

Scriptum 3

Mathematisch Centrum

2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam.

SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES

J.G. van der Corput.

Scriptum 3

SUR LES FONCTIONS SYMETRIQUES

J. G. van der Corput.

Considérons m quantités indéfinies z_1, \dots, z_m et leurs fonctions symétriques élémentaires

$$a_1 = \sum z_i = z_1 + z_2 + \dots + z_m;$$

$$a_2 = \sum z_i z_j = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_m + z_2 z_3 + \dots + z_{m-1} z_m;$$

$$(1) \quad a_3 = \sum z_i z_j z_k$$

.....

$$a_{m-1} = \sum z_i z_j \dots z_{m-1} = z_1 z_2 \dots z_{m-1} + \dots + z_2 z_3 \dots z_m$$

$$a_m = z_1 z_2 \dots z_m$$

Ces sommes sont composées respectivement de $\binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m-1}$ termes. Posons $a_h = 0$ pour $h > m$.

Considérons en outre les sommes

$$\sum z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$$

où les exposants désignent des entiers ≥ 0 , dont on obtient tous les termes en permutant les m exposants k_1, \dots, k_m de toutes les manières possibles.

J'appelle une telle somme une somme simple. Le nombre des termes de cette somme est égal à

$$\frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_v!}$$

si le système formé par les exposants contient j_i

nombre égaux, j_2 nombre égaux différents des j_1 nombre déjà mentionnés, j_3 nombre égaux différents des $j_1 + j_2$ nombre déjà mentionnés, finalement j_v nombre égaux différents des $j_1 + \dots + j_{v-1}$ nombre déjà mentionnés, de telle manière qu'on ait $j_1 + \dots + j_v = m$. Par exemple pour $m = 4$ la somme simple $\sum z_1^3 z_2^3 z_3 z_4$ est composée de $\frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ termes.

Je poserai $\{k_1, \dots, k_r\}$, où r désigne un nombre naturel $\leq m$ et où les nombres k_1, \dots, k_r sont entiers et positifs, égale à la somme simple

$$\sum z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r} z_{r+1}^0 \dots z_m^0 .$$

Cette somme est composée de $\frac{m!}{j_1! \dots j_u! (m-r)!}$

termes, si le système formé par les exposants positifs k_1, \dots, k_r contient j_1 nombre égaux, j_2 nombre égaux différents des j_1 nombre déjà mentionnés finalement $j_1 + \dots + j_u$ nombre égaux différents des $j_1 + \dots + j_{u-1}$ nombre déjà mentionnés de telle manière qu'on ait $j_1 + \dots + j_u = r$.

Une somme simple est une fonction entière rationnelle symétrique de z_1, \dots, z_m et peut donc être écrite comme une fonction entière rationnelle de a_1, \dots, a_m . Par exemple

$$(2) \quad \{2\} = a_1^2 - 2a_2$$

$$(3) \quad \{4, 2\} = a_1^4 a_2^2 - 2a_1^3 a_3 - 2a_2^3 + 4a_1 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_4 - 3a_3^2 + 2a_2 a_4 - 6a_1 a_5 + 6a_6$$

et

$$(4) \quad \{2\}\{2\} - \{4\} = 2a_2^2 - 4a_1 a_3 + 4a_4.$$

Introduisons l'opérateur différentiel

$$[k_1, \dots, k_r] = \frac{1}{j_1! \dots j_u!} \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu_1-k_1} \dots$$

$$\dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

où k_1, \dots, k_r sont des entiers positifs, tous $\leq m$
 où j_1, \dots, j_u ont la signification indiquée ci-des-
 sus et où $a_0=1$. Cet opérateur peut être appliqué
 à chaque fonction entière rationnelle de a_1, \dots, a_m .
 Si au moins un des entiers k_1, \dots, k_m est supéri-
 eur à m , on conviendra que l'opérateur
 $[k_1, \dots, k_m]$ est l'opérateur nul, c'est-à-dire l'opé-
 rateur qui rend indistinctement nulle toute fonction
 entière rationnelle de a_1, \dots, a_m .

L'opérateur $[k_1, \dots, k_r]$ peut être appliqué, non
 seulement aux fonctions rationnelles de a_1, \dots, a_m ,
 mais même aux fonctions rationnelles contenant
 a_1, \dots, a_m et des sommes simples. Dans ce cas chaque
 somme simple doit être remplacée d'abord par la
 fonction entière rationnelle de a_1, \dots, a_m , qui lui
 est égale pour toutes les valeurs de m . Par exemple
 $\{4, 2\}$ doit être remplacée par le membre de droite
 de (3). Si m est inférieur à 6, cette somme simple
 $\{4, 2\}$ est aussi égale à
 $a_1^2 a_2^2 - 2a_1^3 a_3 - 2a_2^3 + 4a_1 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_4 - 3a_3^2 + 2a_2 a_4 - 6a_1 a_5$
 où le terme $6a_1 a_5$ manque, mais même dans ce cas on ne

doit pas remplacer $\{4,2\}$ par cette expression, parcequ'elle ne représente pas la somme $\{4,2\}$ pour toutes les valeurs de m , puisqu'il y manque le terme $6a_6$. Par exemple

$$[1]\{2\} = [1] (a_1^2 - 2a_2) = 2a_1 - 2a_1 = 0.$$

Les opérateurs suivants sont les plus importants:

$$(5) \begin{cases} A_1 = [1] = \frac{1}{1!} \sum_{\mu=1}^m a_{\mu-1} \frac{\partial}{\partial a_{\mu}} ; \\ A_2 = [1, 1] = \frac{1}{2!} \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m a_{\mu-1} a_{\nu-1} \frac{\partial^2}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}} \\ A_3 = [1, 1, 1] = \frac{1}{3!} \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m \sum_{\rho=1}^m a_{\mu-1} a_{\nu-1} a_{\rho-1} \frac{\partial^3}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu} \partial a_{\rho}} \end{cases}$$

etc.

Ces opérateurs interviennent dans le théorème suivant.

Théorème 1

L'opérateur A_k , appliqué à une somme simple (k_1, \dots, k_r) la rend identiquement nulle si k ne figure pas dans le système des exposants de la somme simple. Si k figure dans ce système on obtient le résultat en remplaçant dans la somme simple r par $r-1$ et en supprimant un nombre k dans le système des exposants ¹⁾.

Par exemple $\begin{cases} A_1 \{4, 2\} = 0; \\ A_4 \{4, 2\} = \{2\}; \\ A_4 \{4, 4, 4, 3, 2\} = \{4, 4, 3, 2\}. \end{cases}$

¹⁾ On trouve le cas particulier $k=1$ de ce théorème dans J.G.v.d. Corput, Symmetrische functies, Christiaan Huygens 18 (1940), p. 251-277.

A cause de ce théorème j'appelle A_k l'opérateur supprimant k (en anglais: the k -canceling operator; en hollandais: de k -schrappen).

En outre nous démontrerons le théorème suivant d'isomorphie:

Théorème 2.

Soit donnée une identité entière rationnelle contenant les nombres a_1, a_2, \dots, a_m et des sommes simples. Cette identité reste valable si l'on remplace les nombres a_1, \dots, a_m par les opérateurs A_1, \dots, A_m et en outre chaque somme simple $\{k_1, \dots, k_r\}$ par l'opérateur correspondant $[k_1, \dots, k_r]$.

Par exemple il suit de (2), (3) et (4) que

$$[2] = A_1^2 - 2A_2;$$

$$[4, 2] = A_1^2 A_2^2 - 2A_1^3 A_3 - 2A_2^3 + 4A_1 A_2 A_3 + 2A_1^2 A_4 - 3A_3^2 +$$

$$(5) \quad + 2A_2 A_4 - 6A_1 A_5 + 6A_6 \quad \text{et}$$

$$[2][2] - [4] = 2A_2^2 - 4A_1 A_3 + 4A_4.$$

Les formules (1) entraînent (5).

Supposons que $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_t$ soient des entiers positifs tel qu'on ait $k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_t$

On a

$$(6) \quad [k_1, \dots, k_r] a_1 a_{1_2} \dots a_{1_t} = 1,$$

si $r=t$ et si les systèmes (k_1, \dots, k_r) et (l_1, \dots, l_t) sont les mêmes, peut-être à l'ordre près. Dans tous les autres cas le résultat s'annule. En effet, le membre de gauche de (6) est égal à

$$(7) \quad \frac{1}{j_1! \dots j_u!} \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m \frac{\partial^r a_{1_1} \dots a_{1_t}}{\partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

Il suffit de considérer dans cette somme les termes dans lesquels le système (μ_1, \dots, μ_r) est un système partiel du système (l_1, \dots, l_t) , puisque les autres termes s'annulent. En vertu de

$$(8) \mu_1 \geq k_1; \dots; \mu_r \geq k_r; \mu_1 + \dots + \mu_r \geq k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_t,$$

on trouve que dans tous ces termes les systèmes (μ_1, \dots, μ_r) et (l_1, \dots, l_t) sont les mêmes peut-être à l'ordre près. On obtient donc

$$\mu_1 + \dots + \mu_r = l_1 + \dots + l_t = k_1 + \dots + k_r$$

d'où il suit à cause de (8) que

$$\mu_1 = k_1, \dots, \mu_r = k_r.$$

Ainsi on trouve que tous les termes figurant dans la somme (7) s'annulent, si les systèmes (k_1, \dots, k_r) et (l_1, \dots, l_t) ne sont pas les mêmes. Si ces deux systèmes sont les mêmes, on a

$$(9) [k_1, \dots, k_r] a_{l_1}, \dots, a_{l_t} = \frac{1}{j_1! \dots j_u!} \frac{\partial^r a_{k_1} \dots a_{k_r}}{\partial a_{k_1} \dots \partial a_{k_r}}$$

Le dernier facteur peut être écrit comme un produit de u facteurs, dont chacun a la forme

$$\frac{\partial^j (a_k^j)}{\partial a_k^j} = j!,$$

si k figure exactement j fois dans le système (k_1, \dots, k_r) . Par conséquent le membre de droite de (9) est égal à

$$\frac{j_1! \dots j_u!}{j_1! \dots j_u!} = 1.$$

Le résultat, ainsi démontré, nous montre encore plus. Toute somme simple $\{k_1, \dots, k_r\}$ peut être écrite comme une somme de termes de la forme $ca_{l_1} \dots a_{l_t}$, où $l_1 + \dots + l_t = k_1 + \dots + k_r$ et où c désigne une constante. Je dis que le coefficient est égal à $[l_1, \dots, l_t] \{k_1, \dots, k_r\}$. Car l'opérateur $[l_1, \dots, l_t]$, appliqué à la somme simple $\{k_1, \dots, k_r\}$, donne la contribution c à cause du terme $ca_{l_1} \dots a_{l_t}$ tandis que la contribution des autres termes est égale à zéro.

Si $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_t$ sont des entiers positifs tels qu'on ait $k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_t$, on a la loi commutative

$$[k_1, \dots, k_r] \{l_1, \dots, l_t\} = [l_1, \dots, l_t] \{k_1, \dots, k_r\}.$$

Autrement dit *) : si l'on écrit les sommes simples $\{k_1, \dots, k_r\}$ et $\{l_1, \dots, l_t\}$ comme fonctions rationnelles symétriques de a_1, a_2, \dots le coefficient de

*) Cette remarque a été faite déjà par Cayley. Cf G. Salmon, Modern higher algebra 4^{ème} édition, 1885, p. 356;

J. G. v. d. Corput, Christiaan Huygens 18 (1911) 257. Ce livre de Salmon contient les tables des fonctions symétriques de degré ≤ 10 , écrites comme fonctions entières rationnelles de a_1, a_2, \dots

$a_{l_1} \dots a_{l_t}$ dans le développement de $[k_1, \dots, k_r]$ est égal au coefficient de $a_{k_1} \dots a_{k_r}$ dans le développement de $\{l_1, \dots, l_t\}$.

Pour la démonstration de cette loi j'introduis non seulement les quantités indéfinies z_1, \dots, z_m , mais aussi de nouvelles quantités indéfinies w_1, \dots, w_n et je pose

$$(w-w_1) \dots (w-w_n) = w^n - b_1 w^{n-1} \dots \pm b_n$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \prod_{\mu=1}^m \prod_{\nu=1}^n (1 - z_\mu w_\nu) &= z_\mu^n \prod_{\mu=1}^m \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{z_\mu} - w_\nu \right) = \\ &= \prod_{\mu=1}^m (1 - b_1 z_\mu + \dots \pm b_n z_\mu^{n-1}) \dots \end{aligned}$$

Le membre de droite peut être écrit comme une fonction entière rationnelle de b_1, \dots, b_n et dans ce polynome le coefficient de $(-)^{k_1 + \dots + k_r} b_{k_1} \dots b_{k_r}$ est égal à la somme simple

$$\{k_1, \dots, k_r\} = \sum a_{l_1} \dots a_{l_t} [l_1, \dots, l_t] \{k_1, \dots, k_r\}.$$

Ainsi on trouve

$$\prod_{\nu=1}^n \prod_{\mu=1}^m (1 - z_\mu w_\nu) = \sum (-)^{k_1 + \dots + k_r} a_{l_1} \dots a_{l_t} b_{k_1} \dots b_{k_r} [l_1, \dots, l_t] \{k_1, \dots, k_r\},$$

où la somme est étendue aux systèmes formés par les entiers positifs $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_t$, avec

$$k_1 + \dots + k_r = l_1 + \dots + l_t.$$

En échangeant les systèmes z_1, \dots, z_n et w_1, \dots, w_n on trouve la loi commutative. Après ces remarques préliminaires il est facile de démontrer le théorème 1. Ce théorème est évident dans le cas particulier $r=1$ et $k_1=1$, puisqu'alors on a

$$\{k_1 \dots k_r\} = \{1\} = \sum z_1 = a_1$$

et

$$A_k a_1 = 1 \text{ ou } 0 \text{ selon que } k=1 \text{ ou } k > 1.$$

Dans la démonstration nous pouvons donc supposer que $k_1 + \dots + k_r > 1$ et que le théorème a été déjà démontré, si l'on remplace $k_1 + \dots + k_r$ par un plus petit entier positif. Puisque A_k est un opérateur différentiel d'ordre k , on peut écrire

$A_k \{k_1, \dots, k_r\}$ comme une somme de termes de la forme $c\{m_1, \dots, m_q\}$, où $m_1 + \dots + m_q = k_1 + \dots + k_r - k$. Donc

$$(10) \quad A_k \{k_1, \dots, k_r\} = \sum c\{m_1, \dots, m_q\}.$$

Si l'on applique l'opérateur A_{m_1}, \dots, A_{m_q} à cette relation, la contribution du terme $c\{m_1, \dots, m_q\}$ est égale à c d'après notre hypothèse d'induction, tandis que la contribution des autres termes s'annule. Par conséquent le coefficient c figurant dans le membre de droite de (10) est égal à

$$A_{m_1} \dots A_{m_q} A_k \{k_1, \dots, k_r\},$$

donc d'après la loi commutative égal à

$$[k_1 \dots k_r] a_{m_1} \dots a_{m_q} a_k.$$

D'après le raisonnement donné ci-dessus, ce résultat

est égal à 1; si les systèmes (k_1, \dots, k_r) et (m_1, \dots, m_q, k) sont les mêmes, peut-être à l'ordre près tandis que ce résultat s'annule dans tous les autres cas. Par conséquent tous les termes figurant dans le membre de droite de (10) s'annulent, si k ne figure pas dans le système k_1, \dots, k_r . Si par contre k figure dans ce système, le membre de droite de (10) est composé d'un seul terme $\{m_1, \dots, m_q\}$, où $q=r-1$; on obtient ce système m_1, \dots, m_q en supprimant le nombre k dans le système $\{k_1, \dots, k_r\}$. Ainsi le théorème 1 est démontré. Avant de passer à la démonstration du théorème d'isomorphie, nous donnons d'abord quelques applications du théorème 1.

La théorie générale donne

$$(11) \quad \begin{aligned} \sum z_1^4 z_2^2 = & p_1 a_1^2 a_2^2 + p_2 a_2^3 + p_3 a_1^3 a_3 + p_4 a_1 a_2 a_3 + \\ & + p_5 a_3^2 + p_6 a_1^2 a_4 + p_7 a_2 a_4 + p_8 a_1 a_5 + \\ & + p_9 a_6. \end{aligned}$$

Le membre de droite contient tous les termes de poids 6, excepté les termes en a_1^6 et en $a_1^4 a_2$ qui ne peuvent pas figurer, puisque le développement de $(\sum z_1)^6$ et de $(\sum z_1)^4 \sum z_1 z_2$ fournit les termes z_1^6 et $z_1^5 z_2$ qui ne figurent pas dans le membre de gauche. En développant $p_1 (\sum z_1)^2 (\sum z_1 z_2)^2$ nous obtenons le terme $p_1 z_1^4 z_2$, d'où il suit que $p_1 = 1$. Je me pose maintenant la question: est-il possible de déterminer les autres coefficients p_2, \dots, p_9 d'une manière facile?

D'après le théorème 1 l'opérateur supprimant 1,

appliqué au membre de gauche de (11) le rend identiquement nul; d'où il suit

$$(2p_1 + p_3)a_1^3 a_2 + (2p_1 + 3p_2 + p_4)a_1 a_2^2 + (3p_3 + p_4 + p_6)a_1^2 a_3 + (p_4 + 2p_5 + p_7)a_2 a_3 + (2p_6 + p_7 + p_8)a_1 a_4 + (p_8 + p_9)a_5.$$

Cette expression s'annule pour chaque choix des nombres a_1, \dots, a_5 , donc

$$2p_1 + p_3 = 0; \quad 2p_1 + 3p_2 + p_4 = 0; \quad 3p_3 + p_4 + p_6 = 0; \\ p_4 + 2p_5 + p_7 = 0; \quad 2p_6 + p_7 + p_8 = 0; \quad p_8 + p_9 = 0.$$

Ces relations linéaires ne permettent pas de calculer les coefficients p_2, \dots, p_9 , mais nous trouvons de nouvelles relations au moyen d'autres opérateurs. Le théorème d'isomorphie transformé

$$\sum z_i^3 = a_1^3 - 3a_1 a_2 + 3a_3$$

en

$$[3] = A_1^3 - 3A_1 A_2 + 3A_3.$$

Cet opérateur appliqué à $\sum z_1^4 z_2^2$ donne le même résultat que $3A_3$, puisque $A_1(\sum z_1^4 z_2^2) \equiv 0$.

On trouve ainsi:

$$(p_3 + p_6)a_1^3 + (p_4 + p_7 + p_8)a_1 a_2 + (2p_5 + p_9)a_3 = 0$$

Continuant ainsi on obtient assez de relations nécessaires pour l'évaluation des coefficients

p_2, \dots, p_9 .

Si l'on veut déduire la formule pour

$\sum z_1^3 z_2 z_3 z_4$ de la relation

$$\sum z_i^3 z_2 z_3 = a_1^2 a_3 - 2a_2 a_3 - a_1 a_4 + 5a_5,$$

il suffit d'appliquer l'opérateur supprimant 1 à

$$(12) \quad \sum z_1^3 z_2 z_3 z_4 = q_1 a_1^2 a_4 + q_2 a_2 a_4 + q_3 a_1 a_5 + q_4 a_6;$$

le membre de droite ne contient pas le terme en a_1^6 , puisque le développement $(\sum z_1)^6$ donne entre autres un terme z_1^6 qui ne figure pas dans le membre de gauche et d'une manière analogue on trouve qu'aucun des termes en $a_1^4 a_2$, $a_1^2 a_2^2$, $a_1^3 a_3$, a_2^3 , $a_1 a_2 a_3$, a_3^2 ne peut figurer dans le membre de droite de (12).

En appliquant à (12) l'opérateur A_1 , on trouve

$$a_1^2 a_3 - 2a_2 a_3 - a_1 a_4 + 5a_5 = \sum z_1^3 z_2 z_3 = A_1 \sum z_1^3 z_2 z_3 z_4 =$$

$$= q_1 a_1^2 a_3 + q_2 a_2 a_3 + (2q_1 + q_2 + q_3) a_1 a_4 + (q_3 + q_4) a_5$$

d'où il suit

$$q_1 = 1 ; q_2 = -2 ; q_3 = -1 \text{ et } q_4 = 6.$$

De la définition de l'opérateur A_1 il découle immédiatement que

$$A_1(FG) = FA_1(G) + GA_1(F),$$

où F et G désignent deux fonctions entières rationnelles de a_1, \dots, a_m et de sommes simples. De ce résultat il suit que, si F est une fonction entière rationnelle de sommes simples dont aucun ne contient dans son système d'exposants le nombre 1, on a $A_1(F) = 0$.

Par exemple on peut écrire

$$3(\sum z_1^3)^2 + 4(\sum z_1^2)^3 - (\sum z_1^4)(\sum z_1^2) + \sum z_1^6$$

comme une fonction entière rationnelle de a_1, a_2, \dots

de la forme

$$u_1 a_1^6 + u_2 a_1^4 a_2 + u_3 a_1^3 a_3 + u_4 a_1^2 a_2^2 + u_5 a_1^2 a_4 + u_6 a_1 a_2 a_3 + \\ + u_7 a_1 a_5 + u_8 a_2^3 + u_9 a_2 a_4 + u_{10} a_6 .$$

L'opérateur A_1 rend cette expression identiquement nulle, et nous obtenons 7 relations linéaires entre les coefficients u_1, \dots, u_{10} .

On peut appliquer ces opérateurs à la découverte d'identités, et par exemple je traiterai les formules connues de Newton qui peuvent être obtenues au moyen de l'opérateur A_1 . Puisque z_1, \dots, z_m satisfont à l'équation

$$z^m - a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0,$$

on trouve par addition

$$(13) \quad \sum z_i^m - a_1 \sum z_i^{m-1} + \dots + m a_m = 0$$

en vertu de

$$A_1 a_h = a_{h-1} \quad (h=1, \dots, m)$$

on obtient

$$A_1 (a_h \sum z_i^t) = a_{h-1} \sum z_i^t \quad \text{si } t \neq 1 \\ = a_{h-1} \sum z_i^t + a_h \quad \text{si } t=1$$

Par conséquent A_1 transforme (13) en

$$+ \sum z_i^{m-1} - a_1 \sum z_i^{m-2} + \dots + a_{m-2} \sum z_i + (m-1) a_{m-1} = 0.$$

En appliquant de nouveau l'opérateur supprimant 1 nous trouvons

$$\sum z_i^{m-2} - a_1 \sum z_i^{m-3} + \dots + (m-2) a_{m-2} = 0.$$

Continuant ainsi nous obtenons pour $h=1, \dots, m-1$

les formules de Newton

$$\sum z_1^{m,h} - a_1 \sum z_1^{m,h-1} + \dots + a_{m,h-1} \sum z_1 + \dots + (m-h)a_{m-h} = 0.$$

Dans le théorème d'isomorphie interviennent des sommes simples $\{k_1, \dots, k_r\}$, dont le nombre des termes est égal à $\frac{m!}{j_1! \dots j_u! (m-r)!}$; dans cette formule j_1, \dots, j_u ont la signification indiquée ci-dessus. J'appelle le produit $\{k_1, \dots, k_r\}^* = j_1! \dots j_u! \{k_1, \dots, k_r\}$ une somme complète. Cette somme peut être écrite sous la forme

$$\sum z_{x_1}^{k_1} \dots z_{x_r}^{k_r},$$

étendue à tous les systèmes (x_1, \dots, x_r) formés par entiers positifs différents, tous $\leq m$. En effet, ces deux sommes symétriques contiennent les mêmes termes et de chacune d'elles le nombre des termes est égal à $\frac{m!}{(m-r)!}$.

Si h est un entier positif quelconque il est immédiatement clair qu'on peut écrire le produit $\{h\} \{k_1, \dots, k_r\}^*$ comme une somme de $r+1$ sommes complètes; la première de ces sommes est égale à $\{h, k_1, \dots, k_r\}^*$, la deuxième égale à $\{k_1+h, k_2, \dots, k_r\}^*$, et finalement la dernière égale à $\{k_1, \dots, k_r+h\}^*$.

Donc,

$$(14) \quad \{h\} \{k_1, \dots, k_r\}^* = S_0 + S_1 + \dots + S_r.$$

Je dis que cette relation reste valable si l'on remplace toute somme complète par l'opérateur différentiel correspondant. Dans cette substitution on remplace la somme complète $\{k_1, \dots, k_r\}^*$ par l'opérateur

$$j_1! \dots j_u! [k_1, \dots, k_r] = \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu_1-k_1} \dots$$

$$\dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

Cette substitution transforme le membre de gauche de (14) en

$$\sum_{\mu=h}^m a_{\mu-h} \frac{\partial}{\partial a_{\mu}} \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu_1-k_1} \dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

On peut écrire cet opérateur comme une somme de $r + 1$ opérateurs. Le premier de ces opérateurs est égal à

$$\sum_{\mu=h}^m \sum_{\mu_1=k_1}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu-h} a_{\mu_1-k_1} \dots$$

$$\dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^{r+1}}{\partial a_{\mu} \partial a_{\mu_1} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

donc exactement égal à l'opérateur correspondant à la somme complète $S_0 = \{h, k_1, \dots, k_r\}$. On obtient le deuxième opérateur en appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial a_{\mu}}$ au facteur $a_{\mu_1-k_1}$. Le résultat de ce dernier opérateur est égal à 1, si $\mu_1 = \mu + k_1$ et

égal à zéro dans tous les autres cas. Par conséquent l'opérateur en question est égal à

$$\sum_{\mu_1=k_1+h}^m \sum_{\mu_2=k_2}^m \dots \sum_{\mu_r=k_r}^m a_{\mu_1-k_1-h} \dots a_{\mu_r-k_r} \frac{\partial^r}{\partial a_{\mu_1} \partial a_{\mu_2} \dots \partial a_{\mu_r}}$$

donc exactement égal à l'opérateur correspondant à la somme complète

$$S_1 = \{k_1 + h, k_2, \dots, k_r\}.$$

De la même manière on trouve encore $r-1$ autres opérateurs correspondant respectivement à S_2, \dots, S_r .

J'écrirai le résultat obtenu sous une autre forme, savoir:

On peut écrire le produit $\{h\} \{k_1, \dots, k_r\}$ comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace chaque somme simple par l'opérateur différentiel correspondant.

En répétant ce raisonnement, on obtient: On peut écrire le produit $\{k_1\} \{k_2\} \dots \{k_s\} \cdot \{k_1, \dots, k_r\}$ comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant. Puisque toute somme simple peut être écrite comme une somme de produits de la forme

$k_1 k_2 \dots k_s$ nous avons démontré:

On peut écrire le produit de deux sommes simples comme une somme de sommes simples et l'identité trouvée ainsi reste valable si l'on remplace chaque

somme simple par l'opérateur différentiel correspondant.

En répétant ce raisonnement on trouve le même résultat pour un produit de trois ou plusieurs sommes simples, d'où résulte le résultat suivant: Si F est une fonction entière rationnelle de sommes simples on peut écrire F comme la somme de sommes simples; l'identité trouvée ainsi, reste valable si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant.

Considérons finalement une fonction entière rationnelle $F = 0$, qui contient les nombres a_1, \dots, a_m et des sommes simples. Parceque a_1, \dots, a_m sont aussi des sommes simples, F est une fonction entière rationnelle de sommes simples. D'après le résultat immédiatement précédant la formule $F = 0$ reste valable, si l'on remplace toute somme simple par l'opérateur différentiel correspondant. Dans cette substitution on remplace la somme simple a_k par l'opérateur correspondant A_k , de sorte que le théorème d'isomorphie est démontré.
