\right| = |\mu^{(n)} T^{t^{(n)}} \phi - \mu T^t \phi|$$

$$\leq |\mu^{(n)} T^{t^{(n)}} \phi - \mu^{(n)} T^t \phi| + |\mu^{(n)} T^t \phi - \mu T^t \phi|.$$

De eerste term → 0 daar $||T^{t^{(n)}} \phi - T^t \phi|| \to 0$ de tweede daar $T^t\phi$ continu is.

Lemma 10.1: Zij Y een compacte metrische ruimte. Voor $\psi \in C(Y \times X)$ definiëren we:

$$(T^t\psi)(y,x) = (T^t\psi(y))(x)$$

(immers voor vaste y is $\psi(y) \in C(X)$ dus $T^t\psi(y) \in C(X)$.) Er geldt

1) $T^t\psi \in C(Y \times X)$

2) $T^t\psi \to \psi$ in $C(Y \times X)$ als $t \downarrow 0$.

Bewijs: Zij Ψ de verzameling der $\psi \in C(Y \times X)$ die voldoen aan 1) en 2). Dan:

a) Ψ is een ~~li~~neaire ruimte.

b) Ψ is gesloten in $C(Y \times X)$, immers:

1) $||\psi|| \leq \varepsilon \implies ||T^t\psi|| \leq \varepsilon$

2) $||T^t\psi - \psi|| \leq ||T^t\psi - T^t\psi_n|| + ||T^t\psi_n - \psi_n|| + ||\psi_n - \psi||$.

c) Ψ bevat de functies $\psi_1(y) \cdot \psi_2(x)$ met $\psi_1 \in C(Y)$ en $\psi_2 \in C(X)$.

Uit de stelling van Stone-Weierstrass volgt nu $\Psi = C(Y \times X)$.

Opmerking: $\mathcal{E}^{\underline{x}_s}\psi(\underline{x}_s,\underline{x}_{s+t}) = (T^t\psi)(\underline{x}_s,\underline{x}_s)$. Dit geldt immers voor $\psi(Y,X) = \psi_1(Y)\psi_2(X)$.

Stelling 10.2: $\underline{x}_t$, $t \geq 0$ is continu in kans, en wel uniform in t en in de beginverdeling μ:

Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat voor $0 \leq s < t \leq s+\delta$ en μ willekeurig geldt $(P = \mu Q)$:

$$P\{d(\underline{x}_s,\underline{x}_t) < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon.$$

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$.

Zij
$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$$
$$\Delta_\varepsilon = \{(x,y) \mid d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Kies $\phi \in C(X \times X)$ zó dat

$$\chi_\Delta \leq \phi \leq \chi_{\Delta_\varepsilon} \qquad \text{(bv. } \phi(x,y) = (1 - \varepsilon^{-1}d(x,y))^+.\text{)}$$

$T^t\phi \to \phi$, dus er bestaat een $\delta > 0$ zó dat

$$|(T^t\phi)(Y,X) - \phi(Y,X)| < \varepsilon \text{ als } t \leq \delta.$$

$\phi(x,x) = 1$, dus $t \leq \delta \implies (T^t\phi)(x,x) > 1 - \varepsilon$.

Zij $0 \leq s < t = s+h$ met $h \leq \delta$:

$$P\{d(\underline{x}_s,\underline{x}_t) < \varepsilon\} = \mathbb{E}\,\chi_{\Delta_\varepsilon}(\underline{x}_s,\underline{x}_t)$$

$$\geq \mathbb{E}\,\phi(\underline{x}_s,\underline{x}_t)$$

$$= \mathbb{E}\,(T^h\phi)(\underline{x}_s,\underline{x}_s)$$

$$\geq \mathbb{E}\,(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon.$$

Gevolg 1: Als kansveld mogen we nemen

$$(\Omega,\mathcal{A}) = (X^R,\mathcal{B}^R)$$

waarbij $R = [0,\infty) \cap Q$ (Q de verzameling der rationale getallen). (Algemener: R een dichte deelverzameling van $[0,\infty)$.)

Bewijs: Zij $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}}) = (X^{[0,\infty)},\mathcal{B}^{[0,\infty)})$. Hierop is het proces altijd wel te definiëren. Beschouw nu:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \downarrow \tilde{x}_t & & \downarrow x_t \end{array}$$

waarbij $(\tilde{\Omega},\tilde{x}_t,t \geq 0)$ gegeven. Voor $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ definiëren we $\Phi(\tilde{\omega})$ is de beperking van de functie $\tilde{\omega}$: $[0,\infty) \to X$ tot R. Φ is meetbaar en $x_r(\Phi) = \tilde{x}_r$ als x_r de r^e coördinaatfunctie op Ω, $r \in R$.

Zij $t \notin R$. Kies een rij $r_n \to t$, $r_n \in R$ zó dat

$$P\{d(\tilde{\underline{x}}_{r_n},\tilde{\underline{x}}_t) \geq 2^{-n}\} < 2^{-n} \text{ uniform in } P.$$

Definieer $x_t(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{r_n}(\omega)$ waar deze limiet bestaat en verder willekeurig constant. Dan geldt:

$$\{\underline{x}_t(\Phi) \neq \tilde{\underline{x}}_t\} \subset \{\tilde{\underline{x}}_{r_n} \not\to \tilde{\underline{x}}_t\},$$

dus deze verzameling heeft kans = 0 voor iedere P.

Gevolg 2: $(\Omega,\mathcal{A})$ is als meetbare ruimte niet te onderscheiden van $([0,1],\mathcal{B}_1)$ (tenzij X slechts uit één punt bestaat).

Gevolg 3: De meeste interessante verzamelingen zijn meetbaar.

Voorbeeld: Zij F de verzameling der $\omega \in \Omega$ waarvoor geldt:

Voor iedere begrensde monotone rij r_n uit R convergeert de rij $\omega(r_n)$.

M.a.w. $\omega(t + 0)$ en $\omega(t - 0)$ bestaan voor alle reële $t \geq 0$. We zullen aantonen dat F meetbaar is, en tegelijk enige notatie voor het vervolg invoeren.

Zij $S \subset \mathbb{R}$, S eindig. Zij $s_0, \ldots, s_k \in S$ en $s_0 < \ldots < s_k$, $s_0 = \min S$.
Zij $\alpha > 0$.

$$S(\alpha, s_0, \ldots, s_k) = \{d(\underline{x}_{s_{i-1}}, \underline{x}_{s_i}) \geq \alpha \ \&\ d(\underline{x}_{s_{i-1}}, \underline{x}_s) < \alpha$$

$$\text{voor alle } s \in (s_{i-1}, s_i) \cap S \text{ en } i = 1, \ldots, k\}.$$

$$\underline{h}(\alpha, S) = \sup k\chi_{S(\alpha, s_0, \ldots, s_k)}$$

waarbij het supremum genomen wordt over alle stelsels $s_0, \ldots, s_k$ in S met $s_0 < \ldots < s_k$, $s_0 = \min S$.

Als $S_0 \subset S_1$ en $\min S_0 = \min S_1$ dan $\underline{h}(\alpha, S_0) \leq \underline{h}(\alpha, S_1)$.

Voor aftelbare S definiëren we

$$\underline{h}(\alpha, S) = \sup \{\underline{h}(\alpha, E) \mid E \subset S \text{ en E eindig}\}.$$

$\underline{h}(\alpha, S) \geq k$ d.e.s.d. als er k+1 punten $s_0 < \ldots < s_k$ in S te vinden zijn zó dat $d(\underline{x}_{s_{i-1}}, \underline{x}_{s_i}) \geq \alpha$.

Lemma 10.2: $h(\alpha, S)(\omega)$ is eindig voor iedere $\alpha > 0$ d.e.s.d. als geldt: Voor iedere monotone rij (s_n) uit S is de rij $\omega(s_n)$ een fundamentaalrij.

Bewijs: Stel $\omega(s_n)$ is geen f.r. en s_n monotoon. Dan bestaat er een $\alpha > 0$ zó dat er bij iedere n_0 getallen $n, m > n_0$ te vinden zijn met $d(\omega(s_n), \omega(s_m)) > 2\alpha$. We kunnen dan een oneindige monotone rij s_{n_k} construeren zó dat geldt $d(\omega(s_{n_{k-1}}), \omega(s_{n_k})) > \alpha$. Dus $h(\alpha, S)(\omega) = \infty$. Stel $h(2\alpha, S)(\omega) = \infty$ voor een $\alpha > 0$. Zij $s_0 \in S$ willekeurig en definieer $S_0 = S \ \ (-\infty, s_0]$ of $S_0 = S \cap [s_0, \infty)$ zó dat $h(2\alpha, S_0) = \infty$, b.v. $S_0 = S \cap [s_0, \infty)$.

Definieer nu achtereenvolgens S_1, S_2, ... met $S_n = [s_n,\infty) \cap S$, s_n stijgend, $d(\omega(s_n),\omega(s_{n+1})) \geq \alpha$ en $h(2\alpha,S_n) = \infty$. Dit kan. $\omega(s_n)$ is geen f.r. In ons geval is X compact en convergeert iedere f.r. Voor iedere $\alpha > 0$ zij $I_n(\alpha)$ een rij begrensde intervallen in R die $[0,\infty)$ overdekt, dan

$$F^c = \bigcup_{n,m} \{\underline{h}(\alpha_m, I_n(\alpha_m)) = \infty\}$$

waarbij $\alpha_m \downarrow 0$ willekeurig.

Teneinde de continuïteit van de paden ω te onderzoeken, definiëren we voor iedere $S \subset R$, $x \in X$ en $\alpha > 0$ de verzameling

$$S(\alpha,x) = \bigcup_{s\in S} \{d(\underline{x}_s,x) \geq \alpha\}.$$

We zullen nu aantonen dat voor iedere $\alpha > 0$

$$P\, S_\delta(\alpha,\underline{x}_0) \to 0 \text{ uniform in } P \text{ als } \delta \downarrow 0$$

waarbij $S_\delta = [0,\delta] \cap R$. Dit impliceert dat de paden b.z. rechtscontinu zijn in 0.

Lemma 10.3: A en B zijn meetbare deelverzamelingen van X, $r \in R$ en $S \subset [0,r] \cap R$. Als $\chi_A T^t \chi_B \leq q$ voor alle $t \leq r$, dan

$$P \bigcup_{t\in S} \{\underline{x}_t \in A \;\&\; \underline{x}_r \in B\} \leq q\, P \bigcup_{t\in S} \{\underline{x}_t \in A\}.$$

Bewijs: Het is voldoende de ongelijkheid te bewijzen voor eindige verzamelingen S: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq r$.
Zij $A_k = \{\underline{x}_{t_0} \notin A \;\&\; \ldots \;\&\; \underline{x}_{t_{k-1}} \notin A \;\&\; \underline{x}_{t_k} \in A\} \subset \{\underline{x}_{t_k} \in A\}$

$$P(A_k \cap \{\underline{x}_r \in B\}) = \mathcal{E} \chi_{A_k} \cdot \chi_{\{\underline{x}_{t_k} \in A\}} \cdot (T^{r-t_k}\chi_B)(\underline{x}_{t_k})$$

$$= \mathcal{E} \chi_{A_k} (\chi_A T^{r-t_k} \chi_B)(\underline{x}_{t_k})$$

$$\leq q\; \mathcal{E}\chi_{A_k} = q \cdot PA_k.$$

De verzamelingen A_k zijn disjunct en hun vereniging is $\bigcup_{t\in S} \{\underline{x}_t \in A\}$.
Dit levert de ongelijkheid.

$B_\rho(x)$ is de open bol in X met straal ρ en middelpunt x.

Lemma 10.4: $\chi_{B^c_{2\alpha}(u)} T^t \chi_{B_\alpha(u)} \to 0$ als $t \downarrow 0$ uniform in $u \in X$.

Bewijs: Kies $\phi(u,x) \in C(X \times X)$ zó dat

$$\chi_{B_\alpha(u)}(x) \leq \phi(u,x) \leq \chi_{B_{2\alpha}(u)}(x)$$

dan $T^t\phi \to \phi$ in $C(X \times X)$ als $t \downarrow 0$, dus zeker
$\chi_{B^c_{2\alpha}(u)}(x)(T^t\phi)(u,x) \to \chi_{B^c_{2\alpha}(u)}(x)\phi(u,x) = 0$ uniform in u en x als $t \downarrow 0$.

Lemma 10.5: Zij $S_\delta = [0,\delta] \cap R$ voor $\delta > 0$, en zij $\alpha > 0$. Er geldt:

$$\lim_{\delta\to 0} P\, S_\delta(\alpha,\underline{x}_0) = 0 \text{ uniform in P.}$$

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta \in R$ zó dat

1) $P\{d(\underline{x}_0,\underline{x}_\delta) \geq \alpha\} \leq \varepsilon$ uniform in P

2) $t \leq \delta \implies \chi_{B^c_{2\alpha}(u)} T^t \chi_{B_\alpha(u)} \leq \varepsilon$ uniform in u.

Daar $S_\delta(2\alpha,\underline{x}_0) \subset \{d(\underline{x}_0,\underline{x}_\delta) \geq \alpha\} \cup (S_\delta(2\alpha,\underline{x}_0) \cap \{d(\underline{x}_0,\underline{x}_\delta) < \alpha\})$ en
$P^*(S_\delta(2\alpha,\underline{x}_0) \cap \{d(\underline{x},\underline{x}_\delta) < \alpha\}) \leq \varepsilon P^* S_\delta(2\alpha,\underline{x}_0) \leq \varepsilon$ uniform in x, geldt

$$P\, S_\delta(2\alpha,\underline{x}_0) \leq 2\varepsilon \text{ uniform in P.}$$

Stelling 10.3: Zij $t \geq 0$, t reëel. Er bestaat een meetbare verzameling $N_t \subset \Omega$ zó dat

1) $\omega \notin N_t \implies \omega$ is continu in t.

2) $PN_t = 0$ voor iedere kansmaat.

Bewijs: Kies $r_n \in R$ zó dat $r_n < t < r_n + \frac{1}{n}$ ($r_n = t$ als $t = 0$).
Zij $S_n = R \cap [r_n, r_n + \frac{1}{n}]$. Zij $\alpha > 0$.

$P^{\underline{x}_{r_n}} S_n(\alpha,\underline{x}_{r_{n_1}}) \to 0$, dus $P\, S_n(\alpha,\underline{x}_{r_n}) \to 0$ uniform in P.

$N_t = \bigcup_m \bigcap_n S_n(\frac{1}{m}, \underline{x}_{r_n})$ voldoet.

Stelling 10.4: Als kansveld Ω mogen we nemen Ω is de verzameling van alle functies ω: $[0,\infty) \to X$ die voldoen aan:

1) ω is rechtscontinu op $[0,\infty)$
2) de linkerlimiet $\omega(t - 0)$ bestaat voor alle $t \in (0,\infty)$.

Bewijs: Zij $\Omega_1 = X^R$. Een functie uit Ω is volledig bepaald door zijn beperking tot R, dus Ω bestaat uit de rechtscontinue functies uit F (zie voorbeeld na stelling 2). Merk op dat we slechts rechtscontinuïteit in rationale punten hoeven te controleren. We hebben gezien dat de functies ω: $R \to X$ die continu zijn in alle rationale punten maat 1 hebben voor elke beginverdeling μ (vorige stelling), dus het is voldoende te bewijzen $PF = 1$ voor iedere kans $P = \mu Q$ op Ω_1. We zullen daartoe aantonen dat voor iedere $\alpha > 0$ er een $\delta > 0$ te vinden is zó dat voor $S_\delta = R \cap [0,\delta]$ geldt

$$P\{\underline{h}(\alpha,S_\delta) = \infty\} = 0 \text{ uniform in } P$$

waaruit volgt $PF^c = 0$.

Zij $\alpha > 0$. Kies $\delta > 0$ zó dat $P\, S_\delta(\alpha,\underline{x}_0) \leq q < 1$ uniform in P. Zij $S \subset S_\delta$, S eindig. $S_k = S \cap [s_k,\infty)$. Dan

$$P \bigcup_{s_{k+1}} S(\alpha, s_0, \ldots, s_{k+1})$$

$$= P(S(\alpha, s_0, \ldots, s_k) \cap S_k(\alpha,\underline{x}_{s_k}))$$

$$= \epsilon\, \chi_{S(\alpha, s_0, \ldots, s_k)} P^{\underline{x}_{s_k}} S_k(\alpha,\underline{x}_{s_k})$$

$\leq q\, P\, S(\alpha, s_0, \ldots, s_k)$ (zie voorbeeld bij stelling 2 voor notatie).

Duidelijk is $\bigcup_{s_1} S(\alpha, s_0, s_1) = S(\alpha,\underline{x}_{s_0})$ zó dat

$$P\{\underline{h}(\alpha,S) \geq k\} \leq q^{-k}.$$

Dit geldt voor iedere eindige $S \subset S_\delta$, dus ook voor S_δ. Hiermee is de stelling bewezen.

Stelling 4 kan m.b.v. de theorie van de martingalen vrij eenvoudig bewezen worden:
Zij $f_0 \in C(X)$ en $f_0 > 1$. dom A ligt dicht in $C(X)$, dus er bestaat een $f \in$ dom A zó dat $||f - f_0||$ klein en ook $f > 1$. Zij $g = Af$ en zij $M = \sup - g(x)$

$$T^t f = f + tg + o(t) \quad t \downarrow 0.$$

Bewering: $\underline{y}_t = e^{Mt} f(\underline{x}_t)$ is een submartingaal. Immers

$$\mathcal{E}(\underline{y}_{s+t} \mid \underline{x}_s) = (T^t(e^{M(t+s)} f))(\underline{x}_s)$$

$$= e^{M(t+s)}(f + tg + o(t))(\underline{x}_s) \geq e^{Ms} f(\underline{x}_s)$$

daar het quotiënt $= e^{Mt}(1 + \frac{tg + o(t)}{f}) \geq 1$ als t voldoende klein.
Uit de theorie der martingalen is bekend dat $\underline{y}_t$, $t \in R$, met kans 1 overal linker- en rechterlimiet bezit, dus ook $f(\underline{x}_t)$ heeft deze eigenschap.
X heeft een aftelbare open basis (U_n). Kies bij elk paar U,V uit deze basis met $\overline{U}$ en $\overline{V}$ disjunct een $f \in$ dom A zó dat

$$f > 1$$

$$f \leq 2 \text{ op } U$$

$$f \geq 3 \text{ op } V.$$

Dan geldt $\underline{x}_t$, $t \in R$, heeft overal linker- en rechterlimiet $\iff$ $f(\underline{x}_t)$, $t \in R$ heeft overal linker- en rechterlimiet voor iedere f in deze aftelbare verzameling functies - en de kans hierop is 1.

Literatuur

E.B. Dynkin, Markov processes I, Springer, Berlin, 1965.

W. Feller, An introduction to probability theory and its applications II, Wiley, New York, 1966.

M. Loève, Probability theory, D. van Nostrand, New York, 1963.

Inhoud