MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

Telefoon 51660
(Administratie, Bibliotheek, Afd. Statistiek,
Afd. Zuivere Wiskunde)

Telefoon 56643
(Afd. Toegepaste Wiskunde, Rekenafdeling)

Scriptum 4

LA DEUXIEME PERLE DE LA THEORIE DES NOMBRES[1)]

par

J.G. van der Corput.

1) Conférence faite à Strasbourg le 21 mars 1950 et à Bordeaux le 28 mars 1950.

Ce n'est pas moi, mais Khintchine[2] qui a donné le nom poétique de deuxième perle au théorème auquel je consacrerai cette conférence. La troisième perle selon lui est le problème de Waring, tandis que la première est le problème des boîtes, conjecturé par P.J.H. Baudet et démontré par B.L. v.d. Waerden[3]:
Si vous mettez tous les entiers positifs dans cent boîtes, au moins une d'elles contient une progression arithmétique de mille termes; dans ce théorème on peut remplacer les nombres cent et mille par des entiers positifs quelconques.

Il y a quelques mois j'ai publié, en commun avec J.H.B. Kemperman, quelques notes sur la deuxième perle dans les Proceedings de l'Académie néerlandaise[4]. Il n'est pas nécessaire de

---

2) A.Ya.Khintchine, Three pearls of the theory of numbers (Russe), Moscou 1947; 72 p.

3) B.L. v.d. Waerden, Beweis einer Baudet'schen Vermutung, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 15 (1927) 212-216.

4) J.G. v.d. Corput et J.H.B. Kemperman, The second pearl of the theory of numbers, Proceedings Amsterdam 52 (1949), 696-704; 801-809; 927-937.
Indagationes Mathematicae 11 (1949), 226-234; 277-285; 325-335.

vous dire qu'on nous a fait immédiatement la reproche d'identifier les lecteurs de cette périodique auguste à des pourceaux, mais dans la conviction ferme que je ne jetterai pas ici mes perles en vain, j'ai choisi ce théorème comme sujet de cette conférence.

Primitivement, c'est à dire avant 1942, l'an remarquable dans lequel l'hypothèse devenait un théorème, on parlait de l'hypothèse $\alpha + \beta$, à laquelle on donnait ordinairement un caractère transfini comme suit:

Considérons deux suites infinies A et B formées par des entiers

$$A \ldots\ldots a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$$

$$B \ldots\ldots b_0 < b_1 < b_2 < \ldots \qquad ,$$

où $a_0 = b_0 = 0$. Désignons par la somme $C = A + B$ la suite $C = A + B \ldots\ldots c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$, formée par tous les entiers c qui peuvent être écrits d'une manière au moins sous la forme $c = a + b$, où a est un élément de A et où b est un élément de B.

Soit α le plus grand nombre tel que A contienne pour $h = 1,2,\ldots.$ au moins αh éléments positifs $\leqq h$; ce nombre α est appelé la densité inférieure de A. Il va sans dire que la densité inférieure est au plus égale à 1. Si la densité inférieure est égale à 1, la suite A contient nécessairement tous les entiers $\geqq 0$.

Le théorème $\alpha + \beta$ s'énonce comme suit:

LE THEOREME $\alpha + \beta$.

Si la densité inférieure de A est égale à α et la densité inférieure de B est égale à β, alors la densité inférieure de A + B est au moins égale à $\alpha + \beta$, en supposant naturellement que $\alpha + \beta \leq 1$. Dans le cas où $\alpha + \beta \geq 1$, la somme A + B contient tous les entiers ≥ 0.

Sans aucune difficulté nous pouvons mettre ce théorème sous une forme finie. Soit maintenant α le plus grand nombre tel que A contienne pour $h = 1, 2, \dots, g$ au moins αh éléments positifs $\leq h$, où g désigne un entier positif donné; ce nombre α est appelé la densité inférieure de A audessous de $g + 1$. Ainsi on obtient le théorème $\alpha + \beta$ énoncé sous une forme finie:

Si la densité inférieure de A audessous de $g + 1$ est égale à α et la densité inférieure de B audessous de $g + 1$ est égale à β, alors la densité inférieure de A + B audessous de $g + 1$ est au moins égale à $\alpha + \beta$, en supposant naturellement que $\alpha + \beta \leq 1$. Dans le cas où $\alpha + \beta \geq 1$, la somme A + B contient tous les entiers qui sont ≥ 0 et $\leq g$.

Il est évident que le premier théorème est une conséquence immédiate du deuxième, lorsqu'on fait parcourir à g la suite des entiers positifs. Mais inversément la dernière proposition est une conséquence immédiate de la première, car alors on peut supposer, sans nuire à la généralité, que chacune des deux suites A et B contient tous les entiers $> g$, de sorte que α et β sont les densités inférieures de A et B.

Puisque la forme finie est préférable pour les démonstrations, j'employerai dans cette conférence constamment l'énoncé fini.

Cependent le nouveau théorème a encore un grand désavantage, à savoir qu'on ne peut pas y appliquer avec succès le raisonnement par récurrence. Heureusement H.B. Mann a trouvé une généralisation dans laquelle cet inconvénient ne se présente pas. Il a donné l'énoncé suivant:

LE THEOREME DE MANN

Soit g un entier positif. Supposons pour $h = 1,2,\ldots,g$ que le nombre des éléments positifs $\leqq h$ de A, augmenté du nombre des éléments positifs $\leqq h$ de B soit $\geqq \gamma h$, où $\gamma \leqq 1$. Alors la densité inférieure de A + B audessous de $g + 1$ est $\geqq \gamma$.

Ce théorème démontré par Mann[5] en 1942 d'une

---

5) H.B. Mann, A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers, Annals of Math. 43 (1942), 523-529.

manière ingénieuse, contient comme cas particulier le théorème $\alpha + \beta$, si l'on y pose $\alpha + \beta = \gamma$.

Plusieurs mathématiciens ont simplifié et généralisé le raisonnement de Mann, par exemple Artin et Scherk[6], Dyson[7], Kemperman[8] et moi-même[9].

Dans le théorème de Mann il s'agit seulement des éléments positifs $\leq h$, de sorte que l'élément zéro n'y est pas compté, quoiqu'il appartienne à tous les trois suites A, B et A + B. D'autre part l'élément h est compté s'il appartient à au moins une de ces trois suites. Pour la généralisation et aussi pour la démonstration il est recommandable de traiter l'élément zéro de la même manière que les autres éléments et de laisser l'élément h en dehors de considération.

---

6) E. Artin et P. Scherk, On the sum of two sets of integers, Annals of Math. 44 (1943), 138 - 142.

7) F. J. Dyson, A theorem on the densities of sets of integers, Journal of the London Mathematical Society 20 (1945), 8-15.

8) Voire la note 4).

9) On sets of integers, Proceedings Amsterdam 50 (1947), 252-261, 340-350, 429-435; Indagationes Mathematicae 9 (1947), 159-168, 198-208, 257-263.

Dans ce but je désigne par $A(h)$ le nombre de tous les éléments $< h$ de A. En remplaçant dans le théorème de Mann h par $h - 1$, on obtient:

Les inégalités

$$A(h) + B(h) \geqq 2 + \gamma(h - 1) \qquad (h = 1,2,\ldots,g)$$

où $\gamma \leqq 1$, entraînent

$$(A + B)(h) \geqq 1 + \gamma(h - 1) \qquad (h = 1,2,\ldots,g)$$

Il va sans dire que $(A + B)(h)$ désigne le nombre de tous les éléments $< h$ de $A + B$.

Autrement dit: Si l'on pose

$$\varphi(h) = 1 + \gamma(h - 1), \text{ où } \quad \gamma \leqq 1,$$

les inégalités

$$A(h) + B(h) \geqq 1 + \varphi(h) \qquad (h = 1,2,\ldots,g) \tag{1}$$

entraînent

$$(A + B)(h) \geqq \varphi(h) \qquad (h = 1,2,\ldots,g) \tag{2}$$

Cette dernière proposition est même vraie si $\varphi(h)$ désigne une fonction quelconque qui croît lentement. Je dis qu'une fonction non-décroissante $\varphi(h)$ croît lentement, si l'on a

$$\varphi(h + h') \leqq \varphi(h) + \varphi(h')$$

pour chaque choix des nombres positifs h et h'.

Il est évident que la fonction $\varphi(h) = 1 + \gamma(h - 1)$, où $\gamma \leqq 1$ croît lentement, car on a

$$\varphi(h) + \varphi(h') - \varphi(h + h') = 1 - \lambda \geqq 0.$$

Nous avons même le théorème suivant qui est encore plus général:

LE THEOREME A + B

Soit $g > 0$. Si les suites A et B formées par des nombres $\geqq 0$ satisfont pour tout nombre positif $h \leqq g$ à l'inégalité (1), où $\varphi(h)$ croît lentement, l'inégalité (2) est valable pour chaque nombre positif $h \leqq g$.

Les inégalités (1) sont nécessairement remplies pour chaque nombre positif $h \leqq g$, si elles sont vraies pour $h = g$ et pour chaque nombre $h < g$ qui appartient à au moins l'une des suites A et B. En effet, si h' est le plus petit nombre $\geqq h$ qui appartient à A ou à B ou est égal à g, on a

$$A(h) = A(h'); \; B(h) = B(h'); \; A(h') + B(h') \geqq 1 + \varphi(h') \geqq 1 + \varphi(h).$$

Le théorème A + B est plus général que celui de Mann puisqu'il n'est plus nécessaire que g et les éléments de A et de B soient entiers.

Le théorème A + B est évident, si zéro n'appartient pas à toutes les deux suites A et B. En effet, dans ce cas le plus petit nombre positif h^* appartenant à A ou à B satisfait aux relations

$A(h^*) + B(h^*) = 0$ ou 1, par conséquent $\varphi(h^*) \leqq 0$; la fonction non-décroissante $\varphi(h)$

qui croît lentement satisfait donc aux inégalités $\varphi(2h^*) \leqq 0$, $\varphi(3h^*) \leqq 0, \ldots$, de sorte que cette fonction est $\leqq 0$ pour chaque valeur positive de h. Dans ce cas l'inégalité à démontrer est évidente.

Dans la démonstration nous pouvons donc nous borner au cas où B contient le nombre zéro. En outre nous pouvons admettre que ni A ni B ne contienne un nombre $\geqq g$, puisque ces nombres ne se présentent pas dans le théorème A + B. Finalement nous pouvons supposer que B contienne au moins un élément positif, car sinon on a pour chaque nombre $h \leqq g$

$B(h) = 1$; $(A + B)(h) = A(h) \geqq \varphi(h)$.

La démonstration du théorème A + B peut être divisée en sept parties très simples.

I. A contient au moins un élément $\bar{a}$ auquel il est possible de faire correspondre au moins un élément positif b de B tel que $\bar{a} + b$ n'appartienne pas à A.

En effet, par exemple le plus grand élément de A possède cette propriété.

Nous prendrons pour $\bar{a}$ le plus petit élément de A avec la dite propriété, de sorte que nous obtenons

II. Chaque élément $a < \bar{a}$ de A et chaque élément positif b de B possèdent la propriété que $a + b$ appartienne à A.

III. On a pour chaque nombre positif $h \leqq \bar{a}$ et pour chaque élément positif b de B

$$A(h + b) \geqq A(h) + A(b).$$

En effet, $A(h)$ est égal au nombre ℓ des éléments $a < h$ de A. D'après II chacun de ces éléments possède la propriété que $a + b$ appartienne à A, où $a + b \geqq b$ et $< h + b$. Par conséquent A contient au moins ℓ éléments $\geqq b$ et $< h + b$ et nous avons désigné par $A(h + b) - A(b)$ le nombre des éléments $\geqq b$ et $< h + b$ de A.

IV. Chaque nombre positif $h \leqq \bar{a}$ satisfait à l'inégalité $A(h) \geqq \varphi(h)$. Cette inégalité est évidente pour chaque nombre positif h qui est égal ou inférieur au plus petit élément positif b de B, car alors on a $B(h) = 1$, donc $A(h) = A(h) + B(h) - 1 \geqq \varphi(h)$.

Pour les nombres $h > b$ on peut supposer que l'inégalité ait été déjà démontrée, si l'on y remplace h soit par $h - b$ soit par b. Ainsi on trouve d'après III

$$A(h) \geqq A(h-b) + A(b) \geqq \varphi(h-b) + \varphi(b) \geqq \varphi(h).$$

V. Soit $\bar{b}$ un élément positif de B tel que A ne contienne pas $\bar{a} + \bar{b}$ (B contient au moins un tel élément d'après la définition de $\bar{a}$).

Soit $\overline{B}$ le système B sans $\overline{b}$ et soit $\overline{A}$ le système A auquel on a ajouté $\overline{a} + \overline{b}$. Je dis qu'on a

$$\overline{A}(h) + \overline{B}(h) \geqq 1 + \varphi(h)$$

pour chaque nombre positif $h \leqq g$. Cette inégalité est évidente si $h \leqq \overline{b}$, car audessous de $\overline{b}$ rien n'a changé, donc

$$\overline{A}(h) = A(h) \quad \text{et} \quad \overline{B}(h) = B(h).$$

L'inégalité est aussi immédiate pour les nombres $h > \overline{a} + \overline{b}$, car dans ce cas nous perdons un terme dans $B(h)$ et nous gagnons un terme dans $A(h)$. Dans le cas restant $\overline{b} < h \leqq \overline{a} + \overline{b}$ on a d'après III et IV

$$A(h) \geqq A(h - \overline{b}) + A(\overline{b}) \geqq \varphi(h - \overline{b}) + A(\overline{b}),$$

et en outre

$$\overline{A}(h) \geqq A(h); \ \overline{B}(h) \geqq \overline{B}(\overline{b}) = B(\overline{b}),$$

donc

$$\begin{aligned} \overline{A}(h) + \overline{B}(h) &\geqq \varphi(h - \overline{b}) + A(\overline{b}) + B(\overline{b}) \\ &\geqq 1 + \varphi(h - \overline{b}) + \varphi(\overline{b}) \\ &\geqq 1 + \varphi(h). \end{aligned}$$

VI. En appliquant le résultat de V plusieurs fois, on trouve: Soit B' le système B diminué de tous les éléments positifs $\overline{b}$ tels que A ne contienne pas le nombre $\overline{a} + \overline{b}$. Soit A' le système A auquel on a ajouté tous ces nombres $\overline{a} + \overline{b}$. Alors on a

(3) $$A'(h) + B'(h) \geqq 1 + \varphi(h)$$

pour chaque nombre positif $h \leqq g$. Je dis que

$A' + B'$ est un sousensemble de $A + B$. En effet, un élément quelconque de $A' + B'$ a la forme $a' + b'$, où a' et b' appartiennent respectivement à A' et B'. Si a' appartient à A, le nombre considéré $a' + b'$ est la somme de deux nombres, appartenant respectivement à A et B, de sorte que $a' + b'$ est un élément de $A + B$. Si par contre a' est un des éléments ajoutés à A, on a $a' = \bar{a} + \bar{b}$, où $\bar{b}$ est un élément positif de B; puisque b' n'a pas été supprimé dans B, le nombre $a = \bar{a} + b'$ appartient à A, de sorte que $a' + b' = a + \bar{b}$ appartient à $A + B$.

VII. Fin de la démonstration.

Nous avons construit un couple (A', B') tel que $A' + B'$ soit un sousensemble de $A + B$, que B' contienne moins d'éléments positifs que B et finalement que chaque nombre positif $h \leqq g$ satisfait à l'inégalité (3).

Nous pouvons continuer ce procédé jusqu'au moment où nous nous arrêtons à un système B^* composé du seul nombre zéro. Le couple (A^*, B^*) ainsi construit satisfait pour chaque nombre positif $h \leqq g$ à l'inégalité

$$A^*(h) + B^*(h) \geqq 1 + \varphi(h),$$

donc, en vertu de $B^*(h) = 1$,

$$(A^* + B^*)(h) = A^*(h) \geqq \varphi(h).$$

Cette inégalité entraîne l'inégalité qui est à démontrer, parce que $A^* + B^*$ est un sousensemble de $A + B$.

Kemperman a été le premier qui a introduit dans cette théorie la notion d'une addition abstraite. Il a démontré que le théorème $A + B$ reste valable, si l'on y remplace l'addition ordinaire par une addition abstraite qui satisfait à certaines conditions générales. Il suffit par exemple de supposer que l'addition soit commutative et associative, mais on peut remplacer ces conditions par d'autres qui exigent beaucoup moins.

En prenant comme addition la multiplication ordinaire, on obtient

LE THEOREME AB

Soit $g \geqq 1$. Supposons que les suites A et B formées par des nombres $\geqq 1$ satisfassent pour tout nombre h qui est $\geqq 1$ et $\leqq g$ à l'inégalité

$$A(h) + B(h) \geqq 1 + \psi(h),$$

où $\psi(h)$ est une fonction non-décroissante avec

$$\psi(hh') \leqq \psi(h) + \psi(h')$$

pour chaque choix des nombres $h \geqq 1$ et $h' \geqq 1$.

Désignons par AB la suite formée par tous les nombres qui peuvent être écrits d'une manière au moins comme un produit de deux facteurs, dont le premier appartient à A et le second à B. Alors on a

$$(AB)(h) \geqq \psi(h)$$

pour chaque nombre h qui est $\geqq 1$ et $\leqq g$.

Terminons avec une application simple du théorème $\alpha + \beta$. Schnirelmann[10)] a démontré qu'il existe un entier positif N tel que chaque entier positif peut être écrit comme la somme de N ou de moins de N nombres premiers, si 1 est considéré comme un nombre premier. Dans ce but il considère la suite A formée par les nombres 0 et 1 et par les entiers qui peuvent être écrits d'une manière au moins comme la somme de deux nombres premiers. Il montre que la densité inférieure de cette suite est positive, donc $\geqq \frac{2}{N}$, où N désigne un nombre pair suffisamment grand. D'après le théorème $\alpha + \beta$ nous sommes maintenant prêts, car les densités inférieures des suites $A + A$, $A + A + A, \ldots$, $A + A + \ldots + A$ (somme de $\frac{1}{2}$ N suites A) sont respectivement $\geqq \frac{4}{N}$, $\geqq \frac{6}{N}, \ldots$, $\geqq 1$, de sorte que chaque entier positif appartient à la dernière suite et peut donc être écrit comme la somme de N ou de moins de N nombres premiers.

----

10) L. Schnirelmann, Ob additiwnich swoistwach tschisel (Sur Propriétés additives de nombres), Iswestija Donskowo Polytechnitscheskowo Instituta (Nowotscherkask) 14 (1930), 3-27 (Résumé français p.27-28).

Le résultat de Vinogradow, que tout nombre impair suffisamment grand est la somme de trois nombres premiers, est plus profond, mais exige aussi un raisonnement beaucoup plus difficile.
