STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 166 (C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk I: Inleidende voorbeelden

door

J. Kriens

en

G. de Leve

3e druk
1959

Bij zeer veel bedrijfsproblemen wordt men geconfronteerd met de vraag, hoe één of meer regelbare productiefactoren gekozen moeten worden opdat de opbrengst van het productieproces maximaal is. Vaak is men hierbij in de keuze van de oplossingsmogelijkheden beperkt doordat er extra voorwaarden zijn, waaraan in ieder geval moet worden voldaan.

De in het eerste hoofdstuk behandelde voorbeelden kunnen met klassieke methoden worden opgelost. In het tweede hoofdstuk zullen wij de lineaire programmering bespreken, een techniek van meer recente datum.

Wij leggen er reeds nu de nadruk op dat de theorie zich niet zal beperken tot de mathematische statistiek; ook andere delen van de wiskunde zullen ter sprake komen.

1. Voorbeeld, ontleend aan de landbouw

Wanneer men een stuk land ter beschikking heeft en dit wil bebouwen, zal de keuze van de producten afhangen van de netto opbrengst in geld, die de verschillende gewassen opleveren. Velerlei factoren spelen hierbij een rol, o.a. de opbrengst in hl per oppervlakte-eenheid, de prijs, die men per hl ontvangt, de spreiding in beide voornoemde factoren, b.v. ten gevolge van het weer; verder de bewerkelijkheid van het product. en de invloed van vruchtwisseling (afwisselend verbouwen van verschillende gewassen brengt meer op dan het voortdurend telen van één bepaald gewas).

Het is uiteraard niet mogelijk met alle invloeden tegelijk rekening te houden, aangezien het model hierdoor te ingewikkeld zou worden. Dit neemt niet weg, dat wij kunnen trachten de onderstellingen zo reëel mogelijk te maken. Het voorbeeld wordt twee keer besproken; de eerste keer[1] zonder rekening te houden met spreidingen in de oogstresultaten, terwijl dit de tweede keer wel gedaan zal worden. De beschouwingen worden gegeven voor tarwe (T) en haver (H). Voor meer dan twee gewassen kunnen analoge methoden gevolgd worden.

----

1) De stof is gebaseerd op: C. HILDRETH and S. REITER, On the Choice of a Crop Rotation Plan, hoofdstuk XI in Activity Analysis of Production and Allocation, onder redactie van Tj.C. KOOPMANS, Wiley and Sons (1951).

1.1. Bespreking zonder rekening te houden met spreidingen

Wanneer men de invloed van toevallige factoren buiten beschouwing laat, houdt men alleen rekening met de gemiddelde opbrengsten. Verder nemen wij aan, dat het land homogeen is en dat bij een bepaalde bebouwingsmethode een bepaalde bewerking van het land hoort. Ook onderstellen wij voor de eenvoud, dat noch de aanschaf van zaaigoed, noch de wijze van bewerken van land en gewas invloed heeft op het financiële resultaat. Slechts de opbrengst per oppervlakte-eenheid en de prijs per hl spelen dus nog een rol.

De aangegeven oplossingsmethode kan ook worden toegepast op de winsten, waarbij wij bovengenoemde beperkingen natuurlijk niet behoeven te maken; bewerkingskosten e.d. zijn dan al verdisconteerd.

1.1.1. Het eenvoudigste geval

Beperken wij ons verder nog tot het geval, dat geen vruchtwisseling wordt toegepast, dus dat op ieder stuk van het te bebouwen land steeds hetzelfde gewas wordt geteeld, dan is men alleen nog vrij in de keuze van de fractie λ van het land, dat met tarwe zal worden bezaaid; het overige deel is dan bestemd voor haver. Wij nemen aan dat het land 1 ha groot is en dat de opbrengst per ha voor tarwe a_{11} hl bedraagt en voor haver a_{22} hl.

De verkregen opbrengst kunnen wij met behulp van een rechthoekig assenstelsel als volgt in beeld brengen. Langs de x_1- resp. x_2-as (zie figuur 1) zetten wij de opbrengsten in hl van de tarwe resp. haver uit, zodat de coördinaten van ieder punt in het (x_1, x_2)-vlak de opbrengsten in tarwe en haver aangeven. Wanneer er alleen tarwe wordt geteeld, dus $\lambda = 1$, dan correspondeert hiermee het punt $\mathcal{O}_1$ op de x_1-as met coördinaten (a_{11}, o). Evenzo correspondeert met alleen haver verbouwen het punt $\mathcal{O}_2(o, a_{22})$ op de x_2-as. Bij elke waarde van λ behoort een punt $\mathcal{O}$, gelegen op de verbindingslijn $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2$; men schrijft hiervoor $\mathcal{O} = \lambda\mathcal{O}_1 + (1-\lambda)\mathcal{O}_2$, d.w.z. dat de coördinaten van dit punt zijn $x_1 = \lambda a_{11}$ en $x_2 = (1-\lambda)a_{22}$ of in de gebruikelijke notatie $(\lambda a_{11}, (1-\lambda)a_{22})$. Punten binnen de driehoek $\mathcal{O}_1 O \mathcal{O}_2$ vindt men alleen wanneer een deel van de oogst vernietigd wordt.

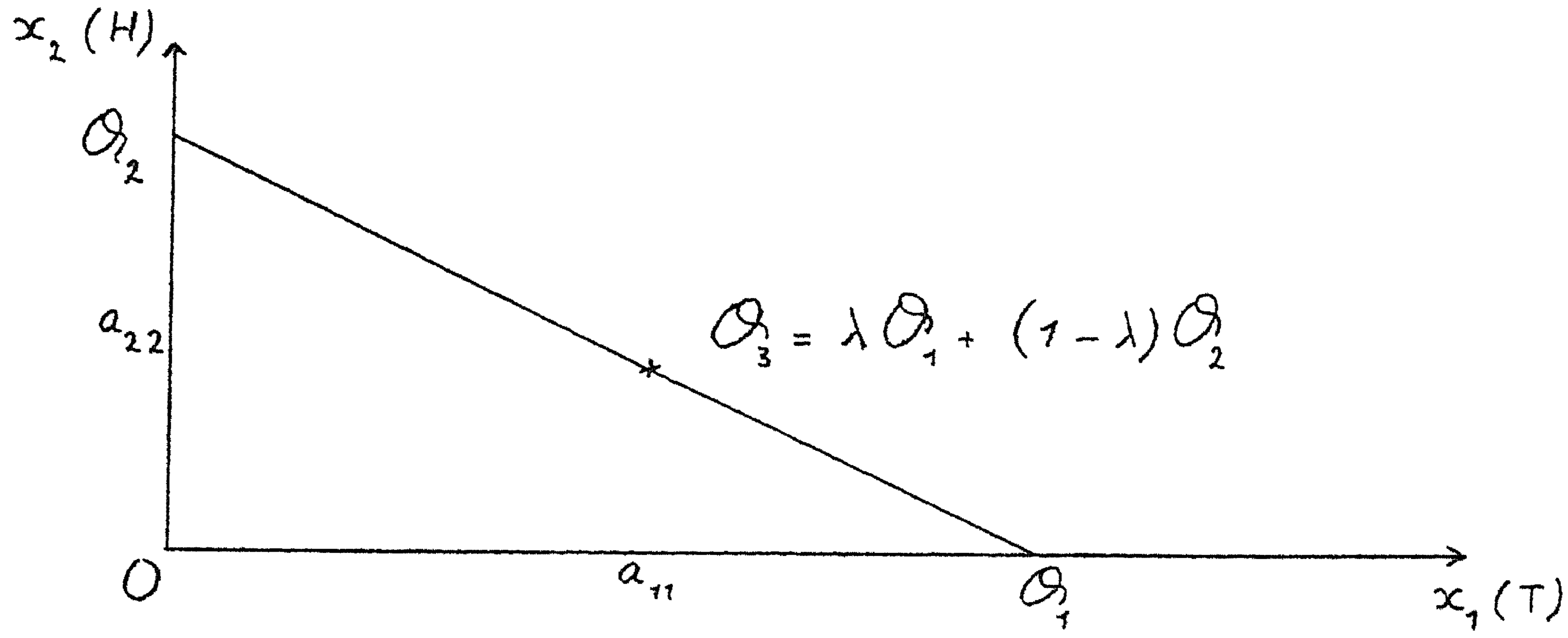


fig. 1
Opbrengsten, wanneer op een fractie van het land steeds tarwe verbouwd wordt en op de rest steeds haver.

De gemiddelde opbrengst per ha (geschat uit een reeks voorafgaande jaren) hebben wij van tarwe a_{11} hl en van haver a_{22} hl genoemd. Zijn de prijzen, die men per hl ontvangt p_1, resp. p_2, dan verdient men bij een fractie λ aan tarwe

$$x = \lambda a_{11} p_1 + (1-\lambda) a_{22} p_2 \quad . \tag{1}$$

Uiteraard wil men x zo groot mogelijk maken, wat in het geval (1) zeer eenvoudig is. x is een lineaire functie van λ, die men ook kan schrijven in de vorm

$$(a_{11} p_1 - a_{22} p_2)\lambda + a_{22} p_2 \, ,$$

waaruit direct blijkt, dat men $\lambda = 1$ moet kiezen, indien $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 > 0$ en $\lambda = 0$, wanneer $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 < 0$ is. In het geval $a_{11} p_1 - a_{22} p_2 = 0$ maakt het geen verschil, hoeveel men van het ene product verbouwt en hoeveel van het andere.

Men kan dit resultaat ook zuiver grafisch afleiden door in de grafiek van figuur 1 ook nog te tekenen de lijnen $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$, waarin C een willekeurige constante voorstelt (zie fig. 2). Een dergelijke lijn stelt opbrengstencombinaties (x_1, x_2) voor, die hetzelfde financiële resultaat C opleveren. Naarmate de afstand van O tot de lijn $p_1 x_1 + p_2 x_2$ = constant, groter is, heeft ook C een grotere waarde. Verschuiven wij de lijn AB evenwijdig aan zichzelf verder van O af, dan wordt de constante, d.w.z. de financiële opbrengst, dus groter en wij zullen het beste resultaat bereiken, wanneer deze lijn zo ver mogelijk van O verwijderd is, maar nog juist een punt met $O_1 O_2$ gemeen heeft. Hierbij kunnen zich voor verschillende waarden van p_1 en p_2 drie gevallen voordoen, welke geïllustreerd worden door de figuren 3a, b en c en die

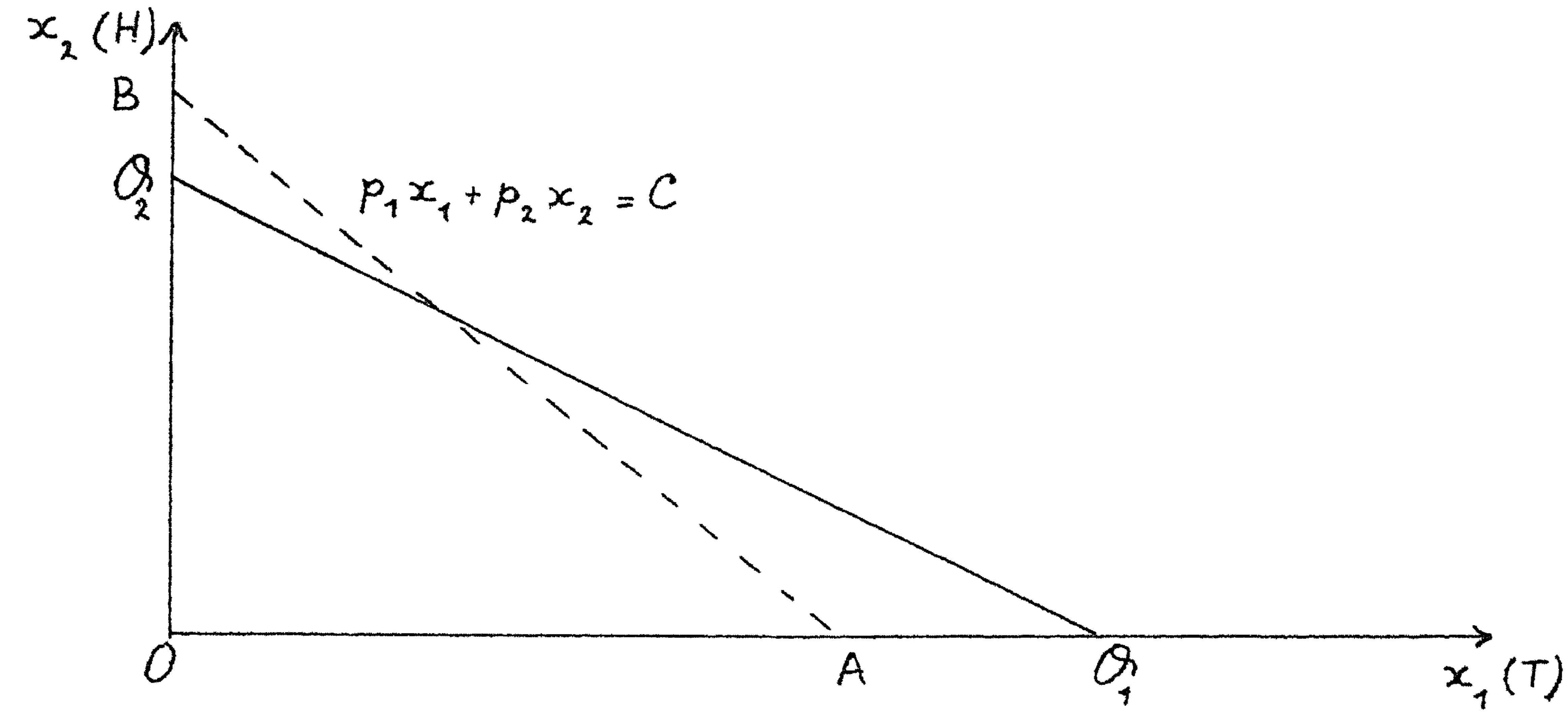


fig. 2

Grafiek voor het bepalen van de beste λ op grond van bekende opbrengsten in hl en prijzen per hl.

resp. leiden tot de keuze: alleen haver (a), alleen tarwe (b) en alle combinaties zijn even goed (c). Het is niet moeilijk na te gaan dat deze gevallen corresponderen met resp.

$a_{11}p_1 - a_{22}p_2 < 0$, > 0 en $= 0$.

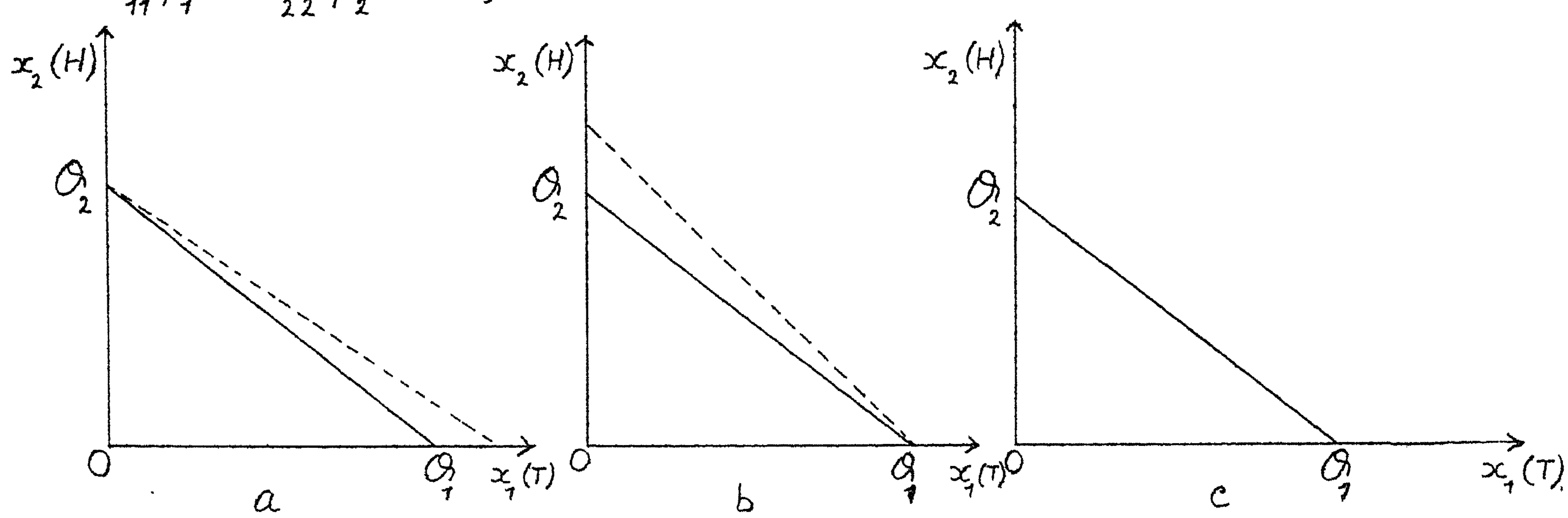


fig. 3

Grafische bepaling van de beste λ met lijnen evenwijdig $p_1x_1+p_2x_2=C$.

1.1.2. Toepassen van vruchtwisseling

Het in 1.1.1. gegeven model is weinig realistisch, omdat geen rekening is gehouden met het feit, dat de opbrengsten verhoogd worden door het toepassen van vruchtwisseling, een bebouwingsmethode, waarbij niet steeds hetzelfde product gezaaid wordt op een bepaald stuk land.

Daarom zullen wij nu eerst het geval bekijken, waarin men wat de vruchtwisseling betreft, kan kiezen tussen 1) voortdurend tarwe, 2) voortdurend haver, 3) twee jaar tarwe en vervolgens een jaar haver en 4) een jaar tarwe en daarna twee jaar haver. Wij gebruiken hiervoor achtereenvolgens de notaties TTT, HHH, TTH en THH. Of men de wisseling doet plaatsvinden door het stuk land in zijn geheel eerst twee jaar met tarwe te bezaaien en dan een jaar met haver, of door het stuk in drie gelijke delen te verdelen, en op ieder deel met een ander stadium van de cyclus te beginnen, doet voor het onderhavige probleem niet ter zake, omdat prijsschommelingen, spreidingen in de opbrengsten en de bewerking van de gewassen buiten beschouwing zijn gelaten.

In onderstaande tabel zijn de experimenteel bepaalde gemiddelde opbrengsten per jaar per ha opgegeven voor de verschillende methoden.

Tabel I

Opbrengsten in hl per ha bij verschillende bebouwingsmethoden

		bebouwingsmethode			
		TTT	HHH	TTH	THH
Opbrengst	tarwe	a_{11}	0	a_{13}	a_{14}
	haver	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}

Evenals in fig. 1 kunnen wij ook nu in een grafiek uitzetten wat de resultaten zijn, wanneer één van de vier methoden wordt toegepast op een stuk land van 1 ha (fig. 4). Behalve $O_1(TTT)$ en $O_2(HHH)$ zijn nu nog gegeven $O_3(TTH)$ en $O_4(THH)$. Passen wij op een deel van het land TTT toe en op de rest TTH, dan wordt de opbrengst voorgesteld door een punt van O_1O_3. Een dergelijke betekenis hebben ook alle punten van de lijnstukken O_3O_4 en O_4O_2. Zolang de keuze beperkt blijft tot de vier genoemde vruchtwisselingen kunnen er geen opbrengsten bereikt worden, die zowel meer tarwe als meer haver opleveren dan de resultaten, voorgesteld door de punten van de gebroken lijn $O_1O_3O_4O_2$ in figuur 4.

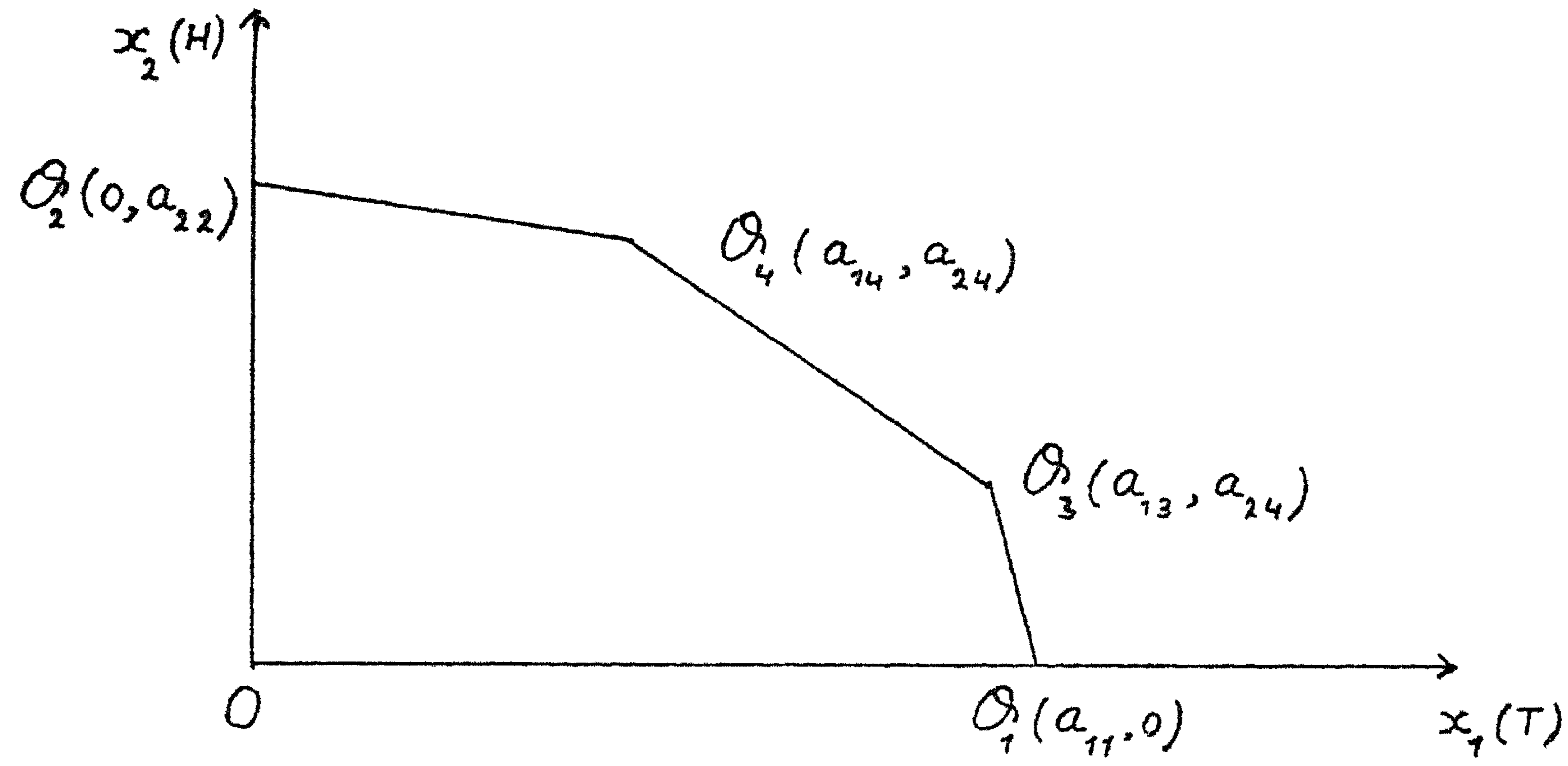


fig. 4

Opbrengsten, wanneer vier wisselende bebouwingen toegepast kunnen worden.

Voor iedere combinatie van de prijzen p_1 en p_2 kunnen wij weer nagaan welke vruchtwisseling of combinatie van vruchtwisselingen het voordeligst is. Grafisch geschiedt dit op dezelfde wijze als in 1.1.1., nl. door de rechte $p_1 x_1 + p_2 x_2 =$ constant evenwijdig aan zichzelf van O af op te schuiven, totdat er nog juist één of meer gemeenschappelijke punten zijn met de veelhoek $O O_1 O_3 O_4 O_2$.

Wij merken op dat in problemen van dit type het beste resultaat blijkbaar steeds verkregen wordt bij één van de hoekpunten, d.w.z. dat combinaties van verschillende wisselingen niet in aanmerking komen. De enige uitzondering hierop is het geval, waarin $p_1 x_1 + p_2 x_2$ = constant evenwijdig loopt met een segment van $O_1 O_3 O_4 O_2$.

In 1.1.3 zullen wij daarom combinaties van vruchtwisselingen buiten beschouwing laten. Dat dit niet meer gaat, wanneer wij ook spreidingen in onze beschouwingen betrekken, zullen wij zien in 1.2.

Algebraïsch kan men de beste bebouwingsmethode vinden door de financiële resultaten corresponderende met O_1, O_3, O_4 en O_2 met elkaar te vergelijken. Men vindt dan dat voor

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{13}} \qquad 2)$$

TTT de voorkeur verdient. Voor $\frac{p_1}{p_2} < \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{13}}$ kieze men TTH, tenzij de verhouding $\frac{p_1}{p_2}$ zodanig wordt, dat O_4 (THH) meer gaat opleveren. Op dezelfde wijze kan men inzien, dat de grens tussen de mogelijkheden TTH en THH ligt bij

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_{24} - a_{23}}{a_{13} - a_{14}} \quad , \text{ enz.}$$

----

2) Hierbij is aangenomen dat $a_{11} - a_{13} > 0$ is.

Hoewel het bovenstaande reeds een verbetering inhoudt van het model, dat in 1.1.1. is gebruikt, is het toch onbevredigend, dat van tevoren vastgesteld wordt, welke wisselingen men kan toepassen. Immers, men zal steeds zoeken naar die wisselingen, welke het meeste opleveren.

In het geval, dat alle mogelijke gemiddelde opbrengsten per jaar per ha, verkregen door allerlei verschillende vruchtwisselings-systemen, voorgesteld worden door een puntverzameling, b.v. een kromme, zoals getekend is in fig. 5, kan met de reeds behandelde grafische methode beslist worden welke opbrengstcombinatie het voordeligst is. Meestal zal deze bepaald worden door het punt E, waarin een rechte $p_1 x_1 + p_2 x_2 =$ constant, raakt aan de kromme.

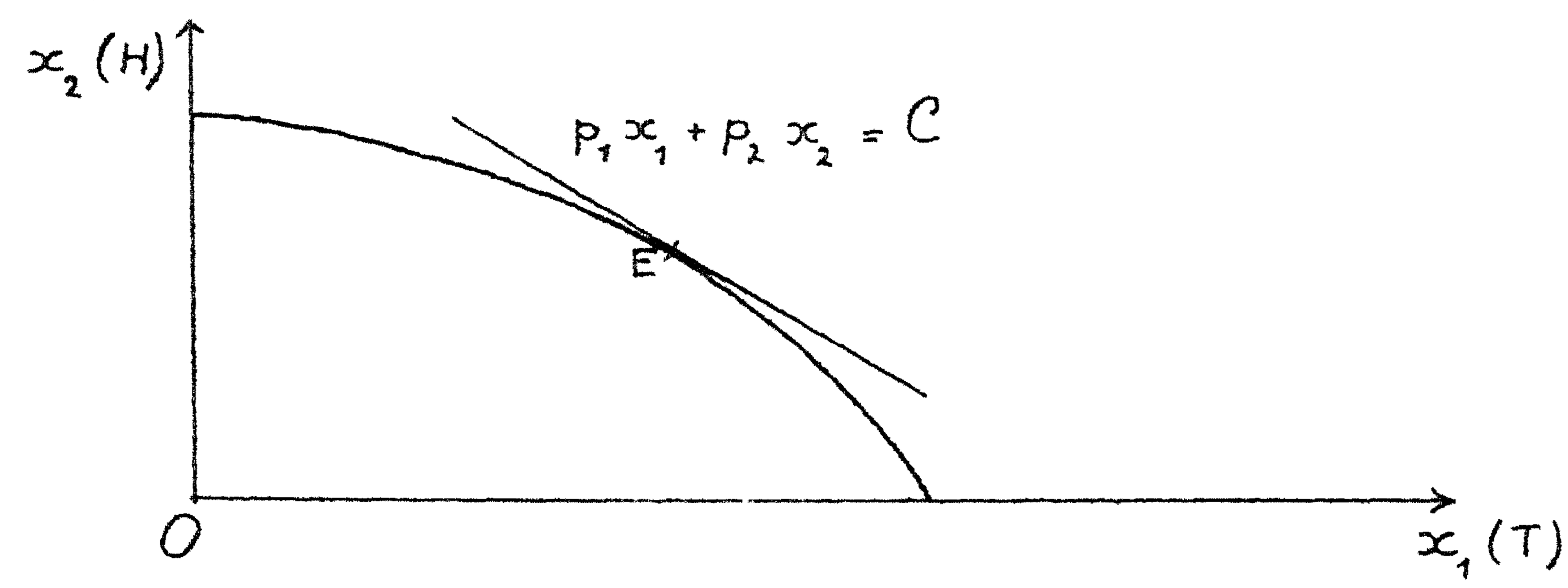


fig. 5

Bepaling maximale opbrengst bij gegeven productiekromme

Gewoonlijk heeft men echter niet een volledige kromme, maar kent men slechts de opbrengsten $\mathcal{O}_i$ bij een beperkt aantal vruchtwisselingen. Men kan dan door deze punten een kromme aanpassen, vervolgens weer het gunstigste punt E bepalen en dan, hetzij de vruchtwisseling $\mathcal{O}_j$ kiezen, die dit punt het beste benadert, hetzij trachten een nieuwe wisseling te vinden, waarvan de resultaten dichter bij E liggen dan de tot nu toe bekende. Overigens is het natuurlijk niet uitgesloten, dat bij nog niet onderzochte wisselingen punten behoren, die liggen buiten de aangepaste kromme; toepassing hiervan zou dan nog gunstigere resultaten opleveren.

In een artikel in Econometrica heeft C. HILDRETH [3)] erop gewezen dat dit aanpassen van een kromme niet steeds de beste methode is. Zo kan het bijzonder lastig zijn een goede kromme aan te passen wat tengevolge kan hebben dat het berekende optimum ver verwijderd is van het werkelijke optimum. Het is dan beter zich te beperken tot een vergelijking van de discrete mogelijkheden, die men reeds gevonden heeft.

----

3) C. HILDRETH, Economic implications of some cotton fertilizer experiments, Econometrica 23 (1955) 88-98; zie ook uittreksel 43) in G. DE LEVE en J. KRIENS, Overzicht van een aantal artikelen over "Operations Research", Rapport S 167 (Ov5) van het Mathematisch Centrum.

Tenslotte willen wij nog opmerken dat men een kromme, zoals getekend in figuur 5 niet moet verwarren met de gebroken lijn van fig. 4. Daar stelden punten van de verbindingslijnen $O_1 O_3$, $O_3 O_4$ en $O_4 O_2$ de opbrengsten voor wanneer op een deel van het land een bepaalde vruchtwisseling werd gebruikt en op de rest een andere. De punten van de kromme behoeven geen reële betekenis te hebben, daar wij niet weten of zij alle bereikt kunnen worden.

1.1.3. Invloed van andere factoren dan vruchtwisseling

Behalve het aantal verbouwingsmogelijkheden kan ook het aantal factoren, waarmee rekening wordt gehouden uitgebreid worden. Wij zullen dit illustreren voor het geval, dat gekozen kan worden tussen TTT, TTH, THH, HHH, waarbij wij dan tevens onderzoeken hoe de keuze afhangt van de vereiste hoeveelheid arbeid, gereedschappen en meststoffen voor de verschillende wisselingen. In tabel II is aangegeven hoeveel de opbrengst is per jaar, per ha en verder hoeveel arbeid, gereedschappen en meststoffen per jaar, per ha nodig zijn. Ter vereenvoudiging van de volgende formules behandelen wij de laatste drie factoren als negatieve opbrengsten; de a_{ij} van de regels 3 t/m 5 zijn dus < 0. De prijzen die men per eenheid ontvangt, resp. betaalt, geven wij aan met p_1 t/m p_5 ; deze p_i zijn alle positief.

Tabel II

Opbrengsten en investeringen per jaar per ha

	prijs	bebouwingsmethode			
		TTT 1	HHH 2	TTH 3	THH 4
tarwe	p_1	a_{11}	0	a_{13}	a_{14}
haver	p_2	0	a_{22}	a_{23}	a_{24}
arbeid	p_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
gereed-schappen	p_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
mest-stoffen	p_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Bij deze gegevens is het financiële resultaat π_j van de j-de methode:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{5} a_{ij} p_i \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Het verschil tussen de j-de en de ℓ-de methode is dus

$$\pi_j - \pi_\ell = \sum_{i=1}^{5} (a_{ij} - a_{i\ell}) p_i . \tag{3}$$

Wanneer geldt $\pi_j - \pi_\ell < 0$ zal men de voorkeur geven aan methode ℓ, terwijl voor $\pi_j - \pi_\ell > 0$ methode j zal worden gekozen.

Meetkundig kan men de vergelijking

$$\pi_j - \pi_\ell = 0 \tag{4}$$

voorstellen als een hypervlak in een 5-dimensionale ruimte, die wij de "prijzenruimte" zouden kunnen noemen, waarin langs de assen de coördinaten $p_1, \ldots, p_5$ uitgezet zijn. Dit vlak verdeelt de ruimte dus in twee delen; ligt het punt met als coördinaten de vijf prijzen uit tabel II in het deel met $\pi_j - \pi_\ell > 0$, dan kiest men methode j, ligt het punt in het andere deel, dan kiest men methode ℓ. Zulke hypervlakken kan men vinden voor alle combinaties van de 4 methoden. Zij verdelen de "prijzenruimte" in vier delen; binnen ieder deel heeft één van de methoden de voorkeur. Men lette wel op het verschil tussen de hier gebruikte meetkundige voorstelling en die van de vorige paragrafen, waarbij op de coördinaatassen geen prijzen, maar opbrengsten, uitgezet zijn.

Wanneer de "prijzenruimte" meer dan twee en in ieder geval wanneer deze meer dan drie dimensies omvat, kunnen haar eigenschappen niet meer direct uit een figuur worden afgelezen. In veel gevallen is het echter mogelijk het probleem te benaderen door een ander met minder dimensies. Men zie hiervoor b.v. het in voetnoot 3) aangehaalde artikel van C. HILDRETH.

Laten wij eens aannemen dat bepaalde prijzen stabieler zijn dan de andere; wij kunnen deze dan beschouwen als constanten. Is dit b.v. het geval met p_3, p_4 en p_5, dan gaat vergelijking (4) over in

$$\pi_j - \pi_\ell = (a_{1j} - a_{1\ell}) p_1 + (a_{2j} - a_{2\ell}) p_2 + (c_j - c_\ell) = 0 \tag{5}$$

waarbij $c_j = \sum_{i=3}^{5} a_{ij} p_i$ en $c_\ell = \sum_{i=3}^{5} a_{i\ell} p_i$ bekende constanten zijn.

Vergelijking (6) stelt een rechte voor in een plat vlak, het "prijzenvlak", met p_1 en p_2 als coördinaten. Wij zullen een en ander met een voorbeeld toelichten.

Wij gaan uit van de gegevens, opgenomen in tabel IIa.

Tabel IIa

Opbrengsten en investeringen per jaar per ha

		bebouwingsmethode			
		TTT	HHH	TTH	THH
	prijs	1	2	3	4
tarwe	p_1	1,5	-	1,375	0,5
haver	p_2	-	2	0,625	1
arbeid	5	-2	-1	-2	-1
gereedschappen	3	-1	-1	-1	-1
meststoffen	2	-1	-1,5	-1,0625	-0,5

De netto opbrengsten in geld zijn voor de verschillende bebouwingsmethoden:

$$\pi_1 \equiv 1{,}5\, p_1 - 15\,,$$

$$\pi_2 \equiv 2\, p_2 - 11\,,$$

$$\pi_3 \equiv 1{,}375\, p_1 + 0{,}625\, p_2 - 15{,}125\,,$$

$$\pi_4 \equiv 0{,}5\, p_1 + p_2 - 9\;.$$

Indien wij een keuze willen maken uit de bebouwingsmethoden moeten wij de verschillen van de opbrengsten in geld kennen; deze zijn:

$$\pi_1 - \pi_2 \equiv \pi_{12} = 1{,}5\, p_1 - 2\, p_2 - 4\,,$$

$$\pi_1 - \pi_3 \equiv \pi_{13} = 0{,}125\, p_1 - 0{,}625\, p_2 + 0{,}125\,,$$

$$\pi_1 - \pi_4 \equiv \pi_{14} = p_1 - p_2 - 6\,,$$

$$\pi_2 - \pi_3 \equiv \pi_{23} = -1{,}375\, p_1 + 1{,}375\, p_2 + 4{,}125\,,$$

$$\pi_2 - \pi_4 \equiv \pi_{24} = -0{,}5\, p_1 + p_2 - 2\,,$$

$$\pi_3 - \pi_4 \equiv \pi_{34} = 0{,}875\, p_1 - 0{,}375\, p_2 - 6{,}125\,.$$

Voor ieder punt in ons "prijzenvlak", d.w.z. voor ieder stel gegeven waarden van p_1 en p_2 kunnen wij nu vaststellen welke methode de voorkeur verdient, omdat $\pi_{j\ell} > 0$ betekent: methode j voordeliger dan methode ℓ . Tekenen wij in het "prijzenvlak" de lijnen $\pi_{j\ell} = 0$, dan verdeelt ieder van deze lijnen het vlak in twee delen; het teken van $\pi_{j\ell}$ in deze delen kan eenvoudig bepaald worden door voor p_1 en p_2 beide nul te substitueren. Is de waarde van $\pi_{j\ell}$ in $0 > 0\ (< 0)$, dan ligt 0 in het deel, waarin $j\ (\ell)$ gunstiger is dan $\ell\ (j)$. In het "prijzenvlak" ontstaan op deze wijze vier gebieden $\mathcal{G}_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$, waarin voor vaste i geldt, dat $\pi_{i\ell} \geqq 0\ (\ell = 1, 2, 3, 4)$ is. In het gebied $\mathcal{G}_i$ levert dus de i-de methode een gunstiger resultaat dan elke andere methode (zie fig. 6).

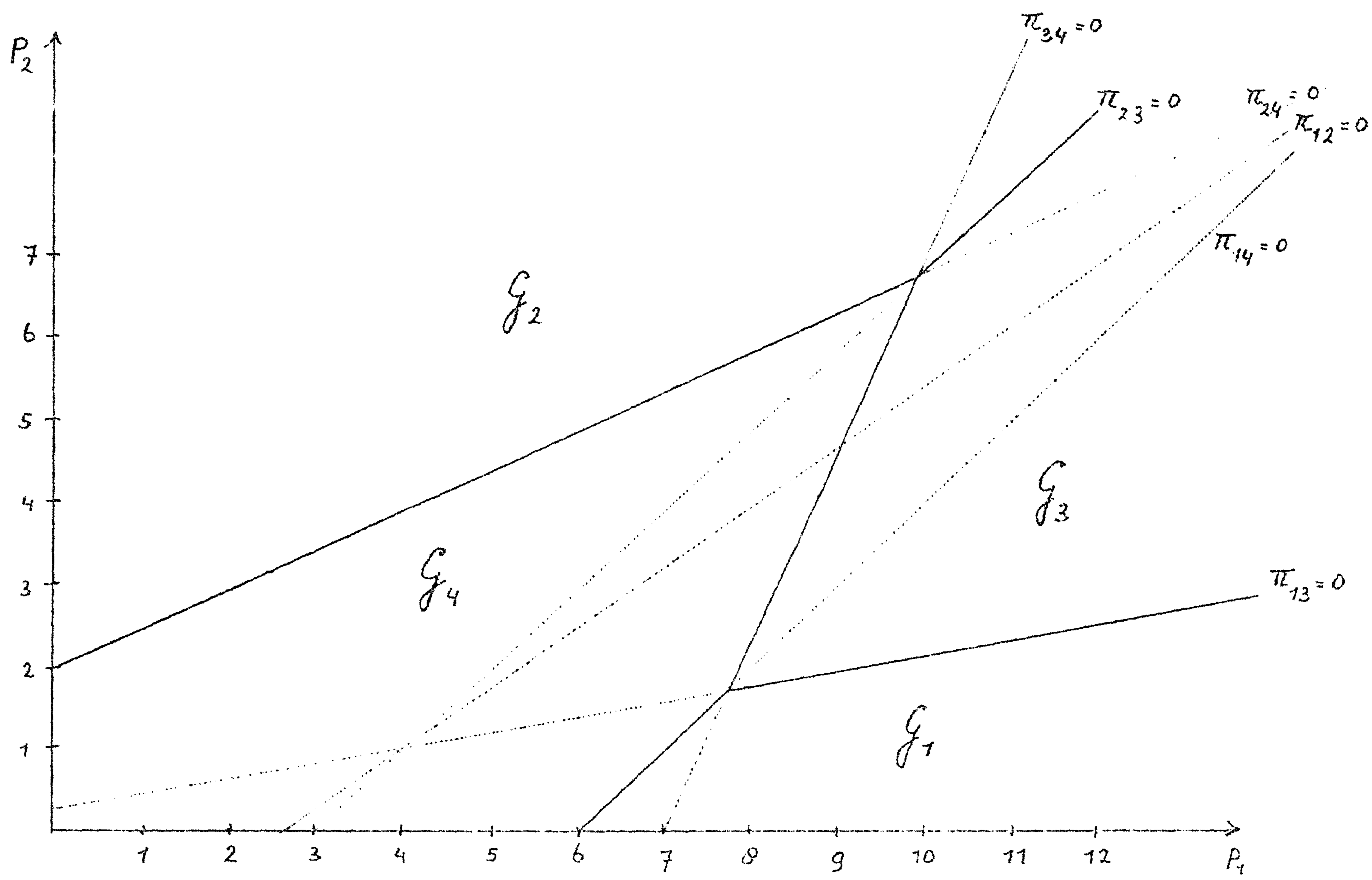


fig. 6

Bepaling van de beste methode met behulp van een "prijzenvlak"

Dat de gebieden, behorende bij een bepaalde methode samenhangend zijn en dat steeds drie lijnen door één punt gaan is niet toevallig. Beide eigenschappen kunnen worden bewezen. De laatste is zelfs zeer eenvoudig, immers als geldt

$$(a_{11} - a_{12})\, p_1 + (a_{21} - a_{22})\, p_2 + (c_1 - c_2) = 0$$

en

$$(a_{13} - a_{12})\, p_1 + (a_{23} - a_{22})\, p_2 + (c_3 - c_2) = 0,$$

dan volgt door aftrekking

$$(a_{11} - a_{13})\, p_1 + (a_{21} - a_{23})\, p_2 + (c_1 - c_3) = 0,$$

wat betekent, dat een punt liggende op $\pi_{12} = 0$ en $\pi_{23} = 0$ ook ligt op $\pi_{13} = 0$. Voor iedere i, j en k gaan dus de lijnen $\pi_{ij} = 0$, $\pi_{jk} = 0$ en $\pi_{ki} = 0$ door één punt.

In gevallen, waarin het niet mogelijk is het probleem grafisch op te lossen, moet men de betreffende p-waarden in de functies $\pi_{j\ell}$ substitueren en vervolgens nagaan of deze functies positief dan wel negatief worden.

Passen wij deze berekening toe in het gegeven voorbeeld, waarin wij voor p_3, p_4 en p_5 weer kiezen, de waarden opgegeven in tabel IIa en bovendien p_1 de waarde 20 heeft en $p_2 = 10$ is, dan vinden wij $\pi_{12} > 0$, dus π_1 beter dan π_2, verder $\pi_{13} < 0$, dus π_3 beter dan π_1 en tenslotte $\pi_{34} > 0$, zodat π_3 ook de voorkeur heeft boven π_4 en dus de beste methode is, een resultaat, dat ook volgt uit figuur 6.

Het voorbeeld kan nog verder worden uitgebreid, door meer factoren en meer methoden in rekening te brengen. Het enige gevolg hiervan is, dat het aantal rijen resp. het aantal kolommen van tabel II vergroot wordt en de verschillende formules meer termen gaan bevatten. Ook kan men dezelfde vruchtwisseling gaan vergelijken met verschillende bemestingen, of dezelfde vruchtwisseling op verschillende soorten land, enz. Bij al deze wijzigingen blijft de methode echter essentieel dezelfde en vinden alleen kleine veranderingen in de formules plaats. In alle gevallen moeten de verwachte opbrengsten echter bekend zijn, of anders van te voren geschat worden.

1.2. Bespreking waarbij rekening wordt gehouden met spreidingen

Het belangrijkste bezwaar, dat men tegen de in 1.1. gegeven oplossingen kan inbrengen, is het overal verwaarlozen van afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten. Het staat bij voorbaat vast, dat allerlei factoren, die men niet in de hand heeft, zoals de weersomstandigheden, de grootte van de oogst beïnvloeden. In dergelijke gevallen is het onjuist alleen te letten op de gemiddelde resultaten, omdat dan ook zeer lage opbrengsten kunnen voorkomen, wat soms niet te aanvaarden consequenties heeft.

Om nu afwijkingen van de gemiddelde oogstresultaten in onze beschouwingen te betrekken, vatten wij de oogstresultaten op als stochastische grootheden, waarvan wij de verdeling kennen. Het financiële resultaat zal dan eveneens een stochastische grootheid zijn, waarvan de verdelingsfunctie uit die van de opbrengsten volgt. Acht men nu een financiële opbrengst beneden een zeker bedrag eigenlijk onaanvaardbaar, dan kan men bij voorbaat stellen, dat de kans hierop een bepaalde waarde niet mag overtreffen. Gezien de aard van het probleem zal het in het algemeen niet mogelijk zijn er voor te zorgen, dat bepaalde kleine opbrengsten in het geheel niet kunnen voorkomen.

Onder alle mogelijkheden, die door de gestelde voorwaarde niet worden uitgesloten kunnen wij nu diegene kiezen, welke de verwachting van de financiële opbrengst maximaliseert.

Op welke wijze men te werk kan gaan voor het geval, waarin op een deel van het land jaar in jaar uit tarwe wordt verbouwd en o het overige stuk voortdurend haver, zullen wij uiteenzetten in de paragrafen 1.2.1. en 1.2.2.. In 1.2.3. onderzoeken wij het probleem als vruchtwisselingen toegepast kunnen worden.

1.2.1. Wiskundige formulering van het probleem

De opbrengst in hl aan tarwe, wanneer het gehele land hiermee bezaaid wordt geven wij aan met $\underline{x}_1$; de opbrengst in hl aan haver, wanneer alleen haver wordt verbouwd met $\underline{x}_2$.[1]) Wij nemen van beide grootheden aan, dat ze normaal verdeeld zijn met bekende gemiddelden en bekende spreidingen, welke wij voor tarwe, resp. haver aangeven met μ_1 en σ_1, resp. μ_2 en σ_2. Doordat de meeste toevallige factoren zowel de tarwe als de haveropbrengst zullen beïnvloeden, zijn $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ niet onderling onafhankelijk, maar gecorreleerd; ook de waarde ρ van de correlatiecoëfficiënt onderstellen wij bekend uit waarnemingen in

----

1) Symbolen voor stochastische grootheden worden steeds onderstreept om duidelijk onderscheid te maken tussen deze grootheden en de waarden die ze kunnen aannemen.

voorafgaande jaren; $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ bezitten dus een simultane normale verdeling, waarvan alle vijf parameters gegeven zijn.

Bezaait men nu een fractie λ van het land met tarwe en de rest met haver, dan is de opbrengst aan tarwe gelijk aan $\lambda \underline{x}_1$ en die aan haver gelijk aan $(1-\lambda)\underline{x}_2$. Geven wij evenals in 1.1. de verkoopsprijs per hl aan met p_1 resp. p_2, dan is het geldbedrag $\underline{z}$, dat men ontvangt, wanneer een fractie λ met tarwe bezaaid wordt, gelijk aan

$$\underline{z} = \lambda p_1 \underline{x}_1 + (1-\lambda) p_2 \underline{x}_2 . \tag{1}$$

Nu is een lineaire combinatie van normaal verdeelde stochastische grootheden ook weer normaal verdeeld, zodat wij de verdeling van $\underline{z}$ volledig kennen, wanneer gemiddelde en spreiding ervan berekend zijn. Uit formule (1) en de gegevens omtrent de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ volgt:

$$\mathcal{E}\, \underline{z} = \lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda) p_2 \mu_2 \tag{2}$$

en

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = \lambda^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)\sigma_1 \sigma_2 \varrho p_1 p_2 . \tag{3}$$

Wanneer wij geen extra eisen aan de uitkomst z opleggen, is het probleem hetzelfde als in 1.1.1.: kies λ zo, dat de verwachting van de opbrengst zo groot mogelijk is, d.w.z. maximaliseer (2) als functie van λ. In de practijk zal men dit zeker niet blindelings doen, omdat het mogelijk is, dat een hoge verwachting van $\underline{z}$ gepaard gaat met een zo grote spreiding, dat men den ondanks de hoge verwachting een flinke kans loopt, betrekkelijk kleine waarden van $\underline{z}$ te vinden. Zijn de consequenties van ontvangsten kleiner dan een bepaald bedrag w onaanvaardbaar, dan zal men eisen, dat de kans hierop niet groter mag zijn dan een klein getal β. Wij krijgen dus een nevenvoorwaarde, welke er als volgt uitziet:

$$P[\underline{z} \leq w] \leq \beta . \tag{4}$$

Deze voorwaarde kan tot gevolg hebben, dat wij beperkt worden in de keuze van λ. Wij moeten daarom eerst nagaan uit welke λ's er gekozen kan worden; de verwachting van de ontvangsten kan dan over de niet uitgesloten λ's worden gemaximaliseerd.

Voor de eerste van deze twee stappen voeren wij een nieuwe variabele $\underline{x}'$ in, de gereduceerde van $\underline{x}$:

$$\underline{x}' = \sigma_{\underline{x}}^{-1} (\underline{x} - \mathcal{E}\,\underline{x}) \;, \tag{5}$$

die dus normaal verdeeld is met gemiddelde nul en spreiding 1. Voorwaarde (4) gaat dan, uitgedrukt in $\underline{x}'$, over in

$$P\left[\underline{x}' \leqq \sigma_{\underline{x}}^{-1}(w - \mathcal{E}\,\underline{x})\right] \leqq \beta \;, \tag{6}$$

of als wij stellen

$$w' = \sigma_{\underline{x}}^{-1} (w - \mathcal{E}\,\underline{x}) \;, \tag{7}$$

$$P\left[\underline{x}' \leqq w'\right] \leqq \beta \;. \tag{8}$$

Daar $\underline{x}'$ $N(0,1)$ verdeeld is en β van te voren wordt gekozen, kunnen wij in een fractielentabel van de normale verdeling aflezen welke waarden van w' bij gegeven β aan (8) voldoen. Wij geven de waarde, die $\underline{x}'$ met een kans β overschrijdt aan met ξ_β (zie fig. 1). Naarmate β kleiner is, is ξ_β groter,

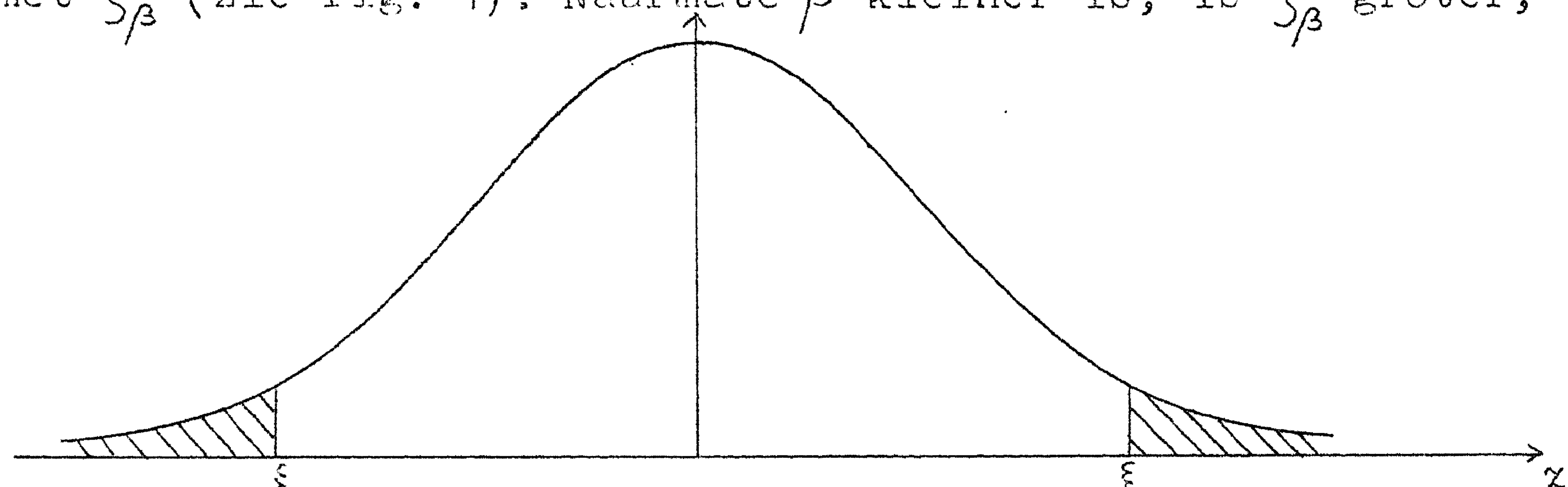


fig. 1

De overschrijdingskans bij een normale verdeling.

zodat de waarden van w' , die voldoen aan (8) gegeven worden door de ongelijkheid:

$$w' \leqq -\xi_\beta \;. \tag{9}$$

Vervangen wij hierin w' door $\sigma_{\underline{x}}^{-1}(w - \mathcal{E}\,\underline{x})$ en vullen wij voor $\mathcal{E}\,\underline{x}$ en $\sigma_{\underline{x}}$ de gevonden waarden (2) en (3) in, dan zien wij, dat λ moet voldoen aan:

$$\frac{w - \{\lambda p_1 \mu_1 + (1-\lambda) p_2 \mu_2\}}{\sqrt{\lambda^2 p_1^2 \sigma_1^2 + (1-\lambda)^2 p_2^2 \sigma_2^2 + 2(1-\lambda)\lambda\, p_1 p_2 \varrho\, \sigma_1 \sigma_2}} \leqq -\xi_\beta \;. \tag{10}$$

Om de voorwaarde beter te kunnen doorzien schrijven wij deze in de vorm: [2])

$$\left\{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2\,(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\right\}\lambda^2 +$$

$$+\,2\left\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\right\}\lambda + \qquad (11)$$

$$-(w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2\,p_2^2\sigma_2^2 \leqq 0\,,$$

of

$$A\lambda^2 + B\lambda + C \leqq 0\,, \qquad (12)$$

waarin

$$A = \left\{-(p_1\mu_1 - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2(p_1^2\sigma_1^2 + p_2^2\sigma_2^2 - 2p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\right\}\,, \qquad (13)$$

$$B = 2\left\{w(p_1\mu_1 - p_2\mu_2) - p_1p_2\mu_1\mu_2 + p_2^2\mu_2^2 + \xi_\beta^2(-p_2^2\sigma_2^2 + p_1p_2\rho\sigma_1\sigma_2)\right\} \qquad (14)$$

en

$$C = -(w - p_2\mu_2)^2 + \xi_\beta^2\,p_2^2\sigma_2^2 \qquad (15)$$

is.

De grootheid λ , die wij in ons probleem kunnen kiezen, moet dus voldoen aan een ongelijkheid van de tweede graad. Wij wijzen erop, dat tot nu toe geen andere onderstellingen gemaakt zijn dan die van de normaliteit en bekendheid van de verdelingen van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ en het bekend zijn van de prijzen p_1 en p_2 .

Men kan het wiskundige probleem : $\mathcal{E}\underline{x}$ maximaliseren onder de voorwaarde (12) algemeen oplossen. Wij zullen dit hier niet doen en ons beperken tot de bespreking van een aantal speciale gevallen.

1.2.2. Oplossing van het probleem in een aantal speciale gevallen

a) Het geval waarin $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1^2\sigma_1^2 = p_2^2\sigma_2^2$

De opbrengst in geld wanneer men het gehele land van 1 ha met tarwe bezaaid heeft, bedraagt $p_1\underline{x}_1$ en wanneer men dit doet met haver $p_2\underline{x}_2$. Zonder moeite is in te zien, dat $p_1\underline{x}_1$ een $N(p_1\mu_1, p_1\sigma_1)$-verdeling bezit en $p_2\underline{x}_2$ een $N(p_2\mu_2, p_2\sigma_2)$ -verdeling. Als dus

----

2) Hierbij is uitgegaan van de reële onderstelling dat $\beta < \frac{1}{2}$ en dus $\xi_\beta > 0$ is.

$p_1\mu_1 = p_2\mu_2$ en $p_1\sigma_1 = p_2\sigma_2$ is, zijn de waarschijnlijkheidsverdelingen van $p_1\underline{x}_1$ en $p_2\underline{x}_2$ aan elkaar gelijk. Hier is men wellicht geneigd te denken dat het er niet meer toe doet of men tarwe of haver, dan wel gedeeltelijk de één en gedeeltelijk de ander zaait. Toch is dit niet het geval. Men kan dit inzien door de verdeling van $\underline{x}$ te onderzoeken voor verschillende waarden van λ .

Voor iedere waarde van λ bedraagt volgens (2) de verwachting van x : $\mathcal{E}\underline{x} = p_1\mu_1 = p_2\mu_2$. De variantie gaat echter over in (zie (3)):

$$\sigma_{\underline{x}}^2 = p_1^2\sigma_1^2\left\{1 - 2\lambda(1-\lambda)(1-\rho)\right\} \tag{16}$$

en blijft dus een functie van λ .

Men kan de overgebleven vrijheid nu gebruiken om de variantie van $\underline{x}$ zo groot of zo klein mogelijk te maken. In het eerste geval speculeert men op een zeer hoge opbrengst, in het tweede geval maakt men de kans op een slecht resultaat zo klein mogelijk. Wij stelden ons op het voorzichtige standpunt en dat betekent dus dat wij $\sigma_{\underline{x}}^2$ moeten minimaliseren.

Door differentiatie van (16) naar λ vindt men dat $\sigma_{\underline{x}}^2$ minimaal is voor $\lambda = \frac{1}{2}$. De optimale oplossing is hier dus onafhankelijk van β en w ; wij noemen deze oplossing daarom <u>uniform optimaal</u>. Een duidelijke illustratie wordt gegeven door fig. 2, waarin voor verschillende waarden van λ de cumulatieve verdelingsfunctie $F(x)$ van $\underline{x}$ is getekend. Zo leest men direct uit deze

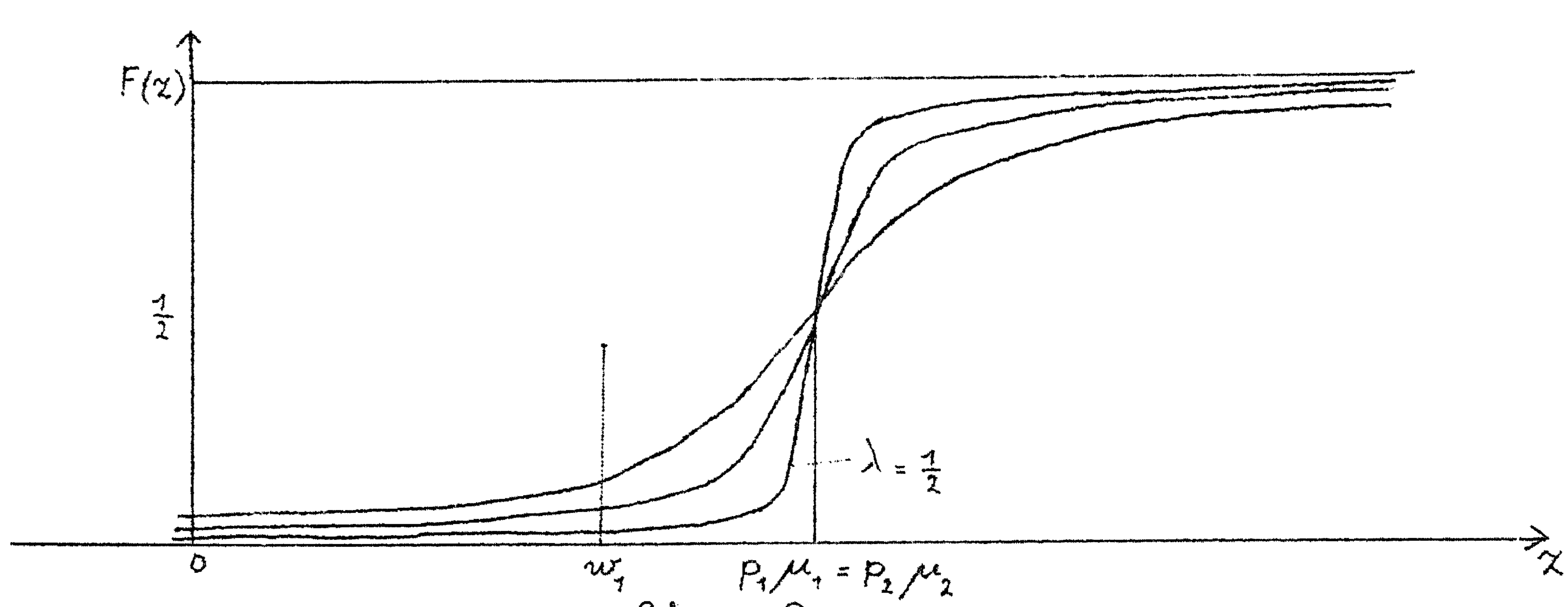


fig. 2

De cumulatieve verdelingsfunctie van $\underline{x}$ voor verschillende waarden van λ .

figuur af, dat de kleinste waarde van β voor een bepaalde waarde w_1 ($< p_1\mu_1$) van w bereikt wordt bij die keuze van λ waarvoor $\sigma_{\underline{x}}$ minimaal is.

De bovenstaande oplossing geldt ook voor iedere waarde van ρ. Wel blijft de kleinste variantie die bereikt kan worden een functie van ρ; immers bij de keuze $\lambda = \frac{1}{2}$, gaat (16) over in

$$\left(\sigma_{\underline{z}}^{2}\right)_{min} = \frac{1}{2} p_1^2 \sigma_1^2 (1+\rho) . \tag{17}$$

Het minimum ligt dus lager naarmate de waarde van ρ kleiner is. Men kan dit ook zo zeggen: door twee verschillende producten te verbouwen, die niet op dezelfde wijze door de toevallige omstandigheden beïnvloed worden, kunnen wij eventuele risico's verdelen; dit gaat des te beter, naarmate de opbrengsten minder samenhangen (ρ kleiner is).

Vergelijken wij de hier gevonden resultaten met die in 1.1.1., dan zien wij, dat daar voor het geval $p_1/\mu_1 = p_2/\mu_2$ van de vrijheid in de keuze van λ geen nuttig gebruik kon worden gemaakt, terwijl er hier een uniform optimale oplossing is gevonden voor $\lambda = \frac{1}{2}$.

b) <u>Het geval waarin $p_1\mu_1 = p_2\mu_2$, doch $p_1^2\sigma_1^2 \neq p_2^2\sigma_2^2$</u>

De verdelingen van $p_1 \underline{x}_1$ en $p_2 \underline{x}_2$ bezitten nu wel dezelfde verwachting, maar niet meer dezelfde variantie. Het bepalen van de optimale oplossing gaat echter op dezelfde wijze als in a). Neemt men aan dat

$$p_1 \sigma_1 = k\, p_2 \sigma_2 \tag{18}$$

is, dan is de variantie van $\underline{z}$

$$\sigma_{\underline{z}}^2 = p_1^2 \sigma_1^2 \left\{ k^2\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)k\rho \right\} . \tag{19}$$

Deze is minimaal voor

$$\lambda = \frac{1-k\rho}{k^2+1-2k\rho} ; \tag{20}$$

wanneer deze λ tussen 0 en 1 ligt geeft (20) de optimale waarde van λ, in het andere geval moet men hetzij $\lambda = 0$, hetzij $\lambda = 1$ kiezen. Substitueert men in (20) $k = 1$, dan vindt men weer voor de optimale waarde van λ: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ook oplossing (20) is uniform optimaal, d.w.z. geldig voor iedere combinatie van w en β. Het is echter mogelijk dat men zijn eisen zodanig heeft gesteld dat er ook door de gunstigste λ niet aan wordt voldaan; men zal dan hetzij de eisen moeten verlichten, hetzij van het productieproces moeten afzien. In gevallen waarin het minimum van (19) voor $0 \leqq \lambda \leqq 1$ niet op de rand van dit interval wordt bereikt, kan men in de situatie verkeren dat zowel alleen tarwe als alleen haver verbouwen te grote risico's oplevert, doch dat het risico bij gedeeltelijk haver en gedeeltelijk tarwe verbouwen wel aanvaardbaar is; hetzelfde geldt uiteraard ook voor het in 1.2.1. behandelde algemene geval.

c) Geen onderstellingen omtrent gemiddelden en spreidingen

In 1.2.1. hebben wij reeds aangegeven op welke wijze de optimale λ kan worden berekend. Deze is nu niet meer zoals in de voorbeelden a) en b) uniform optimaal, doch een functie van β en w. De berekening is niet moeilijk, maar door het grote aantal mogelijkheden wat de constanten A, B en C uit (12) betreft, wel vrij langdradig en zal daarom niet worden gegeven.

Bovendien is het niet zeker, dat het berekenen van een optimale λ inderdaad weergeeft, hetgeen men eigenlijk wil doen. Immers de waarden van w en vooral die van β liggen minder nauwkeurig vast, dan in 1.2.1. wordt gesuggereerd. De eisen voor w volgen nog hoofdzakelijk uit nauwkeurig bekende gegevens, maar β drukt uit welke kans op een zeer slechte oogst men wil aanvaarden. Zou men door de verwachting van $\underline{x}$ iets onder het te bereiken maximum te kiezen de kans op een resultaat kleiner dan w aanzienlijk verlagen, dan zal men dit zeker in overweging nemen. Hetzelfde geldt, wanneer het bereikbare maximum sterk stijgt bij een geringe verhoging van β. Men wil dus eigenlijk voor gegeven w in een grafiek zien hoe de samenhang is tussen β en het maximum van $\mathcal{E}\underline{x}$ over de toegelaten λ.

Het maximum van $\mathcal{E}\underline{x}$ en β hangen samen via de toegelaten waarden van λ. De verwachting van $\underline{x}$ is een monotone functie van λ. Ook het verband tussen de toegelaten λ's en β is zonder moeite op te sporen. Als bij een bepaalde β een verzameling van λ's toelaatbaar is, dan zullen deze λ's zeker toelaatbaar zijn, wanneer men zijn eisen lager stelt, d.w.z. een grotere kans β op een opbrengst kleiner dan w accepteert. De verzameling van toegelaten λ's zal dus groter worden of gelijk blijven, wanneer β toeneemt. Hieruit volgt dat ook het maximum van $\mathcal{E}\underline{x}$ zeker niet kleiner wordt bij stijgende β, m.a.w. dit maximum is een monotoon niet dalende functie van β.

Ook uit een grafiek zoals die van fig. 2 kan men een goede indruk krijgen van het verband tussen $\mathcal{E}\underline{x}$ en β bij gegeven waarde van w. Door de vrijheid in de keuze van λ zijn er verschillende waarden van $\mathcal{E}\underline{x}$ bereikbaar; het interessantste geval is nu dat waarin bij toenemende $\mathcal{E}\underline{x}$ ook $\sigma^2_{\underline{x}}$ toeneemt, waarin dus een hogere gemiddelde opbrengst samengaat met een groter risico. In figuur 3 zijn enige bereikbare cumulatieve verdelingsfuncties van $\underline{x}$ getekend. De snijpunten van de getekende krommen met de rechte $x = w$ geven aan hoe groot β is; aangezien $\underline{x}$ een symmetrische verdeling bezit, vallen mediaan en verwachting samen, zodat men $\mathcal{E}\underline{x}$ af kan lezen uit de snijpunten van de krommen met $F(x) = \frac{1}{2}$. Figuur 3 illustreert daardoor duidelijk op welke wijze β verloopt bij toenemende waarde van $\mathcal{E}\underline{x}$.

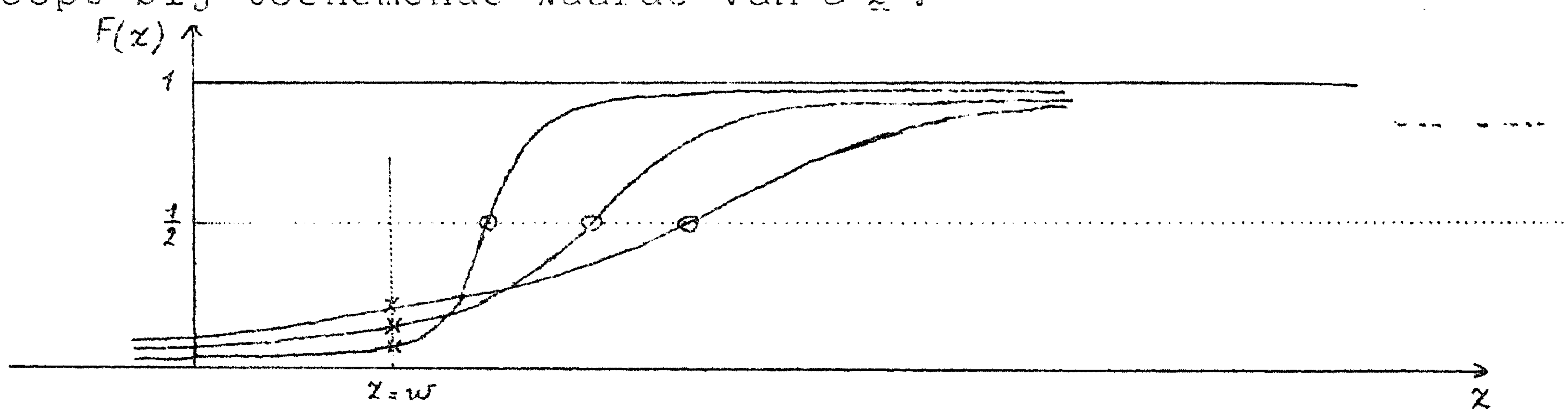


fig. 3
De cumulatieve verdelingsfunctie van x voor verschillende waarden van λ.

Aan de hand van een voorbeeld illustreren wij tenslotte op welke wijze men het beloop van $\max_{\lambda} \mathcal{E}\underline{x}$ kan vinden als functie van β. Hierbij moeten wij gebruik maken van de in 1.2.1. gegeven algemeen geldende formules.

Het is niet nodig alle in de formules (12)-(15) voorkomende constanten afzonderlijk te kennen. Het is voldoende wanneer de volgende verhoudingen en gegevens bekend zijn:

$$
\begin{aligned}
p_2\mu_2 &= 0{,}85\ p_1\mu_1 & \qquad \rho &= \tfrac{1}{2} \\
p_1\sigma_1 &= 0{,}5\ p_1\mu_1 & \qquad w &= 0{,}35\ p_1\mu_1 \\
p_2\sigma_2 &= 0{,}25\ p_1\mu_1 & &
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

Wij hebben dus $p_2\mu_2$, $p_1\sigma_1$, $p_2\sigma_2$ en w uitgedrukt in $p_1\mu_1$, de gemiddelde opbrengst in geld, wanneer er alleen tarwe wordt verbouwd. De gemiddelde opbrengst (steeds in geld) van haver is dus minder dan de gemiddelde opbrengst van tarwe, doch de spreiding van de laatste is aanzienlijk groter. De opbrengst die wij behalve een kans β zeker willen behalen is 35% van de gemiddelde opbrengst, wanneer wij alleen tarwe verbouwen.

Substitueren wij (21) in de formules (13), (14) en (15), dan vinden wij

$$A = \left(\tfrac{3}{16}\xi_\beta^2 - 0{,}0225\right) p_1^2 \mu_1^2 \,, \tag{22}$$

$$B = -0{,}75\, p_1^2 \mu_1^2 \,, \tag{23}$$

$$C = \left(\tfrac{1}{16}\xi_\beta^2 - 0{,}25\right) p_1^2 \mu_1^2 \,. \tag{24}$$

Reeds eerder merkten wij op dat de eisen betreffende w en β niet willekeurig hoog kunnen worden gesteld. Wij gaan daarom eerst na welke waarden van β bij de gegeven w bereikt kunnen worden. Hiertoe schrijven wij voorwaarde (12) in de vorm

$$A\left(\lambda + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} \leqq 0 \,; \tag{25}$$

voor $A > 0$ is dit een parabool met een minimum, groot $C - \frac{B^2}{4A}$, dat bereikt wordt voor $\lambda = -\frac{B}{2A}$. Voor kleine waarden van β is $(22) > 0$ [3] en dus kan er aan (25) niet worden voldaan, wanneer

$$C - \frac{B^2}{4A} > 0 \tag{26}$$

is. Hieruit volgt voor ξ_β^2 de voorwaarde $\xi_\beta^2 \geqq 4{,}12$, waaruit met een tabel van de normale verdeling kan worden gevonden, dat $\beta \geqq 0{,}0212$ moet zijn. De kleinste waarde β_0 van β, waarbij nog een oplossing mogelijk is, bedraagt dus $\beta_0 = 0{,}0212$, een waarde die wordt bereikt voor

$$\lambda = \frac{-B}{2A} = \frac{0{,}15}{2(0{,}1875 \,.\, 4{,}12 - 0{,}0225)} = 0{,}1$$

Wanneer men $\beta > \beta_0$ kiest, zal men een interval $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ van λ's ter beschikking krijgen en dan moet men dus nagaan voor welke λ de functie $\mathcal{E}\underline{x}$ maximaal is. Uit

$$\mathcal{E}\underline{x} = \lambda p_1\mu_1 + (1-\lambda) p_2\mu_2 = (0{,}85 + 0{,}15\lambda)\, p_1\mu_1 \tag{27}$$

leest men af dat dit het geval is voor de grootste toegelaten waarde van λ. Groter dan één kan deze waarde nooit worden, omdat ook aan $0 \leqq \lambda \leqq 1$ voldaan moet zijn. Het heeft daarom geen zin, waarden van β te beschouwen, waarvoor de bovengrens λ_2 van het interval $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ groter is dan één. De waarde β_1 van β, welke

----

3) Men kan achteraf laten zien, dat A voor alle in aanmerking komende waarden van β inderdaad > 0 is.

behoort bij $\lambda_2 = 1$ vinden wij door in (12) $\lambda = 1$ in te vullen; het linker lid moet dan nul worden. Men vindt op deze wijze $\beta_1 =$ 0,0968. Het interval van β's, waarvoor het gedrag van $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{x}$ moet worden nagegaan is dus $0{,}0212 \leq \beta \leq 0{,}0968$.

Voor de waarden 0,0212; 0,04; 0,06; 0,08 en 0,0968 van β is de grootste wortel van $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ berekend, evenals de bijbehorende waarde van $\mathcal{E}\underline{x}$. In figuur 4 is het verband tussen $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{x}$ en β geschetst, waarbij wij langs de verticale as als eenheid gebruikten $p_1\mu_1$. Wij zien dat $\max_\lambda \mathcal{E}\underline{x}$ bij toenemende β stijgt van 0,865 $p_1\mu_1$ tot $p_1\mu_1$ en dat alleen haver verbouwen nooit optimaal is, in tegenstelling tot alleen tarwe verbouwen, wat de optimale oplossing is bij $\beta = 0{,}0968$.

Andere voorbeelden kunnen op geheel analoge wijze worden uitgewerkt.

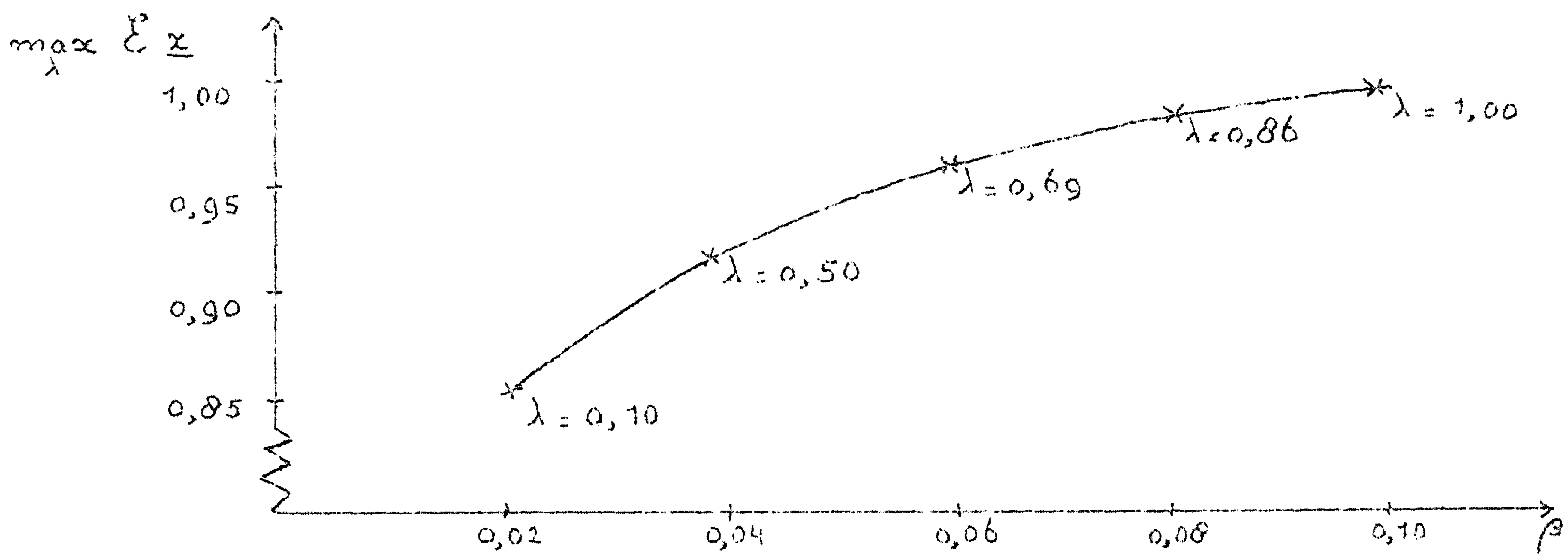


fig. 4

Verwachting van de opbrengst als functie van β bij optimale λ.

1.2.3. <u>De invloed van vruchtwisseling en andere factoren</u>

In 1.2.1. en 1.2.2. hebben wij ons beperkt tot de situatie, waarin wij een stuk land jaar in jaar uit konden bebouwen met hetzij tarwe, hetzij haver, hetzij gedeeltelijk tarwe en voor de rest met haver. Het probleem kan echter ook opgelost worden als gekozen moet worden tussen verschillende systemen van vruchtwisseling.

Stel wij willen de vruchtwisselingen TTH en THH toepassen en nu beslissen op welk deel van het land TTH en op welk THH toegepast moet worden. Wij kunnen niet meer volstaan met de twee stochastische grootheden, welke wij definieerden op blz. 15, aangezien de verdelingen van de opbrengsten zullen afhangen van de methode van vruchtwisseling. Zo kan b.v. de tarweopbrengst bij THH minder gevoelig zijn voor toevallige omstandigheden dan de tarweopbrengst bij TTH, waardoor de spreidingen ongelijk worden. Wij moeten daarom vier grootheden invoeren en wel:

$\underline{x}_1$ = tarwe opbrengst in hl per jaar per ha bij TTH
$\underline{x}_2$ = " " " " " " " " " THH
$\underline{x}_3$ = haver " " " " " " " " TTH
$\underline{x}_4$ = " " " " " " " " " THH

In het algemeen zullen de gemiddelden, spreidingen en onderlinge correlaties van $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_4$ alle verschillend zijn, waardoor wij in totaal 14 verschillende constanten krijgen. Vooral over de correlatiecoëfficiënten zullen veelal geen of alleen onnauwkeurige gegevens bekend zijn. Bij de methode beschreven in de vorige paragrafen zouden wij dus, hetzij met onbetrouwbare schattingen, hetzij met extra onderstellingen over de gelijkheid van correlaties e.d. moeten werken. Daarom kan men in de praktijk beter als volgt te werk gaan.

Bepaal eerst de optimale λ (aan te geven met λ') voor het geval, waarin geen vruchtwisseling toegepast kan worden, dus met de methode behandeld in 1.2.1. Wij zoeken nu de beste combinatie van vruchtwisselingen, waarbij de fractie, bezaaid met tarwe, gelijk is aan λ'. De risico's blijven dan op de vereiste wijze verdeeld en bovendien wordt gebruik gemaakt van de ervaring dat door vruchtwisseling de gemiddelde opbrengsten groter worden.

In figuur 5 is behalve de lijn $\sigma\lambda'$ het polygoon van mogelijke resultaten getekend, wanneer alle combinaties van bekende vruchtwisselingen toegelaten zijn. De punten φ_i stellen weer de opbrengsten voor, wanneer één bepaalde wisseling wordt toegepast en de verbindingslijnen de resultaten bij combinaties van wisselingen. De gezochte combinatie wordt nu weergegeven door het snijpunt S van $\sigma\lambda'$ met het polygoon. In het getekende geval is dit dus: op een fractie ν van het land vruchtwisseling φ_3 toepassen en op de rest φ_4.

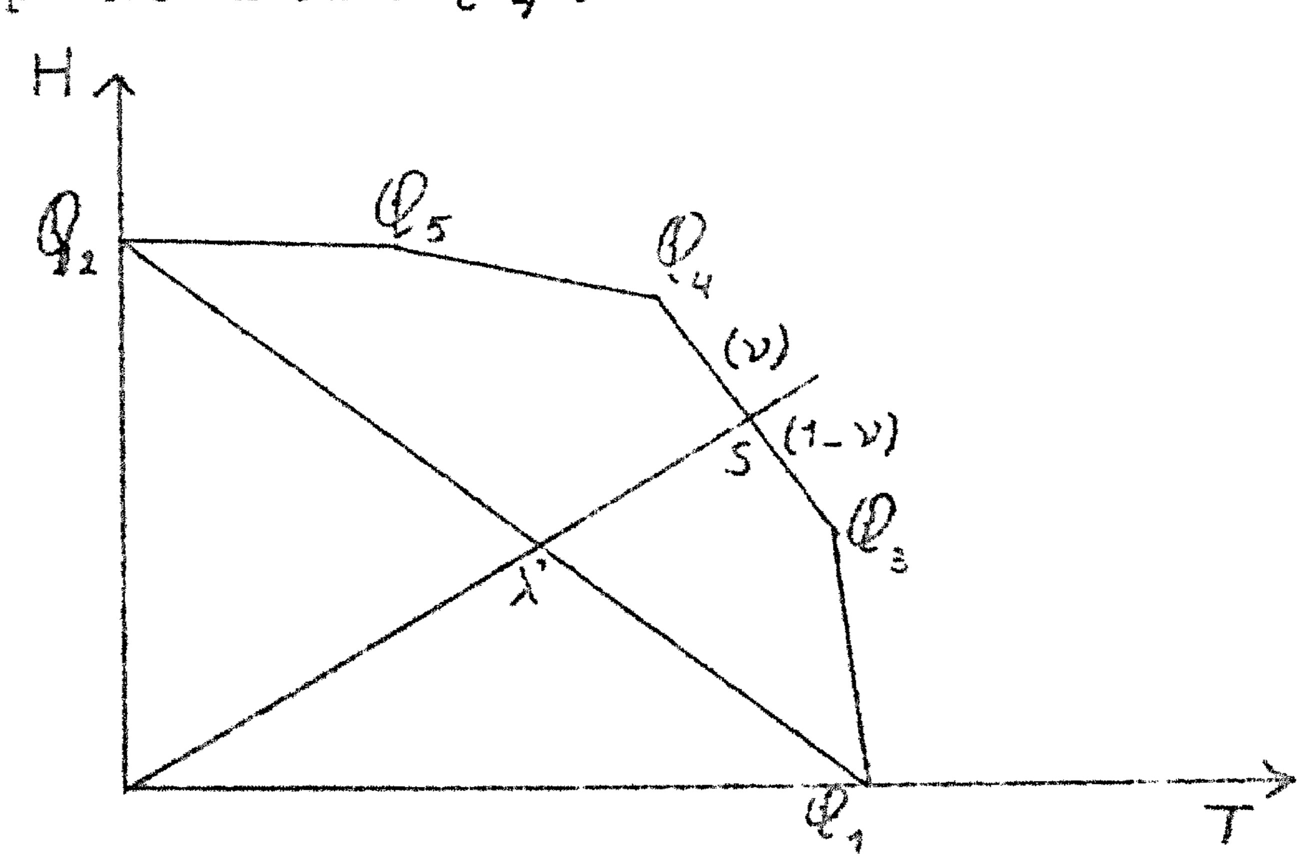


fig. 5
Grafische bepaling van de beste combinatie van vruchtwisselingen.

Om nu inderdaad ieder jaar een fractie λ' van het land met tarwe bebouwd te hebben moeten wij beide delen splitsen in zoveel stukken als de wisseling phasen heeft en dan op ieder stuk met een andere phase beginnen. Is b.v. Θ_3 TTH en Θ_4 $TTHH$, dan wordt ieder jaar op een fractie $\lambda' = 2.\frac{\nu}{3} + 2.\frac{1-\nu}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\nu$ tarwe verbouwd en men krijgt het onderstaande schema (Tabel I).

Tabel I

Verdeling van het land, wanneer op een fractie ν wordt toegepast TTH en op het overige deel $TTHH$.

Q_3 op fractie ν						Q_4 op fractie $1-\nu$					
fractie \ jaar	1	2	3	4	5	fractie \ jaar	1	2	3	4	5
$\frac{\nu}{3}$	T	H	T	T	H	$\frac{1-\nu}{4}$	T	H	H	T	T
						$\frac{1-\nu}{4}$	T	T	H	H	T
$\frac{\nu}{3}$	T	T	H	T	T	$\frac{1-\nu}{4}$	H	T	T	H	H
$\frac{\nu}{3}$	H	T	T	H	T	$\frac{1-\nu}{4}$	H	H	T	T	H

Het is natuurlijk mogelijk, dat dit niet de beste oplossing is, omdat door de vruchtwisseling alle parameters van de verdelingsfuncties kunnen veranderen, maar men mag verwachten toch niet ver van het optimale punt verwijderd te zijn, terwijl nauwkeuriger bepaling meestal niet mogelijk zal zijn. Daar de spreidingen hoofdzakelijk veroorzaakt worden door de weersomstandigheden, zullen toelaatbare oplossingen, als geen vruchtwisseling wordt toegepast, in de regel ook toelaatbaar zijn, wanneer dit wel wordt gedaan. Het is echter niet uitgesloten, dat door de vruchtwisseling de producten minder kwetsbaar worden en in dat geval zou men hogere gemiddelde opbrengsten kunnen bereiken. Op de boven aangegeven wijze verkrijgt men echter snel een redelijke oplossing.

Andere uitbreidingen van het probleem ontstaan, wanneer men de bewerkingskosten, of de bedragen welke men voor zijn producten krijgt, als stochastische grootheden in het model opneemt. Het zal dan niet steeds mogelijk zijn de oplossing te vinden op de boven aangegeven wijze, maar men kan het gezochte antwoord vinden met de multiplicatorenmethode van Lagrange, zolang er niet meer dan één ongelijkheid is, waaraan de variabelen moeten voldoen. Noch de te maximaliseren vorm, noch de ongelijkheid behoeft dan lineair te zijn. Als er meer dan één ongelijkheid is, kunnen varianten van deze methode in veel gevallen de oplossing geven. Wij zullen hier echter niet nader op deze problemen ingaan.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Rapport S 166 (C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk II: Lineaire Programmering

door

J. Kriens

3e druk

1959

1. Enige eenvoudige voorbeelden

1.1. Eerste voorbeeld.[1)]

In een fabriek wil men de vervaardiging van een legering ter hand nemen, welke minstens een bepaald percentage koper moet bevatten. Om het voorbeeld eenvoudiger te houden, worden aan de legering geen verdere chemische of physische eisen gesteld. Voor de fabricage kunnen verschillende grondstoffen gebruikt worden, welke men ook in willekeurige verhoudingen kan mengen. Men vraagt zich nu af op welke wijze de legering zo goedkoop mogelijk gemaakt kan worden, terwijl toch aan de gestelde eis is voldaan.

Laten wij aannemen, dat het product minstens 18% koper moet bevatten en dat er vier grondstoffen zijn, die wij kunnen gebruiken. In tabel I is opgegeven, hoeveel procent koper in iedere grondstof aanwezig is en wat de kosten zijn per ton.

Tabel I

Percentage koper en kosten van de grondstoffen

grond-stof	percentage koper	kosten per ton	kosten per % koper
A	51	40	$\frac{40}{51} = 0,78$
B	11	20	$\frac{20}{11} = 1,82$
D	14	24	$\frac{24}{14} = 1,71$
E	36	30	$\frac{30}{36} = 0,83$

Uit de vierde kolom kan men aflezen, dat grondstof A de goedkoopste bron van koper is.

Geen van de grondstoffen bevat precies 18% koper, maar de grondstoffen A en E voldoen aan de eis minstens 18% te bevatten. Het percentage van B en D, die per ton goedkoper zijn dan A en E, is echter te laag. Daarom ligt het voor de hand na te gaan, of wij door het kiezen van een mengsel van enige grondstoffen niet

---

1) De inhoud van de paragrafen 1.1 en 1.2 is gebaseerd op een artikel van N. WILLIAMS, An application of linear programming to the selection of raw materials, Applied Statistics 4, (1955), 22-31.

een product kunnen krijgen, dat aan de eis voldoet en bovendien goedkoper is dan de grondstoffen A en E afzonderlijk. Om dit systematisch te onderzoeken gaan wij als volgt te werk.

Wij gaan uit van grondstof A; deze voldoet zeker aan de gestelde eis, want A bevat zelfs 33% koper meer dan nodig is. Om een legering te verkrijgen, die goedkoper is, mengen wij A met het goedkopere, maar aan koper armere B.

Ter vereenvoudiging zullen wij aannemen, dat men 1 ton van de legering wil produceren. Stel dat wij 1 ton legering, die 18% koper bevat, verkrijgen door y ton A met 1-y ton B te mengen. Wiskundig uitgedrukt betekent dit, dat moet zijn voldaan aan de vergelijking

$$51y + 11(1-y) = 18 \qquad (1)$$

waaruit volgt, dat de legering moet bestaan uit 0,175 ton A en 0,825 ton B. De kosten bedragen dan

$$\begin{array}{lrr} \text{aan A:} & 0{,}175 \times 40 = & 7 \\ \text{aan B:} & 0{,}825 \times 20 = & \underline{16{,}50}\ + \\ & \text{totaal:} & 23{,}50 \end{array}$$

Dit mengsel is dus 40 - 23,50 = 16,50 per ton goedkoper dan grondstof A.

Wij kunnen op dezelfde wijze berekenen hoe duur een mengsel van A en B is, dat evenveel koper bevat als D, respectievelijk E. Indien één van deze laatste grondstoffen goedkoper is dan het overeenkomende mengsel van A en B, dan zal het voordelig zijn zoveel mogelijk van de gevonden legering door deze grondstof te vervangen.

De resultaten van de genoemde vergelijkingen kan men vinden in tabel II. In de eerste en tweede regel staat hoeveel A en hoeveel B het mengsel per ton moet bevatten om evenveel koper te bezitten als de boven de kolom vermelde stof. De kosten van deze mengsels staan in de derde regel, terwijl de laatste regel het verschil bevat tussen de kosten van een ton mengsel en een ton van de grondstof, waarmee dit mengsel overeenkomt.

De legering van 0,175 ton A en 0,825 ton B kunnen wij dus wel goedkoper maken door grondstof E te gebruiken, maar niet met behulp van D.

Tabel II

Mengsels van A en B met hetzelfde kopergehalte als legering en grondstoffen

	legering 18% Cu	A 51% Cu	B 11% Cu	D 14% Cu	E 36% Cu
hoeveelheid A	0,175	1	0	0,075	0,625
hoeveelheid B	0,825	0	1	0,925	0,375
kosten mengsel	23,5	40	20	21,5	32,5
kosten grondstoffen		40	20	24	30
kosten mengsel min kosten grondstof		0	0	- 2,5	2,5

Daar een mengsel van 0,625 ton A en 0,375 ton B met een ton E overeenkomt, is het niet mogelijk meer dan $\frac{0,175}{0,625} = 0,28$ ton E te nemen, omdat de hoeveelheid A aanwezig in de legering, genoemd in de eerste kolom dan is uitgeput. Behalve 0,28 ton E bevat de legering dan nog 1 - 0,28 = 0,72 ton B en de kosten zijn:

aan E: 0,28 x 30 = 8,4
aan B: 0,72 x 20 = 14,4 +
totaal: 22,8

Deze legering, die ook 18% koper bevat, is dus weer 23,5 - 22,8 = 0,7 goedkoper dan de legering van A en B.

Het is niet mogelijk een nog voordeligere samenstelling van de legering te vinden. Immers D was al duurder dan het overeenkomstige mengsel van A en B, dus zeker duurder dan een overeenkomstig mengsel van B en E, terwijl wij A juist hebben verwijderd ten gunste van E. Wat wij nog niet aangetoond hebben, is dat een legering, die meer dan 18% koper bevat niet goedkoper kan zijn. Het gehalte aan koper kan echter alleen hoger worden door, hetzij B geheel of gedeeltelijk te vervangen door A, D of E, hetzij E geheel of gedeeltelijk te vervangen door A. Tabel I leert ons, dat de legering bij ieder van deze substituties duurder wordt. Onder de legeringen, die men uit A, B, D en E kan maken en die minstens 18% koper bevatten, is dus de voordeligste: 0,28 ton E en 0,72 ton B.

1.2. Tweede voorbeeld

Iets ingewikkelder wordt het eerste voorbeeld, wanneer aan het gebruik van de grondstoffen A, B, D en E grenzen worden gesteld. Laten wij aannemen, dat de grondstoffen B en D tezamen niet meer dan 20% van de legering mogen uitmaken. De oplossing, gegeven in 1.1 voldoet dan niet meer, omdat deze voor 72% uit B bestond. Wij trachten nu onder deze extra voorwaarde de legering te vinden, die het goedkoopste is. Het is dan zeer goed mogelijk, dat deze legering meer dan 18% koper bevat, of minder dan 20% van de grondstoffen B en D. Het verschil tussen het percentage koper in de legering en het vereiste minimum percentage geven wij aan met δ_1, het verschil tussen het maximaal toegelaten percentage B en D en het aanwezige percentage met δ_2; beide variabelen moeten dus ≥ 0 zijn.

Een legering, die volgens tabel I in ieder geval voldoet, is die, welke alleen bestaat uit grondstof E. Het overschot aan koper bedraagt dan $\delta_1 = 36 - 18 = 18\%$; van de toegelaten marge aan B en D is niets gebruikt ($\delta_2 = 20\%$) en de kosten zijn 30.

Wij onderzoeken nu of op een of andere wijze een goedkopere legering te fabriceren is, die aan de eisen voldoet. Hierbij kunnen wij er gebruik van maken, dat $\delta_1 = 18\%$ en $\delta_2 = 20\%$ is. Omdat van de goedkoopste grondstof (B) de grootste prijsverlaging te verwachten is, mengen wij deze met E. Zouden wij y ton E vervangen door y ton B, dan verminderde het overschot δ_1 aan koper met $(36-11)y = 25y\%$ en δ_2 met $100.y\%$. Daar δ_1 en δ_2 geen van beide negatief mogen worden, moet y voldoen aan $25y \leq 18$ en $100y \leq 20$ en kan dus hoogstens gelijk zijn aan het minimum van $\frac{18}{25}$ en $\frac{20}{100}$. Dit betekent, dat niet meer dan 0,20 ton E door B kan worden vervangen. De kosten van 1 ton van de legering bedragen dan

$$\begin{array}{lrr} \text{aan B:} & 0{,}2 \times 20 = & 4 \\ \text{aan E:} & 0{,}8 \times 30 = & \underline{24} \; + \\ & \text{totaal:} & 28, \end{array}$$

wat 2 goedkoper is dan een legering alleen bestaande uit grondstof E, terwijl het percentage koper $0{,}2.11 + 0{,}8.36 = 31$ is; dus $\delta_1 = 13$ en $\delta_2 = 0$.

Een verdere verlaging van de kosten is niet mogelijk. De totale hoeveelheid van B en D mag niet toenemen wegens $\delta_2 = 0$; wel kunnen wij B vervangen door A, D of E, maar dit heeft steeds verhoging van de kosten ten gevolge. Ook vervanging van E door A leidt tot een duurder product. De voordeligste legering bestaat dus uit 0,2 ton B en 0,8 ton E en bevat 13% meer koper dan de toegelaten minimum hoeveelheid van 18%.

Wij zullen hetzelfde probleem nu formuleren in de taal der wiskunde. Hoe de legering ook is samengesteld, steeds kunnen wij zeggen, dat het een mengsel is, waarin alleen de grondstoffen A, B, D en E kunnen voorkomen. Daarom nemen wij aan, dat een ton legering x_A ton A, x_B ton B, x_D ton D en x_E ton E bevat. Wij kunnen deze waarden niet willekeurig kiezen. In de eerste plaats moet voldaan worden aan de vergelijking

$$x_A + x_B + x_D + x_E = 1 \quad . \tag{2}$$

Bovendien moet het percentage koper minstens 18 bedragen, terwijl de totale hoeveelheid van B en D niet meer dan 20% van de legering mag uitmaken. In formule luiden deze voorwaarden

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E \geqslant 18 \tag{3}$$

en

$$100x_B + 100x_D \leqslant 20. \tag{4}$$

Maken wij gebruik van de boven ingevoerde variabelen δ_1 en δ_2, dan gaan (3) en (4) over in

$$51x_A + 11x_B + 14x_D + 36x_E - \delta_1 = 18 \tag{5}$$

en

$$100x_B + 100x_D + \delta_2 = 20. \tag{6}$$

Alle variabelen in de vergelijkingen (5) en (6) kunnen slechts niet-negatieve waarden aannemen.

De kosten z_0 van zo'n mengsel bedragen

$$z_0 = 40x_A + 20x_B + 24x_D + 30x_E \quad . \tag{7}$$

De vraag welke in het voorgaande werd beantwoord, was nu: hoe moeten wij x_A, x_B, x_D en x_E kiezen, opdat de kosten z_0 minimaal zijn onder de voorwaarden, dat voldaan is aan de vergelijkingen (2), (5) en (6) en bovendien alle variabelen $\geqslant 0$ zijn.

1.3. Derde voorbeeld [2)]

In een fabriek kunnen twee soorten schroeven worden gemaakt. Bij de fabricage moeten beide soorten worden bewerkt door een machine, die de kop maakt en een machine, die de schroefdraad aanbrengt. Wanneer er voldoende arbeiders aanwezig zijn, de grondstoffen in willekeurige hoeveelheden tegen constante prijs aangevoerd kunnen worden, alle schroeven op de markt een afzet vinden tegen vaste prijzen, en ook de andere productiefactoren geen belemmeringen vormen voor het niveau waarop de productie zal plaatsvinden, dan wordt dit niveau bepaald door de capaciteiten van de twee genoemde machines. De productieleider zal nu nagaan, op welke wijze zijn fabriek de grootst mogelijke winst kan behalen. Dit probleem komt dus hierop neer, dat een functie (de winst) gemaximaliseerd moet worden onder bepaalde beperkingen.

Stel dat een schroef van type I 3 cent winst geeft en een schroef van type II 4 cent. Uit tijdstudies in voorafgaande jaren is bekend, hoeveel seconden de twee typen (S_1 en S_2) op de machines (M_1 en M_2) in bewerking zijn. De gegevens zijn vermeld in tabel III.

Tabel III

Bewerkingstijden en winsten van de schroeven

schroef	bewerkingstijd op machine		winst
	M_1	M_2	
S_1	2	5	3
S_2	3	2	4

Gedurende de periode, waarvoor het productieprogramma ontwikkeld moet worden, staan de machines beide 1 uur = 3600 seconden ter beschikking.

Wanneer er x_1 schroeven van het eerste type en x_2 van het tweede type worden vervaardigd, bedraagt de winst

$$z_0 = 3x_1 + 4x_2 \quad . \qquad (8)$$

----

2) Dit voorbeeld is ontleend aan een artikel van M.E. SALVESON, Mathematical methods in management programming, Proceedings of the conference on Operations Research in production and inventory control (1954), p. 23-41.

Door de beperkte capaciteit van de machines moeten x_1 en x_2 voldoen aan de voorwaarden

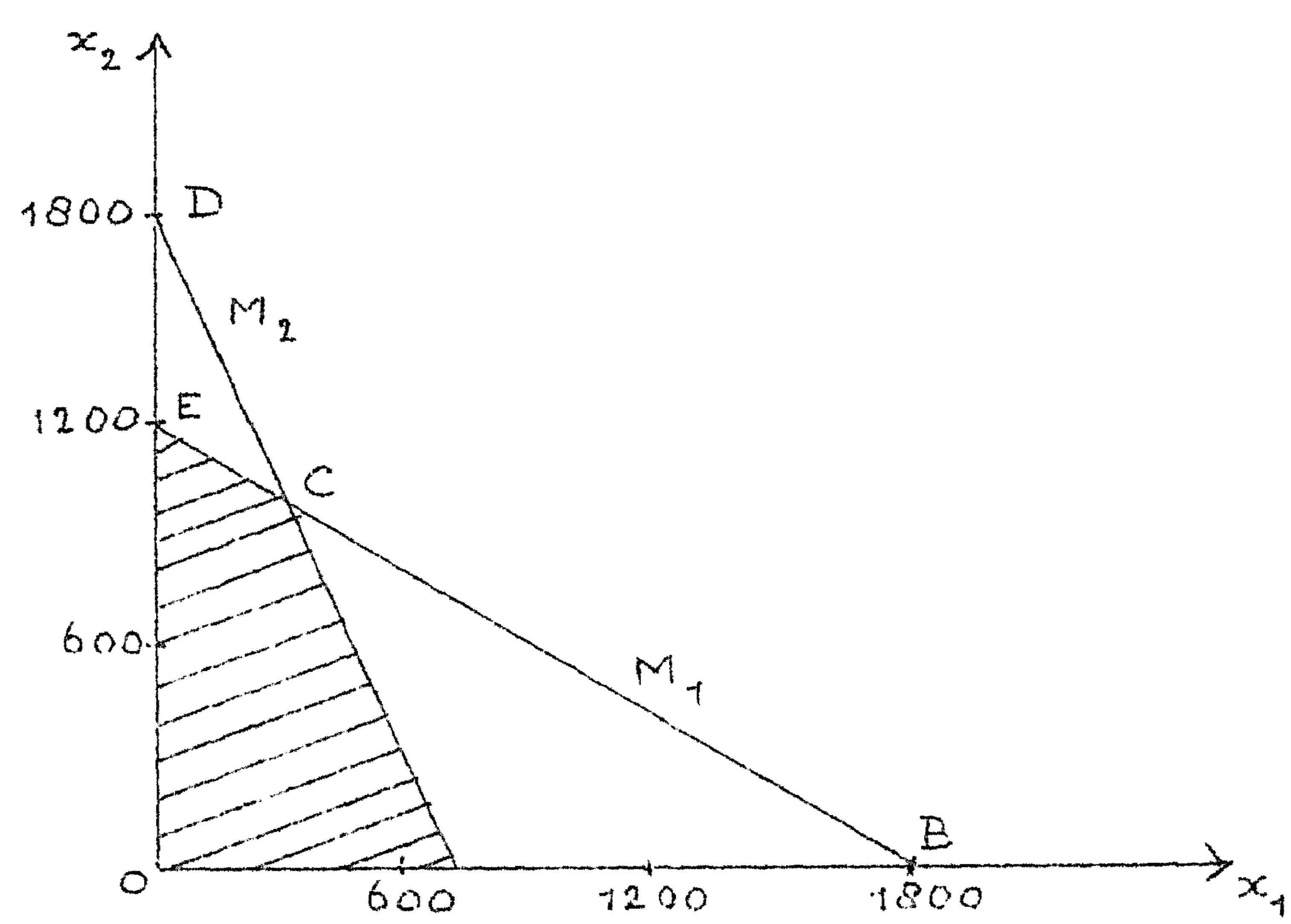
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 3600 \text{ (wegens } M_1) \qquad (9)$$

en

$$5x_1 + 2x_2 \leqslant 3600 \text{ (wegens } M_2) \qquad (10)$$

Vanzelfsprekend moet ook gelden $x_1 \geqslant 0$ en $x_2 \geqslant 0$.

Ten gevolge van deze vier ongelijkheden kunnen wij de waarden van x_1 en x_2 niet willekeurig kiezen. In figuur 1 is dit geïllustreerd. Langs de horizontale as is het aantal schroeven S_1, dat gemaakt wordt, uitgezet en langs de verticale as het aantal van type twee. Omdat x_1 en x_2 beide $\geqslant 0$ moeten zijn, is alleen het getekende kwadrant van belang. Verder staat machine I niet toe, dat het aantal te produceren schroeven voorgesteld wordt door een punt, waarvan de coördinaten buiten de driehoek OBE liggen; evenzo beperkt machine II ons tot driehoek OAD. Alleen combinaties (x_1, x_2), waarvan de bijbehorende punten in het gearceerde gebied liggen, zijn dus toelaatbaar.



figuur 1

Het gearceerde gebied geeft de productiemogelijkheden aan

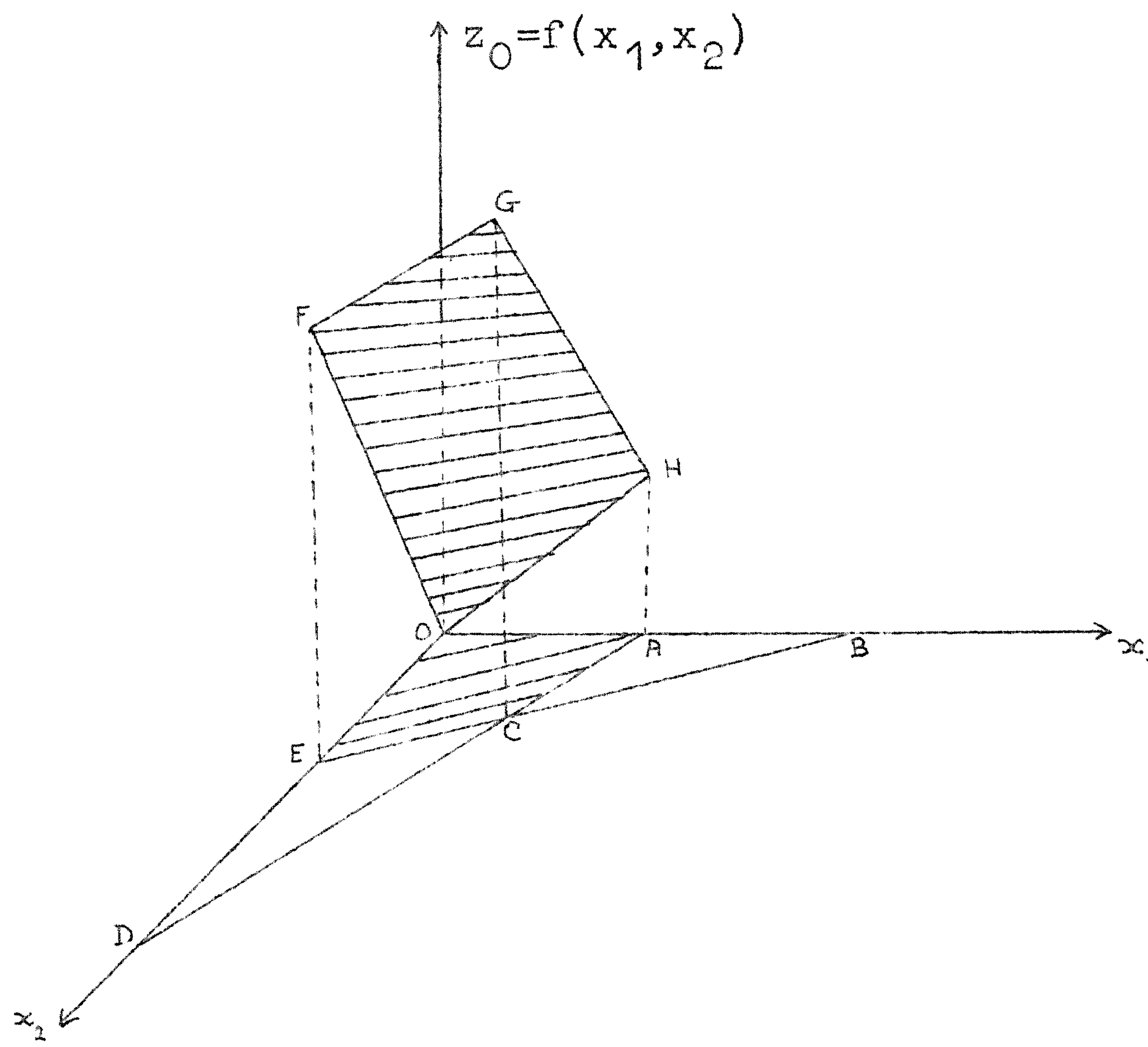
Als het productieprogramma wordt voorgesteld door een punt van EC, is machine I voortdurend in gebruik; machine II wordt, behalve in het punt C tijdens een deel van het proces buiten bedrijf gesteld. Besluiten wij tot het productieproces A, dan worden alleen schroeven van het eerste type gemaakt en is machine II volledig bezet, in tegenstelling tot machine I.

Het produceren van bijv. 1200 schroeven van type I is ten aanzien van machine I nog wel mogelijk, ten aanzien van machine II echter niet.

Onder de productieprogramma's, die uitvoerbaar zijn, willen wij nu het programma kiezen, dat de winst zo groot mogelijk maakt. Bij ieder stel waarden van x_1 en x_2 kunnen wij de winst berekenen; deze is bij een programma van 150 schroeven van type I en van 1100 schroeven van type II

$$150.3 + 1100.4 = 4.850.$$

In figuur 2 is langs een derde as, loodrecht op x_1 en x_2 voor ieder stel waarden (x_1, x_2) de bijbehorende winst $z_0 = f(x_1, x_2)$ uitgezet. Omdat z_0 een lineaire functie is van x_1 en x_2 liggen deze punten alle in een plat vlak.



figuur 2

Winst als functie van het productieprogramma

Tabel IV geeft een overzicht van de coördinaten van de belangrijkste punten uit figuur 2.

Wat met meest winstgevende productieprogramma is, kunnen wij uit de figuur of de tabel direct aflezen. In ons geval is dit het fabriceren van 327 schroeven S_1 en 982 schroeven S_2, waarbij een winst van 4909 bereikt wordt en beide machines voortdurend in bedrijf zijn.

Tabel IV

Winst als functie van het productieprogramma

productieprogramma			winst	
S_1	S_2	punt	grootte (z_0)	punt
0	0	0	0	0
720	0	A	2160	H
0	1200	E	4800	F
327	982	C	4909	G

Deze oplossing hadden wij ook kunnen vinden op de wijze, beschreven in paragraaf 1.1.2 van hoofdstuk I. Daartoe tekenen wij in figuur 1 de rechte

$$z_0 = 3x_1 + 4x_2,$$

waarin z_0 een willekeurig getal is en schuiven deze evenwijdig aan zichzelf op (van 0 af) totdat er nog juist een gemeenschappelijk punt is met het gearceerde gebied. Dit punt correspondeert dan met het optimale productieprogramma.

Het is duidelijk dat de winst nooit maximaal is bij een programma, dat correspondeert met een punt in het inwendige van het gebied OACE, daar men dan van beide typen nog meer schroeven kan maken. Het optimale programma ligt dus in ieder geval op de omtrek van het gebied. Bovendien kunnen wij opmerken dat, tenzij de winst voor alle punten van een zijde even groot is, nog verbetering te bereiken is, zolang wij ons niet in een hoekpunt bevinden. Wij vinden dus zeker het maximum, wanneer wij de winsten vergelijken in de hoekpunten O, A, C en E.

In dit voorbeeld zijn beide machines in het meest winstgevende programma volledig bezet. Bij andere waarden van de in tabel III opgegeven constanten is het zeer wel mogelijk, dat één van de machines tijdens een deel van het proces niet gebruikt wordt. Daarom is het vaak gemakkelijk het aantal seconden, dat de machines niet werken aan te geven door nieuwe variabelen δ_1 en

δ_2. Wij kunnen dan de ongelijkheden (9) en (10) schrijven in de vorm van vergelijkingen:

$$2x_1 + 3x_1 + \delta_1 = 3600 \qquad (11)$$

en

$$5x_1 + 2x_2 + \delta_2 = 3600, \qquad (12)$$

waarin ook δ_1 en δ_2 alleen waarden $\geqslant 0$ kunnen aannemen.

Uitgedrukt met behulp van deze vergelijkingen luidt het probleem, dat wij hebben opgelost, dus: maximaliseer

$$z_0 = 3x_1 + 4x_2,$$

onder de voorwaarde, dat x_1 en x_2 moeten voldoen aan de vergelijkingen (11) en (12), waarin zowel x_1 en x_2 als δ_1 en δ_2 slechts niet-negatieve waarden kunnen aannemen.

Problemen als de drie hier uitgewerkte voorbeelden, waarin een lineaire functie geminimaliseerd of gemaximaliseerd moet worden, onder de voorwaarde, dat de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire vergelijkingen en bovendien $\geqslant 0$ moeten zijn, worden lineaire programmeringsproblemen genoemd. De uitwerking van het tweede voorbeeld laat het duidelijkst de methode zien, waarmee deze problemen kunnen worden opgelost. Men zoekt eerst een oplossing, die aan de eisen voldoet en wijzigt deze dan net zolang tot geen verbetering van de oplossing meer mogelijk is.

Behalve bij het opstellen van optimale schema's voor industriële productieproblemen kan men ook voor een groot aantal andere problemen modellen opstellen welke tot lineaire programmeringsproblemen leiden. Zo bevat het tijdschrift "Journal of Farm Economics" vanaf 1951 regelmatig bijdragen met toepassingen op agrarisch terrein. In paragraaf 3 van dit hoofdstuk worden toepassingen bij transportproblemen besproken.

Voor verdere voorbeelden van toepassingen verwijzen wij naar de uittreksels in de rapporten "Overzicht van een aantal artikelen over Operations Research" I en II S 167 (Ov 5) resp. S 239 (Ov 5) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

2. Theorie van lineaire programmeringsproblemen en de simplexmethode

In deze paragraaf zullen wij de algemene formulering van lineaire programmeringsproblemen geven. Het is niet mogelijk om de theorie in kort bestek volledig te behandelen. Daarom zullen wij ons hier beperken tot het geven van een rekenschema, waarmee de problemen kunnen worden opgelost en het zonder bewijs noemen van de eigenschappen van dit schema.

2.1. Algemene probleemstelling

In de vorige paragraaf beschouwden wij drie eenvoudige problemen, waarin wij het extreem van een lineaire functie wilden bepalen, onder de voorwaarde, dat de variabelen die in deze functie voorkwamen voldeden aan enige lineaire ongelijkheden of lineaire vergelijkingen. Of de lineaire functie zo klein, dan wel zo groot mogelijk moet worden gemaakt, hangt af van het probleem, maar is voor de methode van geen belang. In aansluiting bij de meeste literatuur over dit onderwerp, zullen wij in het vervolg aannemen, dat de functie <u>gemaximaliseerd</u> moet worden. Wanneer men een functie wil minimaliseren, kan men ook het tegengestelde maximaliseren; het bovenstaande houdt dus geen beperking in.

Laat een functie z_0 gegeven zijn, welke lineair afhangt van de variabelen $x_1, \ldots, x_p$:

$$z_0 = c_1x_1 + \ldots + c_px_p = \sum_{i=1}^{p} c_ix_i, \tag{1}$$

waarin $c_1, \ldots, c_p$ bekende constanten zijn. Gevraagd wordt voor welke waarden van $x_1, \ldots, x_p$ deze functie maximaal is, wanneer moet worden voldaan aan de ongelijkheden

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & \leq & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mp}x_p & \leq & b_m \end{array} \tag{2}$$

en $x_1, \ldots, x_p$ bovendien alle groter of gelijk aan 0 moeten zijn. De a's en b's zijn gegeven constanten. De a's kunnen zowel positief, 0, als negatief zijn; de b's worden (voorlopig) alle ≥ 0

ondersteld Omdat wij z_0 willen maximaliseren, zal z_0 meestal een opbrengst voorstellen. De variabelen zijn hetzij hoeveelheden grondstoffen, die men bij de productie gebruikt, in welk geval de bijbehorende c's negatief zullen zijn, hetzij gemaakte producten, in welk geval de bijbehorende c's (verkoopprijzen) positief zullen zijn.

Zijn er niet meer dan twee x-en en bijv. drie vergelijkingen, dan vormen de paren (x_1, x_2), die aan (2) voldoen, een gebied, zoals aangegeven is in fig. 1. (vgl. ook fig. 1 in 1.3).

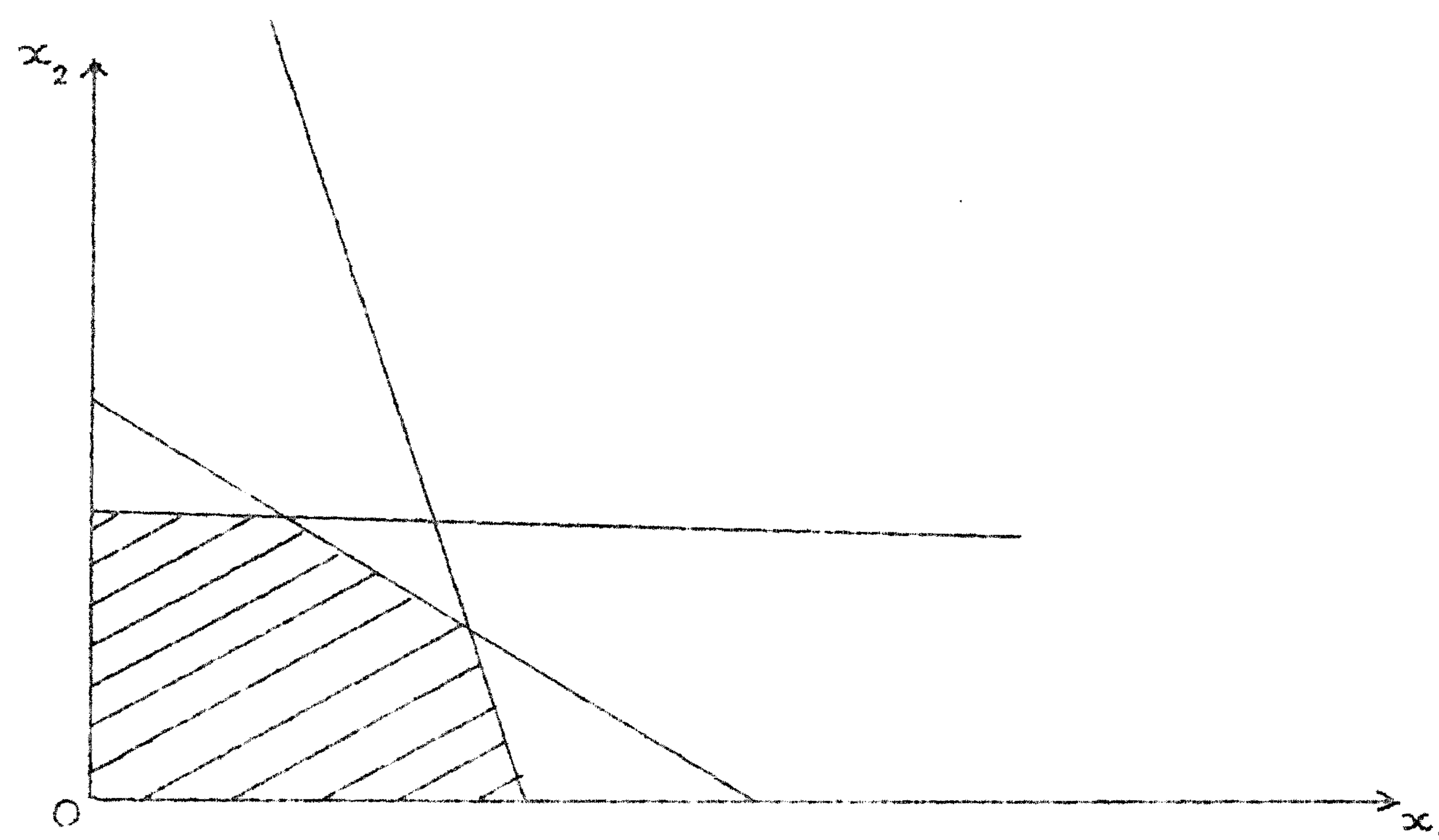


fig. 1

Toegelaten waarden van (x_1, x_2) voor p = 2 en m = 3

Het toegelaten gebied is dus een veelhoek, waarvan het punt 0 één van de hoekpunten is.

In het algemene geval vormt het toegelaten gebied een meerdimensionale generalisatie van een veelhoek; het punt 0 blijft hierbij een hoekpunt.

Evenals in het tweede voorbeeld van paragraaf 1 veranderen wij het stelsel ongelijkheden (2) in een stelsel gelijkheden door het invoeren van nieuwe variabelen $\delta_1, \ldots, \delta_m$, die het verschil voorstellen tussen de linker leden van (2) en de rechter leden. Wij noemen deze variabelen, die dus altijd groter of gelijk aan 0 moeten zijn, <u>verschilvariabelen</u>. Het stelsel (2) gaat nu over in

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + \delta_1 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + \delta_2 &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p + \delta_m &= b_m \,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Er bestaan verschillende methoden om het maximum van een lineaire functie te bepalen onder de voorwaardendat de variabelen $\geqslant 0$ moeten zijn en moeten voldoen aan een stelsel vergelijkingen. Zij zijn echter niet alle onder alle omstandigheden te gebruiken. Wij zullen een methode geven, die steeds toegepast kan worden en welke dan ook in de meeste artikelen wordt aangetroffen. Deze methode is afkomstig van G.B. DANTZIG en later aangevuld door A. CHARNES; zij draagt de naam <u>simplexmethode</u>.

2.2. De simplexmethode

2.2.1. Het principe waarop de methode berust

De in 2.1 ingevoerde veranderlijken $\delta_1, \ldots, \delta_m$ komen in de vergelijkingen (3) op dezelfde manier voor als $x_1, \ldots, x_p$. Daarom is het niet nodig verschillende symbolen te gebruiken en dus zullen wij in het vervolg in plaats van $\delta_1, \ldots, \delta_m$ schrijven $x_{p+1}, \ldots, x_n$, waarin $n = p + m$.

De vergelijkingen (3) zien er dan als volgt uit:

$$
\begin{array}{lr}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1p}x_p + x_{p+1} \qquad\qquad = b_1 & \\
\vdots & \\
a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rk}x_k + \ldots + a_{rp}x_p \qquad\qquad + x_{p+r} = b_r & (4) \\
\vdots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mp}x_p \qquad\qquad + x_{p+m} = b_m &
\end{array}
$$

Ook de te maximaliseren functie (1) zullen wij iets anders schrijven. In (4) staan $p+m = n$ variabelen x, in (1) echter slechts p. De overige $n-p$ variabelen nemen wij in (1) op met coëfficiënt 0:

$$z_0 = \sum_{h=1}^{n} c_h x_h \ . \tag{5}$$

De waarde van z_0 verandert hierdoor niet; c_{p+1} tot en met c_n zijn alle gelijk aan 0.

De vergelijkingen (4) en (5) behelzen dus het probleem in de nieuwe vorm: <u>maximaliseer (5) onder de voorwaarden, dat $x_1, \ldots, x_n$ voldoen aan de vergelijkingen (4) en bovendien alle $\geqslant 0$ zijn</u>. Bij het verderop te bespreken rekenschema komen wij steeds hierop terug.

Het in 1.3 behandelde voorbeeld ziet er in de nieuwe vorm als volgt uit:

maximaliseer $z_0 = 3x_1 + 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$ onder de voorwaarden:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3600 \qquad (6)$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 3600 \qquad (7)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \qquad (8)$$

Wij illustreren de simplexmethode nu eerst aan de hand van dit voorbeeld. Eén stelsel x-waarden, die aan (6), (7) en (8) voldoen is direct uit de vergelijkingen af te lezen, namelijk $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3600$, $x_4 = 3600$. Deze oplossing is wiskundig gezien toelaatbaar. Practisch gezien betekent het, dat er niets gebeurt en de opbrengst is dan ook nul. Wij noemen deze oplossing de "triviale oplossing"; zij correspondeert met de punten O in de figuren 1 en 2 van paragraaf 1.

Een betere oplossing ontstaat wanneer wij hetzij x_1, hetzij x_2 een positieve waarde geven. Aangezien de winst per eenheid het grootst is voor x_2 (namelijk 4), onderzoeken wij eerst de situatie die ontstaat, wanneer wij x_2 een positieve waarde geven. Aan (6) en (7) moet voldaan blijven, zodat bij een positieve waarde van x_2, de waarden van x_3 en x_4 kleiner moeten worden. Deze mogen niet negatief worden; de grootste waarde welke men aan x_2 kan geven is dus gelijk aan het minimum van $\frac{3600}{3}$ en $\frac{3600}{2}$, dus 1200. De oplossing is dan $x_1 = 0$, $x_2 = 1200$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1200$; de winst bedraagt $z_0 = 4800$. Wanneer wij vergelijking (6) delen door de coëfficiënt van x_2 en vervolgens vergelijking (7) verminderen met 2x deze nieuwe vergelijking, dan krijgen de voorwaarden (6) en (7) de volgende vorm:

$$\frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1200 \qquad (9)$$

$$\frac{11}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 1200 \qquad (10)$$

Zoals de triviale oplossing eenvoudig uit (6) en (7) kon worden afgelezen door x_1 en x_2 nul te stellen, kunnen wij de nieuwe oplossing uit (9) en (10) afleiden door x_1 en x_3 nul te stellen.

Wederom kan men nu de vraag stellen of een hogere winst te bereiken is door x_1 of x_3 **een positieve** waarde te geven. Wanneer wij één schroef van het eerste type maken ($x_1 = 1$), dan moet x_2 met $\frac{2}{3}$ en x_4 met $\frac{11}{3}$ verminderd worden om aan (9) en (10) te blijven voldoen. De winstfunctie wordt dus enerzijds met 3 vermeerderd en anderzijds met $\frac{2}{3}.4$ en $\frac{11}{3}.0$ verminderd, in totaal een toeneming met $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Het is daarom inderdaad voordelig om de productie van x_2 en de nog overgebleven vrije tijd op de tweede machine (x_4) op te offeren aan de productie van x_1. Wij doen dat nu in zo groot mogelijke mate door x_1 de grootste, toegelaten waarde te geven. Dat is het minimum van $\frac{1200}{2/3}$ en $\frac{1200}{11/3}$, dus $\frac{3600}{11}$. Het nu gevonden productieprogramma luidt: $x_1 = \frac{3600}{11}$, $x_2 = \frac{10.800}{11}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ met een winst van $3.\frac{3600}{11} + 4.\frac{10.800}{11} = \frac{54.000}{11}$. Deelt men vergelijking (10) door de coëfficiënt van x_1 en vermindert men daarna vergelijking (9) met de nieuwe vergelijking vermenigvuldigd met $\frac{2}{3}$, dan is deze oplossing weer direct uit het vergelijkingenstelsel af te lezen:

$$x_2 + \frac{5}{11} x_3 - \frac{2}{11} x_4 = \frac{10.800}{11} \qquad (11)$$

$$x_1 \qquad - \frac{2}{11} x_3 + \frac{3}{11} x_4 = \frac{3600}{11} \qquad (12)$$

Deze oplossing is de optimale oplossing. Immers, wanneer wij hetzij x_3, hetzij x_4 een positieve waarde geven, dan daalt de winst; $z_0 = \frac{54.000}{11}$ is dus het gezochte maximum, hetgeen in overeenstemming is met het in 1.3 gevonden resultaat.

Doordat de coëfficiënten van x_3 en x_4 en de rechter leden van (6) en (7) positief zijn, kan op eenvoudige wijze een oplossing gegeven worden, die aan de voorwaarden voldoet. Daarna werd onderzocht, of door het positief maken van één van de andere variabelen, de winst verhoogd kon worden. Wanneer dat inderdaad het geval is, dan geeft men de betreffende variabele de maximaal toelaatbare waarde. Vervolgens schrijft men de vergelijkingen in een enigszins andere vorm op, waarna het onderzoek op de aangegeven wijze kan worden voortgezet, enzovoorts. Deze stappen worden alle in het algemene geval, dat wij nu zullen bespreken, teruggevonden.

De triviale oplossing van het door (4) en (5) gegeven probleem luidt:

$$\begin{array}{ll} x_i = 0 & (i = 1, \ldots, p) \\ x_{p+j} = b_j & (j = 1, \ldots, m) \end{array} \qquad (13)$$

De oplossing is toelaatbaar omdat de b_j alle $\geqslant 0$ ondersteld zijn; alleen de verschilvariabelen kunnen een waarde > 0 hebben.

Wij onderstellen nu dat er een $k \leqslant p$ bestaat waarvoor één of meer van de coëfficiënten van de variabele x_k positief zijn.

Het is dan eenvoudig om nog een andere oplossing van (4) te geven. Kiezen wij $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$, $x_k = \Theta$, $x_{k+1} = \ldots = x_p = 0$, dan gaan de vergelijkingen (4) over in

$$a_{jk}.\Theta + x_{p+j} = b_j, \tag{14}$$

waaruit blijkt dat voor de overige x-variabelen moet gelden

$$x_{p+j} = b_j - a_{jk}.\Theta \ . \tag{15}$$

Deze oplossing is alleen dan toelaatbaar, wanneer $x_k = \Theta \geqslant 0$ is en ook de $x_{p+j} \geqslant 0$ zijn. Aan de laatste eis is voldaan wanneer

$$b_j - a_{jk}.\Theta \geqslant 0 \tag{16}$$

is. Voor $a_{jk} \leqslant 0$ is dit zeker in orde; voor iedere $a_{jk} > 0$ moet gelden:

$$\Theta \leqslant \frac{b_j}{a_{jk}} \ .$$

Wij kunnen dus Θ niet groter kiezen dan het kleinste van de positieve quotiënten $\frac{b_j}{a_{jk}}$.

Wij nemen aan dat dit minimum bereikt wordt voor precies één waarde van j[1]; is dit $j = r$, dan geven wij x_k de waarde

$$x_k = \Theta = \frac{b_r}{a_{rk}} \ . \tag{17}$$

De bijbehorende oplossing

$$x_1 = \ldots = x_{k-1} = k_{k+1} = \ldots = x_p = 0, \ x_k = \frac{b_r}{a_{rk}}, \tag{18}$$

$$x_{p+j} = b_j - a_{jk} \frac{b_r}{a_{rk}}$$

voldoet dan aan de gestelde eisen.

Dit is duidelijk af te lezen uit de vergelijkingen (4), wanneer wij deze schrijven in een iets andere vorm. Daartoe delen wij de r^e vergelijking door a_{rk}; de j^e vergelijking ($j \neq r$) verminderen wij met a_{jk}/a_{rk} maal de r^e vergelijking. Het stelsel (4) krijgt dan de vorm (19) (zie blz. 118).

Alle oplossingen, die voldoen aan (4) voldoen ook aan (19) en andersom. Wij kunnen het probleem (4), (5) dus vervangen door het aequivalente probleem (19), (5). De variabelen x_k en x_{p+j} ($j = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m$) komen alle in slechts één vergelijking

---

1) Wanneer dit niet het geval is, spreken wij van ontaarding; hoe men dan te werk moet gaan wordt besproken in 2.2.5.

voor en wij vinden dus een oplossing van (19), wanneer wij deze variabelen gelijkstellen aan de rechter leden van de vergelijkingen waarin ze voorkomen en de overige variabelen 0 kiezen:

$$x_k = \frac{b_r}{a_{rk}} ,$$

$$x_{p+j} = b_j - \frac{a_{jk}}{a_{rk}} b_r , \quad (j = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m) \tag{18}$$

$$x_i = 0 , \qquad (i = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,p,p+r) .$$

Dit is juist de oplossing, die wij hierboven hadden verkregen.

Wij vergelijken nu de opbrengst z_0', behorende bij deze oplossing met de vorige opbrengst z_0. Om de redenering algemeen te houden maken wij er geen gebruik van, dat sommige c's 0 zijn. De opbrengsten z_0 en z_0' zijn respectievelijk (vgl. (5), (13) en (18))

$$z_0 = c_{p+1}b_1 + \ldots + c_{p+r}b_r + \ldots + c_n b_m \tag{20}$$

en

$$z_0' = c_k \frac{b_r}{a_{rk}} + c_{p+1}(b_1 - \frac{a_{1k}}{a_{rk}} b_r) + \ldots + c_{p+r}.0 + \ldots + c_n(b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}} b_r)$$

of (21)

$$z_0' = z_0 + \frac{b_r}{a_{rk}}(c_k - \sum_{j=1}^{m} c_{p+j}a_{jk}) . \tag{22}$$

Voeren wij de afkorting

$$z_k = \sum_{j=1}^{m} c_{p+j}\ a_{jk} \tag{23}$$

in en schrijven wij weer θ voor $\frac{b_r}{a_{rk}}$, dan gaat (22) over in

$$z_0' = z_0 + \theta(c_k - z_k) . \tag{24}$$

De opbrengst kan dus alleen dan groter worden, wanneer $c_k - z_k > 0$ is (θ was $\geqslant 0$). Om z_0 te vergroten zal men dus een variabele zoeken waarvoor $c_k - z_k > 0$ is. Wanneer dit voor meer dan één variabele het geval is, dan kan men het beste met die variabele werken waarvoor $c_k - z_k$ maximaal is, noodzakelijk is dit echter niet.[1]

Vervolgens wordt onderzocht hoe groot men deze variabele kan kiezen. De grens hiervoor wordt bepaald door het kleinste van de

---

[1] Is het verschil voor meer dan één index maximaal, dan kan men willekeurig één van deze nemen.

$$
\begin{array}{l}
\left(a_{11} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}\, a_{r1}\right) x_1 + \dots + \left(a_{1k} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}\, a_{rk}\right) x_k + \dots + \left(a_{1p} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}\, a_{rp}\right) x_p + x_{p+1} - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}\, x_{p+r} = b_1 - \frac{a_{1k}}{a_{rk}}\, b_r \\
\left(a_{21} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}}\, a_{r1}\right) x_1 + \dots + \left(a_{2k} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}}\, a_{rk}\right) x_k + \dots + \left(a_{2p} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}}\, a_{rp}\right) x_p + x_{p+2} - \frac{a_{2k}}{a_{rk}}\, x_{p+r} = b_2 - \frac{a_{2k}}{a_{rk}}\, b_r \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\frac{a_{r1}}{a_{rk}}\, x_1 + \dots + x_k + \dots + \frac{a_{rp}}{a_{rk}}\, x_p + \dots + \frac{1}{a_{rk}}\, x_{p+r} = \frac{b_r}{a_{rk}} \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left(a_{m1} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}\, a_{r1}\right) x_1 + \dots + \left(a_{mk} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}\, a_{rk}\right) x_k + \dots + \left(a_{mp} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}\, a_{rp}\right) x_p + x_{p+m} - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}\, x_{p+r} = b_m - \frac{a_{mk}}{a_{rk}}\, b_r \, .
\end{array}
\qquad (19)
$$

quotiënten b_j/a_{jk}, waarin $a_{jk} > 0$ is. Door een geschikte omvorming van de vergelijkingen kunnen wij de waarden van de variabelen, die in de nieuwe oplossing niet 0 zijn, direct aflezen uit de rechter leden van de vergelijkingen. Het resultaat is dan, dat er weer m x-en een waarde ongelijk 0 aannemen, doch dat nu $x_k \neq 0$ is in de plaats van λ_{p+r}, die in de oude oplossing een positieve waarde had.

Als het nieuwe schema dezelfde eigenschappen bezit als het oude, kunnen deze berekeningen uiteraard ook daar weer op worden toegepast.

De simplexmethode is een methode die deze gedachtengang systematisch toepast. Het is niet nodig voortdurend alle vergelijkingen op te schrijven; men kan volstaan met tabellen, waarin de coëfficiënten uit deze vergelijkingen opgenomen zijn en waaruit men bovendien kan aflezen hoe groot $c_h - z_h$ is voor alle waarden van h. Wij laten nu zien hoe men deze tabellen maakt en of en zo ja, hoe men uit een bekende oplossing een nieuwe, betere oplossing kan construeren.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 166 (C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk III: Voorraadproblemen

door

G. de Leve

3e druk

1959

1. Inleiding.

In dit hoofdstuk zullen wij enige methoden bespreken, welke gebruikt kunnen worden bij het oplossen van voorraadproblemen.

De redenen, waarom een voorraad wordt aangelegd, kunnen verschillend van aard zijn. Men zou bijv. een voorraad kunnen beheren met de bedoeling om deze te laten dienst doen als buffer tussen de, niet op de minuut op elkaar afgestemde, inkoop en verkoop. Vervolgens worden ook wel eens goederen om speculatieve redenen opgeslagen. Wat ook de beweegredenen mogen zijn om een voorraad te beheren, steeds zal men ervaren, dat op bepaalde tijdstippen de voorraad daalt als gevolg van de verkoop aan klanten, terwijl op andere momenten de voorraad wordt aangevuld met eerder of op hetzelfde ogenblik gedane bestellingen.

De theorie, welke zich bezighoudt met deze problematiek, ontleent haar belang niet alleen aan de veelvuldigheid van situaties, waarin voorraden moeten worden beheerd, maar ook aan de omstandigheid, dat menig vraagstuk zich laat herleiden tot een voorraadprobleem. Een ondernemer, die zich aan het begin van iedere maand of kwartaal afvraagt welk deel van zijn zojuist ontvangen geld belegd moet worden en hoeveel in kas moet blijven ter dekking van de eventuele onkosten in de komende periode, ziet zich voor hetzelfde probleem geplaatst als de voorraadbeheerder van één of ander artikel, dat slechts periodiek kan worden ingekocht. Treffender wordt de overeenkomst als verder gegeven is dat de ondernemer geld kan lenen tegen een hoge rente en dat de beheerder een boete wordt opgelegd, waarvan de grootte afhangt van de achterstand in zijn afleveringen en de tijdsduur van de vertraging. Zo kunnen ook problemen, welke betrekking hebben op het winnen van electriciteit uit waterkracht opgevat worden als voorraadproblemen. Men beschouwt dan de toevloeiende watermassa's als klanten en de capaciteit van het krachtstation als voorraad. De hoeveelheden water, die in de bassins worden opgeslagen vormen dan de klanten welke wachten op aflevering van de door hen bestelde goederen.

In het hierna volgende zullen wij steeds gebruik maken van de voorraad-terminologie om tot een scherpere formulering van de verschillende typen van problemen te geraken, zonder daarbij afstand te doen van de pretentie een meer omvattender verzameling van problemen te bespreken.

Gelijk bij vele andere onderwerpen uit de Operations Research wordt men ook hier geconfronteerd met de vraag: "hoe kan men in een concrete situatie op grond van gegevens uit het verleden en verwachtingen voor de toekomst op een verantwoorde wijze een beslissing nemen". De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat meestal hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van deze criteria worden veelal veronderstellingen gemaakt waaraan slechts in eerste benadering is voldaan.

Wij zullen ons tijdens de besprekingen van de diverse methoden niet laten verleiden tot een discussie over het al of niet houdbaar zijn van deze veronderstellingen, omdat het slechts de bedoeling van dit hoofdstuk is inzicht te verschaffen in de wijze, waarop men voorraadproblemen kan oplossen.

Aan de hand van voorbeelden zullen wij de verschillende typen onderscheiden en de bijbehorende oplossingsmethoden toelichten.

2. Het eerste voorbeeld.

In ons eerste voorbeeld zullen wij aannemen, dat wij belast zijn met de inkoop van grondstoffen voor een grossier. Voor de eenvoud zullen wij ons beperken tot één soort grondstof, die in elke gewenste hoeveelheid op vastgestelde tijdstippen, bijv. op de eerste dag van de maand, kan worden ingekocht.

De behoefte aan deze grondstof wordt eerst constant ondersteld, maar later zullen wij aannemen, dat de vraag een kansverdeling volgt.

Wanneer er op een gegeven ogenblik geen voldoende voorraad aanwezig is, treedt er in de verkoop een stagnatie op, welke zeer nadelig is. Met de aflevering van de door de klanten bestelde goederen moet dan worden gewacht totdat er weer nieuwe grondstoffen ontvangen zijn. Wij zullen steeds aannemen, dat deze achterstand bij voldoende aanvoer direct kan worden opgeheven. Uiteindelijk wordt dus aan iedere vraag voldaan.

Het behoort nu tot onze taak om de omvang van de te bestellen hoeveelheden te bepalen.

Indien de <u>inkoopkosten</u> voor een partij van de grootte q worden gegeven door $Q(q) = aq$, dan maakt het op grond van de inkoopkosten niet uit of men uit voorraad verkoopt of nalevert.

Er zijn echter twee soorten van kosten welke wel de keuze van de bestelgrootte q beïnvloeden. In de eerste plaats de voorraadkosten, welke C_1 bedragen voor iedere eenheid één tijdseenheid in voorraad. Deze kosten worden o.a. gevormd door de rentederving van het in de goederen geïnvesteerde kapitaal. Vervolgens worden er <u>boeten</u> geheven van de grootte C_2 voor elke eenheid één tijdseenheid te laat afgeleverd.

Enerzijds zullen wij bij de bepaling van de ordergrootte trachten een eventuele achterstand te voorkomen, terwijl wij aan de andere kant ervoor willen waken, dat onze voorraden niet te groot worden. In onze voorraadpolitiek moeten wij aan deze elkander tegengestelde verlangens op een zodanige wijze tegemoet komen, dat de totale kosten aan de voorraadvorming verbonden minimaal zijn.

Doordat het steeds slechts mogelijk is op van te voren vastgestelde tijdstippen $\Theta_n (n=1,.....)$ goederen te kopen ontstaan er tijdsintervallen tussen deze tijdstippen. Voor de eenvoud kiezen wij de tijdsduur van deze intervallen gelijk aan de tijdseenheid.

Met R_0 geven wij de restantvoorraad aan op het besteltijdstip, terwijl R_1 de restantvoorraad aanduidt aan het eind van het interval. Indien wij de ordergrootte aangeven met q, dan zal de voorraad V na ontvangst van de order

$$V = R_0 + q \qquad (1)$$

bedragen.

De grootheid x is bestemd voor de vraag gedurende het tijdsinterval. Voor de restantvoorraad R_1 volgt dan:

$$R_1 = V - x\ . \qquad (2)$$

Bij een niet toereikende voorraad zullen de grootheden R_1 en R_0 negatieve waarden aannemen. Aangezien aangenomen wordt dat de ingekochte goederen direct worden afgeleverd, kan men er steeds voor zorgen, dat bij de aanvang van de nieuwe periode geen tekort aan grondstoffen bestaat.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de kosten voor de komende periode zo klein mogelijk zijn."

Om deze kosten te berekenen zullen wij twee gevallen onderscheiden:

1. In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien, m.a.w. $x \leqslant V$ en dus $R_1 \geqslant 0$. De gemiddelde voorraad wordt dan gegeven door

$$\tfrac{1}{2}(R_1 + V) = V - \tfrac{1}{2}x \qquad (3)$$

en de daaruit voortkomende voorraadkosten bedragen:

$$K_1(V) = (V - \tfrac{1}{2}x)\ C_1 \qquad (4)$$

De functie $K_1(V)$ is minimaal als $V = \frac{1}{2}x$, maar voor deze waarde van V is niet voldaan aan de voorwaarde $x \leqslant V$, zodat $K_1(V)$ minimaal is, onder de voorwaarde $x \leqslant V$, voor $x = V$. De minimale waarde van $K_1(V)$ bedraagt dan $\frac{1}{2}xC_1$.

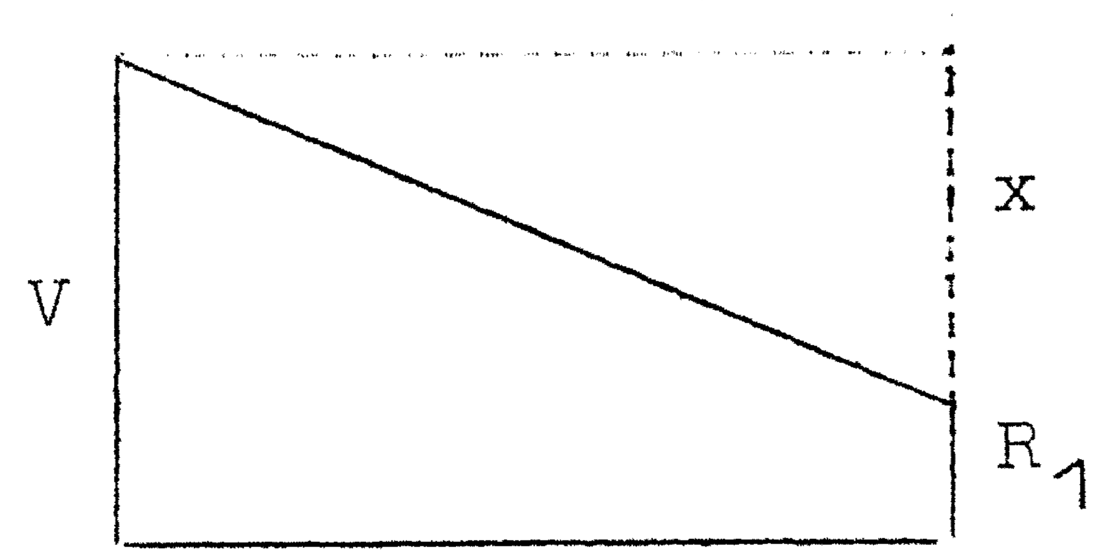


fig. 1
voldoende voorraad

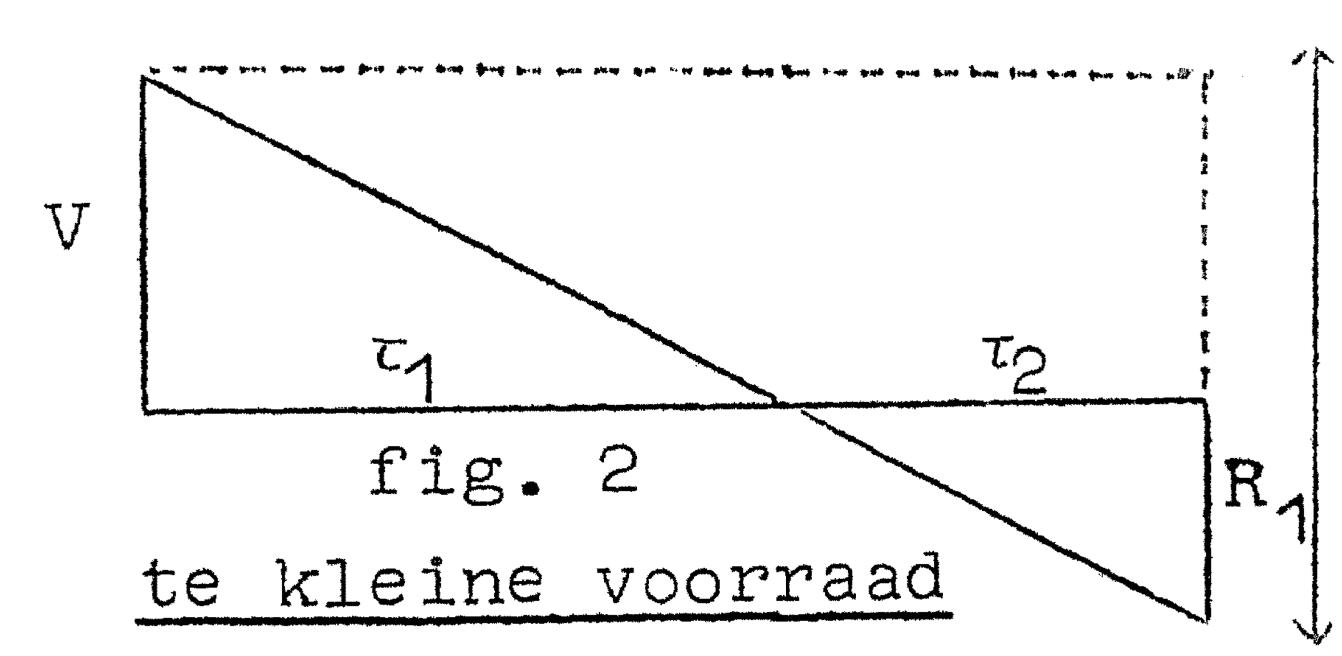


fig. 2
te kleine voorraad

2. In de behoefte kan niet geheel door de voorraad worden voorzien, m.a.w. $x > V$ en $R_1 < 0$. Er is gedurende een periode τ_1 een positieve voorraad en vervolgens een tekort. Als wij wederom aannemen, dat de vraag tijdens deze perioden constant is, dan is de gemiddelde voorraad gedurende de periode τ_1 gelijk aan $\frac{1}{2}V$ en het gemiddelde tekort tijdens de periode τ_2 $\frac{1}{2}|R_1|$ en de totale daaruit voortkomende kosten worden gegeven door:

$$K_2(V) = \tfrac{1}{2}V\tau_1 C_1 + \tfrac{1}{2}(x-V)\tau_2 C_2 \, . \tag{5}$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat voor τ_1 en τ_2 resp. gelden de betrekkingen:

$$\tau_1 = \frac{V}{x} \tag{6}$$

$$\tau_2 = \frac{x-V}{x} \, . \tag{7}$$

Verwerken wij deze resultaten in de betrekking (5) dan vinden wij tenslotte voor de totale kosten

$$K_2(V) = \tfrac{1}{2}\left[\frac{V^2 C_1 + (V-x)^2 C_2}{x}\right] . \tag{8}$$

De functie $K_2(V)$ is minimaal als voor V geldt:

$$V = \frac{x\ C_2}{C_1 + C_2} \, . \tag{9}$$

Vergelijken wij nu de minima van $K_1(V)$ en $K_2(V)$ dan volgt uit het feit $K_1(x) = K_2(x)$ direct, dat de optimale keuze van V gegeven wordt door (9). Dit betekent dat een voorraad kleiner is dan de behoefte optimaal kan zijn. Zoals wij weten is V de voorraad, welke overblijft na opheffing van de eventuele achterstand. De te bestellen hoeveelheid grondstoffen wordt dus gegeven door:

$$q = V - R_0 \, . \tag{10}$$

Indien de vraag in iedere periode gelijk is dan zal, als ook in voorgaande perioden met een optimale voorraad $V = \dfrac{C_2 x}{C_1 + C_2}$ gestart wordt, de restantvoorraad R_0 gegeven worden door

$$R_0 = - \frac{x\ C_1}{C_1 + C_2} \, . \tag{11}$$

Uit (10) en (11) volgt dan tenslotte:

$$q = \frac{x\ C_2}{C_1 + C_2} + \frac{x\ C_1}{C_1 + C_2} = x.$$

Dit resultaat konden wij uiteraard verwachten.

Veelal echter is de vraag x geen gegeven getal, maar een stochastische grootheid, waaraan een kansverdeling is toegevoegd.

Ons probleem luidt nu: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de verwachting van de totale kosten voor de komende periode zo klein mogelijk is. Immers ook deze verwachting zal afhankelijk zijn van de nog te kiezen beginvoorraad V.

Voor het geval, dat de verdelingsfunctie F(x) een kansdichtheid f(x) bezit, kan de verwachting van de kosten als volgt worden uitgedrukt:

$$K(V) = \int_0^V (V-\tfrac{1}{2}x)C_1 f(x)dx + \int_V^\infty \left\{\tfrac{1}{2}V^2C_1+\tfrac{1}{2}(V-x)^2C_2\right\} \frac{f(x)}{V} dx \ . \quad (13)$$

Deze betrekking werd opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (4) en (8)[1]. Bij het opstellen van deze relatie wordt dus aangenomen dat de vraag voor het gehele tijdsinterval weliswaar stochastisch is, maar constant is tijdens het tijdsinterval.

Wij zullen nu onze beginvoorraad zo kiezen, dat de verwachting van de te maken onkosten, K(V), minimaal wordt, m.a.w. voor de gezochte optimale waarde V^* van V moet gelden

$$\left(\frac{dK(V)}{dV}\right)_{V=V^*} = 0. \quad (14)$$

Na een weinig rekenen blijkt (14) gelijkwaardig te zijn met:

$$F(V^*) + V^* \int_{V^*}^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \ . \quad (15)$$

Aangezien men kan bewijzen, dat:

$$M(V) \stackrel{def}{=} F(V) + V \int_V^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad (16)$$

een monotoon stijgende functie is van V, is V^* ondubbelzinnig bepaald. De functie K(V) heeft dus maar één extremum en aangezien $C(\infty) = \infty$, moet dit een minimum zijn. De optimale ordergrootte wordt dan gegeven door:

$$q^* = V^* - R_0 \quad (17)$$

waarbij R_0 op het besteltijdstip bekend is.

In de inleiding hebben wij nogal vaag gezegd: "De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden."

1) E. Naddos:
Some models of inventory and an application. Management Science. Vol.2 nr 4. 1956, blz. 299 e.v.

Het criterium ziet er nu als volgt uit:

$$M(V^*) = F(V^*) + V^* \int_{V^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad . \qquad (18)$$

M(V) is een functie van V en $M(V^*) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ geeft een vergelijking waaruit V^* kan worden opgelost.

In dit voorbeeld hebben wij de volgende veronderstellingen gemaakt:

1. Er kan alleen maar besteld worden op van te voren vastgestelde tijdstippen.
2. Er is geen levertijd, de bestellingen worden dus direct afgeleverd.
3. De inkoopkosten zijn evenredig met de ordergrootte. Er worden dus geen kortingen gegeven.
4. Achterstand in aflevering wordt opgeheven direct na iedere aflevering van de leverancier.

Verder hebben wij verondersteld dat de vraag een continue verdeling bezit. Wij zullen echter in een later voorbeeld aantonen, dat ook voor discrete verdelingen op analoge wijze een criterium kan worden opgesteld.

3. Het tweede voorbeeld.

Laten wij om de gedachten te bepalen aannemen, dat wij thans belast zijn met het beheer van de champignonvoorraad van een restaurant. Door de eigenaardige geografische ligging van ons eethuis kan het slechts éénmaal in de twee dagen door de champignonkweker worden bediend. Nu is het met champignons zo gesteld, dat ook de houdbaarheid slechts twee dagen bedraagt, zodat dus steeds bij aankomst van de kweker de voorraad moet worden ververst. De behoefte aan champignons is echter van te voren niet bekend, maar volgt een kansverdeling van bekend type met gegeven parameterwaarden. Het is heel goed mogelijk, dat bij een overstelpende vraag de voorraad niet toereikend blijkt te zijn. In dat geval zullen in de gerechten blikchampignons worden verwerkt, welke in "onbeperkte" hoeveelheden aanwezig zijn. De eigenaar gebruikt deze paddestoelen ongaarne vanwege hun hoge inkoopprijs. De opgave, waarvoor wij ons eens in de twee dagen gesteld zullen zien, luidt nu als volgt:

Indien gegeven zijn de inkoopkosten $Q(q)$ van de verse champignons als functie van de bestelgrootte q en vervolgens de prijs C_3 voor één eenheid blikchampignons, gevraagd bij bekende kansverdeling van de vraag $\underline{x}$ de optimale bestelgrootte te bepalen.

Wij behoeven dus slechts rekening te houden met de volgende twee verschillende kosten:

1. de inkoopkosten $Q(q)$ van de verse champignons,
2. de inkoopkosten van de blikchampignons $(\underline{x}-q)C_3$, indien de vraag $\underline{x}$ groter is dan q.

Het is nu eenvoudig in te zien dat de verwachting van de totale kosten gegeven wordt door:

$$K(q) = Q(q) + C_3 \int_q (x-q)\ f(x)\ dx \tag{19}$$

als $f(x)$ de kansdichtheid van de vraagverdeling voorstelt.

Als voor $q = q^*$ de functie $K(q)$ minimaal is, wordt de bestelgrootte q^* optimaal genoemd.

Indien $K(q)$ een differentieerbare functie van q is dan geldt voor $q=q^*$:

$$K'(q) = Q'(q) - C_3 \int_q f(y)\ dy = 0 \tag{20}$$

m.a.w.

$$\int_{q^*} f(y)\ dy = P\ \underline{y}\ q^* = \frac{Q'(q^*)}{C_3}\ . \tag{21}$$

Het linkerlid van (21) stelt de kans voor dat de voorraad niet toereikend is, terwijl het rechterlid gelijk is aan het quotiënt van de marginale kosten en de vervangingsprijs.

Het gevraagde criterium wordt in dit voorbeeld gegeven door (21):

$$M(q^*) \equiv P\left[\underline{y} \geqslant q^*\right] - \frac{Q'(q^*)}{C_3} = 0.$$

Indien $Q(q) = aq$ dan geldt: $\frac{Q'(q)}{C_3} = \frac{a}{C_3}$. De functie $M(q)$ is in dat geval monotoon dalend en $M(q) = 0$ heeft slechts één wortel q^*. In alle andere gevallen is een nadere precisering van $f(x)$ en $Q(q)$ vereist.

In ons tweede voorbeeld hebben wij een situatie besproken met de volgende eigenschappen:

1. Er kan <u>alleen</u> maar besteld worden op van te voren vastgestelde tijdstippen.
2. Er is geen levertijd, de bestellingen worden dus direct afgeleverd.
3. Er worden kortingen verleend bij grote orders.
4. Achterstand wordt door noodinkopen voorkomen.

4. Het derde voorbeeld.

Thans zullen wij veronderstellen, dat wij belast zijn met de inkoop van één speciaal soort dameshoedje.

Dit hoedje kan in iedere gewenste hoeveelheid besteld worden op 1 februari. Tussen 1 februari en 1 juli is het in de normale verkoop, daarna verdwijnt het in de uitverkoop alwaar het met absolute zekerheid tegen een sterk gereduceerde prijs wordt verkocht.

Op 1 februari moeten wij dus beslissen hoeveel hoedjes het aanstaande voorjaar in de verkoop gebracht zullen worden. Onze keuze zal afhangen van de volgende gegevens:

a) de inkoopkosten bedragen $Q(q)$ voor één partij van de omvang q;
b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt a_1 per hoedje;
c) de verkoopprijs in de uitverkoop bedraagt a_2 per hoedje;
d) de voorraadkosten bedragen C_1 voor ieder hoedje een geheel seizoen in voorraad;
e) de verdeling van de vraag wordt gegeven door de kansdichtheid $f(x)$.

De kansverdeling onder e) is uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

Uitgaande van de veronderstelling, dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is gespreid, zullen wij twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen:

1. In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien. De voorraad is dan gemiddeld

$$\frac{q+q-x}{2} = q - \frac{x}{2} \qquad (22)$$

groot en de kosten worden gegeven door:

$$K_1(q) = Q(q) + (q - \frac{x}{2})\, C_1 \quad \text{als } x \leq q \, . \qquad (23)$$

De inkomsten worden daarentegen gegeven door:

$$I_1(q) = a_1 x + a_2(q-x) \quad \text{als } x \leq q \, . \qquad (24)$$

2. In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien. Op analoge wijze als in het eerste voorbeeld vindt men dat tijdens een periode van de lengte $\frac{q}{x}$ voorraad aanwezig is en wel gemiddeld $\frac{1}{2}q$. De voorraadkosten en inkoopkosten tezamen bedragen dan:

$$K_2(q) = Q(q) + \tfrac{1}{2}\,\frac{q^2C_1}{x} \qquad \text{als } x \geq q. \qquad (25)$$

De inkomsten worden nu gegeven door:

$$I_2(q) = a_1q \qquad \text{als } x \geq q. \qquad (26)$$

Met behulp van (23) t/m (26) kan eenvoudig worden nagegaan, dat de verwachting van de winst gegeven wordt door:

$$W(q) = \int_0^q \left\{ a_1x + a_2(q-x) - (q-\tfrac{x}{2})C_1 \right\} f(x)dx +$$
$$\int_q^\infty \left\{ a_1q - \frac{\tfrac{1}{2}q^2C_1}{x} \right\} f(x)dx - Q(q). \qquad (27)$$

De functie $W(q)$ is slechts dan maximaal voor $q=q^*_0$, indien voor deze waarde van q geldt:

$$W'(q^*) = 0 . \qquad (28)$$

Uit (27) en (28) volgt voor $q=q^*$:

$$W'(q) = \int_0^q (a_2-C_1)f(x)dx + \int_q^\infty (a_1 - \frac{qC_1}{x})f(x)dx - Q'(q) = 0 \quad (29)$$

of

$$a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty (a_1 - \frac{q^*C_1}{x} - a_2 + C_1)f(x)dx - Q'(q^*) = 0. \qquad (30)$$

Het criterium wordt nu gegeven door (30):

$$M(q^*) \equiv a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty (a_1 - \frac{q^*C_1}{x} - a_2 + C_1)\, f(x)dx - Q'(q^*) = 0.$$

In onze beschouwing werd tot dusver geen rekening gehouden met het verlies aan "goodwill" door "neen-verkoop". Het is uiteraard voor het modehuis geen reclame als de klanten onverrichterzake de winkel weer verlaten. Het verlies aan "goodwill" is echter slecht te meten. Wel kan men dikwijls aangeven welk bedrag de eigenaar bereid is uit te geven, opdat de klant een volgende keer zal terugkeren.

Wij zullen deze kosten aangeven met C_3, alhoewel deze constante in een vorig voorbeeld gebruikt is voor de noodinkopen per eenheid. Men kan de dubbele betekenis van de constante C_3 gemakkelijk rechtvaardigen, immers in beide gevallen probeert men het "uitverkocht zijn" af te kopen.

Aan het rechterlid van de betrekking (25) moet nu een term van de grootte $C_3(x-q)$ worden toegevoegd:

Voor $W(q)$, de verwachting van de winst, vinden wij dan:

$$W(q) = \int_0^q \left\{ a_1 x + a_2(q-x) - C_1\left(q - \frac{x}{2}\right) \right\} f(x)dx +$$

$$+ \int_q^\infty \left\{ a_1 q - C_3(x-q) - \frac{\frac{1}{2}C_1 q^2}{x} \right\} f(x)dx - Q(q) \ . \qquad (31)$$

Het criterium wordt nu gegeven door:

$$M(q^*) \equiv a_2 - C_1 + \int_{q^*}^\infty \left(a_1 + C_3 - \frac{C_1 q^*}{x} - a_2 + C_1\right) f(x)dx - Q'(q^*) = 0.$$

(32)

Van het bovenstaande resultaat zullen wij thans een toepassing bespreken. Wij zullen uitgaan van de volgende gegevens:

a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden, m.a.w. $Q(q) = 30q$;

b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden, m.a.w. $a_1 = 50$;

c) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden, dus $a_2 = 20$;

d) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje, dus $C_1 = 5$;

e) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door $f(x) = (0{,}02)^2 \, x \, e^{-0{,}02x}$; (33)

f) het verlies C_3 aan goodwill voor ieder hoedje te weinig in voorraad wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0,5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden.

De relatie (32) wordt in dit speciale geval gegeven door

$$(35 + C_3) \int_{0{,}02q^*}^\infty t\, e^{-t}\, dt - 0{,}1q^* \int_{0{,}02q^*}^\infty e^{-t}\, dt = 15 \quad (34)$$

of na enig rekenen:

$$(0{,}6 + 0{,}02\, C_3)\, q^* e^{-0{,}02q^*} + (35 + C_3)\, e^{-0{,}02q^*} = 15. \quad (35)$$

Indien wij deze betrekking oplossen naar q^* vinden wij:

$$
\begin{aligned}
q^{*} &= 88 && \text{als } C_3 = 0 \\
q^{*} &= 96 && C_3 = 5 \\
q^{*} &= 109 && C_3 = 10 \\
q^{*} &= 117 && C_3 = 15 \\
q^{*} &= 124 && C_3 = 20 \\
q^{*} &= 130 && C_3 = 25 \\
q^{*} &= 136 && C_3 = 30\ .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Dit voorbeeld is een generalisatie van het tweede voorbeeld. Het tweede voorbeeld ontstaat uit het derde, indien men voor de parameters a_2 en C_1 de waarde nul kiest.

5. <u>Het vierde voorbeeld</u>.

In ons vierde voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip. Om de gedachten te bepalen zullen wij veronderstellen, dat van een voorraad machine-onderdelen het beheer aan ons is toevertrouwd.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs Q(q) te betrekken bij de dealer.

De voorraadkosten bedragen C_1 per eenheid en per tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Aan deze vraag <u>moet</u> worden voldaan. Later zullen wij een benaderingsmethode geven met behulp waarvan ook voorraadproblemen kunnen worden opgelost, waarin afnamen van meer dan één eenheid voorkomen.

Aangezien de door ons bestelde goederen terstond worden afgeleverd, zal pas een nieuwe bestelling worden opgegeven, indien niet meer aan de behoefte kan worden voldaan. (zie fig. 3)

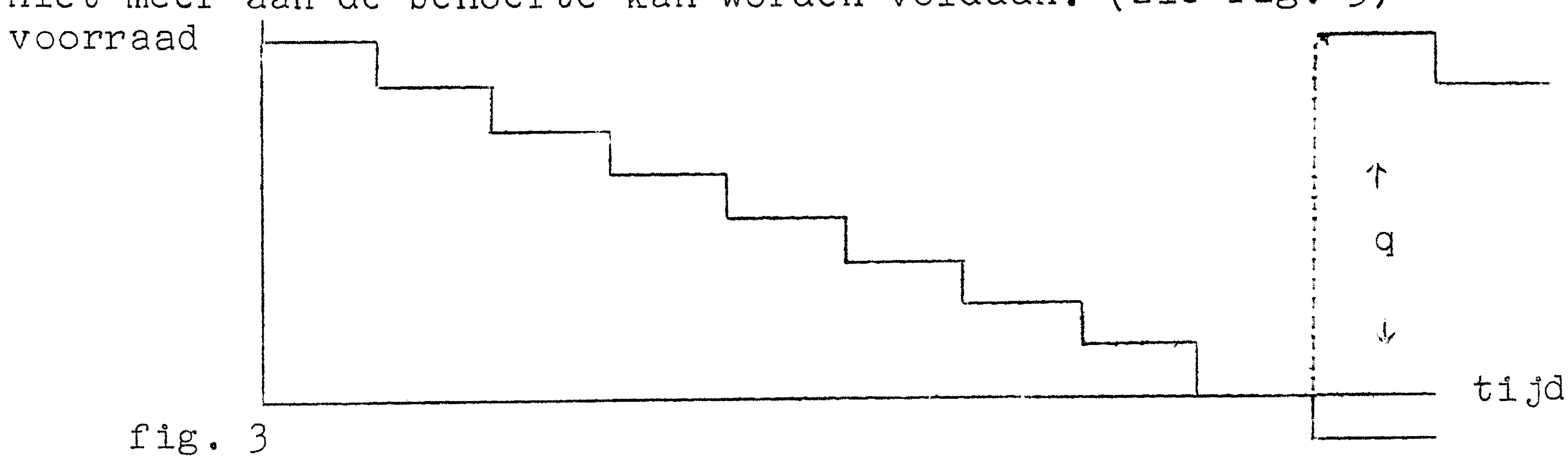


fig. 3
<u>Het verloop van de voorraad</u>.

Indien q de hoeveelheid ingekochte goederen voorstelt, dan daalt de voorraad van q-1 tot nul, in het tijdsinterval tussen twee opéénvolgende besteltijdstippen.

Als de vraag constant is en gegeven wordt door α eenheden per tijdseenheid, dan zal om de $\frac{1}{\alpha}$ tijdseenheden een nieuw onderdeel moeten worden verstrekt.

Men kan nu eenvoudig nagaan dat de voorraadkosten voor het gehele tijdsinterval gegeven worden door:

$$\frac{C_1}{\alpha} \sum_{i=1}^{q-1} (q-i) = \frac{C_1}{\alpha} \sum_{i=1}^{q-1} i = \frac{\frac{1}{2} C_1 q(q-1)}{\alpha} \quad . \tag{37}$$

De inkoopkosten bedragen wederom Q(q), zodat voor de totale kosten K(q) gevonden wordt:

$$K(q) = \frac{\frac{1}{2} q(q-1) C_1}{\alpha} + Q(q) \quad . \tag{38}$$

Aangezien zowel $\frac{\frac{1}{2}q(q-1)C_1}{\alpha}$ als $Q(q)$ monotoon <u>niet</u> dalende functies zijn van q, wordt de minimale waarde van $K(q)$ bereikt voor $q=0$. Deze waarde van q is echter uitgesloten, omdat altijd aan de vraag moet worden voldaan en dus vinden wij $q=1$ als optimale bestelgrootte.

Wanneer wij deze oplossing aan een nadere beschouwing onderwerpen, dan blijkt dat de optimale keuze van q niet afhangt van de waarde van C_1 en de wijze, waarop kortingen worden verleend voor grote orders.

De hierboven gegeven oplossingsmethode is dan ook niet juist.

Men dient zich nl. allereerst af te vragen welk doel men met de inkooppolitiek tracht te bereiken. Daartoe kan men de volgende criteria onderscheiden:

1) Van de optimale inkooppolitiek wordt verwacht, dat aan het eind van een zeer lange van te voren gegeven periode de (verwachting van de) totale kosten over die periode lager zijn dan van elke andere politiek.
2) Van de optimale inkooppolitiek wordt geëist dat de totale kosten in een periode (of de verwachting van die kosten) waar in een van te voren gegeven zeer grote hoeveelheid goederen wordt verbruikt, minimaal zijn.

Men kan onder zeer algemene voorwaarden bewijzen dat beide criteria dezelfde optimale inkooppolitiek aanwijzen indien "zeer groot" door onbegrensd wordt vervangen in de beide criteria.

Aangezien wij op ieder besteltijdstip aannemen, dat wij aan het begin staan van een periode, zoals deze wordt ondersteld in één van de beide criteria, zullen de ordergrootten steeds gelijk zijn.

Stel dat wij onze overwegingen baseren op het tweede criterium en dat wij vervolgens twee alternatieve inkooppolitieken S_1 en S_2 vergelijken met de bestelgrootten resp. q_1 en q_2.

Kiezen wij nu als "zeer grote hoeveelheid" de waarde Nq_1q_2 dan zijn er Nq_2 tijdsintervallen, waarin q_1 wordt verbruikt en Nq_1 tijdsintervallen, waarin in totaal q_2 wordt gevraagd.

De kosten worden dan voor de politiek S_1 gegeven door:

$$Nq_2\left\{\frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1)\right\} \qquad (39)$$

en voor de politiek S_2 door:

$$Nq_1\left\{\frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2)\right\}. \qquad (40)$$

De politiek S_1 is te verkiezen boven S_2 als geldt:

$$Nq_2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1) \right\} < Nq_1 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2) \right\} \qquad (41)$$

of na deling door Nq_2q_1:

$$\left\{ \frac{\frac{1}{2}\, q_1(q_1-1)C_1 + \alpha Q(q_1)}{\alpha q_1} \right\} < \left\{ \frac{\frac{1}{2}\, q_2(q_2-1)C_1 + \alpha Q(q_2)}{\alpha q_2} \right\}. \qquad (42)$$

Uit de ongelijkheid (42) kan men zonder veel moeite vaststellen, dat voor een optimale politiek moet gelden:

$$k(q) = \frac{\frac{1}{2}(q-1)C_1}{\alpha} + \frac{Q(q)}{q} \qquad (43)$$

is minimaal.

Bezwaar kan gemaakt worden tegen het subjectieve element "zeer groot" in de beide criteria. De basis ongelijkheid (42) is echter onafhankelijk van N. Om deze eventuele bezwaren op te heffen, veronderstellen wij dat $N \rightarrow \infty$.

Schrijven wij vervolgens voor $Q(q)$:

$$Q(q) = q\, b(q) + C_0 \qquad (44)$$

dan geldt als het minimum van $k(q)$ bereikt wordt voor $q=q^*$:

$$k'(q^*) = \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} = 0. \qquad (45)$$

Het beslissingscriterium wordt in dit voorbeeld dus gegeven door

$$M'(q^*) \equiv \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} = 0. \qquad (46)$$

Indien $Q(q)$ is van de vorm:

$$Q(q) = qq + C_0 \qquad (47)$$

dan geldt: $b'(q) = 0$ en vinden wij voor de optimale bestelgrootte q^*:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\alpha C_0}{C_1}}\,. \qquad (48)$$

Veelal is de vraag niet constant, maar een stochastische grootheid, waaraan een kansverdeling is toegevoegd. Wij zullen nu aannemen, dat de kansverdeling van de vraag voor alle intervallen met een gegeven lengte gelijk zijn, onverschillig de ligging van het begintijdstip.

Behalve met de kansverdeling van de vraag $\underline{x}$ in een periode met gegeven lengte T, zullen wij ons ook bezighouden met de verdeling van de lengte $\underline{t}_X$ van de periode, waarin een vaste hoeveelheid X wordt verbruikt.

De kansverdeling van $\underline{t}_X$ volgt nu ondubbelzinnig uit die van $\underline{x}$. Intuïtief voelt men aan dat $\mathcal{E}\,\underline{t}_X$ min of meer evenredig moet zijn met X. Immers, zo zou men kunnen redeneren, de lengte van het tijdsinterval waarin $X_1 + X_2$ wordt verbruikt is gelijk aan de som van de tijdsintervallen, waarin resp. de vraag X_1 en X_2 bedraagt. Deze redenering is slechts dan juist indien de afname steeds één eenheid groot is. Aangezien wij in het hierna volgende ook afnamen van meer dan één eenheid zullen toelaten, kan het dus voorkomen, dat aan het begin van het tweede tijdsinterval meer dan X_1 is verbruikt.

In vele gevallen echter kan eenvoudig worden aangetoond, dat geldt:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\mathcal{E}\,\underline{t}_X}{X} = \frac{1}{\alpha} \qquad (49)$$

waarbij α de gemiddelde vraag per tijdseenheid voorstelt.

In het resterende gedeelte van dit hoofdstuk zullen wij gebruik maken van de identiteit:

$$\mathcal{E}\,\underline{t}_X = \frac{X}{\alpha}\ . \qquad (50)$$

Indien wij thans de verwachting van de kosten berekenen voor een tijdsinterval, waarvan de bijbehorende bestelgrootte gegeven wordt door q, dan vinden wij in eerste benadering:

$$K(q) \doteq C_1 . \tfrac{1}{2} q .\ \mathcal{E}\,\underline{t}_q + Q(q) = \frac{\tfrac{1}{2} C_1 q^2}{\alpha} + Q(q)\ . \qquad (51)$$

De berekening van de voorraadkosten in (51) is niet helemaal correct, men moet nl. voor iedere eenheid apart de verwachting van de kosten berekenen.

Vergelijken wij wederom twee alternatieve bestelpolitieken S_1 en S_2 dan kunnen wij op analoge wijze aantonen, dat voor de optimale bestelpolitiek moet gelden:

$$k(q) = \frac{C_1 q}{2\alpha} + \frac{Q(q)}{q} \qquad (52)$$

is minimaal.

Het minimum van (52) wordt voor dezelfde waarde van q behaald als het minimum van (43).

Men kan eenvoudig nagaan, dat de resultaten welke verkregen zijn in het <u>niet</u> stochastische geval ook geldig zijn voor die situaties, waarin de vraag een kansverdeling volgt.

In ons vierde voorbeeld hebben wij een voorraadprobleem besproken met de volgende eigenschappen:

1) Er kan op ieder tijdstip worden besteld.
2) Er is geen levertijd, de te bestellen goederen worden direct afgeleverd.
3) Er worden kortingen verleend bij grote orders.

In de hierna te bespreken voorbeelden zullen wij de veronderstelling, waarin staat vermeld: "Er is geen levertijd, de te bestellen goederen worden direct afgeleverd", laten vervallen.

Indien de levertijd constant is en wij verder aannemen dat de afleveringstijdstippen van tevoren bekend zijn (bijv. aankomsttijdstippen van een vrachtboot) dan zal, als ook de gewenste ordergrootten gegeven zijn, de invoering van een levertijd het probleem niet ingewikkelder maken. Immers men bestelt de gewenste hoeveelheid goederen zoveel eerder als de levertijd bedraagt.

De moeilijkheden komen echter pas, indien bij constante levertijd, hetzij de gewenste afleveringstijdstippen, hetzij de gewenste ordergrootten, of beiden van tevoren niet bekend zijn.

In een later voorbeeld zullen wij aannemen dat de levertijden stochastisch zijn.

6. Het vijfde voorbeeld.

Het vijfde voorbeeld is een generalisatie van het eerste besproken probleem. In het eerste voorbeeld hebben wij verondersteld, dat wij belast waren met het beheer van een voorraad grondstoffen, welke op van tevoren gegeven tijdstippen kon worden aangevuld.

Zoals wij reeds vaststelden ontstaan tussen de afleveringstijdstippen Θ_n intervallen, waarvan de lengten gelijk waren aan de tijdseenheid. Wij zullen nu aannemen, dat de levertijd k tijdseenheden bedraagt. M.a.w. de hoeveelheid goederen q_n, welke op Θ_n dient aan te komen, moet men dus op Θ_{n-k} bestellen.

De voorraad op Θ_n, na ontvangst van de goederen, zal worden aangegeven met V_n.

De restantvoorraad op Θ_n, voor de aankomst van de bestelling q_n, wordt vastgelegd door R_{n-1}, terwijl de voorraad aan het eind van de periode wordt aangeduid met R_n.

De behoefte aan grondstoffen in de periode (Θ_n, Θ_{n+1}) wordt aangegeven door x_n.

Wij verkrijgen nu de volgende betrekkingen:

$$V_n = R_{n-1} + q_n \tag{53}$$

$$R_n = V_n - x_n \tag{54}$$

$$V_n = V_{n-1} + q_n - x_{n-1} \tag{55}$$

$$R_n = V_{n-1} + q_n - x_{n-1} - x_n. \tag{56}$$

Doordat men enige tijd van te voren moet bestellen kan men slechts op langere termijn invloed uitoefenen op de omvang van de voorraad. Op het tijdstop Θ_{n-k} weet men niet hoe groot de behoefte zal zijn in de periode (Θ_{n-k}, Θ_n). Het is dan ook niet uitgesloten, dat op het tijdstip Θ_n blijkt, dat een op Θ_{n-k} gedane bestelling te klein was om het tekort op te heffen, waardoor V_n negatieve waarden kan nemen.

Uit (53), (54), (55) en (56) volgt onmiddellijk:

$$V_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} x_i, \tag{57}$$

en

$$R_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} x_i - x_n. \tag{58}$$

Wij schrijven nu voor:

$$\left.\begin{aligned} & V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i \overset{\text{def}}{=} X_{n-k}, \\ & \sum_{i=n-k}^{n-1} x_i = y, \\ & x_n = x \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

De grootheid X_{n-k} geeft dus op het tijdstip Θ_{n-k} de som aan van de voorraad en de hoeveelheid reeds in bestelling.
De betrekkingen (57) en (58) gaan dan over in:

$$V_n = X_{n-k} + q_n - y = z_n - y \tag{60}$$

en

$$R_n = X_{n-k} + q_n - x - y = z_n - x - y \tag{61}$$

waarbij

$$z_n \overset{\text{def}}{=} X_{n-k} + q_n \ . \tag{62}$$

De variabelen y en x stellen resp. de behoeften aan grondstoffen voor in de k tussen-liggende perioden en in de n^{de} periode. Vervolgens veronderstellen wij dat deze variabelen resp. de verdelingsfuncties $G(y)$ en $F(x)$ bezitten. Het probleem luidt nu weer: Kies q_n zodanig dat de verwachting van de te maken onkosten minimaal wordt.

Er kunnen zich in de n^{de} periode drie gevallen voordoen:

1. De behoefte kan uit de voorraad worden gedekt, m.a.w.

   $V_n = z_n - y \geqslant 0$ en $x_n = x \leqslant z_n - y$.

2. Er is weliswaar aan het begin van de n^{de} periode een voorraad, maar aan het eind een tekort, m.a.w.

   $V_n = z_n - y \geqslant 0$ en $x > V_n = z_n - y$.

3. De afgeleverde bestelling op het tijdstop Θ_n was niet voldoende om het op dat moment al bestaande tekort op te heffen, zodat er gedurende de gehele periode een tekort is, m.a.w.

   $z_n - y \leqslant 0$ en $x > z_n - y = V_n$.

In de figuren 4, 5 en 6 zijn deze 3 mogelijkheden aangegeven:

Het verloop bij positieve begin- en eindvoorraden

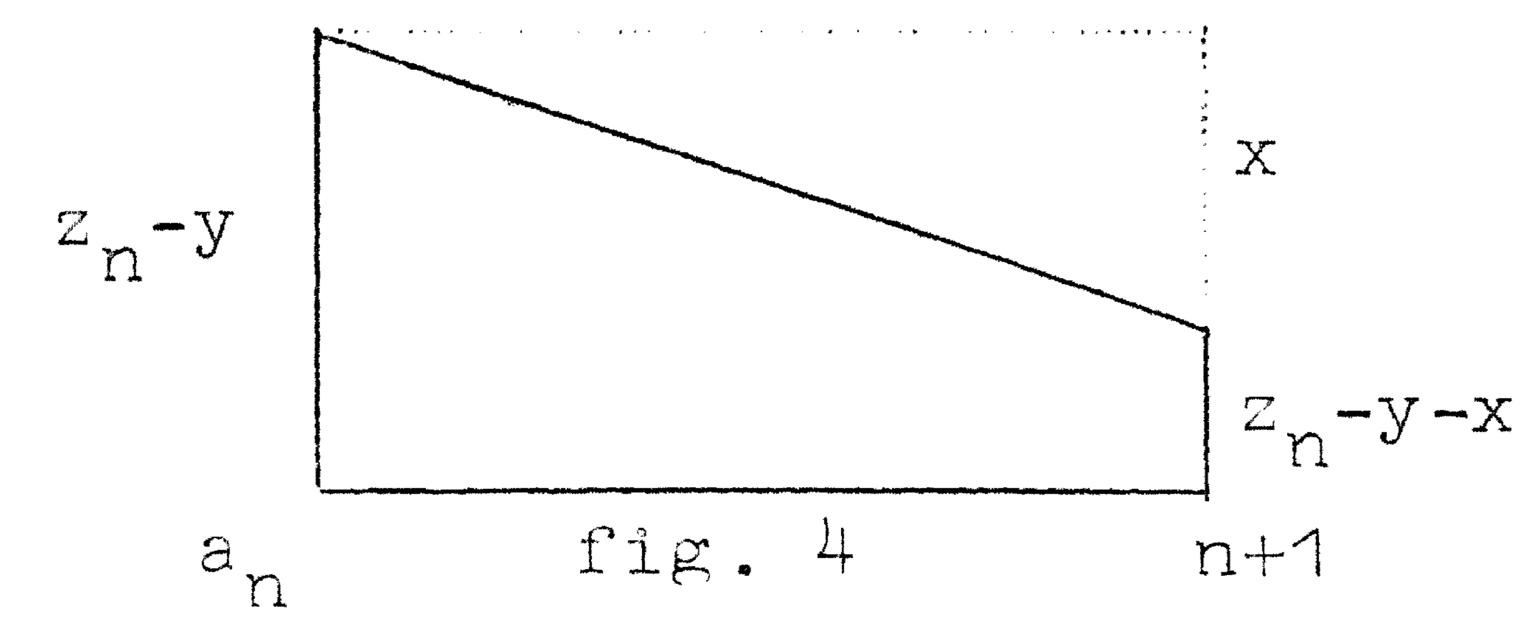


fig. 4

Het verloop bij positieve begin- en negatieve eindvoorraden

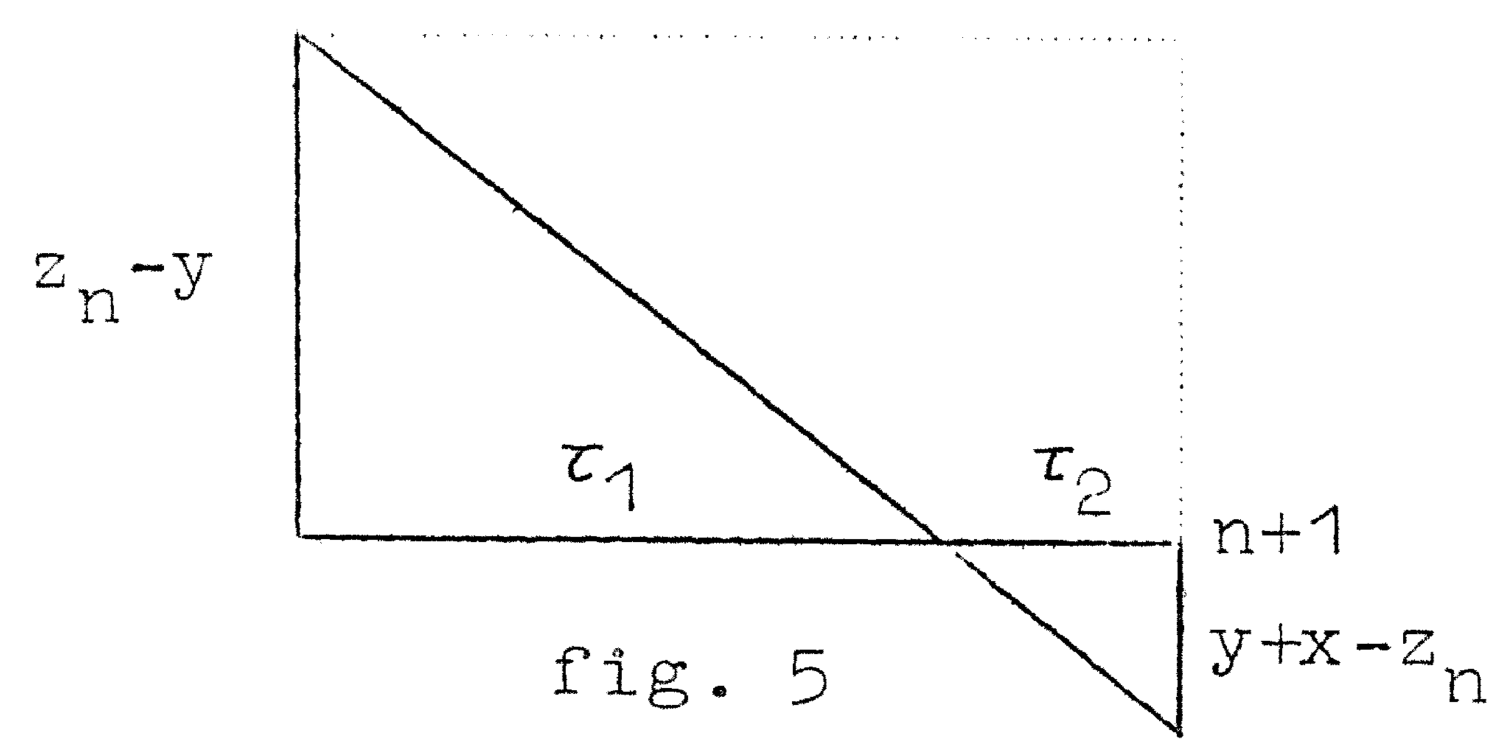


fig. 5

fig. 6

Ook nu berekenen wij eerst voor deze gevallen afzonderlijk de kosten-functie, alsof de behoefte in de n^{de} periode een gegeven waarde bezit.

<u>In het eerste geval</u> is de gemiddelde voorraad gelijk aan $(z_n - y - \frac{1}{2}x)$ en de daaruit voortvloeiende kosten bedragen:

$$(z_n - y - \tfrac{1}{2}x)\ c_1. \tag{63}$$

In het tweede geval is er gedurende een periode τ_1 een positieve voorraad en wel gemiddeld $\frac{1}{2}(z_n-y)$ en tijdens de periode τ_2 een gemiddeld tekort van $\frac{1}{2}(y+x-z_n)$.

De totale kosten bedragen dan:

$$\tfrac{1}{2}(x_n - y)\ \tau_1 c_1 + \tfrac{1}{2}(y + x - z_n)\ \tau_2 c_2. \tag{64}$$

Wederom geldt:

$$\tau_1 = \frac{z_n - y}{x} \tag{65}$$

$$\tau_2 = \frac{y + x - z_n}{x}\ . \tag{66}$$

De betrekking (64) gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{(z_n - y)^2}{x}\,c_1 + \tfrac{1}{2}\,\frac{(y + x - z_n)^2}{x}\,c_2 \qquad (67)$$

<u>In het derde geval</u> is het gemiddelde tekort gelijk aan $(\frac{1}{2}x - z_n + y)$ en de daarbij behorende kosten bedragen:

$$(\tfrac{1}{2}x - z_n + y)\,c_2\,. \qquad (68)$$

De grootheden x en y, die in deze drie gevallen voorkomen, zijn echter geen bekende getallen, maar variabelen met een kansverdeling.

Stel nu dat de variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ een kansverdeling bezitten met dichtheden resp. $f(x)$ en $g(y)$. De verwachting van de te maken kosten wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned} K(z_n) = {} & c_1 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_0^{z_n-y} (z_n-y-\tfrac{1}{2}x)f(x)dx \, + \\ & + \tfrac{1}{2}c_1 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{(z_n-y)^2}{x}\, f(x)dx \, + \\ & + \tfrac{1}{2}c_2 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{(y+x-z_n)^2}{x}\, f(x)dx \, + \\ & + c_2 \int_{z_n}^{\infty} f(y)dy \int_0^{\infty} (\tfrac{1}{2}x - z_n + y)\, f(x)dx. \end{aligned} \qquad (67)$$

Deze betrekking is opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (63), (67) en (68).

Wij kiezen z_n (vgl. (60)) nu zodanig dat $K(z_n)$ minimaal wordt; z_n moet dus voldoen aan:

$$\left(\frac{dK(z)}{dz}\right)_{z=z_n^*} = 0. \qquad (68)$$

Deze vergelijking blijkt na enige berekeningen gelijkwaardig te zijn met:

$$\int_0^{z_n^*} g(y)dy \left[\int_0^{z_n^*-y} f(x)dx + (z_n^*-y) \int_{z_n^*-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx \right] = \frac{c_2}{c_1 + c_2}\,. \qquad (69)$$

De functie

$$M(z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{z_n} g(y)dy \left[\int_0^{z_n-y} f(x)dx + (z_n-y) \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] \tag{70}$$

is monotoon stijgende, omdat geldt:

$$M'(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx > 0. \tag{71}$$

Hieruit volgt, dat de optimale waarde van z_n door de betrekking (69) ondubbelzinnig is vastgesteld.

Aangezien de waarde $\sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i$ op het tijdstip θ_{n-k} bekend is, kan q_n uit

$$z_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n \tag{72}$$

worden berekend.
Het criterium wordt nu gegeven door:

$$M(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)dy \left[F(z_n-y) + (z_n-y) \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] =$$

$$= \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad . \tag{73}$$

Het is ook mogelijk om na te gaan hoe groot de verwachting is van de lengte van de periode τ_1, waarin geen tekort is aan grondstoffen.

In het eerste geval zal τ_1 gelijk zijn aan één, omdat de voorraad voldoende groot is om in de behoefte te voorzien. In het tweede geval hebben wij gezien dat τ_1 wordt gegeven door $(z_n-y)/x$ en in het derde geval is τ_1 gelijk aan nul, omdat de n^{de} periode wordt begonnen met een tekort.

Voor de verwachting van $\underline{\tau}_1$ geldt dus de volgende betrekking:

$$\mathcal{E}\{\underline{\tau}_1\} = \int_0^{z_n} F(z_n-y)g(y)dy + \int_0^{z_n} (z_n-y)g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx. \tag{74}$$

Uit (73) en (74) volgt:

$$\mathcal{E}\{\underline{\tau}_1\} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{75}$$

en

$$\frac{\mathcal{E}\{\underline{\tau}_1\}}{\mathcal{E}\{\underline{\tau}_2\}} = \frac{C_2}{C_1} \quad . \tag{76}$$

Vervolgens zullen wij een toepassing geven van de bovenstaande methode. Hierin veronderstellen wij, dat de leveringsduur twee perioden bedraagt en de verdelingsdichtheid gegeven wordt door:

$$g(y) = \frac{1}{6}\, y^3\, e^{-y} \tag{77}$$

$$f(x) = x\, e^{-x} \quad . \tag{78}$$

De kansverdeling $g(y) = \frac{1}{6} y^3 e^{-y}$

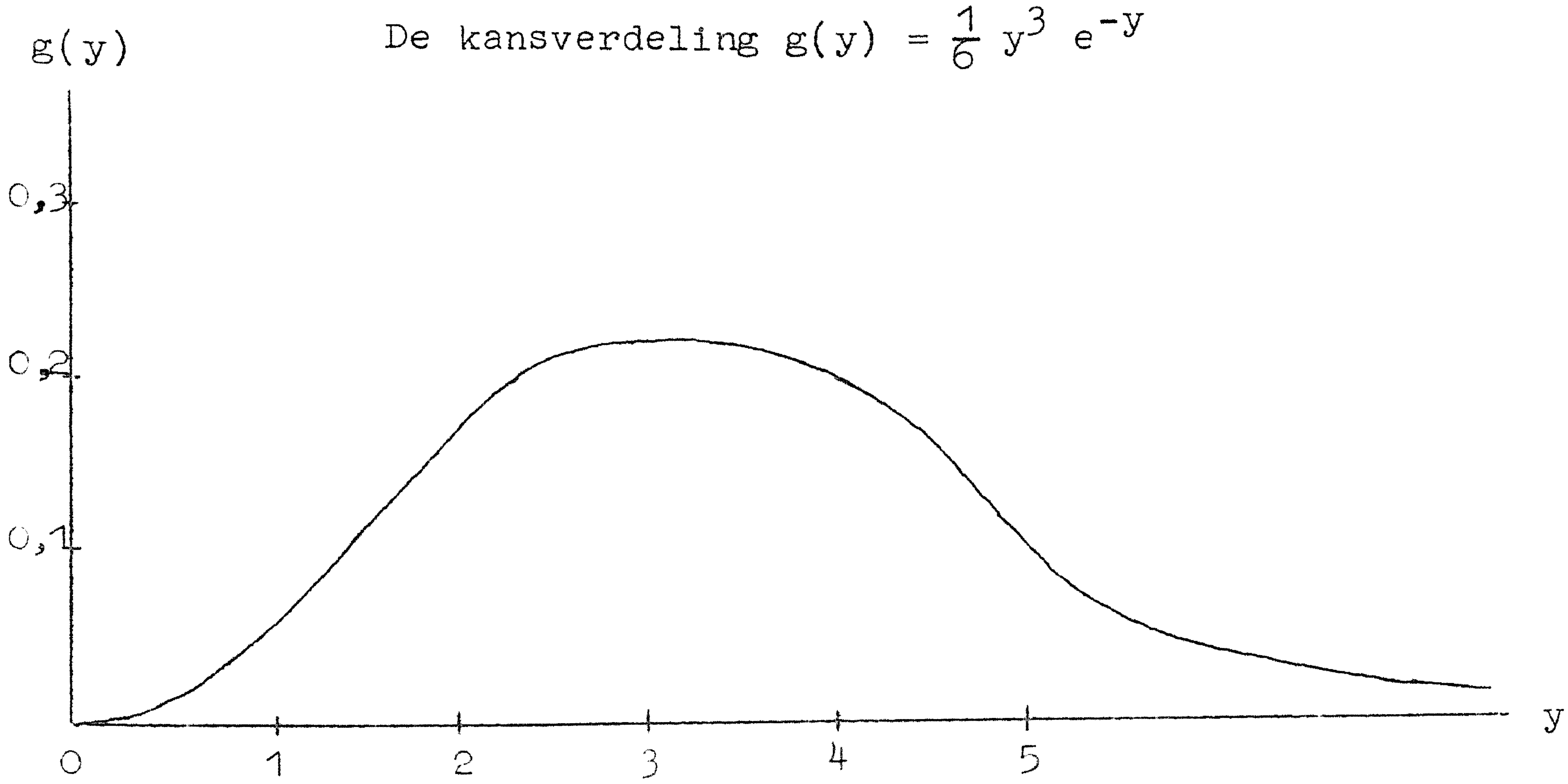


fig. 7

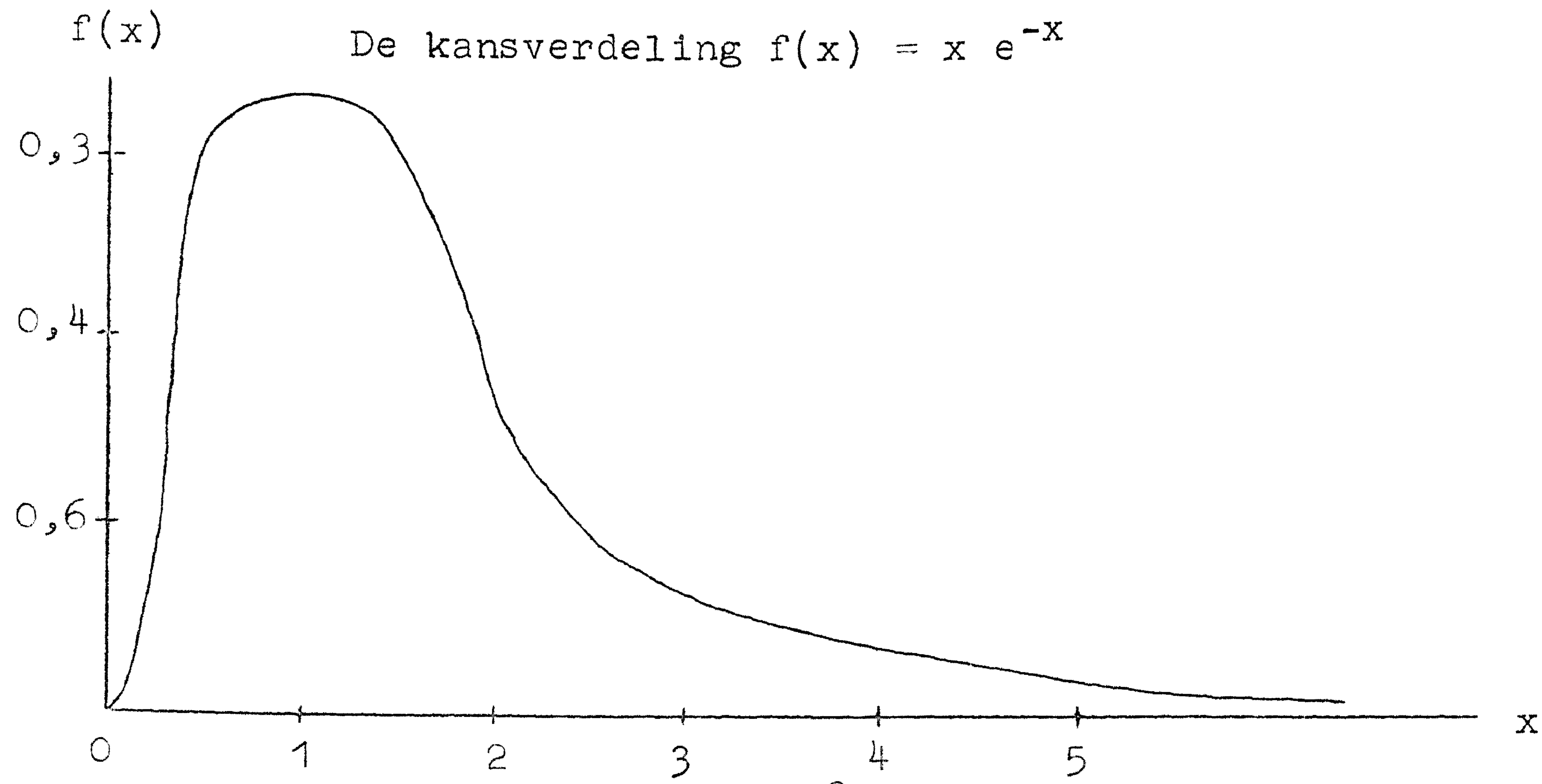


fig. 8

De verdeling van y wordt verkregen door te onderstellen, dat $\underline{d}_{n-1}$ en $\underline{d}_{n-2}$ onafhankelijk verdeeld zijn met dichtheden:

$$h(d_{n-1}) = d_{n-1}\, e^{-d_{n-1}} \tag{79}$$

$$h(d_{n-2}) = d_{n-2}\, e^{-d_{n-2}} . \tag{80}$$

Uit $g(y) = g(d_{n-1} + d_{n-2})$ volgt dan de gegeven verdeling.

De vraag luidt nu wederom: Hoe groot moeten wij op het tijdstip θ_{n-2} onze bestelling q_n kiezen, als gegeven is

$$C_2 = 19\, C_1 \tag{81}$$

$$V_{n-2} = 3{,}10 \tag{82}$$

$$q_{n-1} = 2{,}70 . \tag{83}$$

Uit (73), (77), (78), (81), (82) en (83) volgt:

$$M(z_n^*) = \int_0^{z_n^*} \frac{1}{6}\, y^3\, e^{-y}\, dy \left[\int_0^{z_n^*-y} x\, e^{-x}\, dx + (z_n^*-y) \int_{z_n^*-y}^{\infty} e^{-x}\, dx = \right.$$

$$= 0{,}95 \tag{84}$$

en ook:

$$M(z_n^*) = 1 - e^{-z_n^*} \left[1 + z_n^* + \frac{z_n^{*2}}{2} + \frac{z_n^{*3}}{6} + \frac{z_n^{*4}}{24} \right] = 0{,}95. \tag{85}$$

Voor (85) kunnen wij ook schrijven:

$$\int_{0}^{2z_n} \frac{u^4}{4!2^5} e^{-\frac{u}{2}} du = 0,95. \tag{86}$$

Daar $\frac{u^4}{4!2^5} e^{-\frac{u}{4}}$ de verdelingsdichtheid is van een χ^2-verdeling met $u = \chi^2$ en 10 vrijheidsgraden, is de waarde van $2 z_n^*$ uit de tabel van deze verdeling af te lezen. Wij vinden dan voor z_n:

$$z_n = 9,15 \ . \tag{87}$$

De te bestellen hoeveelheid wordt dan gegeven door:

$$q_n^* = 9,15 - (3,10 + 2,70) = 3,35 \ . \tag{88}$$

Wij zullen nu eens nagaan of wij een gelijksoortige methode kunnen ontwikkelen voor het geval, dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geen continue, maar <u>discrete verdelingen</u> bezitten met kansen resp. $p(x)$ en $r(y)$. Wij vinden dan met behulp van de betrekkingen (63), (67) en (68) voor de verwachting van de te maken kosten:

$$C(z_n) = C_1 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=0}^{z_n-y} (z_n - y - \tfrac{x}{2}) p(x) + \tfrac{1}{2} C_1 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{x}(z_n-y)^2 p(x) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} C_2 \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{x}\left[x-(z_n-y)\right]^2 p(x) + C_2 \sum_{y=z_n+1}^{\infty} r(y) \sum_{x=0}^{\infty} (y - z_n + \tfrac{x}{2}) p(x) . \tag{89}$$

De betrekking (89) kunnen wij ook anders schrijven en wel:

$$C(z_n) = (C_1+C_2) \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=0}^{z_n-y} (z_n - y - \tfrac{x}{2}) P(x) + (C_1+C_2) \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{1}{2x}(z_n-y)^2 p(x)$$

$$+ C_2 \sum_{y=0}^{\infty} r(y) \sum_{x=0}^{\infty} (y - z_n + \tfrac{x}{2}) p(x) . \tag{90}$$

Wanneer z_n optimaal is, moet gelden:

$$C(z_n - 1) \geqslant C(z_n), \tag{91}$$

$$C(z_n + 1) \geqslant C(z_n). \tag{92}$$

Men kan aantonen, na uitvoerig cijferen, dat beide ongelijkheden vervangen kunnen worden door:

$$M(z_n-1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < M(z_n) \qquad (93)$$

waarbij

$$M(z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y=0}^{z_n} r(y) \left[\sum_{x=0}^{z_n-y} p(x) + (z_n-y+\tfrac{1}{2}) \sum_{x=z_n-y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x} \right] \qquad (94)$$

een monotoon stijgende functie van z_n is.

In verband met de plaatsruimte zullen wij deze afleidingen niet geven.

In ons vijfde voorbeeld zijn wij uitgegaan van de volgende veronderstellingen:

1) Er kan alleen maar besteld worden op van tevoren vastgestelde tijdstippen.
2) De levertijd bedraagt een vast aantal perioden.
3) De inkoopkosten zijn evenredig met de ordergrootte.
4) Achterstand in aflevering wordt volledig opgeheven, zodra de eerstvolgende order toereikend is.

7. Het zesde voorbeeld.

In ons zesde voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip. Om de gedachten te bepalen zullen wij veronderstellen, dat wij voor een dealer de voorraad machine-onderdelen beheren.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs Q(q) te betrekken bij de fabriek.

De voorraadkosten bedragen C_1 per eenheid en per tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Indien wij niet in staat zijn aan de vraag te voldoen, dan moeten wij een boete betalen van C_2 per eenheid en tijdseenheid. Zodra een nieuwe order binnenkomt en de omvang van de order is groot genoeg, dan zal de achterstand terstond worden ingelopen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel en wanneer moet er besteld worden, opdat de verwachting van de kosten op de "lange duur" zo klein mogelijk wordt?"

Om op deze vraag te kunnen antwoorden zullen wij de totale kosten in ieder tijdsinterval splitsen en toewijzen aan de diverse bestellingen. Wij zullen hiertoe in gedachten steeds veronderstellen, dat de afgegeven order de laatste is en de zaak wordt gesloten zodra de laatste eenheid van deze order is verkocht. De kosten, welke wij nu aan een order toewijzen worden gevormd door die uitgaven, welke het gevolg zijn van het feit, dat niet de voorgaande order maar deze bestelling de laatste is.

In eerste instantie zullen wij uitgaan van de veronderstelling, dat de levertijd T constant is.

Onze bestellingen zullen dus altijd worden afgeleverd op een tijdstip, waarop de voorgaande orders reeds binnen zijn. Voor het berekenen van de kosten, die het gevolg zijn van een extra bestelling, is het dus niet zinvol de orders te onderscheiden, welke op het besteltijdstip van die extra order nog in bestelling zijn.

Stel X gelijk aan de som van de aanwezige voorraad en de hoeveelheden in bestelling. Indien een bestelling van de grootte q_1 wordt afgegeven op een tijdstip, waarop $X = X_1$, dan zal aan de i^{de} eenheid uit die bestelling behoefte bestaan na $\underline{t}_{x_1+i}$ tijdseenheden (zie blz. 217).

Wij onderscheiden nu twee situaties:

1) Als $\underline{t}_{x_1+i} \geqslant T$ dan zal de i^{de} eenheid uit de bestelling $\underline{t}_{x_1+i}-T$ tijdseenheden in voorraad zijn. De voorraadkosten bedragen voor

de i^{de} eenheid:

$$C_1(\underline{t}_{x_1+i}-T) \tag{95}$$

2) Als $\underline{t}_{x_1+i} < T$ dan zal de i^{de} eenheid uit de bestelling $T-\underline{t}_{x_1+i}$ tijdseenheden te laat worden afgeleverd. De boete wordt gegeven door:

$$C_2(T-\underline{t}_{x_1+i}) \ . \tag{96}$$

Aangezien de inkoopkosten wederom $Q(q_1)$ bedragen vinden wij met behulp van (95) en (96) voor de verwachting van de aan de bestelling toe te wijzen kosten:

$$C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \int_T^{\infty} (t-T)dG(t|x_1+i) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \int_0^T (T-t)dG(t|x_1+i) + Q(q_1) \tag{97}$$

waarbij $G(t|x_1+i)$ de verdelingsfunctie is van de stochastische variabele $\underline{t}_{x_1+i}$.

Bij het opstellen van de betrekking (97) zijn wij stilzwijgend uitgegaan van de veronderstelling, die ook gemaakt werd in het vierde voorbeeld, nl.:"de onvoorwaardelijke kansverdeling van de behoefte in een interval van gegeven lengte is onafhankelijk van het beginpunt van dat interval".

Op grond van deze veronderstelling en het feit, dat slechts één eenheid per keer wordt afgenomen, kan men bewijzen, dat de kansverdeling van de vraag in een vaste periode een Poissonverdeling bezit.

Voor een Poissonverdeling geldt voor de kans op een vraag i in een periode van de lengte T:

$$p(i;\alpha,T) = \frac{(\alpha t)^i}{i!} e^{-\alpha T} \tag{98}$$

waarbij α de gemiddelde vraag per tijdseenheid is.

Men kan nu eveneens bewijzen, dat als de vraag i in een periode T een Poissonverdeling (98) bezit, de kansverdeling van de lengte $\underline{t}_x$ van het tijdsinterval, waarin X eenheden wordt gevraagd een Γ(Gamma)-verdeling is. Deze Γ verdeling wordt gegeven door de kansdichtheid:

$$dG(t|x) = \frac{\alpha^x t^{x-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(x)} \ dt \ . \tag{99}$$

Tussen de kansverdelingen (98) en (99) bestaan o.a. de volgende identiteiten:

$$\int_T^\infty (t-T)\,dG(t|x+i) = \sum_{j=0}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T)$$

$$\int_0^T (T-t)\,dG(t|x+i) = \sum_{j=x+i+1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T). \qquad (100)$$

Inplaats van (97) mogen wij dus ook voor de verwachting van de kosten schrijven:

$$c_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) + c_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T)$$
$$+Q(q_1). \quad (101)$$

Stel dat wij op het moment, waarop de voorraad vermeerderd met de bestellingen X bedraagt, $X > \max(x_1;x_2)$, de keus hebben tussen twee voorraadpolitieken en wel:

a) steeds q_1 bestellen zodra $X = x_1$
b) steeds q_2 bestellen zodra $X = x_2$.

Beschouwen wij nu een periode, waarin $X + Nq_1q_2$ wordt gevraagd dan bestaat deze hoeveelheid uit Nq_2 orders van de omvang q_1 of Nq_1 bestellingen van q_2 eenheden, zodat de verwachting van de kosten voor de politieken a resp. b gegeven worden door:

$$Nq_2 \left[c_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) + c_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) \right.$$
$$+ Q(q_1) \quad (102)$$

$$Nq_1 \left[c_1 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=0}^{x_2+i} \frac{(x_2+i-j)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) + c_2 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=x_2+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_2-i)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) \right.$$
$$+ Q(q_2). \quad (103)$$

De politiek a zal de voorkeur verdienen boven b in de beschouwde periode als de uitdrukking (102) kleiner is dan (103) of na deling door Nq_1q_2, als geldt:

$$\frac{c_1 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=1}^{x_2+i} \frac{(x_2+i-j)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) + c_2 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=x_2+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_2-i)}{\alpha}\, p(j;\alpha,T) + Q(q_2)}{q_2} \geqslant$$

$$\frac{C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q_1)}{q_1} . \tag{104}$$

Aangezien de ongelijkheid (104) onafhankelijk is van de keuze van N en wij dus N zeer groot mogen kiezen, verkrijgen wij op deze wijze een objectief criterium voor de beoordeling van twee alternatieve politieken. Het is direct in te zien, dat de politiek (q,x), waarvoor geldt:

$$\frac{C_1 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=x+i-1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q)}{q} \tag{105}$$

is minimaal, de voorkeur verdient boven iedere alternatieve politiek.

Wij zullen nu de verschillende veronderstellingen op grond waarvan het bovenstaande resultaat werd verkregen aan een nader onderzoek onderwerpen.

In onze beschouwing zijn wij uitgegaan van een constante levertijd met als gevolg, dat de aflevering der orders dezelfde is als die van de afgifte.

Indien de levertijd stochastisch is, dan kan het echter gebeuren, dat orders elkaar inhalen. Door een vroegtijdige aflevering van een order kunnen dan boeten, veroorzaakt door een te late aflevering van een voorgaande order, worden voorkomen.

Als gevolg van onze keuze van kostensplitsing levert de eerder afgeleverde order in zo'n situatie winst op. Indien men deze winst in de beschouwingen wil betrekken gaat veel van de eenvoud van het probleem verloren. Men zal dan, bij de bepaling van het optimale besteltijdstip, rekening moeten houden met de tijdstippen, waarop de voorgaande bestellingen zijn afgegeven.

Men kan ook stellen, dat de fabriek de orders aflevert in dezelfde volgorde, als zij door ons worden afgegeven. Deze veronderstelling houdt meestal een niet meer stochastisch onafhankelijk zijn van de opeenvolgende levertijden in. Dit heeft ten gevolge, dat wij eerder zullen gaan bestellen naarmate de achterstand bij de fabriek groter wordt. De waarde van X, voorraad vermeerderd met de hoeveelheden in bestelling, is dan niet alleen maatgevend voor de bepaling van het besteltijdstip.

Het is echter ook mogelijk een voorbeeld te construeren, waarbij de volgorde van aflevering gelijk is aan die van de afgifte, terwijl bovendien kennis van de "positie" van de nog niet ontvangen orders geen extra informatie biedt. Stel bijv. dat een fabriek een constante tijd nodig heeft voor het uitvoeren van een order en neem vervolgens aan, dat deze goederen vervoerd worden per schip. Het schip zal onderweg verschillende stagnaties ondervinden, welke onderling onafhankelijk zijn en betrekking hebben op alle schepen in de omgeving. Veronderstel vervolgens, dat deze stagnaties zodra zij zijn opgeheven geen nawerking hebben op het tempo van het schip en de schepen, die de plaats van de stagnatie nog niet hebben bereikt. Het een en ander heeft tot gevolg, dat als twee schepen éénmaal op gelijke hoogte zijn, gelijk zullen opvaren. Als de stagnaties van korte duur zijn zullen de opeenvolgende levertijden weliswaar niet onafhankelijk zijn, maar hangt toch de kansverdeling van de levertijd niet meer af van de afleveringssituatie op het besteltijdstip.

Wanneer wij dit voorbeeld verder uitwerken en daartoe $l(T)$ invoeren als kansdichtheid van de verdelingsfunctie voor de levertijd, dan wordt de verwachting van de kosten toe te wijzen aan een order in plaats van (101) gegeven door:

$$C_1 \int_0^\infty l(T)dT \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+q_1} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T)$$

$$+ C_2 \int_0^\infty l(T)dT \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=x_1+i-1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q_1)$$

of

$$C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+q_1} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p_0(j;\alpha)$$

$$+ Q(q_1)$$

waarbij $p_0(j;\alpha)$ de kans op een vraag van de grootte j tijdens de levertijd voorstelt.

De optimale politiek $(q;x)$ wordt nu gevonden uit de minimalisatie naar q en x van:

$$\frac{C_1 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + C_2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=x+i+1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + Q(q)}{q} \qquad (106)$$

In de tweede plaats hebben wij aangenomen, dat de vraag per keer steeds uit één eenheid bestaat. Het gevolg hiervan was, dat de voorraad altijd de waarde van de kritieke voorraad, de voorraad op het besteltijdstip, doorliep. Indien men deze veronderstelling laat vallen, dan gelden de gegeven afgeleidingen niet meer.

Wij zullen nu het vraagstuk in een meer algemenere vorm stellen en wel als volgt:

Bepaal een waarde voor x en q zodanig dat, als men steeds een hoeveelheid q bestelt zodra de voorraad daalt beneden x, de verwachting van de kosten op de "lange duur" minimaal is. Ook nu zullen wij aannemen, dat de kans op een aantal klanten j in een periode van vaste lengte T gegeven wordt door de Poissonverdeling (98). De grootte van de aankopen door de klanten mogen nu echter verschillend zijn. Wij zullen nl. veronderstellen, dat de grootte van de aankopen een trekking is uit een continue of discrete kansverdeling. Ook nu kunnen wij bewijzen, dat (106) voor een discrete verdeling van de aankoopgrootten een criterium oplevert voor de optimale keus van q en x, terwijl voor een continue verdeling van de aankoopgrootten geldt:

$$\frac{C_1 \int_0^q dy \int_0^{x+y} \frac{(x+y-z)}{\alpha} fo(z;\alpha)dz - C_2 \int_0^q dy \int_{x+y}^{\infty} \frac{(x+y-z)}{\alpha} fo(z;\alpha)dz + Q(q)}{q} \tag{107}$$

waarbij $fo(z;\alpha)$ de kansdichtheid van de vraag tijdens de levertijd voorstelt.

Na enig rekenen vindt men, dat de optimale waarden van x^* en q^* voor de discrete kansverdeling moeten voldoen aan de volgende ongelijkheden:

$$\frac{1}{q^*} \sum_{l=1}^{q^*} \sum_{i=x^*+l+1}^{\infty} p_0(i;\alpha) \leqslant \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{108}$$

$$\frac{1}{q^*} \sum_{l+1}^{q^*} \sum_{i=x^*+l}^{\infty} p_0(i;\alpha) \geqslant \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{109}$$

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q^*+1) - b(q^*) - \frac{C_0}{q^*(q^*+1)} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha q^*(q^*+1)} \sum_{j=1}^{q^*} \sum_{l=x^*+j+1}^{\infty} p_0(l;\alpha) \geqslant 0 \tag{110}$$

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q^*) - b(q^*-1) - \frac{C_0}{q^*(q^*-1)} - \frac{(C_1+C_2)}{q^*(q^*+1)} \sum_{j=1}^{q^*-1} \sum_{l=x^*+j+1}^{\infty} p_0(l;\alpha) \leq 0 \tag{111}$$

waarbij $Q(q) = qb(q) + C_0$.

Voor een continue verdeling van de aankoopgrootten vinden wij voor de optimale keus van q^* en x^* de relaties:

$$\frac{1}{q^*}\int_0^{q^*} dy \int_{x^*+y}^{\infty} fo(z;\alpha)dz = \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{112}$$

en

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha(q^*)^2}\int_0^{q^*} dy \int_{x^*+y}^{\infty} fo(z;\alpha)dz = 0 \; . \tag{113}$$

Inplaats van (112) en (113) mogen wij ook schrijven:

$$\frac{1}{q^*}\int_0^{q^*} F(x^*+y)\; dy = \frac{C_2}{C_1+C_2} \tag{114}$$

en

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha(q^*)^2}\int_0^{q^*}\left[1-F(x^*+y)\right] dy = 0 \; . \tag{115}$$

Vergelijken wij tenslotte (46) en (115) dan zien wij dat ten gevolge van de stochastische levertijd een extra term in (115) is bijgevoegd. Men zou ook kunnen zeggen de constante C_0 is vervangen door de grotere waarde $C_0 + \frac{(C_1+C_2)}{\alpha}\int_0^{q^*}\left[1-F(x^*+y)\right] dy$.

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze vervanging een verhoging van de optimale ordergrootte veroorzaakt. Immers naarmate de vaste kosten per order groter worden zal men minder vaak gaan bestellen en aangezien men toch uiteindelijk aan alle vraag moet voldoen zullen de bestelgrootten toenemen.

In het zesde voorbeeld zijn wij uitgegaan van de volgende veronderstellingen:

1. Er kan op ieder tijdstip worden besteld.
2. De levertijd van de order is stochastisch.
3. Er worden kortingen verleend bij grote orders.
4. Achterstand in aflevering wordt volledig opgeheven zodra de eerstvolgende order toereikend is.

8. Het zevende voorbeeld.

Ook in ons zevende voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip.

Om de gedachten te bepalen zullen wij wederom veronderstellen, dat wij voor een dealer de voorraad machine-onderdelen beheren.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs $Q(q)$ te betrekken bij de fabriek.

De voorraadkosten bedragen C_1 per eenheid en tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Indien wij niet in staat zijn aan de vraag te voldoen, dan moeten wij noodinkopen verrichten tegen de hogere prijs C_3 per eenheid. Deze goederen worden terstond afgeleverd, zodat wij steeds aan onze verplichtingen kunnen voldoen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel en wanneer moet er besteld worden opdat de verwachting van de kosten op de "lange duur" zo klein mogelijk wordt?"

Om op deze vraag te kunnen antwoorden zullen wij de totale kosten in ieder tijdsinterval splitsen en toewijzen aan de diverse bestellingen. Wij zullen hiertoe in gedachten steeds veronderstellen, dat de afgegeven order de laatste is en de zaak wordt gesloten zodra de laatste eenheid van deze order is verkocht. De kosten, welke wij nu aan een order toewijzen worden gevormd door die uitgaven, welke het gevolg zijn van het feit, dat niet de voorgaande order maar deze bestelling de laatste is.

In eerste instantie zullen wij uitgaan van de veronderstelling, dat de levertijd T constant is.

Stel X wederom gelijk aan de som van de aanwezige voorraad en de hoeveelheid in bestelling.

Indien elke keer een bestelling van de grootte q wordt afgegeven op een tijdstip, waarop $X=x_1$, dan **zullen als** $X_1 < q$ op dat moment alle orders zijn afgeleverd. Immers de grootheid X kan slechts waarden aannemen kleiner dan q wanneer de laatste order is afgeleverd.

Nu kunnen zich twee verschillende situaties voordoen:

1) Als $\underline{t}_{x_1} \leqslant T$ of, indien $\underline{y}$ de vraag tijdens de levertijd voorstelt, $\underline{y} \geqslant x_1$ dan zal de voorraad uitgeput zijn op het tijdstip van aflevering.
2) Als $\underline{t}_{x_1} > T$ of $\underline{y} < X_1$, dan is er nog voorraad op het moment van aflevering.

Is $\underline{t}_{x_1} \leqslant T$ dan zal de $1^{\underline{de}}$ eenheid van de order $\underline{t}_1$ tijdseenheden in voorraad zijn voordat hij wordt verkocht. De voorraadkosten bedragen dan:

$$C_1 \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l \qquad ; \qquad \underline{t}_{x_1} \leqslant T \ .$$

De noodinkoopkosten worden gegeven door

$$C_3(\underline{y}-x_1) \qquad ; \qquad \underline{t}_{x_1} \leqslant T \qquad \text{of} \qquad \underline{y} \geqslant x_1 \ .$$

Is daarentegen $\underline{t}_{x_1} > T$ dan zullen gedurende een tijdsperiode van $\underline{t}_{x_1} - T$ over de gehele order voorraadkosten dienen te worden betaald. Vervolgens zullen voor de $1^{\underline{de}}$ eenheid nog een $\underline{t}_1$ tijdseenheden lang voorraadkosten worden berekend. De totale voorraadkosten voor de situatie $\underline{t}_{x_1} > T$ worden dan gegeven door:

$$C_1 q_1(\underline{t}_{x_1} - T) + C_1 \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l \quad ; \quad \underline{t}_{x_1} > T \quad \text{of} \quad \underline{y} < x_1 \ .$$

Wij vinden dus voor de verwachting van de totale kosten $K(x_1 q)$ toe te wijzen aan een order

$$C_1 \mathcal{E} \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l + C_1 q_1 \int_T^{\infty} (t-T) dG(t|x_1) + C_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (1-x_1) p(j;\alpha;T) + Q(q_1) \tag{116}$$

of zoals uit (100) voor $i=0$ na enig rekenen volgt:

$$\frac{C_1 q_1}{\alpha} \sum_{j=0}^{x_1} (x_1 - j) p(j;\alpha;T) + \frac{1}{2} \frac{q_1(q_1+1)}{\alpha} C_1 + C_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1) p(j;\alpha;T) + Q(q_1) . \tag{117}$$

Om nu na te kunnen gaan voor welke waarden van x_1 en q de verwachting van de kosten op de "lange duur" minimaal zijn, voeren wij eerst het volgende gedachtenexperiment uit.

Stel dat de fabrikant bereid is goederen te leveren tegen een bedrag C_4 per eenheid en wel op een zodanige wijze dat wij altijd op tijd aan de vraag kunnen voldoen en toch geen voorraadkosten hebben. Hij bouwt bijv. een groot magazijn naast het onze en eist van ons, dat wij alleen goederen zullen verkopen uit zijn magazijn. Beschouwen wij nu een periode, welke eindigt met de verkoop van de laatste eenheid van de $m^{\underline{de}}$ order, dan wordt de verwachting van de kosten voor deze m orders gegeven door $m\,K(x_1 q)$. Indien wij ingaan op het voorstel van de fabrikant, dan bedraagt de verwachting van de kosten voor die periode

$$m \left\{ q + \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1) p(j;\alpha;T) \right\} C_4 \ .$$

Het voorstel is dus gunstig als geldt:

$$m\, K(x_1;q_1) \geqslant m \left\{ q + \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha;T) \right\} C_4 \tag{118}$$

of

$$\frac{K(x_1;q_1)}{q + \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha;T)} \geqslant C_4 . \tag{119}$$

Uit deze redenering volgt dat wij slechts dan op het voorstel van de fabrikant zullen ingaan als geldt:

$$\min_{x,q} \frac{\frac{C_1 q}{\alpha} \sum_{j=0}^{x_1} (x_1-y)p(j;\alpha;T) + \frac{1}{2}\,\frac{q(q+1)}{\alpha} C_1 + C_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha;T) + Q(q)}{q + \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha;T)} \geqslant C_4 . \tag{120}$$

M.a.w. de optimale keuze van x_1 en q wordt dus gevonden door het linkerlid van (120) te minimaliseren naar q en x_1.

Tot dusver hebben wij verondersteld, dat de levertijd constant is. Zonder erg veel moeite kan men aantonen, dat bij een stochastische levertijd men de uitdrukking:

$$\frac{\frac{C_1 q}{\alpha} \sum_{j=0}^{x_1} (x_1-j)p_0(j;\alpha) + \frac{1}{2}\,\frac{q(q+1)}{\alpha} C_1 + Q(q) + C_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p_0(j;\alpha)}{q} \tag{121}$$

moet minimaliseren naar q en x_1, waarbij $p_0(j;\alpha)$ de kans aangeeft op een vraag van de grootte j tijdens de levertijd.

Verder werd aangenomen, dat steeds slechts één eenheid wordt gevraagd door de klant. Indien niet aan deze veronderstelling wordt voldaan en de verlangde hoeveelheid een trekking is uit een continue verdeling, dan dient men de uitdrukking

$$K(x_1 q) = \frac{\frac{C_1 q}{\alpha} \int_0^{x_1} (x_1-z)f_0(z;\alpha)dz + \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\alpha} C_1 + Q(q) + C_3 \int_x^{\infty} (z-x_1)f_0(z;\alpha)dz}{q + \int_{x_1}^{\infty} (z-x_1)f_0(z;\alpha)dz} \tag{122}$$

te minimaliseren naar q en x_1, waarbij $f_0(z;\alpha)$ de kansdichtheid is van de vraag tijdens de levertijd. Voor de optimale waarden x_1^* en q^* moet gelden:

$$\left(\frac{\partial K(x_1 q)}{\partial x_1}\right)_{x=x_1^*;\,q=q^*} = 0 \tag{123}$$

$$\left(\frac{\partial K(x_1 q)}{\partial q}\right)_{x=x_1^*;\, q=q^*} = 0 \ . \tag{124}$$

De uitdrukking (123) is gelijkwaardig met

$$P\left[z \geqslant x_1^* \right] = \frac{C_1 \dfrac{q^x}{\alpha}}{C_3 + \dfrac{C_1 q^*}{\alpha} - K(x_1^*; q^*)} \ . \tag{125}$$

De optimale kans op noodinkoop moet dus gelijk zijn aan het rechterlid van (125).

Indien wij voor $Q(q)$ schrijven $qb(q) + C_0$ dan correspondeert met (124):

$$\tfrac{1}{2} \frac{C_1}{\alpha} + b^3(q) - \frac{C_0}{q^2} - \frac{\left[C_3 - K(x_1^* q)\right]}{q^2} \int_{x_1^*}^{\infty} (z-x_1^*) \, f_0 \, (z;\alpha) \, dz = 0 \ . \tag{126}$$

Vergelijken wij (126) met (46) dan zien wij dat tengevolge van de stochastische levertijd een extra term in (126) is bijgevoegd. Volgens dezelfde argumenten als beschreven op pagina 234 leidt de invoering van een levertijd tot een verhoging van de optimale ordergrootte.

In het laatste voorbeeld zijn wij uitgegaan van de volgende veronderstellingen:

1. Er kan op ieder tijdstip besteld worden.
2. De levertijd van de order is stochastisch.
3. Er worden kortingen verleend bij grote orders.
4. Als de voorraad uitgeput is, worden noodinkopen verricht.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Rapport S 166(C9)

"Operations Research"

Hoofdstuk IV: Over de speltheorie

door

J. Kriens

3e druk

januari 1960

Het is niet mogelijk de theorie van de strategische spelen in kort bestek volledig te behandelen. Wij zullen ons daarom beperken tot het invoeren van de voornaamste begrippen en het geven van enkele belangrijke stellingen en aanwijzingen van de gebieden waar deze wellicht toegepast kunnen worden.

Literatuur

Twee goede elementaire artikelen, waarin de grondgedachten van deze theorie uiteengezet worden, zijn besprekingen van het boek van A. WALD: Statistical Decision Functions, nl.:

J.L. SAVAGE, The theory of Statistical Decisions, J.A.S.A. 46 (1951) 55-67,[1]

en D. VAN DANTZIG, De natuur als tegenspeler, Statistica 5 (1951) 149-159.

Over de speltheorie zijn na het boek van J. VON NEUMANN en O. MORGENSTERN (1944), Theory of Games and Economic Behavior (2^e druk 1947) nog verschillende andere werken verschenen. Een zeer goede inleiding is van J.C.C. Mc KINSEY (1952), Introduction to the Theory of Games. Verder zijn er twee boeken, waarin met eenvoudige voorbeeldjes duidelijk wordt gemaakt in welke situaties men de speltheorie kan gebruiken. Het zijn:

J. Mc DONALD (1950), Strategy in Poker, Business and War,

J.D. WILLIAMS (1954), The Compleat Strategyst.

Verder noemen wij nog: R.D. LUCE and H. RAIFFA (1957), Games and Decisions, introduction and critical survey. In dit boek worden de grondbegrippen van de speltheorie en de toepasbaarheid van de speltheorie in de sociale wetenschappen zorgvuldig onderzocht. Het gebruik van wiskunde is zoveel mogelijk beperkt.

Tenslotte herinneren wij aan het in Hoofdstuk II reeds genoemde boekje van S. VAJDA (1956), Theory of Games and Linear Programming, dat eveneens in wiskundig opzicht geen hoge eisen stelt.

1. Enkele begrippen uit de speltheorie

Naast de zuivere kansspelen, bestaan er spelen, waarin de spelers zelf invloed uit kunnen oefenen op het resultaat, zoals bridge en het schaakspel. Dit type spelen noemt men strategische spelen. Zij bezitten een grote overeenkomst met allerlei situaties uit het dagelijks leven, waarin twee of meer partijen met elkaar in conflict zijn.

Een zeer eenvoudig strategisch spel is het spel, waarin twee

---

1) De door SAVAGE genoemde minimaxregret methode kan zeer ernstig worden becritiseerd.

personen onafhankelijk van elkaar een getal aangeven en waarin het van de combinatie van deze getallen afhangt hoeveel de één de ander moet betalen. Bij iedere combinatie van getallen is de som van de bedragen die beide spelers ontvangen dus nul; een spel waarvoor deze eigenschap geldt en waaraan, zoals in dit geval twee personen deelnemen is een <u>twee personen nulspel</u>. Laten wij aannemen dat de ene speler (I) kan kiezen uit de getallen 1, 2 en 3 en de andere (II) uit de getallen 1, 2, 3 en 4. Tabel I geeft aan hoeveel guldens II na afloop aan I moet betalen. Wijst I dus het getal 2 aan en II het getal 3, dan ontvangt I na afloop ƒ 1.--; wijst I echter eveneens het getal 3 aan, dan ontvangt hij -ƒ 1.--, m.a.w. hij moet II ƒ 1.-- betalen; enz.

<u>Tabel I</u>

<u>De winstfunctie</u>

I \ II	1	2	3	4
1	3	5	0	-5
2	4	2	1	2
3	2	0	-1	3

Iedere speelwijze die I of II kan kiezen, noemen wij een <u>strategie</u>. Wij geven de strategieën aan met x voor I en met y voor II; in het voorbeeld kan x dus de waarden 1, 2 en 3 aannemen en y de waarden 1, 2, 3 en 4. De functie die aangeeft hoeveel II na afloop aan I moet betalen noemen wij de <u>winstfunctie</u>; de notatie is M(x,y), zo is M(1,4)=-5. Een spel, waarin beide spelers slechts uit eindig veel strategieën kunnen kiezen, is een <u>eindig of rechthoekig spel</u>.

De vraag rijst nu of het mogelijk is redelijke strategieën te vinden voor de deelnemers.

Wanneer I strategie 1 speelt, zal hij, afhangend van de keuze welke II doet 3, 5, 0 of -5 ontvangen. De slechtste uitkomst is dan voor I: -5. Als hij het getal 2 kiest, is de slechtste uitkomst +1 en als hij het getal 3 kiest -2. Nu zal I besluiten die strategie te nemen, waarbij het bedrag dat hij minimaal ontvangt zo groot mogelijk is; hij moet dan het getal 2 aanwijzen. In het algemeen kan men deze strategie vinden door eerst voor iedere waarde van x het minimum van M(x,y) te berekenen en vervolgens te bepalen voor welke waarde van x de functie $\min_y M(x,y)$ maximaal is.

Daarentegen zal II zich wellicht op het standpunt stellen, dat hij het bedrag dat hij hoogstens moet betalen, zo klein mogelijk moet trachten te maken. Hij berekent dan voor ieder van de getallen 1, 2, 3 en 4 de maxima van de eventueel te betalen bedragen en kiest dan die strategie, waarvoor dit maximum minimaal is, met andere woorden hij kiest die strategie, waarvoor $\max_x M(x,y)$ minimaal is. In ons geval is $\max_x M(x,1) = 4$, $\max_x M(x,2) = 5$, $\max_x M(x,3) = 1$ en $\max_x M(x,4) = 3$; het minimum over y is dus 1 en het wordt bereikt voor y=3. Men noemt deze methode, waarbij men het maximaal mogelijke verlies minimaliseert de <u>minimaxmethode</u>.

In het voorbeeld is $\max_x \min_y M(x,y)=1$ en $\min_y \max_x M(x,y)=1$. Speler I kan er dus voor zorgen, dat hij minstens f 1.-- ontvangt en speler II kan er voor zorgen, dat I niet meer dan f 1.-- krijgt. Er kan dus geen strategie voor I bestaan, die hem een hogere winst garandeert dan f 1.--, zodat dus iedere strategie die de mogelijkheid geeft op een winst groter dan f 1.-- ook de mogelijkheid van een kleinere winst inhoudt. Voor II gelden soortgelijke overwegingen en men kan daarom zeggen dat de strategieën 2 voor I en 3 voor II in dit opzicht optimaal zijn.

Voor spelen, waarvan de winstfunctie M(x,y) de eigenschap bezit, dat

$$\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y) \qquad (1)$$

is, kan men op de aangegeven wijze dus redelijke strategieën voor de spelers construeren. Wij noemen de corresponderende strategieën <u>de optimale strategieën</u> van I en II.

2. Het kruis of munt-spel

Dat niet alle winstfuncties aan de relatie (1) voldoen kunnen wij illustreren aan de hand van het kruis of munt-spel. De spelers leggen hierin onafhankelijk van elkaar een munt op tafel. Blijken beide munten met dezelfde kant boven te liggen, dan ontvangt I f1.- van II, terwijl in het andere geval II f 1.-- van I ontvangt. Beide spelers kunnen in dit spel uit twee strategieën kiezen, nl. kruis of munt bovenleggen. De winstfunctie is vermeld in tabel II.

Tabel II

Winstfunctie in het kruis of munt-spel

I \ II	K	M
K	1	-1
M	-1	1

In dit spel is $\max_x \min_y M(x,y) = -1$ en $\min_y \max_x M(x,y) = +1$ en er geldt dus: $\max_x \min_y M(x,y) < \min_y \max_x M(x,y)$.

Wij bewijzen nu de volgende stelling:

Stelling 1:

Zijn X en Y twee gegeven verzamelingen, zij $f(x,y)$ gedefinieerd voor $x \in X$ en $y \in Y$ en bestaan $\max_x \min_y f(x,y)$ en $\min_y \max_x f(x,y)$, dan is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leq \min_y \max_x f(x,y) \qquad (2)$$

Bewijs:

Voor iedere x uit X en iedere y uit Y geldt

$$\min_y f(x,y) \leq f(x,y) \leq \max_x f(x,y) \qquad (3)$$

Vergelijken wij nu $\min_y f(x,y)$ en $\max_x f(x,y)$, dan zien wij, dat in

$$\min_y f(x,y) \leq \max_x f(x,y) \qquad (4)$$

het linkerlid onafhankelijk is van y en het rechterlid onafhankelijk van x. Bovendien geldt (4) voor iedere waarde van x en iedere waarde van y. De ongelijkheid blijft daarom juist als wij het maximum over x en het minimum over y nemen en dus is

$$\max_x \min_y f(x,y) \leq \min_y \max_x f(x,y) \qquad (2)$$

Wij passen deze stelling toe op de winstfunctie $M(x,y)$. Wanneer wij $\max_x \min_y M(x,y)$ aangeven met λ_G en $\min_y \max_x (x,y)$ met ν_G, dan geldt dus voor ieder spel dat aan de in stelling 1 genoemde eisen voldoet

$$\lambda_G \leq \nu_G \qquad (5)$$

Dit wordt geïllustreerd in figuur 1; I kan er voor zorgen dat hij minstens λ_G ontvangt, II kan zijn strategie zo kiezen dat de winst van I in ieder geval kleiner is dan ν_G.

λ_G fig. 1 ν_G

Bedrag dat I ontvangt

In een geval zoals het voorbeeld in paragraaf 1, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, noemen wij dit bedrag de waarde van het spel. Wanneer inderdaad $\lambda_G < \nu_G$ is en het voor I dus niet vaststaat dat II hem kan beletten meer dan λ_G te winnen, is nog niet in te zien, dat de max min strategie voor I een redelijke strategie is. Hetzelfde geldt voor de min max strategie voor II. Voor dit type spelen hebben wij dus nog geen goede oplossing gevonden.

Een variatie op het kruis of munt-spel is het spel, waarin I eerst zijn munt moet neerleggen en II pas, nadat hij gezien heeft welke strategie I heeft gekozen. I kan weer kiezen uit twee strategieën, doch II heeft meer mogelijkheden gekregen, omdat hij zijn strategie kan laten afhangen van hetgeen I heeft gedaan. Geven wij kruis aan met K, munt met M en stelt (i,j) de strategie voor van II, waarbij hij i kiest als I kruis boven legt en j als I munt boven legt, dan kan II kiezen uit de strategieën: (K,K) , (K,M) , (M,K) en (M,M). Als er gelijke zijden boven komen te liggen ontvangt I *f* 1.-- van II en anders II *f* 1.-- van I. Tabel III bevat de winstfunctie van dit spel. Hier geldt wel $\max_x \min_y M(x,y) = \min_y \max_x M(x,y)$; de waarde van het spel is -1.

Tabel III

Winstfunctie in het kruis of munt-spel met spionneren

I \ II	(K,K)	(K,M)	(M,K)	(M,M)
K	1	1	-1	-1
M	-1	1	-1	1

In vergelijking met het gewone kruis of munt-spel is de situatie voor I slechter geworden, want II kan zó spelen, dat I steeds *f* 1.-- aan II moet betalen. Dit komt uiteraard doordat II volledig is ingelicht over hetgeen I heeft gedaan. Doch ook in het kruis of munt-spel zonder spionneren loopt I het risico, dat II in een reeks van spelen de speelwijze, die I toepast, doorziet en dan kan II steeds zijn winst maximaal maken door het tegenovergestelde te doen van wat I speelt. Hetzelfde risico loopt ook de tweede speler. Het is daarom voor beide spelers van belang hun strategie voor de ander te verbergen. Zij kunnen dit doen door in achtereenvolgende spelen op niet systematische wijze K of M boven te leggen. Een hulpmiddel hiertoe is een kansmechanisme, dat voor ieder afzonderlijk spel met een bepaalde kans aangeeft of K, dan wel M gespeeld moet worden. De spelers kiezen dan niet meer een strategie voor ieder afzonderlijk spel, doch zij kiezen de kansverdeling, volgens welke de strategie in een bepaald spel wordt aangewezen.

Alvorens hier dieper op in te gaan, zullen wij dit principe uitwerken voor het kruis of munt-spel. Stel dat I een zodanig kansmechanisme kiest, dat de strategie K met kans α optreedt, de strategie M dus met kans $1-\alpha$ en dat II een kansmechanisme kiest, zodanig dat de strategie K met kans β en de strategie M dus met kans $1-\beta$ optreedt. Aangezien I en II de strategieën onafhankelijk van elkaar kiezen bedraagt de kans dat beide K kiezen $\alpha\beta$, de kans dat I K en II M kiest $\alpha(1-\beta)$, de kans dat I M en II K kiest $(1-\alpha)\beta$ en de kans dat beide M kiezen $(1-\alpha)(1-\beta)$. Als de winstfunctie per spel de in tabel II vermelde is, dan is de winstverwachting voor I dus

$$\mathcal{H}(\alpha,\beta) = \alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\alpha) \tag{6}$$

Ook in dit spel kan I nagaan hoe groot de winstverwachting is, die hij minimaal heeft voor een bepaalde α en dan α zodanig kiezen dat deze minimale winstverwachting maximaal is. Hij moet dan berekenen voor welke waarde van α de functie $\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ het maximum bereikt. Nu is

$$\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta) = \min_{\beta}\left[1-2\alpha+2\beta(2\alpha-1)\right] = \begin{cases} 2\alpha-1 & \text{voor } 2\alpha-1\leq 0 \\ 1-2\alpha & \text{voor } 2\alpha-1\geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

en dus is

$$\max_{\alpha}\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta)=0 \tag{8}$$

een maximum dat bereikt wordt voor $\alpha=\frac{1}{2}$ (vgl. fig. 2a).

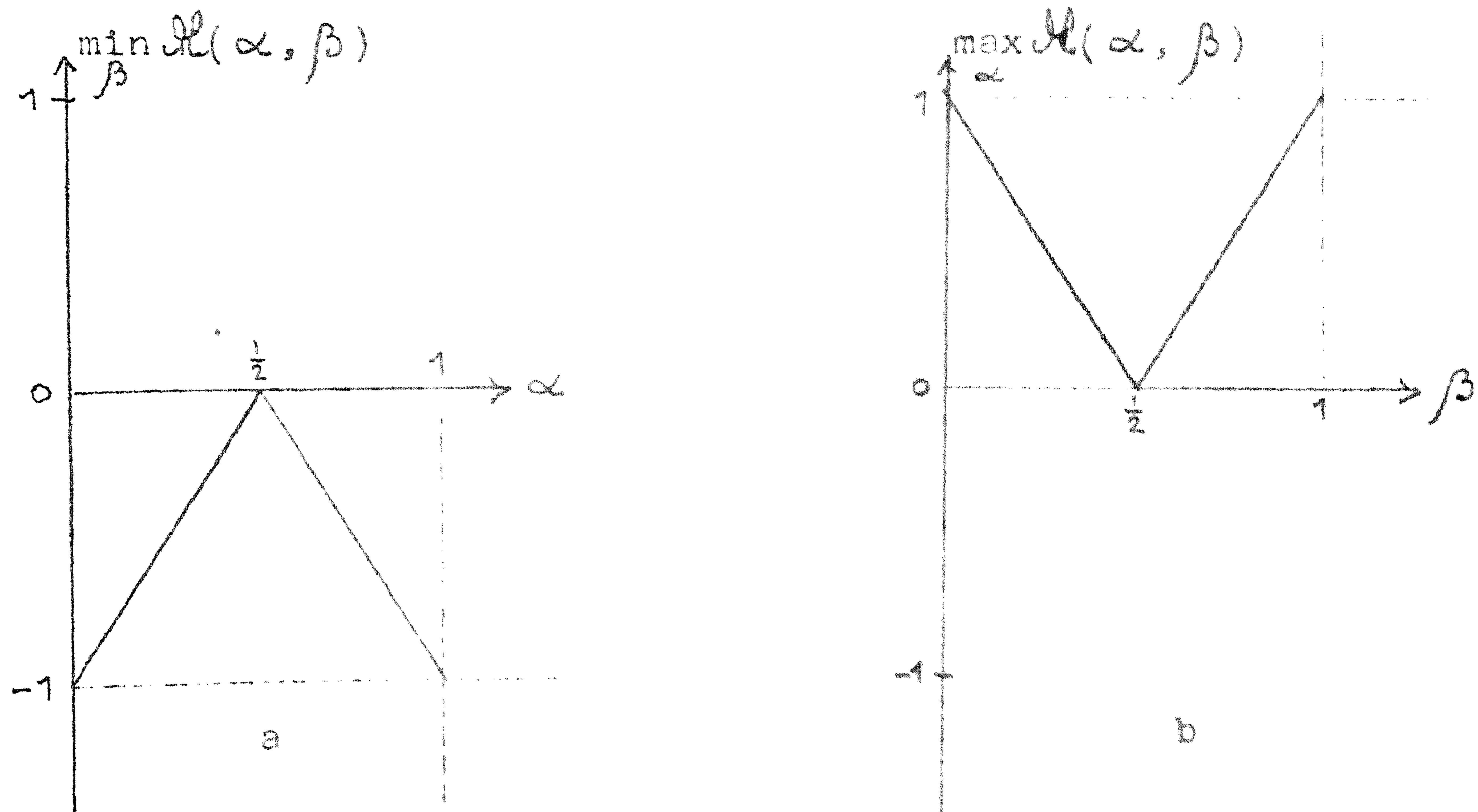


fig. 2

De functies $\min_{\beta}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ en $\max_{\alpha}\mathcal{H}(\alpha,\beta)$

Evenzo zal II eerst $\max_{\alpha} \mathcal{H}(\alpha, \beta)$ bepalen en vervolgens β zodanig kiezen dat deze functie maximaal is. Uit

$$\max_{\alpha} \mathcal{H}(\alpha, \beta) = \max_{\alpha} \left[1-2\beta+2\alpha(2\beta-1)\right] = \begin{cases} 1-2\beta & \text{voor } 2\beta-1 \leq 0 \\ 2\beta-1 & \text{voor } 2\beta-1 \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

volgt $\min_{\beta} \max_{\alpha} \mathcal{H}(\alpha, \beta) = 0$ (vgl. fig. 2b). Voor dit nieuwe spel waarin de spelers via een kansmechanisme bepalen welke van de strategieën K of M zij in een bepaald spel spelen, geldt dus dat $\max_{\alpha} \min_{\beta} \mathcal{H}(\alpha, \beta) = \min \max \mathcal{H}(\alpha, \beta)$ is.

De strategieën β en α van dit nieuwe spel worden gemengde strategieën genoemd van het oude kruis of munt-spel, omdat zij, tenzij α en β nul of één zijn, ertoe leiden dat de spelers soms K, soms M spelen. Door zo'n gemengde strategie toe te passen kan I de winstverwachting die hij in ieder geval kan bereiken, verhogen van -1 tot 0; II kan door het toepassen van een gemengde strategie beletten dat de winstverwachting van I groter is dan nul. Hieruit volgt dat iedere gemengde strategie van I, die de mogelijkheid opent tot een winst, die gemiddeld groter is dan 0, ook de mogelijkheid inhoudt van een winst die gemiddeld lager is dan nul. Zo kan de winstverwachting van I positief zijn als I in gemiddeld een derde deel van het aantal spelen K speelt ($\alpha = 1/3$), doch ook negatief; dit zal afhangen van de waarde van β die II kiest. Wij kunnen daarom zeggen dat de gemengde strategie $\alpha = \frac{1}{2}$ voor I optimaal is. Op geheel analoge gronden kunnen wij de strategie $\beta = \frac{1}{2}$ optimaal noemen voor II.

3. De hoofdstelling van de speltheorie

Wij zullen in deze paragraaf voor willekeurige twee personen nulspelen onderzoeken wat de consequenties zijn van het invoeren van gemengde strategieën.

Daartoe nemen wij aan dat X de verzameling van strategieën is waaruit I kan kiezen. Een element hieruit geven wij aan met x. Een gemengde strategie ξ voor I is een kansverdeling op de verzameling X. Evenzo is een gemengde strategie voor II een kansverdeling η op op de ruimte Y van strategieën, waaruit II kan kiezen. Voorlopig nemen wij aan dat X en Y slechts eindig veel elementen bevatten. De kans waarmee het element x gekozen wordt kunnen wij dan aangeven met $\xi(x)$ en de kans waarmee het element y gekozen wordt met $\eta(y)$. Moet II, wanneer I x en II y kiest het bedrag M(x,y) aan I betalen, dan is de winstverwachting voor I, wanneer I de gemengde strategie ξ en II de gemengde strategie η speelt, gelijk aan

$$\mathcal{H}(\xi,\eta) = \sum_x \sum_y M(x,y)\xi(x)\eta(y) \tag{10}$$

De spelers kunnen nu de te kiezen gemengde strategie bepalen op dezelfde wijze als in de voorafgaande voorbeelden. De eerste speler zal dan voor iedere gemengde strategie ξ bepalen hoe groot het minimum van de winstverwachting is en dan die ξ kiezen, waarvoor $\min \mathcal{H}(\xi,\eta)$ het maximum bereikt. Hij berekent dus de grootheid

$$\lambda_\Gamma = \max_\xi \min_\eta \mathcal{H}(\xi,\eta) \tag{11}$$

en kiest die ξ, waarvoor λ_Γ wordt bereikt [2].
Evenzo kan II die η kiezen, waarvoor het maximum over ξ minimaal is; de bijbehorende winstverwachting van I is dan

$$\nu_\Gamma = \min_\eta \max_\xi \mathcal{H}(\xi,\eta) \tag{12}$$

Wij gaan nu na wat het verband is tussen λ_G, ν_G, λ_Γ en ν_Γ. Daartoe voeren wij nog een nieuwe notatie in. Speler I kan voor ξ de kansverdeling kiezen, die met kans één de strategie x_o aanwijst en de andere strategieën dus met kans nul. De winstverwachting bedraagt dan $\sum_x \sum_y M(x,y)\xi(x)\eta(y) = \sum_y M(x_o,y)\eta(y)$, waarvoor wij schrijven $\mathcal{H}(x_o,\eta)$. Voor de winstverwachting die correspondeert met een willekeurige kansverdeling ξ voor I en de kansverdeling, die met kans één strategie y_o aanwijst voor II, schrijven wij $\mathcal{H}(\xi,y_o) = \sum_x M(x,y_o)\xi(x)$.

Wij bewijzen de volgende stelling:

<u>Stelling 2</u>:

Bevatten de verzamelingen X en Y van mogelijke strategieën voor I, respectievelijk II eindig veel elementen, dan is

$$\min_\eta \mathcal{H}(\xi,\eta) = \min_y \mathcal{H}(\xi,y) \quad \text{en} \quad \lambda_G \leq \lambda_\Gamma \tag{13}$$

en

$$\max_\xi \mathcal{H}(\xi,\eta) = \max_x \mathcal{H}(x,\eta) \quad \text{en} \quad \nu_G \geq \nu_\Gamma \tag{14}$$

<u>Bewijs</u>:

Voor iedere ξ en η is

$$\mathcal{H}(\xi,\eta) = \sum_y \mathcal{H}(\xi,y)\eta(y) \geq \min_y \mathcal{H}(\xi,y) .$$

Omdat deze betrekking voor iedere η geldt, is zij ook juist voor het minimum van $\mathcal{H}(\xi,\eta)$ over η en dus is

---

2) Omdat ξ en η kansverdelingen zijn op eindige verzamelingen worden alle extremen ook werkelijk bereikt.

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) \geq \min_{y} \mathcal{H}(\xi,y) \tag{15}$$

Onder de verzameling van alle mogelijke η's vallen ook die η's, die met kans 1 een bepaalde strategie y aanwijzen, waaruit voor iedere y volgt

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) \leq \mathcal{H}(\xi,y)$$

en dus

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) \leq \min_{y} \mathcal{H}(\xi,y) \ . \tag{16}$$

Uit de combinatie van (15) en (16) volgt

$$\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) = \min_{y} \mathcal{H}(\xi,y) \ ,$$

waarmee het eerste gedeelte van (13) is bewezen. Wanneer wij voor ξ de kansverdeling substitueren, die met kans 1 de strategie x aanwijst, dan vinden wij

$$\min_{y} M(x,y) = \min_{\eta} \mathcal{H}(x,\eta) \ .$$

Deze betrekking geldt voor iedere x en dus ook voor het maximum over x, zodat geldt

$$\max_{x} \min_{y} M(x,y) = \max_{x} \min_{\eta} \mathcal{H}(x,\eta) \ .$$

Het linker lid hierin is gelijk aan λ_G. Het rechter lid vergelijken wij met $\lambda_\Gamma = \max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta)$; λ_Γ is het maximum van $\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta)$ over alle verdelingsfuncties ξ op de verzameling X. Hieronder komen de verdelingen voor die met kans één een bepaalde x aanwijzen. Dit betekent dat voor λ_Γ de functie $\min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta)$ gemaximaliseerd wordt over een grotere klasse van verdelingsfuncties dan in $\max_{x} \min_{\eta} \mathcal{H}(x,\eta)$ en dus is $\lambda_G \leq \lambda_\Gamma$.

Het tweede deel van de stelling wordt op dezelfde manier bewezen.

Deze stelling zullen wij niet alleen nodig hebben voor het berekenen van optimale oplossingen, maar wij kunnen er ook het gezochte verband tussen λ_G, ν_G, λ_Γ en ν_Γ uit afleiden. De functie $\mathcal{H}(\xi,\eta)$ voldoet aan de voorwaarden genoemd in stelling 1 en dus is

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) \leq \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{H}(\xi,\eta)$$

of

$$\lambda_\Gamma \leq \nu_\Gamma$$

Samen met stelling 2 volgt hieruit de betrekking

$$\lambda_G \leq \lambda_\Gamma \leq \nu_\Gamma \leq \nu_G \ . \tag{17}$$

Hieruit blijkt dat de verwachting van de winst die I in ieder geval kan bereiken door het toepassen van gemengde strategieën wel hoger, maar nooit lager kan worden. Evenzo kan II met behulp van gemengde strategieën beletten, dat de verwachting van de winst die I kan bereiken groter is dan ν_Γ, een bedrag dat kleiner of gelijk is aan ν_G. Dat beide spelers hun situatie inderdaad kunnen verbeteren door gemengde strategieën toe te passen is reeds gebleken in het kruis of munt-spel in paragraaf 2. Ongelijkheid (17) leert ons bovendien dat voor gevallen, waarin $\lambda_G = \nu_G$ is, ook $\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma$ is.

Het introduceren van gemengde strategieën is nu daarom van veel belang omdat men de volgende stelling kan bewijzen.

Stelling 3:

In ieder eindig twee personen nulspel is

$$\lambda_\Gamma = \nu_\Gamma \tag{18}$$

en bezitten de spelers optimale strategieën.

Men noemt deze stelling de hoofdstelling van de speltheorie. Zij betekent dat de winstverwachting, waarvan I zich in ieder geval kan verzekeren gelijk is aan de verliesverwachting, die II hoogstens behoeft te accepteren. Op grond van deze stelling kunnen wij dus ook optimale oplossingen vinden voor eindige spelen, waarin $\lambda_G < \nu_G$ is. Het kruis of munt-spel van de vorige paragraaf is er een voorbeeld van.

Het bewijs van deze stelling vergt nogal wat voorbereiding en zal daarom achterwege worden gelaten. Duidelijke bewijzen zijn onder andere te vinden in de reeds genoemde boeken van Mc KINSEY en VAJDA.

Tot nu toe hebben wij ons beperkt tot spelen waarin X en Y beide slechts eindig veel elementen bevatten. Men kan echter ook spelen bedenken, waarin X en/of Y oneindig veel elementen bevatten. Zo zullen wij bij de toepassingen een voorbeeld geven waarin de strategieën van I en II de punten uit het interval $[0 - 1]$ zijn.

Onder bepaalde voorwaarden, die in praktijkproblemen vrijwel steeds vervuld zijn, gelden de stellingen 2 en 3 ook voor strategische spelen, waarin X en Y niet beide eindig veel elementen bevatten. Wij zullen dit niet nader onderzoeken; op de voorbeelden, die wij geven zullen beide stellingen van toepassing zijn.

4. Voorbeelden

1) Als eerste voorbeeld zullen wij ter illustratie van de theorie, behandeld in de vorige paragrafen de optimale strategieën berekenen van het spel, waarvan de winstfunctie opgegeven is in tabel IV. De keuze van een gemengde strategie ξ is voor de eerste speler de keuze van de kans α, waarmee in ieder spel strategie 1 wordt gekozen.

Tabel IV

De winstfunctie

I \ II	1	2	3	4
1	2	-2	-1	3
2	-2	4	0	-2

Voor de tweede speler is een gemengde strategie een kansverdeling η die voor ieder spel aangeeft met welke kans de strategieën 1, 2, 3 en 4 worden gekozen. Zij $\mathcal{M}(\xi,\eta)$ weer de winstverwachting voor de eerste speler wanneer de strategieën ξ, respectievelijk η worden gebruikt, dan bestaat er volgens stelling 3 een waarde v, waarvoor geldt $v = \max_{\xi}\min_{\eta}\mathcal{M}(\xi,\eta) = \min_{\eta}\max_{\xi}\mathcal{M}(\xi,\eta)$. Doordat I uit slechts twee zuivere strategieën kan kiezen, kunnen wij $\max_{\xi}\min_{\eta}\mathcal{M}(\xi,\eta)$ grafisch bepalen. Volgens stelling 2 is

$$\min_{\eta}\mathcal{M}(\xi,\eta) = \min_{y}\mathcal{M}(\xi, y) = \min_{y}\left[M(1,y)\xi(1) + M(2,y)\xi(2)\right] =$$
$$= \min_{y}\left[M(1,y)\alpha + M(2,y)(1-\alpha)\right]. \tag{19}$$

De functie $M(1,y)\alpha + M(2,y)(1-\alpha)$ is voor

$y = 1$: $2\alpha - 2(1-\alpha) = 4\alpha - 2$

$y = 2$: $-2\alpha + 4(1-\alpha) = -6\alpha + 4$

$y = 3$: $-1\alpha + 0(1-\alpha) = -\alpha$

$y = 4$: $3\alpha - 2(1-\alpha) = 5\alpha - 2$.

In figuur 3 zijn deze rechten geschetst voor het relevante gebied: $0 \leq \alpha \leq 1$. De dik getrokken, gebroken lijn geeft voor iedere waarde van α het minimum over y aan. Het maximum over α hiervan wordt bereikt in het snijpunt van de rechten $\mathcal{M}(\alpha,1) = 4\alpha - 2$ en $\mathcal{M}(\alpha,3) = -\alpha$. De bijbehorende waarde van α volgt dus uit

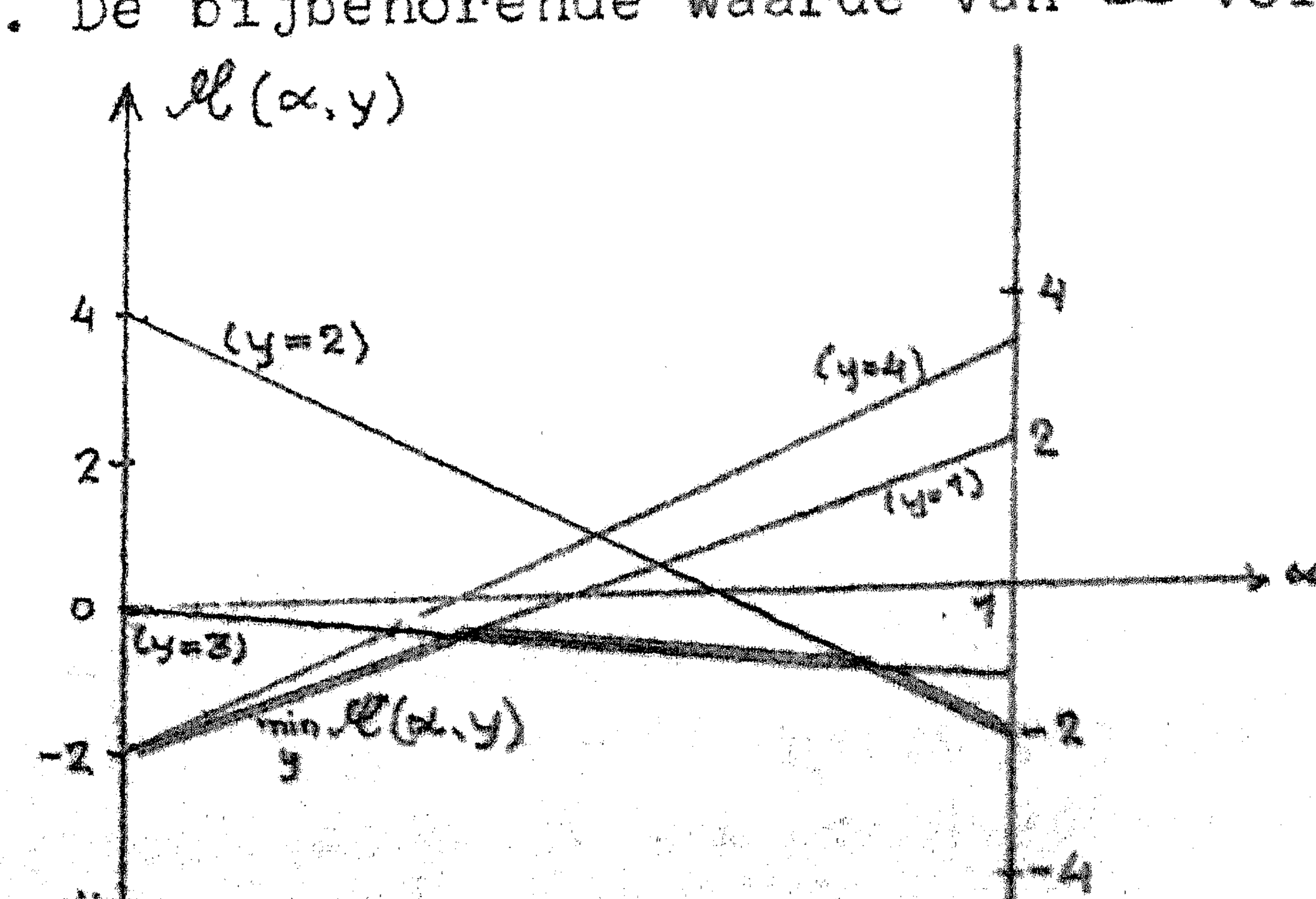


fig. 3

$\mathcal{M}(\alpha,y)$ voor y= 1,2,3,4.

(op de assen zijn verschillende schalen gebruikt)

$$4\alpha - 2 = -\alpha$$

en is dus

$$\alpha = \frac{2}{5};$$

voor $v = \max_{\alpha} \min_{\eta} \mathcal{H}(\alpha, \eta)$ vinden wij $v = -\frac{2}{5}$.

Ook de optimale strategie voor II is zonder moeite op te sporen. Immers voor iedere waarde van y is $\mathcal{H}(\frac{2}{5}, y) \geq -\frac{2}{5}(=v)$ en dus geldt voor de optimale strategie η^* van II

$$\mathcal{H}(\tfrac{2}{5}, \eta^*) = \sum_y \mathcal{H}(\tfrac{2}{5}, y) \cdot \eta^*(y) \geq -\tfrac{2}{5}.$$

Anderzijds is de waarde van het spel $-\frac{2}{5}$, d.w.z. $\mathcal{H}(\frac{2}{5}, \eta^*) = -\frac{2}{5}$, een bedrag dat slechts bereikt kan worden wanneer $\eta^*(y) = 0$ is voor iedere waarde van y, waarvoor $\mathcal{H}(\frac{2}{5}, y) > -\frac{2}{5}$ is. De optimale gemengde strategie voor II zal dus positieve waarschijnlijkheden toekennen aan de strategieën y=1 en y=3 en het oorspronkelijke spel kan daarom voor de berekening van η^* vervangen worden door het in tabel V aangegeven spel. Dit is een spel waarvoor de optimale strategie voor II op dezelfde wijze gevonden

Tabel V

Vereenvoudigde winstfunctie

I \ II	1	3
1	2	-1
2	-2	0

kan worden als in het kruis of munt-spel. Het resultaat is dan $\eta^*(1) = \frac{1}{5}$ en $\eta^*(3) = \frac{4}{5}$, zodat de optimale strategie van II in het in tabel IV vermelde spel is $\eta^*(1) = \frac{1}{5}$, $\eta^*(2) = 0$, $\eta^*(3) = \frac{4}{5}$ en $\eta^*(4) = 0$.

Deze grafische methode vormt alleen een eenvoudige oplossingsmethode wanneer één van de twee spelers uit twee zuivere strategieën kan kiezen. Uit de berekening blijkt ook nog dat in dergelijke spelen voor beide spelers een optimale strategie bestaat, die niet meer dan hoogstens twee strategieën met positieve kans aanwijst. Het is een bijzonder geval van de volgende algemene stelling, welke wij overigens niet bewijzen:

Stelling 4:

In ieder eindig spel, waarin I uit m en II uit n zuivere strategieën kan kiezen, bezit iedere speler een optimale gemengde strategie, die hoogstens min(m,n) zuivere strategieën met positieve kans aanwijst.

2) Situaties, waarin twee mensen of maatschappijen tegenover elkaar staan op analoge wijze als in een twee personen nulspel, doen zich voor bij reclamecampagnes. Deze situaties zijn o.a. bestudeerd door

L. GILLMAN, Operations Analysis and the Theory of Games: an advertising Example, J.A.S.A. 45 (1950) 541-545,

en E. BURGER, Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems, Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik 6 (1954) 39-52.

Beide schrijvers beschouwen het geval, waarin twee concurrenten zich bevinden, wanneer er op een bepaald ogenblik een nieuwe potentiële klant verschijnt. De één, Mr Big heeft een goed renderende zaak, de ander, Mr Little verkeert in een slechte financiële positie en moet, wil hij het hoofd boven water kunnen houden binnen een bepaalde tijd beslist een order van de nieuwe klant ontvangen. Mr Little zal dus zijn reclamecampagne zo inrichten dat zijn kans de nieuwe klant binnen die tijd te verwerven zo groot mogelijk is. Mr Big daarentegen overweegt, dat een faillissement van zijn concurrent de alleenheerschappij voor hem zal betekenen en dus zal hij de kans dat Mr Little succes heeft trachten te minimaliseren. Zij zijn dus beide geïnteresseerd in dezelfde gebeurtenis: het al of niet kopen van de klant bij Mr Little terwijl de belangen tegengesteld zijn. Hierbij is ondersteld dat het Mr Big niet interesseert of zijn reclamepolitiek tengevolge heeft dat de klant helemaal niet koopt.

Men kan deze situatie goed interpreteren als een strategisch spel en wel een twee personen nulspel. Voor het betreffende tijdsbestek kiezen de schrijvers het interval $[0-1]$. Verder nemen zij aan dat de weerstand tot kopen bij de klant, onafhankelijk van de aard van de reclamecampagnes, op bekende wijze afneemt in de tijd en dat de wederzijdse activiteit de kansen op succes van de ander niet beïnvloedt. Laat de kans op succes voor beide concurrenten gelijk zijn en gegeven worden door de functie $A(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

Wanneer nu beide verkopers besluiten de klant binnen de periode $[0-1]$ één keer een bezoek te brengen om hun waar aan te prijzen, dan zullen zij trachten de tijdstippen van bezoek, t_1 voor Mr Little en t_2 voor Mr Big, zo gunstig mogelijk te kiezen. Zo zal Mr Little aan de ene kant zijn bezoek zo laat mogelijk willen kiezen, daar dan $A(t)$ groter is, maar aan de andere kant weer niet zo laat, dat het risico dat Mr Big hem voor is geweest te groot wordt. De winstfunctie, die de kans aangeeft dat Little (speler I) de klant verwerft, hangt af van t_1 en t_2 en luidt:

$$M(t_1,t_2) = A(t_1) \quad \text{voor} \quad t_1 \leq t_2 \; ,$$

$$M(t_1,t_2) = (1-A(t_2)).A(t_1) \text{ voor } t_1 > t_2$$

Gemengde strategieën zijn voor beide spelers kansverdelingen op het interval [0-1] en men kan bewijzen dat er ook in dit voorbeeld strategieën ξ en η bestaan zodanig dat

$$\max_{\xi} \min_{\eta} \mathcal{H}(\xi,\eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} \mathcal{H}(\xi,\eta) .$$

Voor de berekening van deze strategieën verwijzen wij naar het artikel van E. BURGER.

GILLMAN bestudeerde dit probleem voor het geval dat Mr Little zijn reclame wel beperkt tot één enkel tijdstip, doch Mr Big zijn campagne uitstrekt over het gehele interval. Wanneer hij eerst vaststelt hoeveel hij zal besteden, moet hij beslissen op welke wijze dit bedrag over het interval [0-1] verdeeld moet worden. Ook betreffende de andere voorwaarden kan men andere, wellicht beter bij de praktijk aansluitende onderstellingen maken.

Opmerking: Indien men het probleem op de bovenstaande wijze formuleert, neemt de klant niet deel aan het spel. Deze benadering van het probleem is vaak gerechtvaardigd in gevallen waarin de klant uiteindelijk toch moet kopen. Als deze benadering niet gerechtvaardigd is, ontstaat een drie personenspel. Een uitvoerige discussie van een marktsituatie, verwant aan de bovenstaande, namelijk een markt waarop een verkoper een artikel bezit waarvoor twee kopers belangstelling hebben, kan men vinden in het boek "Games and Decisions" van R.D. LUCE en H. RAIFFA, blz. 206 e.v.

3) Hoewel de speltheorie vooral ontwikkeld is met de bedoeling economische conflictsituaties te onderzoeken, zijn de meeste toepassingen te vinden in de krijgswetenschappen. Een reeks artikelen hierover is gepubliceerd in Operations Research, het tijdschrift van de Operations Research Society of America. Zeer instructief is een artikel van O.G. HAYWOOD Jr, Military Decision and Game Theory, J.O.R.S.A. 2 (1954) 365-385.

De auteur vergelijkt hierin de wijze van beslissingen nemen bij militaire operaties, zoals deze is goedgekeurd door de (Amerikaanse) Gezamelijke Chefs van Staven met de oplossingsmethoden van de strategische speltheorie. In principe kan een bevelhebber de situatie analyseren en zijn beslissing nemen op grond van hetgeen de tegenstander in staat is te doen, of op grond van hetgeen hij vermoedt dat de tegenstander zal gaan doen. De eerste is de officiëel goedgekeurde methode, aangezien de bevelhebber volgens de instructies die acties moet uitvoeren, welke gezien de mogelijkheden waarover de vijand beschikt de grootste beloften tot succes geven. De geïnstrueerde analyse-methode bestaat uit vijf stappen en staat bekend onder de naam "Estimate of the Situation". Aan de hand van twee voorbeelden, ontleend aan de Tweede Wereldoorlog laat de schrijver zien dat bij de "Estimate of the Situation" en bij de speltheorie dezelfde overwegingen gebruikt worden. De speltheorie leidt in deze gevallen dan ook tot dezelfde beslissingen als de door de bevelhebbers genomen besluiten. In situaties waarin beide methoden inderdaad dezelfde overwegingen gebruiken is de speltheorie superieur, aangezien deze in tegenstelling tot de andere methode een procédé aangeeft om de optimale oplossing te berekenen.

Ter illustratie zullen wij het eenvoudigste voorbeeld hier in het kort behandelen. Het betreft de slag in de Bismarckzee. Een Japanse transportvloot moest in februari 1943 varen van Rabaul op New Britain naar Lae op Nieuw Guinea en kon hiervoor gebruik maken van de route ten Noorden van New Britain en de route ten Zuiden van het eiland. Beide zeewegen namen drie dagen varen in beslag. De bevelhebber van de Geallieerde luchtmacht in het Zuid-Westen van de Grote Oceaan had de opdracht zoveel mogelijk schepen te vernietigen. Hiertoe moest uiteraard de transportvloot eerst worden opgespoord. Verder was bekend dat het zicht op de noordelijke route slecht was wegens regen. De Geallieerde bevelhebber beschouwde nu twee mogelijkheden: concentratie van het grootste gedeelte van zijn verkenningsvliegtuigen op de noordelijke route en slechts weinig op de zuidelijke, en juist andersom. Afhankelijk van de tijd, nodig om de vijandelijke vloot te ontdekken kon men bepalen hoeveel dagen er beschikbaar waren om de transportvloot te bombarderen. Dit aantal is voor de verschillende gevallen opgegeven in tabel VI. Wij beschouwen deze tabel als de winstfunctie van een twee personen nulspel,

Tabel VI

Winstfunctie bij de slag op de Bismarckzee

Japanners / Amerikanen	noordelijke route	zuidelijke route
noordelijke route	2	2
zuidelijke route	1	3

waarin beide spelers twee strategieën ter beschikking hebben. Men ziet direct dat de waarde van het spel twee is en dat beide partijen een zuivere optimale strategie bezitten, namelijk de noordelijke route, die ook in werkelijkheid door beide is gekozen.

Naar aanleiding van het tweede voorbeeld, de slag bij Avranches in Frankrijk, behandelt HAYWOOD de betekenis van gemengde strategie-en. Ook de verhouding van het nemen van beslissingen op grond van de "Estimate of the Situation" tot het handelen op grond van de vermoede plannen van de tegenstander komt ter sprake.

4) Als laatste vorm van toepassing noemen wij de zogenaamde statistische spelen ("statistical games"), dat zijn spelen waarin de natuur optreedt als "tegenspeler" van de statisticus. Weliswaar kan de natuur niet beschouwd worden als een tegenspeler die de statisticus zoveel mogelijk afbreuk tracht te doen, maar toch verkrijgt men een beter inzicht in allerlei problemen wanneer men de situatie vergelijkt met die in een twee personen nulspel. Hierin laten wij de natuur de rol van de eerste en de statisticus die van de tweede speler vervullen.

De statisticus behoeft niet zonder enige informatie omtrent de toestand van zijn tegenspeler een beslissing te nemen. Als hij weet dat een bepaald kenmerk normaal verdeeld is, maar het gemiddelde en de spreiding van die verdeling niet kent, dan kan hij hierover informatie krijgen door het nemen van een steekproef. Wij beschouwen nu de mogelijke waarden van de onbekende parameters als de zuivere strategieën van de natuur. Deze verzameling wordt aangegeven met Ω en een bepaald element eruit met ω. In het zojuist genoemde geval van een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en onbekende spreiding σ, vormen alle grepen (μ,σ) de elementen van Ω. Is wel de spreiding bekend, maar niet μ, dan bestaat Ω uit alle reële getallen.

Het resultaat van de steekproef geven wij aan met de letter z en de verzameling van alle denkbare resultaten met Z. Met ieder element ω uit Ω correspondeert een bepaalde kansverdeling $p_\omega(z)$ op Z; zolang Z eindig of aftelbaar veel elementen bevat, geeft $p_\omega(z)$ dus de kans aan dat het resultaat z optreedt, wanneer de natuur de strategie ω speelt.

Laat de statisticus kunnen kiezen uit de beslissingen a_1, a_2, ...; samen vormen deze de verzameling A. Bijvoorbeeld kan A bestaan uit twee elementen, namelijk a_1, goedkeuren van een partij goederen en a_2, afkeuren van die partij. Naar aanleiding van het steekproefresultaat z kiest de statisticus een element uit A, m.a.w. aan ieder steekproefresultaat wordt een a_i toegevoegd en de statisticus kan nu bepalen hoe deze toevoeging zal geschieden. Hij kiest dus een functie d, welke bij ieder element z uit Z een bepaald element d(z) uit A aanwijst. Het is heel goed mogelijk dat de functie d voor verschillende elementen uit Z hetzelfde element uit A aanwijst. Een dergelijke functie noemt men een beslissingsfunctie. De verzameling van functies d waaruit de statisticus kan kiezen geven wij aan met D. In figuur 4 zijn de betrekkingen die tussen de ingevoerde grootheden bestaan, schematisch aangegeven.

$$\omega \in \Omega \longrightarrow \text{kansverdeling } p_\omega(z) \text{ op } Z$$
$$z \in Z \xrightarrow{d \in D} a \in A$$

figuur 4

Het verband tussen Ω, Z, D en A

Het verlies dat men lijdt indien ω juist is en de beslissing a wordt genomen, noemen wij $L(\omega,a)$, de verliesfunctie. In de plaats van $L(\omega,a)$ schrijft men ook wel $L(\omega,d(z))$ om het verband tussen het verlies en de gekozen beslissingsfunctie d tot uitdrukking te brengen. De verliesverwachting voor de statisticus bij de strategie ω van de natuur en de beslissingsfunctie d noemt men de risicofunctie $\rho(\omega,d)$; hiervoor geldt

$$\rho(\omega,d) = \sum_Z L(\omega,d(z)) \,.\, p_\omega(z) \quad . \tag{20}$$

Vergelijken wij nu dit spel tegen de natuur met het gewone strategische spel, dan zien wij dat de ruimte X vervangen is door de ruimte Ω van de onbekende parameterwaarden en de ruimte Y door de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit de statisticus kan kiezen. De functie $M(x,y)$ die de winst voor de eerste en dus het verlies voor de tweede speler aangeeft is overgegaan in de functie $\rho(\omega,d)$. Zowel Ω als D zijn dus ruimten van zuivere strategieën. Dat de functie $\rho(\omega,d)$ hier in tegenstelling tot $M(x,y)$ toch de vorm van een verwachting aanneemt, komt doordat een zuivere strategie van de natuur een kansverdeling voor het steekproefresultaat z vastlegt.

Ter illustratie van de ingevoerde begrippen geven wij het volgende voorbeeld. Men heeft een partij goederen, waarvan men door middel van een steekproef van de grootte N wil schatten, hoe groot de fractie defectieven is.

In dit voorbeeld bestaat Ω uit alle getallen tussen 0 en 1, de waarden die de onbekende fractie defectieven in de partij kan bezitten. Het aantal defectieven in de steekproef kan 0, 1, ..., N zijn en deze getallen vormen dus de verzameling Z. De kansverdeling $p_\omega(z)$ is

$$p_\omega(z) = \binom{N}{z} \omega^z \, (1-\omega)^{N-z} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leq \omega \leq 1 \\ z=0,1,\ldots,N \end{pmatrix} \tag{21}$$

De ruimte A bestaat uit het interval $0 \leq a \leq 1$, waarin a een schatting is voor de onbekende fractie ω . Een beslissingsfunctie die men kan kiezen is b.v.

$$d(z) = \frac{z}{N} \; ; \tag{22}$$

men neemt dan als schatting van de fractie defectieven in de partij de fractie, die men in de steekproef heeft gevonden. Een andere beslissingsfunctie, die men zou kunnen kiezen is

$$d_1(z) = \frac{z-1}{N} \qquad \text{voor } 1 \leq z \leq N \ ,$$

$$d_1(z) = 0 \qquad \text{voor } z = 0 \ .$$

Is bovendien gegeven dat het verlies, dat men lijdt evenredig is met het kwadraat van het verschil tussen de geschatte en de werkelijke fractie defectieven in de partij, dan is

$$L(\omega, a) = k(\omega - a)^2 \tag{23}$$

en de risicofunctie dus

$$\rho(\omega, d) = \sum_{z=0}^{N} L(\omega, d(z))\, p_\omega(z) = \sum_{z=0}^{N} k(\omega - \tfrac{z}{N})^2 . \binom{N}{z} \omega^z (1-\omega)^{N-z} =$$

$$= \sum_{z=0}^{N} \frac{k}{N^2} (z - \omega N)^2 \binom{N}{z} \omega^z (1-\omega)^{N-z} = \frac{k}{N^2} N \omega (1-\omega) = \frac{k\omega}{N} (1-\omega) .$$

<u>Opmerking</u>

Wij hebben hier bij het opstellen van de risicofunctie geen rekening gehouden met de kosten, die verbonden zijn aan het doen van experimenten. Dit is juist, wanneer de omvang van de steekproef van te voren vaststaat en de kosten onafhankelijk zijn van de uitkomsten der experimenten. In de meeste gevallen is aan deze voorwaarden echter niet voldaan en dan moeten ook deze kosten in de risicofunctie worden opgenomen.

Een gemengde strategie van de natuur is een kansverdeling op Ω; men noemt deze wel de a proori verdeling op de ruimte van mogelijke parameterwaarden. Een gemengde strategie voor de statisticus is een kansverdeling op de ruimte D van beslissingsfuncties, waaruit hij kan kiezen. Bij deze gemengde strategieën gaat de verliesverwachting van de statisticus over in

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{\omega} \sum_{d} \rho(\omega, d)\, \xi(\omega)\, \eta(d) \ , \tag{25}$$

waarin $\xi(\omega)$ de kans is, waarmee de natuur de strategie ω aanwijst en $\eta(d)$ de kans waarmee de statisticus de beslissingsfunctie d kiest.

Zodra de statisticus de functie $\rho(\xi, \eta)$ kent, zal hij zich afvragen, welke strategie η voor hem de beste is. Om dit te onderzoeken heeft hij een maatstaf nodig, d.w.z. een <u>criterium</u>, ten opzichte waarvan hij een optimale strategie kan kiezen.

Aangezien het gelukt is het probleem te gieten in de vorm van een strategisch spel, ligt het voor de hand eerst na te gaan of het <u>minimaxcriterium</u> een bevredigende oplossing geeft. In tegenstelling tot spelen waarin de belangen van de spelers diametraal tegenover elkaar staan, is dit criterium hier niet zo goed en kan het tot zeer merkwaardige consequenties leiden. Dit komt doordat men niet kan aannemen dat de natuur tracht de statisticus zoveel mogelijk afbreuk te doen, terwijl bij de minimaxstrategie de beslissing gebaseerd wordt op de meest ongunstige strategie van de natuur.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Stel dat een partij goederen aan de kwaliteitseisen voldoet wanneer de fractie defectieven $\leqslant \omega_0$ is en anders niet. De fabrikant keurt de partijen voordat ze worden afgeleverd. Hierbij zal hij weinig onjuiste beslissingen nemen bij zeer goede en zeer slechte partijen. De natuur kan het nu de fabrikant "moeilijk maken" door veel partijen te fabriceren, die een fractie defectieven bezitten, dicht bij ω_0. Bij de minimaxstrategie gaat de statisticus nu uit van een a priori verdeling ξ van de natuur waarbij vrijwel uitsluitend partijen met een fractie ω_0 aan defectieven worden gemaakt. In werkelijkheid beschikt men door ervaringen uit het verleden wel over enige voorkennis omtrent de a priori verdeling op Ω en doordat hiervan bij het minimaxcriterium geen gebruik wordt gemaakt, faalt dit criterium.

Een beslisssingscriterium, waarbij dit wel gebeurt is het <u>criterium van Bayes</u>. Hierbij gaat men er van uit dat de statisticus de kansverdeling ξ op Ω, die de natuur gebruikt volledig kent. Het risico van de statisticus, wanneer hij als strategie de kansverdeling η op D kiest is dan de verwachting van $\rho(\omega,\eta)$ ten opzichte van de kansverdeling ξ, dus

$$\rho(\xi,\eta) = \sum_{\omega} \rho(\omega,\eta)\,\xi(\omega) \tag{26}$$

Hij zal dan die zuivere of gemengde strategie η_0 kiezen, waarvoor de verwachting van $\rho(\xi,\eta)$ minimaal is. Men noemt η_0 de <u>Bayes-oplossing</u> met betrekking tot de a priori verdeling ξ.

Deze methode geeft een bevredigende oplossing wanneer de a priori verdeling inderdaad bekend is, zoals b.v. vaak het geval zal zijn in problemen van kwaliteitsbeheersing. Op welke wijze men uit waarnemingsmateriaal de momenten van een a priori verdeling kan schatten, wordt aangegeven in een artikel van Prof. Hemelrijk dat in Statistica Neerlandica zal verschijnen.

In gevallen waarin de a priori verdeling alleen het subjectieve oordeel van de statisticus beschrijft, hebben Bayes-oplossingen het bezwaar dat zij in dezelfde situatie tot geheel verschillende resultaten kunnen leiden, wanneer verschillende mensen deze situatie verschillend beoordelen. Men kan dan als statisticus alleen een uitspraak doen van de vorm: <u>indien</u> Uw beoordeling omtrent de a priori verdeling juist is, dan is deze η_0 de optimale beslissingsprocedure.

Behalve het minimax- en het Bayes-criterium zijn er nog andere beslissingscriteria voorgesteld. Een criterium dat in alle opzichten bevredigend is werd tot nu toe niet gevonden. Voor een verdere bespreking van dit probleem verwijzen wij naar het boek Games and Decision door R.D. LUCE and H. RAIFFA (1957), speciaal hoofdstuk XIII.

Het onderzoek naar de toepassingsmogelijkheden van de speltheorie is nog allerminst afgesloten. Voor het verband met en de toepassingen bij de statistische theorie en de statistische methoden verwijzen wij naar Theory of Games and Statistical Decisions door D. BLACKWELL en M.A. GIRSHICK (1954). Voor de toepassingsmogelijkheden in de sociale en economische wetenschappen zij nogmaals verwezen naar het boek van LUCE en RAIFFA.