MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 166 (C 9)

"Operations Research"

Hoofdstuk III: Voorraad-problemen

door

G. de Leve

1956

1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen wij enige methoden bespreken, die gebruikt kunnen worden bij het oplossen van voorraad-problemen.

Gelijk bij vele andere onderwerpen uit de Operations Research, wordt men ook hier geconfronteerd met het probleem om in een concrete situatie op grond van gegevens uit het verleden en verwachtingen voor de toekomst op een verantwoorde wijze een beslissing te nemen.

De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van dit criterium zullen enige veronderstellingen gemaakt dienen te worden, waaraan, naar wij zullen aannemen, in voldoende benadering is voldaan. Verder zullen wij ons niet laten verleiden tot een discussie over het al of niet aanvaardbaar zijn van deze veronderstellingen, omdat het slechts de bedoeling van dit hoofdstuk is inzicht te verschaffen in de wijze waarop men voorraadproblemen kan oplossen. Aan de hand van voorbeelden zullen wij enige methoden bespreken.

2. Eerste voorbeeld [1)]

Laten wij eens aannemen, dat wij belast zijn met de bepaling van de voorraad-politiek van een groothandel in grondstoffen. Voor de eenvoud zullen wij in onze beschouwingen ons beperken tot een soort grondstof, die in willekeurig grote hoeveelheden op vastgestelde tijdstippen kan worden ingekocht. De behoefte aan deze grondstof is niet constant en vormt dan ook een onzekere factor in onze beschouwingen.

Wanneer er op een gegeven ogenblik geen voldoende voorraad aanwezig is, treedt er in de verkoop stagnatie op, hetgeen zeer nadelig is, omdat wij dan met de aflevering van de bestellingen moeten wachten totdat er weer grondstoffen worden ontvangen. Wij zullen bij de behandeling van dit voorbeeld aannemen, dat deze achterstand bij voldoende aanvoer direct kan worden opgeheven. Er zijn derhalve twee soorten kosten aan voorraad-vorming verbonden en wel is het bedrag C_1 nodig om één eenheid grondstof

---

1) Eliezer Naddor: Lead time considerations in a simplified mathematical model of inventory. Operations Research Group of the Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio.

in voorraad te hebben per tijdseenheid, terwijl de schade veroorzaakt door het feit, dat men op een gegeven moment één eenheid te weinig in voorraad heeft per tijdseenheid C_2 bedraagt. Men kan C_2 beschouwen als een boete, welke de klant ons oplegt, wanneer wij één eenheid grondstof één tijdseenheid te laat afleveren.

Enerzijds zullen wij trachten een eventuele achterstand op te heffen, terwijl wij aan de andere kant ervoor willen waken, dat onze voorraden niet te groot worden. In onze voorraadpolitiek moeten wij aan deze elkander tegengestelde verlangens op een zodanige wijze tegemoet komen, dat de totale kosten aan de voorraad-vorming verbonden minimaal zijn.

Doordat het steeds slechts mogelijk is op van te voren vastgestelde tijdstippen t_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestellingen te ontvangen, ontstaan er tijdsintervallen tussen deze tijdstippen. Wij geven met S_n de voorraad (evt. tekort) aan in het begin van het $n^{\underline{de}}$ tijdsinterval en met R_n de voorraad aan het eind van dat interval. Onder b_n verstaan wij de hoeveelheid, die bij de aanvang van de $n^{\underline{de}}$ periode werd ontvangen, terwijl met r_n wordt bedoeld het aantal eenheden hetwelk in deze periode verbruikt wordt of zou worden als er voldoende begin-voorraad aanwezig was.

Wij verkrijgen nu de volgende betrekkingen:

$$S_n = R_{n-1} + b_n \quad , \tag{1}$$

$$R_n = S_n - r_n \quad , \tag{2}$$

en derhalve ook

$$S_n = S_{n-1} + b_n - r_{n-1} \quad , \tag{3}$$

$$R_n = S_{n-1} + b_n - r_{n-1} - r_n \, . \tag{4}$$

S_n is dus de voorraad, die overblijft wanneer wij een eventuele achterstand hebben opgeheven of indien er geen achterstand was, de som van de restant-voorraad van de vorige periode en de afgeleverde bestelling b_n.

Wanneer een op tijdstip t_n gedane bestelling onmiddellijk wordt uitgevoerd kunnen wij ervoor zorgen, dat er bij de aanvang van de $n^{\underline{de}}$ periode geen tekort aan grondstoffen bestaat. Allereerst zullen wij nu dit speciale geval gaan bekijken. Later zullen wij dan een vaste leveringsduur in onze beschouwing opnemen.

Ons probleem luidt nu: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het tijdstip t_n inslaan, opdat de totale kosten voor de $n^{\underline{de}}$ periode zo klein mogelijk zijn. <u>In deze paragraaf zullen wij steeds aannemen, dat de vraag tijdens een periode constant is.</u>

Om deze kosten te berekenen zullen wij twee gevallen onderscheiden:

1. Als de behoefte door de voorraad kan worden gedekt, m.a.w. $r_n \leqq S_n$ en $R_n \geqq 0$, dan wordt de gemiddelde voorraad gegeven door:

$$\tfrac{1}{2}(R_n + S_n) = S_n - \tfrac{1}{2} r_n \qquad (5)$$

en de daaruit voortkomende kosten bedragen:

$$(S_n - \tfrac{1}{2} r_n)\, C_1 . \qquad (6)$$

De waarde van $S_n - \frac{1}{2} r_n$ is gelijk aan het oppervlak A in fig. 1.

Constant verbruik gedurende één periode

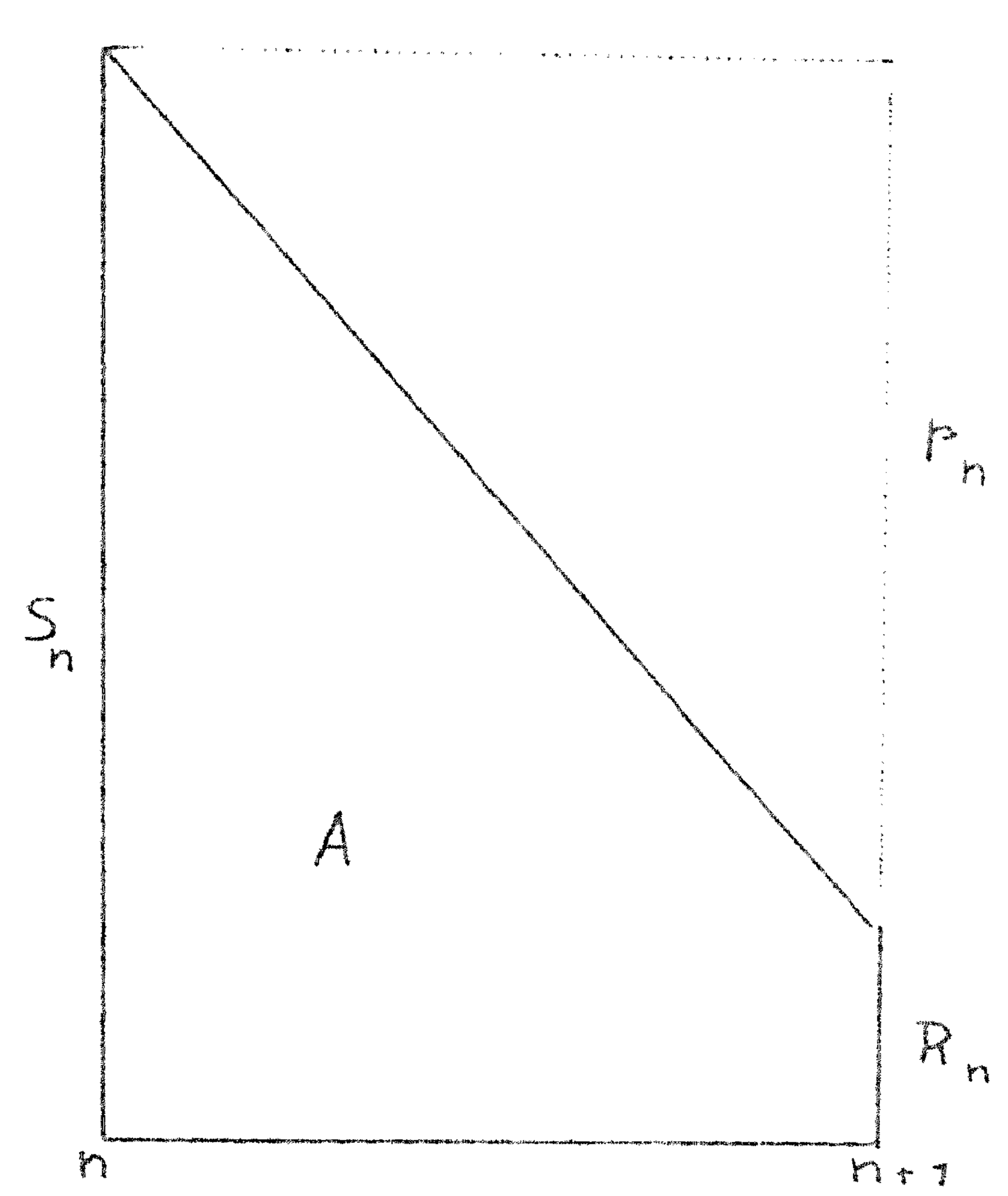


fig. 1
Voldoende voorraad

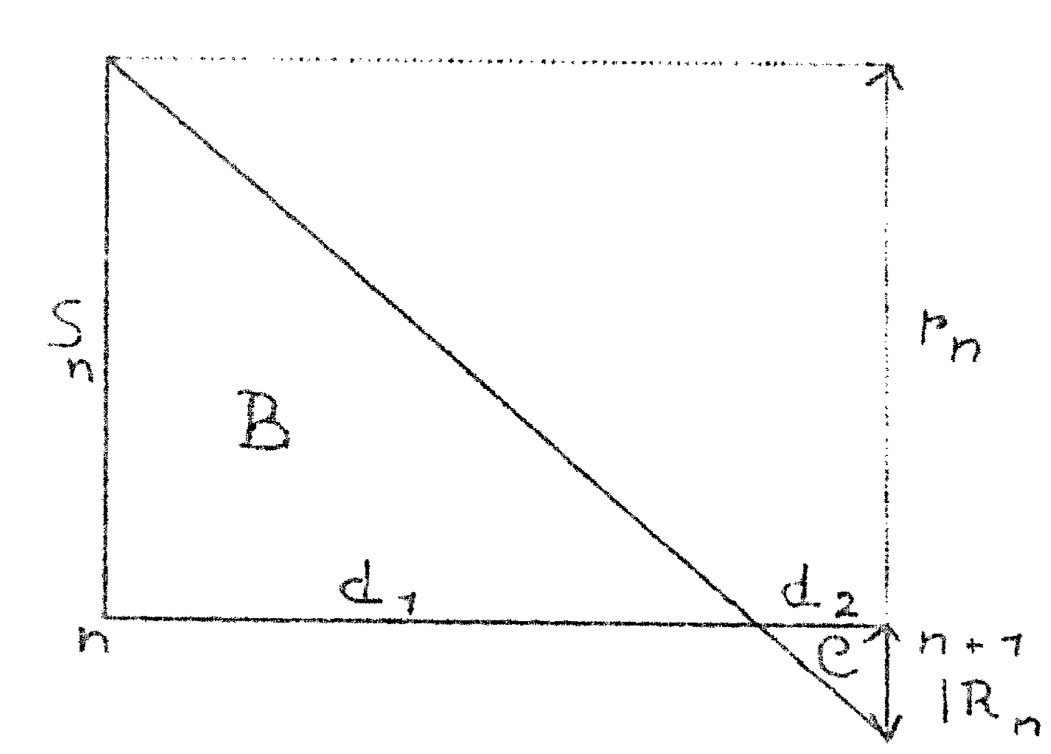


fig. 2
Te kleine voorraad

2. De behoefte kan niet geheel door de voorraad gedekt worden, m.a.w. $r_n > S_n$ en $R_n < 0$. Er is gedurende een periode d_1 een positieve voorraad en vervolgens een tekort. Als wij wederom aannemen, dat de vraag gedurende deze periode constant is, dan is de gemiddelde voorraad gedurende d_1 gelijk aan $\frac{1}{2} S_n$ en het gemiddelde tekort tijdens d_2 $\frac{1}{2}|R_n|$ en de daaruit voortkomende kosten bedragen:

$$\tfrac{1}{2} S_n d_1 C_1 + \tfrac{1}{2} |R_n| d_2 C_2 . \qquad (7)$$

De oppervlakken B en C van fig. 2 zijn resp. gelijk aan $\frac{1}{2} S_n d_1$ en $\frac{1}{2} |R_n| d_2$. Bovendien gelden voor d_1 en d_2 de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 1 \\ d_1 : d_2 &= S_n : |R_n| \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

waaruit volgt:

$$d_1 = \frac{S_n}{S_n + |R_n|} = \frac{S_n}{r_n}$$

en

$$d_2 = \frac{|R_n|}{S_n + |R_n|} = \frac{r_n - S_n}{r_n} \,. \qquad (9)$$

De betrekking (7), welke de totale kosten aangaf, gaat dan over in:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{S_n^2 C_1 + (S_n - r_n)^2 C_2}{r_n}\right]. \qquad (10)$$

Wanneer r_n een gegeven getal is, m.a.w. de behoefte aan de grondstof in de $n^{\underline{de}}$ periode bekend is, dan bereikt (10) zijn minimale waarde voor:

$$S_n = r_n \frac{C_2}{C_1 + C_2} \qquad (11)$$

en wel bedragen zij dan:

$$\frac{1}{2} r_n \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \,. \qquad (12)$$

Hieruit blijkt dat een voorraad kleiner dan de behoefte optimaal kan zijn. Zoals wij weten is S_n de voorraad, die overblijft na opheffing van de eventuele achterstand. De te bestellen hoeveelheid b_n wordt gegeven door:

$$b_n = S_n - R_{n-1} \qquad (1)$$

met

$$R_{n-1} = S_{n-1} - r_{n-1} = r_{n-1}\frac{C_2}{C_1 + C_2} - r_{n-1} = -r_{n-1}\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

en bedraagt dan:

$$b_n = \frac{r_n C_2 + r_{n-1} C_1}{C_1 + C_2} \,. \qquad (11a)$$

Voor het geval, dat de vraag in elke periode gelijk is, gaat (11a) over in:

$$b_1 = r_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{11b}$$

$$b_n = r_n \qquad \text{voor} \qquad n \geq 2 \ . \tag{11c}$$

Onze voorraad-politiek is optimaal, wanneer wij er voor zorgen, dat er aan het eind van iedere periode i een tekort is van:

$$- R_i = r_{n-1} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad . \tag{11d}$$

Veelal echter is r_n geen gegeven getal, maar een stochastische grootheid, die dus een kansverdeling bezit.

Ons probleem luidt dan: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het tijdstip t_n inslaan, opdat de verwachting van de totale kosten voor de n$\frac{\text{de}}{}$ periode zo klein mogelijk is. Immers deze verwachting zal nog afhankelijk zijn van de nog te kiezen beginvoorraad S_n.

Voor het geval dat de verdelingsfunctie $F(r_n)$ een kans-dichtheid $f(r_n)$ bezit, kan de verwachting van de kosten als volgt worden uitgedrukt:

$$C(S_n) = \int_0^{S_n} (S_n - \tfrac{1}{2} r_n) C_1 f(r_n)\, dr_n + \int_{S_n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2} S_n^2 C_1 + \tfrac{1}{2} (S_n - r_n)^2 C_2 \right) \frac{f(r_n)}{r_n}\, dr_n . \tag{13}$$

Deze betrekking wordt gevonden met behulp van de uitdrukkingen (6) en (10).

Wij zullen nu onze beginvoorraad zo kiezen, dat de verwachting van de te maken onkosten, $C(S_n)$, minimaal wordt, m.a.w. voor de gezochte optimale waarde S_n^* van S_n moet gelden:

$$\frac{d\, C(S_n^*)}{d\, S_n^*} = 0 \ . \tag{14}$$

Na een weinig rekenen blijkt betrekking (14) gelijkwaardig te zijn met:

$$F(S_n^*) + S_n^* \int_{S_n^*}^{\infty} \frac{f(r_n)}{r_n}\, dr_n = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad . \tag{15}$$

Aangezien men kan bewijzen, dat

$$M(S_n) \stackrel{\text{def.}}{=} F(S_n) + S_n \int_{S_n}^{\infty} \frac{f(r_n)}{r_n}\, dr_n$$

een monotoon stijgende functie is van S_n, is S_n^* ondubbelzinnig bepaald. De functie $C(S_n)$ heeft dus maar één extremum en aangezien $C(\infty)=\infty$, moet dit een minimum zijn. De optimale te bestellen hoeveelheid b_n^* wordt dan gegeven door:

$$b_n^* = S_n^* - R_{n-1} , \qquad (1)$$

waarbij R_{n-1} op het tijdstip t_n bekend is.

In de inleiding hebben wij nogal vaag gezegd: "De wiskundige oplossing van het vraagstuk bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van dit criterium zullen enige veronderstellingen gemaakt dienen te worden, waaraan, naar wij zullen aannemen in voldoende benadering is voldaan".

Het criterium ziet er dan als volgt uit:

$$M(S_n^*) = F(S_n^*) + S_n^* \int_{S_n^*}^{\infty} \frac{f(r_n)}{r_n} \, d\, r_n = \frac{C_2}{C_1 + C_2} ,$$

een vergelijking, die S_n^* impliciet bevat en waaruit S_n^* bepaald moet worden.

De hierbij gemaakte veronderstellingen luidden:

1. De bestellingen worden direct afgeleverd en een tekort wordt na ontvangst van een nieuwe zending direct opgeheven.
2. De behoefte per tijdseenheid is gedurende een periode constant.
3. De variabele $\underline{r}_n$ bezit een nog nader te specificeren continue verdeling.
4. De waarden van de constanten C_1 en C_2 zijn bekend.

Het is ook mogelijk een criterium op te stellen, als de variabele $\underline{r}_n$ een discrete verdeling volgt. Wij zullen dit verderop in een algemener geval laten zien.

In dit meer algemene geval wordt niet verondersteld, dat de bestellingen direct worden afgeleverd, maar dat de leveringstijd k perioden duurt. Men moet dan op het tijdstip t_{n-k} een bestelling doen voor de $n^{\underline{de}}$ periode en men kan dan slechts op langere termijn invloed uitoefenen op de voorraad. Op het tijdstip t_{n-k} weet men niet hoe groot de behoeften zullen zijn in de tussenliggende perioden. Het is dan ook niet uitgesloten, dat op het tijdstip t_n blijkt, dat een op t_{n-k} gedane bestelling te klein was om het tekort op te heffen, waardoor S_n negatieve waarden aan kan nemen. De behandeling geschiedt dan als volgt.

Uit (1), (2), (3) en (4) volgt na enige malen deze betrekkingen toegepast te hebben:

$$S_n = S_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} b_i + b_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} r_i \,, \qquad (16)$$

en

$$R_n = S_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} b_i + b_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} r_i - r_n \,. \qquad (17)$$

Wij schrijven nu voor:

$$\left.\begin{aligned} S_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} b_i + b_n &= z_n \,, \\ \sum_{i=n-k}^{n-1} r_i &= x \,, \\ r_n &= y \,. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

De betrekkingen (16) en (17) gaan dan over in:

$$S_n = z_n - x \,, \qquad (16a)$$

en

$$R_n = z_n - x - y \,. \qquad (17a)$$

De variabelen x en y stellen resp. de behoeften aan grondstoffen voor in de k tussen-liggende perioden en in de $n^{\underline{de}}$ periode. Vervolgens veronderstellen wij dat deze variabelen resp. de verdelingsfuncties $F(x)$ en $G(y)$ bezitten. Het probleem luidt nu weer: Kies b_n zodanig dat de verwachting van de te maken onkosten minimaal wordt.

Er kunnen zich in de $n^{\underline{de}}$ periode drie gevallen voordoen:

1. De behoefte kan uit de voorraad worden gedekt, m.a.w.

   $$S_n = z_n - x \geq 0 \quad \text{en} \quad r_n = y \leq z_n - x \,.$$

2. Er is weliswaar aan het begin van de $n^{\underline{de}}$ periode een voorraad, maar aan het eind een tekort, m.a.w.

   $$S_n = z_n - x \geq 0 \quad \text{en} \quad y > S_n = z_n - x \,.$$

3. De afgeleverde bestelling op het tijdstip t_n was niet voldoende om de op dat moment al bestaande tekort op te heffen, zodat er gedurende de gehele periode een tekort is, m.a.w.

   $$z_n - x \leq 0 \quad \text{en} \quad y > z_n - x = S_n \,.$$

In de figuren 3, 4 en 5 zijn deze 3 mogelijkheden aangegeven:

Het verloop bij positieve begin- en eindvoorraad

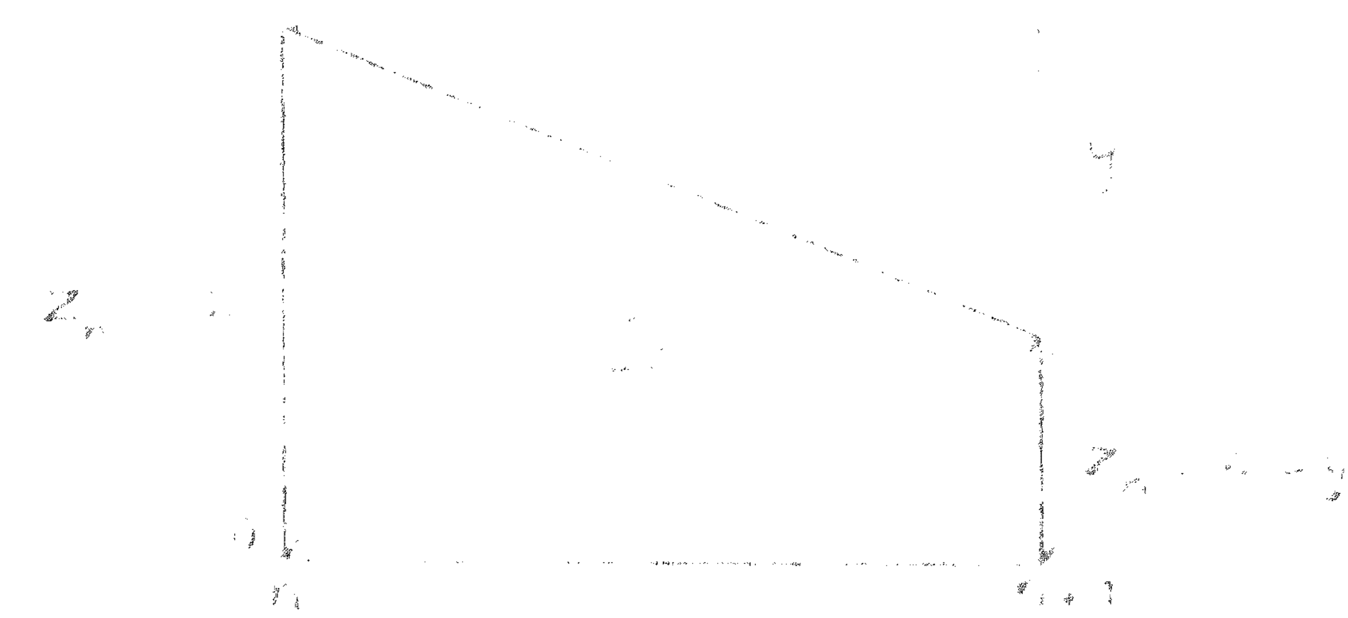


fig. 3

Het verloop bij positieve begin- en negatieve eindvoorraad

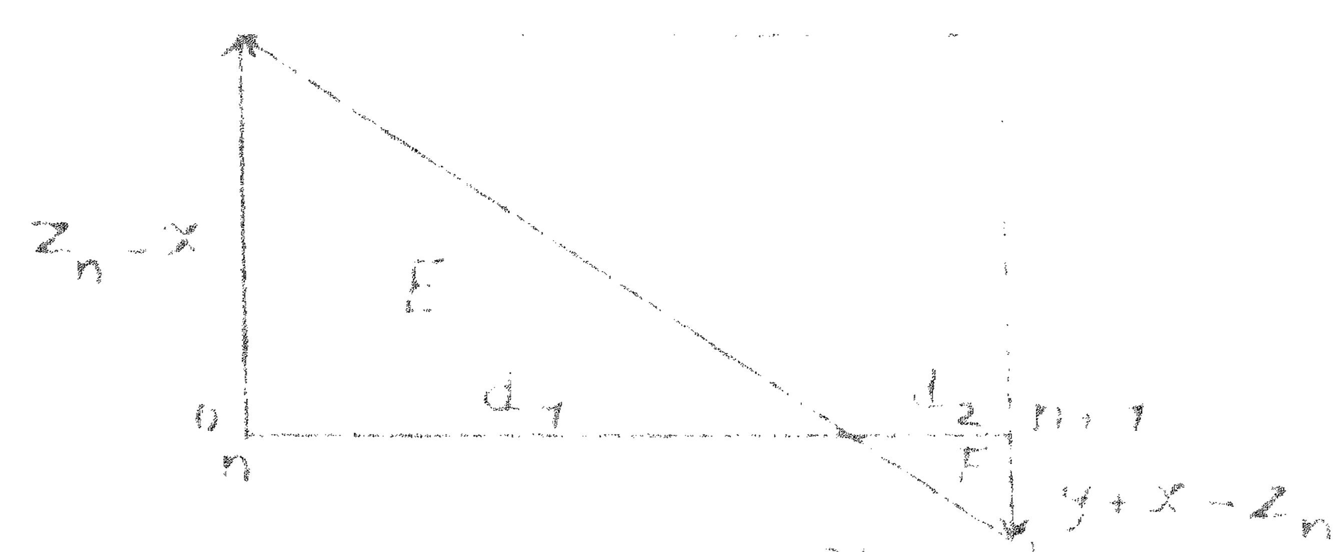


fig. 4

Het verloop bij negatieve begin- en eindvoorraad

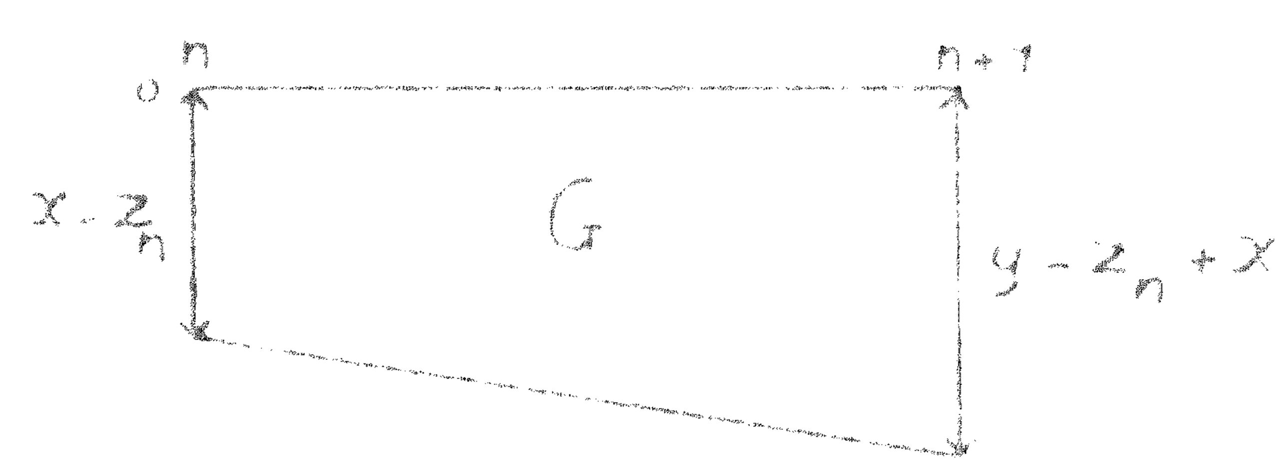


fig. 5

Ook nu berekenen wij eerst voor deze gevallen afzonderlijk de kosten-functie, alsof de behoefte in de $n^{\underline{de}}$ periode een gegeven waarde bezit.

<u>In het eerste geval</u> is de gemiddelde voorraad gelijk aan $(z_n - x - \frac{1}{2}y)$ en de daaruit voortvloeiende kosten bedragen:

$$(z_n - x - \tfrac{1}{2}y)\,C_1 \,. \qquad (19)$$

Ook hier is $(z_n - x - \frac{1}{2}y)$ gelijk aan het oppervlak D van fig. 3.

<u>In het tweede geval</u> is er gedurende een periode d_1 een positieve voorraad en wel gemiddeld $\frac{1}{2}(z_n - x)$ en tijdens de periode d_2 een gemiddeld tekort van $\frac{1}{2}(y + x - z_n)$.

De totale kosten bedragen dan:

$$\tfrac{1}{2}(z_n - x)\,d_1 C_1 + \tfrac{1}{2}(y + x - z_n)\,d_2 C_2 \,. \qquad (20)$$

Wederom geldt:

$$\left.\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 1 \\ d_1 : d_2 &= (z_n - x) : (y + x - z_n) \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

waaruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{z_n - x}{y}\,, \\ d_2 &= \frac{y + x - z_n}{y}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

De betrekking (20) gaat dan over in:

$$\frac{1}{2}\,\frac{(z_n - x)^2}{y}\,C_1 + \frac{1}{2}\,\frac{(y + x - z_n)^2}{y}\,C_2 \;; \qquad (23)$$

hierin zijn

$$\frac{1}{2}\,\frac{(z_n - x)^2}{y} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2}\,\frac{(y + x - z_n)^2}{y}$$

resp. gelijk aan de oppervlakken E en F van fig. 4.

In het derde geval is het gemiddelde tekort gelijk aan $(\frac{1}{2}y - z_n + x)$ en de daarbij behorende kosten bedragen

$$(\tfrac{1}{2}y - z_n + x)\,C_2\,. \qquad (24)$$

De grootheden x en y, die in deze drie gevallen voorkomen, zijn echter geen bekende getallen, maar variabelen met een kansverdeling. Wij zullen nu de volgende mogelijkheden bekijken:

a) de variabelen bezitten een continue verdeling,

b) de variabelen volgen een discrete verdeling.

Daarna zullen wij voor elk van deze verdelingstypen een toepassing behandelen.

Stel nu dat de variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ een kansverdeling bezitten met dichtheden resp. $f(x)$ en $g(y)$. De verwachting van de te maken kosten wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned} C(z_n) = {} & C_1 \int_0^{z_n}\int_0^{z_n - x} (z_n - x - \tfrac{1}{2}y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy \;+ \\ & + \tfrac{1}{2}C_1 \int_0^{z_n}\int_{z_n - x}^{\infty} \frac{(z_n - x)^2}{y}\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy \;+ \\ & + \tfrac{1}{2}C_2 \int_0^{z_n}\int_{z_n - x}^{\infty} \frac{(y + x - z_n)^2}{y}\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy \;+ \\ & + C_2 \int_{z_n}^{\infty}\int_0^{\infty} (\tfrac{1}{2}y - z_n + x)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy\,. \end{aligned} \qquad (25)$$

Deze betrekking is afgeleid met behulp van de uitdrukkingen (19), (23) en (24).

Wij kiezen z_n (vgl. (16a)) nu zodanig dat $C(z_n)$ minimaal wordt; z_n^* moet dus voldoen aan:

$$\frac{d\,C(z_n^*)}{d\,z_n^*} = 0 . \tag{26}$$

Deze vergelijking blijkt na enige berekeningen gelijkwaardig te zijn met:

$$\int_0^{z_n^*}\left[\int_0^{z_n^*-x} g(y)\,dy + (z_n^*-x)\int_{z_n^*-x}^{\infty}\frac{g(y)}{y}\,dy\right]f(x)\,dx = \frac{C_2}{C_1+C_2} . \tag{27}$$

Men kan bewijzen dat de functie

$$M(z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{z_n}\left[\int_0^{z_n-x} g(y)\,dy + (z_n-x)\int_{z_n-x}^{\infty}\frac{g(y)}{y}\,dy\right]f(x)\,dx$$

monotoon stijgend is, waardoor z_n door de betrekking (27) ondubbelzinnig bepaald is.

Uit

$$z_n = S_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} b_i + b_n \tag{18}$$

is b_n te berekenen, omdat de waarde $\sum_{i=n-k+1}^{n-1} b_i$ op het tijdstip t_{n-k} bekend is. Het criterium is dus:

$$M(z_n) = \int_0^{z_n}\left[G(z_n-x) + (z_n-x)\int_{z_n-x}^{\infty}\frac{g(y)}{y}\,dy\right]f(x)\,dx = \frac{C_2}{C_1+C_2} . \tag{27}$$

Het is ook mogelijk om na te gaan hoe groot de verwachting is van de lengte van de periode d_1, dat er geen tekort is aan grondstoffen.

In het eerste geval zal d_1 gelijk zijn aan één, omdat de voorraad voldoende groot is om in de behoefte te voorzien. In het tweede geval hebben wij gezien dat d_1 wordt gegeven door $\frac{z_n-x}{y}$ en in het derde geval is d_1 gelijk aan nul, omdat de n^{de} periode wordt begonnen met een tekort.

Voor de verwachting van d_1 geldt dus de volgende betrekking:

$$\mathcal{E}\{\underline{d}_1\} = \int_0^{z_n} G(z_n-x)f(x)\,dx + \int_0^{z_n}(z_n-x)f(x)\int_{z_n-x}^{\infty}\frac{g(y)}{y}\,dx\,dy . \tag{28}$$

Uit (27) en (28) volgt:

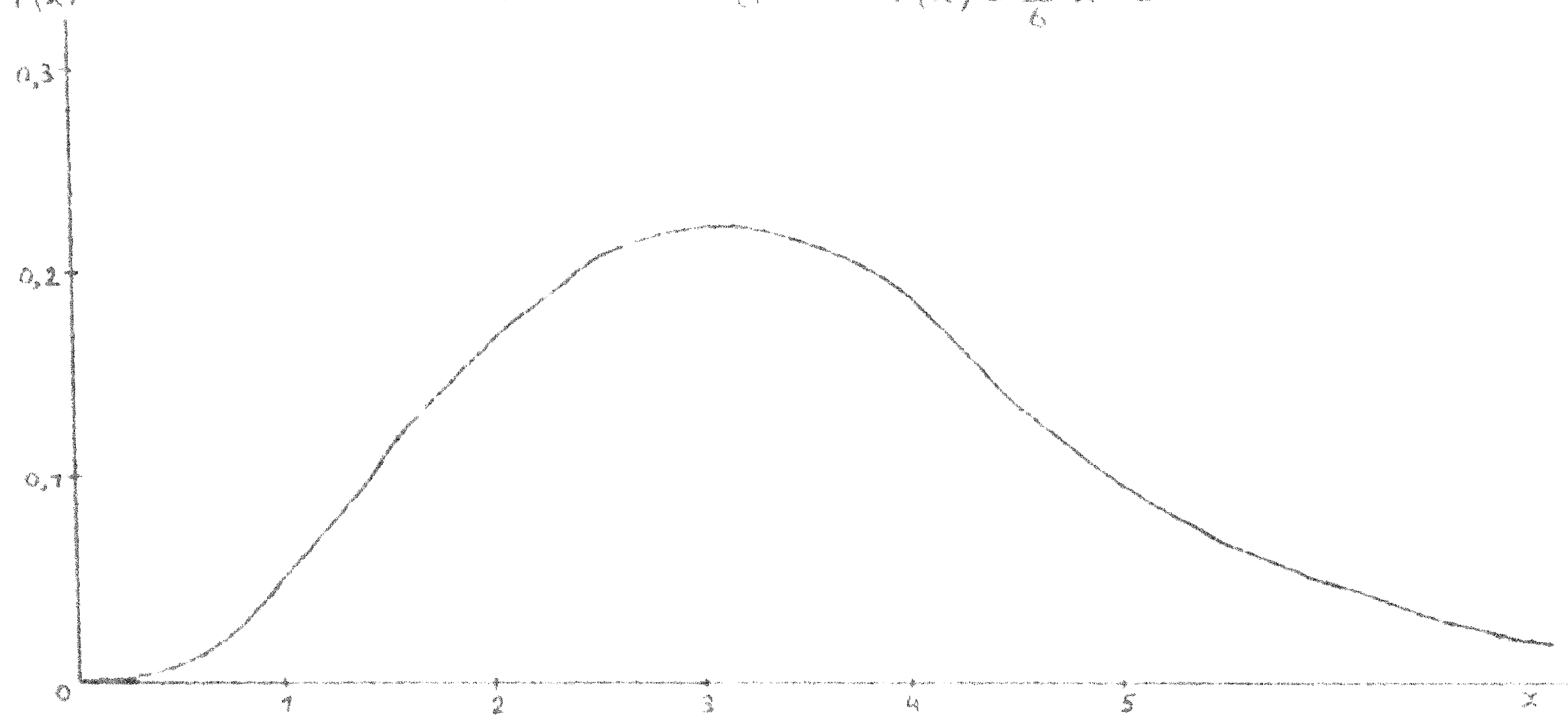
$$\mathcal{E}\{\underline{d}_1\} = \frac{C_2}{C_1+C_2} \tag{29}$$

$$\frac{\mathcal{E}\{d_1\}}{\mathcal{E}\{d_2\}} = \frac{C_2}{C_1} . \qquad (30)$$

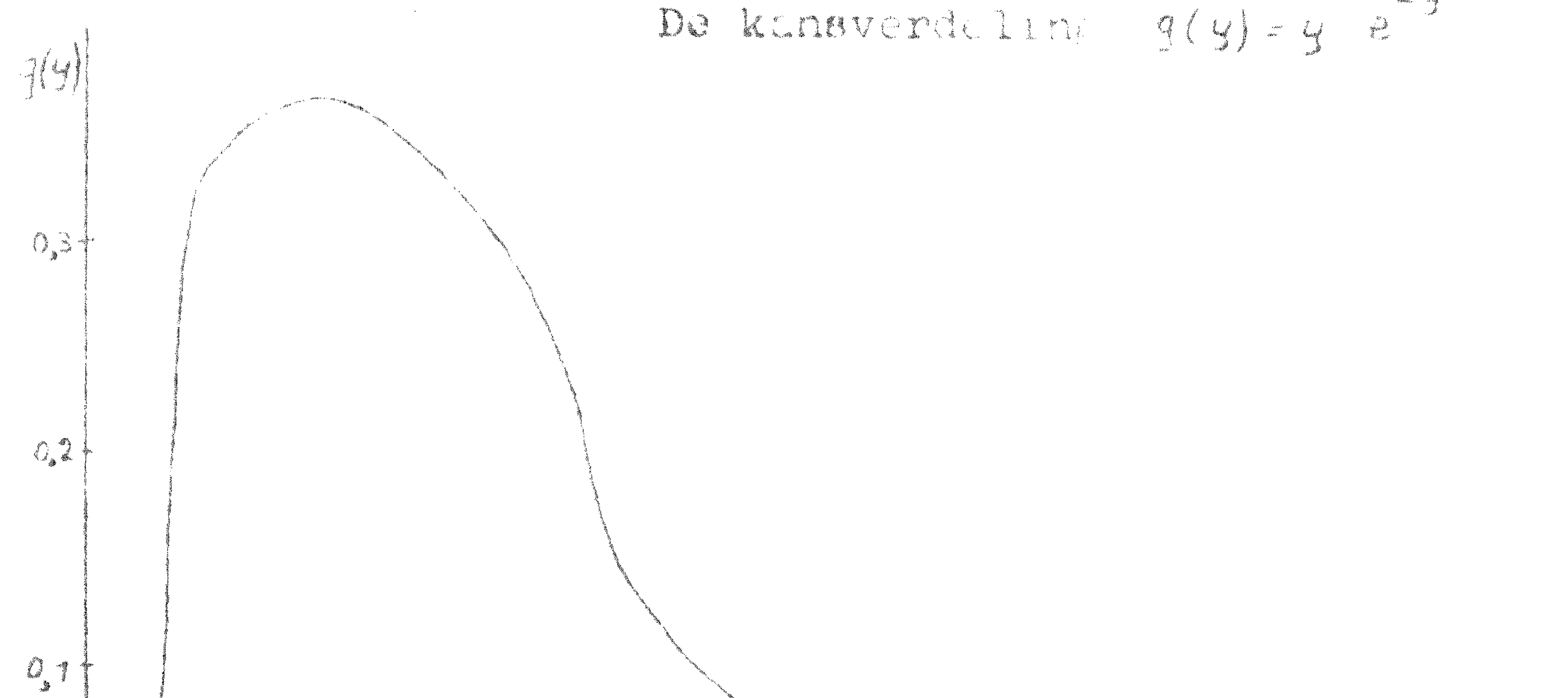
Vervolgens zullen wij een toepassing geven van de bovenstaande methode. Hierin veronderstellen wij, dat de leveringsduur twee perioden bedraagt en de verdelingsdichtheden gegeven worden door:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{6}\, x^3 e^{-x} \\ g(y) &= y\, e^{-y} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

De kansverdeling $f(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$



De kansverdeling $g(y) = y\, e^{-y}$



De verdeling van $\underline{z}$ wordt verkregen door te **onderstellen**, dat $\underline{r}_{n-1}$ en $\underline{r}_{n-2}$ onafhankelijk verdeeld zijn met dichtheden:

$$h(r_{n-1}) = r_{n-1}\, e^{-r_{n-1}}$$

$$h(r_{n-2}) = r_{n-2}\, e^{-r_{n-2}}$$

Uit $f(z) = f(r_{n-1} + r_{n-2})$ volgt dan de gegeven verdeling.

De vraag luidt nu wederom: Hoe groot moeten wij op het tijdstip t_{n-2} onze bestelling b_n kiezen, als gegeven is

$$\left.\begin{aligned} &C_2 = 19\,C_1 \\ &S_{n-2} = 3{,}10 \\ &t_{n-1} = 2{,}70 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Uit (27), (31) en (32) volgt:

$$M(z_n^*) = \int_0^{z_n^*}\left[\int_0^{z_n^*-x} y\,e^{-y}\,dy + (z_n^*-x)\int_{z_n^*-x}^{\infty} e^{-y}\,dy\right]\frac{1}{6}\,x^3 e^{-x}\,dx = 0{,}95 \qquad (33)$$

en ook:

$$M(z_n^*) = 1 - e^{-z_n^*}\left[1 + z_n^* + \frac{z_n^{*2}}{2} + \frac{z_n^{*3}}{6} + \frac{z_n^{*4}}{24}\right] = 0{,}95. \qquad (34)$$

Voor (34) kunnen wij ook schrijven:

$$\int_0^{2z_n^*} \frac{u^4}{4!\,2^5}\, e^{-\frac{u}{2}}\,du = 0{,}95. \qquad (35)$$

Daar $\frac{u^4}{4!\,2^5}\, e^{-\frac{u}{2}}$ de verdelingsdichtheid is van een χ^2-verdeling met $u = \chi^2$ en 10 vrijheidsgraden is de waarde van $2z_n^*$ uit de tabel van deze verdeling af te lezen. Wij vinden dan voor z_n:

$$z_n = 9{,}15. \qquad (36)$$

De te bestellen hoeveelheid wordt dan gegeven door:

$$b_n^* = 9{,}15 - (3{,}10 + 2{,}70) = 3{,}35. \qquad (37)$$

Wij zullen nu eens nagaan of wij een gelijksoortige methode kunnen ontwikkelen voor het geval, dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geen continue, maar <u>discrete verdelingen</u> bezitten met kansen resp. $p(x)$ en $q(y)$. Wij vinden dan met behulp van de betrekkingen (19), (23) en (24) voor de verwachting van de te maken kosten:

$$C(z_n) = C_1 \sum_{x=0}^{z_n} \sum_{y=0}^{z_n - x} \left(z_n - x - \frac{y}{2}\right) p(x)\, q(y) +$$

$$+ \frac{1}{2} C_1 \sum_{x=0}^{z_n} \sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{1}{y} (z_n - x)^2 p(x)\, q(y) + \tag{38}$$

$$+ \frac{1}{2} C_2 \sum_{x=0}^{z_n} \sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{1}{y} [y - (z_n - x)]^2 p(x)\, q(y) + C_2 \sum_{x=z_n+1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left(x - z_n + \frac{y}{2}\right) p(x)\, q(y).$$

De betrekking (38) kunnen wij ook anders schrijven en wel:

$$C(z_n) = (C_1 + C_2) \sum_{x=0}^{z_n} \sum_{y=0}^{z_n - x} \left(z_n - x - \frac{y}{2}\right) p(x)\, q(y) +$$

$$+ (C_1 + C_2) \sum_{x=0}^{z_n} \sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{1}{2y} (z_n - x)^2 p(x)\, q(y) + \tag{39}$$

$$+ C_2 \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} \left(x - z_n + \frac{y}{2}\right) p(x)\, q(y).$$

De uitdrukking (39) gaat na enig rekenen op zijn beurt over in:

$$C(z_n) = C_2 \left[\frac{\bar{y}}{2} + \bar{x} - z_n \right] + (C_1 + C_2) \left[S(z_n) - \frac{T(z_n)}{2} + \frac{R(z_n)}{2} \right] \tag{40}$$

met

$$\bar{x} = \mathcal{E}\{x\},$$

$$\bar{y} = \mathcal{E}\{y\},$$

en

$$S(z_n) = \sum_{x=0}^{z_n} (z_n - x)\, p(x) \sum_{y=0}^{z_n - x} q(y),$$

$$T(z_n) = \sum_{x=0}^{z_n} p(x) \sum_{y=0}^{z_n - x} y\, q(y), \tag{41}$$

$$R(z_n) = \sum_{x=0}^{z_n} (z_n - x)^2 p(x) \sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{q(y)}{y}.$$

Wanneer z_n optimaal is, moet gelden:

$$C(z_n - 1) \geq C(z_n), \tag{42}$$

$$C(z_n + 1) \geq C(z_n). \tag{43}$$

Men kan aantonen, na uitvoerig cijferen, dat beide ongelijkheden vervangen kunnen worden door:

$$M(z_n - 1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < M(z_n), \tag{44}$$

waarbij

$$M(z_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x=0}^{z_n} \left[\sum_{y=0}^{z_n - x} q(y) + \left(z_n - x + \frac{1}{2}\right) \sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{q(y)}{y} \right] p(x) \tag{45}$$

een monotoon stijgende functie van z_n is.

In verband met de plaatsruimte zullen wij deze afleidingen niet geven.

Ons criterium wordt dus door (45) gegeven en bepaalt op ondubbelzinnige wijze de waarde van z_n. Ook van dit geval zullen wij een toepassing geven. De volgende gegevens zijn ontleend aan het reeds eerder genoemde artikel van Eliezer Nadder.

In tabel I vinden wij de waarden van $p(x)$ voor verschillende x en tabel II geeft ons $q(y)$ behorende bij de verschillende waarden van y.

Tabel I

de kans p(x)

x	p(x)
0	0,04
1	0,20
2	0,37
3	0,30
4	0,09

Tabel II

de kans q(y)

y	q(y)
0	0,2
1	0,5
2	0,3

Ook bij deze toepassing geldt $C_2 = 19\, C_1$.
Wij voeren nu de volgende notatie in:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{y=0}^{z_n-x} q(y) = G(z_n-x),\\
&\sum_{y=z_n-x+1}^{\infty} \frac{q(y)}{y} = K(z_n-x),\\
&\sum_{y=0}^{z_n-x} y\, q(y) = T'(z_n-x),\\
&(z_n-x)\sum_{y=0}^{z_n-x} q(y) = S'(z_n-x),\\
&H(z_n-x) = (z_n-x+\tfrac{1}{2})\, K(z_n-x),\\
&M'(z_n-x) = G(z_n-x) + H(z_n-x),\\
&R'(z_n-x) = (z_n-x)^2\, F(z_n-y)
\end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

Met behulp van deze notatie gaat de uitdrukking (45) over in:

$$M'(z_n) = \sum_{x=0}^{z_n}\left[G(z_n-x) + H(z_n-x)\right] p(x). \qquad (47)$$

De grootheden, welke in (46) worden gegeven, kunnen gemakkelijk berekend worden met behulp van tabel I en II. In tabel III kan men de waarden aflezen van deze grootheden.

Tabel III

De waarden van de grootheden vermeld in (46)

$z_n - x$	y	$q(y)$	$G(z_n - x)$	$S'(z_n - x)$	$yq(y)$	$T'(z_n - x)$	$\frac{q(y)}{y}$	$K(z_n - x)$	$H(z_n - x)$	$M'(z_n - x)$	$R'(z_n - x)$
0	0	.2	.2	0	0	0	∞	.65	.325	.525	0
1	1	.5	.7	.7	.5	.5	.50	.15	.225	.925	.15
2	2	.3	1.0	2.0	.6	1.1	.15	0	0	1.000	0
3	3	0	1.0	3.0	0	1.1	0	0	0	1.000	0
4	4	0	1.0	4.0	0	1.1	0	0	0	1.000	0
5	5	0	1.0	5.0	0	1.1	0	0	0	1.000	0
6	6	0	1.0	6.0	0	1.1	0	0	0	1.000	0

Het is gemakkelijk in te zien, dat de betrekkingen van (41) en (47) als volgt met die van (46) samenhangen:

$$\left.\begin{aligned} S(z_n) &= \sum_{x=0}^{z_n} S'(z_n - x)\, p(x), \\ T(z_n) &= \sum_{x=0}^{z_n} T'(z_n - x)\cdot p(x), \\ R(z_n) &= \sum_{x=0}^{z_n} R'(z_n - x)\, p(x), \\ M(z_n) &= \sum_{x=0}^{z_n} M'(z_n - x)\, p(x). \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

In tabel IV vinden wij de waarden van deze grootheden voor verschillende z waarden.

De waarden van M', S', T' en R' zijn verkregen uit tabel III.

Tabel IV

De waarden van de grootheden vermeld in (48)

z_n	x	$p(x)$	$z_n - x$	M'	$M'p(x)$	$M(z_n)$	S'	$S'p(x)$	$S(z_n)$	T'	$T'p(x)$	$T(z_n)$	R'	$R'p(x)$	$R(z_n)$	$S - \frac{T}{2} + \frac{R}{2}$
0	0	0,04	0	0,525	0,021		0			0	0		0	0		
						0,021			0						0	0
1	0	0,04	1	0,925	0,037		0,7	0,028		5	0,020		0,15	0,0060		
	1	0,20	0	0,525	0,105		0			0	0		0			
						0,142			0,028			0,020			0,006	0,0210
2	0	0,04	2	1,000	0,040		2,0	0,080		1,1	0,044		0			
	1	0,20	1	0,925	0,185		0,7	0,140		0,5	0,100		0,15	0,030		
	2	0,37	0	0,525	0,19425		0	0		0	0		0			
						0,41925			0,220			0,144			0,030	0,0163
3	0	0,04	3	1,000	0,040		3,0	0,120		1,1	0,044		0			
	1	0,20	2	1,000	0,200		2,0	0,400		1,1	0,220		0			
	2	0,37	1	0,925	0,34225		0,7	0,259		0,5	0,185		0,15	0,555		
	3	0,30	0	0,525	0,15750		0	0		0			0			
						0,73975			0,779			0,449			0,555	0,58225

z_n	x	$p(x)$	$z_n - x$	M'	$M'p(x)$	$M(z_n)$	S'	$S'p(x)$	$S(z_n)$	T'	$T'p(x)$	$T(z_n)$	R'	$R'p(x)$	$R(z_n)$	$S - \frac{T}{2} + \frac{R}{2}$
4	0	0,04	4	1,000	0,040		4,0	0,160		1,1	0,044		0			
	1	0,20	3	1,000	0,200		3,0	0,600		1,1	0,220		0			
	2	0,37	2	1,000	0,370		2,0	0,740		1,1	0,407		0			
	3	0,30	1	0,925	0,27750		0,7	0,210		0,5	0,150		0,15	0,0450		
	4	0,09	0	0,525	0,04725		0	0		0	0		0			
						0,93475			1,710			0,821			0,0450	1,3220
5	0	0,04	5	1,000	0,040		5,0	0,200		1,1	0,044		0			
	1	0,20	4	1,000	0,200		4,0	0,800		1,1	0,220		0			
	2	0,37	3	1,000	0,370		3,0	1,110		1,1	0,407		0			
	3	0,30	2	1,000	0,300		2,0	0,600		1,1	0,330		0			
	4	0,09	1	0,925	0,08325		0,7	0,063		0,5	0,045		0,15	0,0135		
						0,99325			2,773			1,046			0,0135	2,25675
6	0	0,04	6	1,000	0,040		6,0	0,240		1,1	0,044		0			
	1	0,20	5	1,000	0,200		5,0	1,000		1,1	0,220		0			
	2	0,37	4	1,000	0,370		4,0	1,480		1,1	0,407		0			
	3	0,30	3	1,000	0,300		3,0	0,900		1,1	0,330		0			
	4	0,09	2	1,000	0,900		2,0	0,180		1,1	0,099		0		0	
						1,00000			3,800			1,100			0	3,2500

Tenslotte vatten wij het gevonden resultaat samen in tabel V, welke verkregen wordt uit tabel IV door weglating van enkele rijen en kolommen.

Tabel V

De belangrijkste gegevens uit tabel IV

z_n	$M(z_n)$	$S - \frac{T}{2} + \frac{R}{2}$
0	0,02100	0
1	0,14200	0,02100
2	0,41925	0,01630
3	0,73975	0,58225
4	0,93475	1,32200
5	0,99325	2,25675
6	1,00000	3,25000

Bovendien geldt:

$$\bar{x} = \Sigma\, x\, p(x) = 2,2\,,$$

$$\bar{y} = \Sigma\, y\, q(y) = 1,1\,, \qquad (49)$$

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0,95\,.$$

Ons criterium zag er als volgt uit:

$$M(z_n - 1) \leqq \frac{C_2}{C_1 + C_2} \leqq M(z_n)\,, \qquad (44)$$

en hieruit volgt:

$$z_n = 5$$

en b_n^* is dus met behulp van (18a):

$$z_n = S_{n-2} + b_{n-1} + b_n \qquad (18a)$$

en met de gegevens:

$$S_{n-2} = 2$$

$$b_{n-1} = 1$$

te berekenen, en wel:

$$b_n = 2\,.$$

De verwachting van de totale kosten bedraagt dan:

$$C(5) = C_2\left[\frac{1,1}{2} + 2,2 - 5\right] + (C_1 + C_2)\left[2,25675\right] = 2,385\, C_1\,. \qquad (50)$$

Ter controle berekenen wij ook nog $C(4)$ en $C(6)$, waarvoor wij zullen vinden:

$$C(4) = 2{,}690\ C_1$$
$$C(6) = 3{,}250\ C_1 . \qquad (51)$$

Wij hebben dus ons probleem opgelost, in de veronderstelling dat:

a) de verdelingsfuncties $F(x)$ en $G(y)$ bekend zijn,
b) de afleveringstijden constant zijn,
c) de behoefte per tijdseenheid gedurende een periode constant is,
d) de waarden van de constanten C_1 en C_2 bekend zijn.

3. Tweede voorbeeld [1]

3.1. Inleiding

In dit voorbeeld zullen wij aannemen, dat wij belast zijn met de voorraadpolitiek van een dagbladbedrijf. De behoefte aan papier is voor iedere periode practisch gelijk en de bepaling van de nodige voorraad kan zonder moeite geschieden.

De prijs c per eenheid grondstof is echter geen constante grootheid, maar zal naar wij aannemen een kansverdeling volgen.

De vraag waarmee wij nu geconfronteerd worden is van de volgende gedaante: "Hoeveel papier moeten wij op een bepaald moment inslaan als zowel de dan geldende prijs als de resterende voorraad bekend zijn".

Is de prijs relatief hoog, dan kopen wij alleen het hoogst nodige in, maar is daarentegen de prijs laag, dan zullen wij geneigd zijn een grotere hoeveelheid in te slaan. De bestel grootte is afhankelijk van de omvang van de reeds aanwezige voorraad en de opslagcapaciteit.

Ook nu zullen wij trachten een criterium op te stellen met behulp waarvan wij op een ondubbelzinnige wijze tot een beslissing kunnen komen.

In het vorige voorbeeld vonden wij een criterium, waarvoor de bijbehorende verwachting van de onkosten minimaal was. Bij ons tweede voorbeeld zullen wij helaas niet kunnen aangeven welk criterium het allerbeste is, ma r wel kunnen wij twee criteria met elkander vergelijken.

Ook bij dit probleem zullen wij enige veronderstellingen dienen te maken en wel de volgende:

1e de kansverdeling van de grondstoffenprijzen bezit voor iedere periode een bekende en gelijke kansdichtheid $p(c)$.

2e de kansverdeling van de grondstoffenprijzen voor de n^{de} periode is onafhankelijk van de verdelingen voor de $(n-1)$ voorafgaande perioden.

3e de kosten per tijdseenheid van een voorraad S worden gegeven door een bekende functie $h(S)$.

----

1) Deze paragraaf is gebaseerd op G. KREWERAS, La mise en équations du problème des stocks, Revue de Statistique Appliquée, 3 (1955) 83-89.

Zoals reeds eerder is vastgesteld zal de te bestellen hoeveelheid, b, een functie zijn van de aanwezige voorraad S en de op dat ogenblik geldende prijs c, met andere woorden:

$$b = f\,(S\,,c) \qquad (1)$$

Uit onze inleidende beschouwing volgt dat elk reëel inkoop voorschrift $f(S,c)$ moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

1e $f(S,c)$ is een monotoon niet stijgende functie van S en c.

2e $f(S,c) + S \leq M$, als met M de maximale voorraadcapaciteit wordt aangegeven.

Stel dat wij het inkoopvoorschrift maal hebben toegepast en dat wij onder S_{n-1} verstaan de eindvoorraad van de $(n-1)^{de}$ periode. Indien met b_n wordt aangegeven de hoeveelheid te bestellen grondstoffen aan het begin van de n^{de} periode en c_n de grondstoffenprijs is in de n^{de} periode, dan kunnen wij voor betrekking (1) schrijven:

$$b_n = f\,(S_{n-1}\,, c_n) \qquad (2)$$

Wanneer de behoeft aan papier per periode bedraagt, dan geldt:

$$S_n = S_{n-1} + f\,(S_{n-1}, c_n) - a \qquad (3)$$

Immers de voorraad aan het eind van de n^{de} periode is gelijk aan de restantvoorraad S_{n-1}, vermeerderd met de hoeveelheid bestelde goederen b_n en verminderd met het verbruik a.

Voor een gegeven waarde van S_{n-1} is S_n een stochastische variabele, omdat het een functie is van de stochastische variabele $\underline{c}_n$. Later zullen wij aantonen dat $\underline{S}_n$ een kansdichtheid $k\,(\underline{S}_n / S_{n-1})$ bezit. De stochastische variabele S_n heeft echter ook een onvoorwaardelijke kansdichtheid, welke wij zullen aangeven met $\omega_n(\underline{S}_n)$. De gedaante van deze kansdichtheid is afhankelijk van de grootte van de restantvoorraad S_o op het tijdstip, dat het inkoopvoorschrift voor het eerst werd toegepast. Nu kan men echter bewijzen, dat $\omega_n(S_n)$ voor een groot aantal inkoopvoorschriften en voor hoge waarden van n nadert tot een kansdichtheid $\omega_o(\underline{S}_n)$, die onafhankelijk is van n en S_o. Hoe groter men n dus kiest hoe minder de kansverdelingen in de n^{de} en $(n-1)^{de}$ periode van elkander zullen verschillen. In ons voorbeeld zullen wij deze kansverdelingen aan elkander gelijk stellen.

Wij zullen nu de verwachting opstellen van de totale onkosten voor een periode, waarvoor de bovengenoemde gelijkstelling gerechtvaardigd is. Voor de eenvoud zullen wij in het vervolg voor S_{n-1} en S_n resp. S en S_1 schrijven.

De verwachting van de voorraadkosten en die van de bestellingen worden resp. gegeven door:

$$D_1 = \int h(S_1)\, \omega_o(S_1)\, ds \tag{4a}$$

en

$$D_2 = \iint c\, f(S, c)\, \omega_o(S)\, p(c)\, ds\, dc \tag{4b}$$

De voorraad S wordt bepaald door de grondstoffenprijs van de vorige periode en bezit dus volgens de tweede veronderstelling een van c onafhankelijke verdeling.

Wij zijn nu in staat om voor een gegeven inkoopvoorschrift de verwachting van de onkosten te berekenen en kunnen dus twee verschillende inkoopvoorschriften met elkander vergelijken. Het voorschrift met de laagste verwachtingswaarde is natuurlijk te verkiezen boven een alternatieve.

3.2. De bepaling van de kansdichtheid $\omega(S)$.

In de vorige paragraaf hebben wij aangetoond dat de functie $f(S,c)$ monotoon dalend is met betrekking tot c. Bij een gegeven S en a is ook S_1, zie (3), een monotoon dalende functie van c, waaruit volgt, dat c geschreven kan worden als een monotoon dalende functie van S_1 en wel op de volgende wijze:

$$c = \varphi(S_1; S) \tag{5}$$

Voor een waarde S_1^o wordt c volgens (5) gelijk aan c_o. Wanneer $S_1 < S_1^o$ is, dan is $c > c_o$, waaruit volgt:

$$P\left[S_1 < S_1^o / S\right] = P\left[c > c_o\right] = \int_{\varphi(S_1^o;\, S)}^{\infty} p(c)\, dc \tag{6}$$

De kans dat de nieuwe voorraad tussen S_1 en $S_1 + dS_1$ ligt onder de voorwaarde dat de oude voorraad gelijk is aan S, wordt dan gegeven door:

$$k(S_1/S)\, dS_1 = -p\left[\varphi(S_1; S)\right] \frac{\partial \varphi(S_1; S)}{\partial S_1}\, dS_1 \tag{7}$$

waarvoor men met behulp van $S_1 = S + f(S,C)$-a ook kan schrijven:

$$k(S_1/S)\,d S_1 = \frac{-p(c)}{\frac{\partial f(S,c)}{c}} \cdot d S_1 \qquad (8)$$

Met behulp van de tactiek $f(S,C)$ en de kansdichtheid $p(c)$ van de grondstoffenprijs is dus de voorwaardelijke kansdichtheid van voorraad S_1 te bepalen. Aangezien de kansverdeling van S gelijkgesteld is aan de verdeling van S_1, moet de voorwaardelijke verdeling $\omega(S)$ van de voorraad voldoen aan de volgende betrekkingen:

$$\omega(S_1) = \int_0^\infty k(S_1/S)\,\omega(S)\,ds \qquad (9)$$

$$\int_0^\infty \omega(S)\,ds = 1 \qquad (10)$$

Behoudens enkele uitzonderingen is het mogelijk een kansdichtheid $\omega(S)$ te vinden, die aan deze beide betrekkingen voldoet. Met behulp van de nu verkregen kansdichtheid $\omega(S)$ kan men nu de verwachting van de totale kosten berekenen.

3.3. Het opstellen van een inkoopvoorschrift $f(S,C)$ en een bepaling van $\omega(S)$.

Wij zijn tot op zekere hoogte vrij in de keuze van ons inkoopvoorschrift. Wij moeten er alleen voor zorgen, dat $f(S,C)$ een monotoon dalende functie van C en S is en dat $S+f(S,C)\leq M$ is.

De nieuwe voorraad S_1 werd gegeven door:

$$S_1 = S + f(S,C) - a \quad (2)$$

Omdat bij een dagbladbedrijf een eventuele achterstand niet ingehaald kan worden, moeten wij $f(S,C)$ zodanig kiezen, dat geldt:

$$S + f(S,C) - a \geq 0 \qquad (11)$$

Voor de eenvoud veronderstellen wij dat a gelijk is aan 1. Wij beweren nu dat een inkoopvoorschrift gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} f(S,c) &= (M-S)\int_c^\infty e^{-t}\,dt = (M-S)\,e^{-c} && \text{voor } S \geq 1 \\ f(S,c) &= (M-1)\,e^{-c} + 1 - S && \text{voor } S \leq 1 \end{aligned} \qquad (12)$$

De eindvoorraad van de volgende periode wordt dan gegeven door:

$$S_1 = S + (M - S)\, e^{-c} - 1 \qquad \text{voor} \quad S \geq 1 \qquad (13)$$

$$S_1 = (M-1)\, e^{-c} \qquad \text{voor} \quad S \leq 1 \qquad (14)$$

Met behulp van (13) en (14) kan men direct zien, dat de eindvoorraad S_1 altijd groter of gelijk is aan nul. Uit (12) volgt, dat men de maximaal toelaatbare hoeveelheid $M - S$ bestelt als $c = 0$ is. Men kan in plaats van de factor $\int_c^\infty e^{-t}\,dt$ ook een staart van een andere kansverdeling gebruiken, bij voorbeeld:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_c^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \qquad (15)$$

of

$$\frac{1}{6} \int_c^\infty t^3 e^{-t}\, dt$$

Deze factor bepaalt hoofdzakelijk de grootte van de inkoop en derhalve onze inkooppolitiek.

Met behulp van (12) vinden wij de volgende betrekkingen:

$$\frac{\partial f(S,c)}{\partial c} = -(M-S)\, e^{-c} \qquad \text{voor} \quad S \geq 1 \quad (16)$$

$$\frac{\partial f(S,c)}{\partial c} = -(M-1)\, e^{-c} \qquad \text{voor} \quad S \leq 1 \quad (17)$$

Indien wij voor $p(c)$ schrijven:

$$p(c) = 2\, e^{-2c} \qquad (18)$$

dan volgt uit (8):

$$k(S_1/S) = -\frac{p(c)}{\frac{\partial f(S,c)}{\partial c}} = \frac{2e^{-c}}{(M-S)} \qquad \text{voor} \quad S \geq 1 \quad (19)$$

$$k(S_1/S) = \frac{2e^{-c}}{(M-1)} \qquad \text{voor} \quad S \leq 1 \quad (20)$$

Met behulp van (13) en (14) kunnen wij c elimineren, waardoor (19) en (20) overgaan in:

$$k(S_1/S) = \frac{2(S_1 - S + 1)}{(M-S)^2} \qquad \text{voor} \quad S \geq 1 \qquad (21)$$

$$k(S_1/S) = \frac{2S_1}{(M-1)^2} \qquad \text{voor} \quad S \leq 1 \qquad (22)$$

waarbij tevens moet gelden voor (21)

$$(M-1) \geq S_1 \geq S-1 \tag{23}$$

en voor (22)

$$(M-1) \geq S_1 \geq 0 \tag{24}$$

Ter contrôle kunnen wij nagaan of $k(S_1/S)$ voor iedere S een kansdichtheid is en dan blijkt:

$$\int_{S-1}^{M-1} k(S_1/S)\, ds = 2\int_{S-1}^{M-1} \frac{(S_1 - S + 1)}{(M-S)^2}\, dS_1 = 1 \qquad S \geq 1$$

$$\int_{0}^{M-1} k(S_1/S)\, ds = 2\int_{0}^{M-1} \frac{S_1\, dS_1}{(M-1)^2}\, dS_1 = 1 \qquad S \leq 1$$

$k(S_1/S)$ is dus inderdaad een kansdichtheid.

Volgens betrekking (9) moet nu gelden:

$$\omega(S_1) = \int_0^\infty k(S_1/S)\, \omega(S)\, dS \tag{9}$$

Uit (23) volgt dat $k(S_1/S) \neq 0$ voor $S \leq S_1 + 1 \leq M-1$ en voor (9) kunnen wij dan schrijven:

$$\omega(S_1) = 2\int_0^1 \frac{S_1\, \omega(S)\, dS}{(M-1)^2} + 2\int_1^{S_1+1} \frac{(S_1 - S + 1)}{(M-S)^2}\cdot \omega(S)\, dS \tag{25}$$

als $S_1 \leq M-2$

en voor $S_1 \geq M-2$

$$\omega(S_1) = 2\int_0^1 \frac{S_1\, \omega(S)\, dS}{(M-1)^2} + 2\int_1^{M-1} \frac{(S_1 - S + 1)}{(M-S)^2}\cdot \omega(S)\, dS \tag{26}$$

De bepaling van $\omega(S)$ is nu verder een wiskundig probleem. De lezer wordt <u>niet</u> aangeraden $\omega(S)$ te berekenen, omdat dit een tijdrovende bezigheid zal zijn. In het algemeen zal men $\omega(S)$ met benaderingsmethoden moeten bepalen.