STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk I

Inleiding tot de Statistiek en de Kansrekening

door

Prof. Dr J. Hemelrijk
en
J. Kriens

februari 1960

1. Inleiding.

Gaandeweg is de wiskunde als hulpwetenschap doorgedrongen in velerlei gebieden van wetenschap en practijk, gedeeltelijk is het ontstaan ervan zelfs direct aan bepaalde practische problemen verbonden. Meetkunde, algebra, analyse enz. worden als routine-middelen gehanteerd in de natuurkunde, sterrekunde, scheepvaartkunde, en waar al niet meer. In de regel - en tot voor betrekkelijk kort vrijwel steeds - wordt de wiskunde gebruikt om problemen van deterministische aard op te lossen. De elementaire natuurkunde b.v. houdt zich bezig met verschijnselen, die zich onder gelijke omstandigheden steeds op dezelfde wijze voordoen. Voor toepassing van wiskundige theorieën bedient men zich dan van een wiskundig model van dat (kleine) deel van de waarneembare werkelijkheid, dat men onderzoekt. Zo is een rechte lijn b.v. de model-voorstelling van de draad van een schietlood, van een muur of van een schrikdraad; men werkt met getalwaarden voor het gewicht of de lengte van een voorwerp, de grootte van een kracht, de lading van een electron, alsof deze begrippen ondubbelzinnig bepaald zijn en een exact bepaalbare grootte bezitten.

Dergelijke modellen leiden dan tot exact gedetermineerde uitkomsten, hetgeen in de practijk neerkomt op pertinente uitspraken en voorspellingen: "Op die dag zal van zo tot zo laat een zonsverduistering optreden", "de omtrek van de aard-aequator is 40.000 km", etc. Weliswaar bezitten deze uitspraken slechts een beperkte precisie - waar men zich ook wel van bewust is - maar zolang deze voldoende is voor het doel, waarop het onderzoek gericht is, zijn de uitspraken in hun deterministische vorm bruikbaar.

Vele verschijnselen echter laten zich niet - of althans niet in voldoende mate - in een dergelijk model vangen. Deterministische methoden leiden tot gedetailleerde voorspellingen en vele zaken laten zich niet - of althans nog niet - in detail voorspellen. Voorbeelden hiervan zijn:

1. Het weer van morgen (of, in sterkere mate, van volgende week).
2. Het aantal verkeersongelukken in Amsterdam gedurende de eerstvolgende Paasweek.
3. De wachttijd van een auto bij de Hembrugpont.

4. De levensduur van een machine-onderdeel.
5. De vraag naar een artikel in de volgende maand.
6. Het jaarlijkse nationale inkomen.
7. De werkzaamheid van een geneesmiddel.
8. Het cijfer voor meetkunde van een examinandus,

enz.

Hoewel dit soort "onzekere" verschijnselen zich niet in detail laat voorspellen, tast men er toch niet geheel over in het duister. Indien men voorspelt, dat het mogen zal regenen, heeft men in Nederland vaak - zij het niet altijd - gelijk en nog vaker wanneer men voorspelt, dat het weer morgen "hetzelfde" zal zijn als vandaag. Indien men beschikt over de ongevallen-statistieken van vorige jaren kan men een goede slag slaan naar het aantal ongelukken in de niet te verre toekomst. Onderzoekingen omtrent de werkzaamheid van een geneesmiddel verschaffen een globale indruk daarvan; maar of het in een bepaald geval zal helpen of niet kan men niet met zekerheid voorspellen.

De statistiek houdt zich bezig met dit soort onzekere verschijnselen. Het is de wetenschap van het "hoe vaak" als de vraag "wanneer" niet kan worden beantwoord. Zo kan men b.v. bij een reeks worpen met een dobbelsteen niet voorspellen bij welke worpen een 6 zal optreden, maar wel (bij goede benadering) hoe vaak dit in een lange reeks zal gebeuren. Onvoorspelbaarheid in detail impliceert nog niet onvoorspelbaarheid in het groot. Dit is het fundamentele (experimentele) feit, waarop de statistiek gebaseerd is.

Het toepassingsgebied van de wiskunde is door het ontwikkelen van wiskundige methoden voor de behandeling van onzekere verschijnselen zeer aanzienlijk uitgebreid. Om slechts enkele gebieden te noemen waar de statistiek een belangrijk hulpmiddel is gebleken: biologie, medicijnen, landbouw, industrie, geodesie, astronomie, verzekering, economie, sociologie, bevolkingsleer, strategie en kernphysica.

Het is duidelijk, dat men in detail onvoorspelbare verschijnselen niet in een deterministisch model kan vangen. De statistiek bedient zich dan ook vaak van modellen, waarin de onzekerheid een essentiëel element is, nl. van dat deel van de zuivere wiskunde, dat de kansrekening of waarschijnlijkheidsrekening genoemd wordt en dat een onderdeel van de maat-theorie is. Het essentiële practische verschil met de "klassieke" beschouwingswijze is, dat men bij toepassing van de statistiek afziet van de eis, dat iedere uitspraak of voorspelling juist is - iets wat men bij "klassieke" methoden weliswaar evenmin bereikt, maar waarop deze methoden toch gericht zijn -, maar dat men tevreden is als dit in de regel, b.v. in 95% of 99% van de gevallen, waarin men statistiek toepast, het geval is. De onzekerheid van de menselijke kennis wordt in de statistiek erkend, opgenomen en gekwantificeerd.

Verdere uitwerking van deze grondgedachte vindt plaats in volgende paragrafen en hoofdstukken. Ter illustratie geven wij hieronder enkele voorbeelden van problemen, die met behulp van statistische methoden onderzocht kunnen worden. Bij ieder van deze problemen zal, zoals eigenlijk vanzelf spreekt, de statistische analyse van het probleem gebaseerd moeten worden op waarnemingen, die de (meestal) numerieke gegevens voor de berekeningen moeten leveren.

1. Bij het ontwikkelen van een methode voor het doen van weersvoorspellingen is statistische analyse van grote hoeveelheden waarnemingsmateriaal een belangrijk hulpmiddel.

2. Het werk van de Delta-commissie ter bepaling van de hoogte van dijken, die nodig zijn om in de toekomst de kans op overstromingen zeer gering te maken, berust voor een deel op statistische analyse van de hoogwaterstanden, die in het verleden waargenomen zijn.

3. Voor het onderzoeken van de al of niet werkzaamheid van een geneesmiddel en bij het vergelijken van twee of meer geneesmiddelen zijn experimenten nodig, waarvan de uitkomsten statistisch geanaliseerd dienen te worden.

4. Hetzelfde geldt voor talrijke vraagstukken uit de industrie, zoals het onderzoek naar de factoren die een productieproces of de verkoop van een artikel beïnvloeden.

5. Landbouwkundig onderzoek van de invloed van factoren, zoals grondbewerking, bemesting en variëteit op de opbrengst van een akker berusten tegenwoordig vrijwel steeds op statistische methoden, waarbij vooral ook aandacht wordt besteed aan een doel-

treffende opzet der - gewoonlijk zeer tijdrovende - experimenten.

Hoewel nog vele andere voorbeelden genoemd zouden kunnen worden - van de walvisvangst tot het breken van garen in de textielindustrie, van de maximum snelheid van bromfietsen tot het schatten van de ouderdom van aardlagen - volstaan wij hier met de bovenstaande.

Tot slot van deze inleiding merken wij nog slechts op, dat de eerste stap van de statistische verwerking van waarnemingsmateriaal gewoonlijk bestaat uit het maken van overzichtelijke samenvattingen van dit materiaal in de vorm van tabellen en grafieken en in het globaal karakteriseren van de waarnemingen in de vorm van kengetallen (zoals gemiddelden en standaardafwijkingen), iets dat vooral bij omvangrijk waarnemingsmateriaal reeds van grote betekenis kan zijn. Bij de bevolkingsstatistiek b.v. vormt dit beschrijvende statistische werk het grootste deel van de statistische werkzaamheid. De techniek van het verzamelen van gegevens door middel van enquêtes - ter wille van een enorme tijdsbesparing - neemt daarbij de plaats in van de techniek van het opzetten van experimenten op gebieden als landbouw, biologie en industrie. Voor beide technieken zijn aparte onderdelen van de statistische theorie ontwikkeld.

Literatuur

Elementaire inleidingen

J. NEYMAN, First course in probability and statistics, H. Holt and Co, New York 1950 (geschreven voor 1e jaars studenten, die aan een statistische opleiding beginnen).

H. CRAMÉR, The elements of probability theory and some of its applications, Wiley and Sons, N.Y., Almquist and Wiksell, Stockholm, 1955 (eveneens bedoeld als eerste cursus).

W.J. DIXON and F. MASSEY, An introduction to statistical analysis, Mac Graw Hill Book Co, New York 1951 (een "receptenboek" zonder theorie, waarin de gebruikte stellingen langs experimentele weg aannemelijk gemaakt worden).

W.A. WALLIS and H.V. ROBERTS, Statistics, a new approach, The Free Press, Glencoe, Illinois, 1956 (een uitvoerig

boek met talrijke uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken).

Wiskundige leerboeken en handboeken

M.G. KENDALL, Advanced theory of statistics, I, II, C. Griffin and Co, London 1948 (een uiterst belangrijk handboek).

H. CRAMÉR, Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, Princeton 1946 (één der belangrijkste boeken over mathematische statistiek).

2. Het experimentele fundament van de statistiek.

Het experimentele fundament van de statistiek is tot op zekere hoogte hetzelfde als dat van het dobbelspel: hoewel men bij een worp met een dobbelsteen niet kan voorspellen wat de uitkomst zal zijn, weet men, dat in een lange reeks worpen met een zorgvuldig gemaakte dobbelsteen alle 6 mogelijke uitkomsten ongeveer even vaak voorkomen. (Men is gewend dit feit in het kort uit te drukken door te zeggen, dat alle 6 mogelijke uitkomsten dezelfde kans bezitten.) Op grond van deze (experimenteel vastgestelde) gelijkwaardigheid der 6 mogelijke uitkomsten kan men dan langs volkomen elementaire weg van allerlei dobbelspelen de eigenschappen berekenen, b.v.: zal het vaker, even vaak of minder vaak gelukken in 4 worpen met één dobbelsteen minstens éénmaal 6 te werpen dan in 24 worpen met twee dobbelstenen dubbel 6? Dit soort van vraagstukken heeft in de 17e eeuw in Frankrijk geleid tot het ontstaan van de waarschijnlijkheidsrekening (CHEVALIER DE MÉRÉ, de speler; PASCAL en FERMAT, de wiskundigen).

Een soortgelijke regelmaat als bij geluksspelen vindt men echter ook op andere terreinen. F.W.J. SUSSKIND (1746) en A. QUETELET (1827) hebben reeds gewezen op het merkwaardige verschijnsel, dat de frequentie per jaar per 1000 inwoners van geboorte, sterfte en huwelijk, van moord en andere misdaden en ook van andere maatschappelijke verschijnselen vrij nauwkeurig constant blijft in de tijd, zolang er althans geen veranderingen in de maatschappelijke toestanden optreden. Toch kan men doorgaans van de mensen individueel niet voorspellen of ze binnen een jaar zullen sterven, een moord zullen begaan, etc. Men noemt het beschreven verschijnsel de experimentele wet der grote aantallen. Een iets nauwkeurigere formulering is de volgende.

Laat E een experiment voorstellen, dat een aantal (N) malen wordt herhaald. Laat S één (willekeurige) der mogelijke uitkomsten van E voorstellen en n(S) het aantal malen, dat S bij de N uitvoeringen van E, inderdaad optreedt. Dan wordt $n(S)/N$ het frequentiequotiënt[1] van S in deze reeks experimenten genoemd. Verricht men verschillende van deze reeksen van experimenten, met dezelfde E, S en N, dan zullen in de regel verschillende waarden fan fq(S) gevonden worden. De experimentele wet van de grote aantallen zegt nu, dat voor een grote klasse van experimenten E geldt, dat deze verschillen tussen de voor fq(S) gevonden waarden voor grote waarden van N zeer klein worden.

De term "experiment" vatte men hierbij zeer ruim op. Bij de bovenstaande voorbeelden valt daar niet alleen een worp met een dobbelsteen onder, maar ook het verrichten van een waarneming, b.v. betrekking hebbende op het al of niet in leven zijn van een bepaalde persoon op een bepaalde datum.

De kansrekening en de statistiek houden zich nu bezig met al die verschijnselen, waarvoor de experimentele wet der grote aantallen geldt of geacht wordt te gelden. De kansrekening is de zuiver wiskundige kern, die los van problemen van toepassing en verificatie op axiomatische wijze wordt opgebouwd en de statistiek houdt zich bezig met het opbouwen van begrippen en theorieën, die de brug moeten slaan tussen de practische problemen en deze theorie.

Een practisch voorbeeld van de experimentele wet der grote aantallen vindt men in de onderstaande tabellen, die betrekking hebben op het geslacht van in 1954 in 6 wijken van Amsterdam geboren kinderen.

De fqn der jongensgeboorten vertonen in tabel I reeds ongeveer dezelfde orde van grootte, terwijl het fq, dat het meest van de overige afwijkt, optreedt bij een kleine waarde van N. Vergroten wij de waarden van N nu door de wijken achtereenvolgens bij elkaar te nemen, dan worden de verschillen reeds vanaf de tweede regel veel geringer. Dit is in tabel II gedaan.

1) afkorting: fq, meervoud: fqn; notatie fq(S).

Tabel I

Aantallen jongens- en meisjesgeboorten in 6 wijken in Amsterdam (1954)

wijk nr	aantal geborenen			fq (jongens)
	jongens	meisjes	totaal (N)	
1	23	35	58	0,40
2	300	269	569	0,53
3	277	272	549	0,50
4	25	27	52	0,48
5	281	289	570	0,49
6	68	61	129	0,53

Tabel II

Aantallen jongens- en meisjesgeboorten in 6 wijken in Amsterdam, cumulatief

wijk nr	aantal geborenen			fq (jongens)
	jongens	meisjes	totaal (N)	
1	23	35	58	0,40
1 en 2	323	304	627	0,52
1 t/m 3	600	576	1176	0,51
1 t/m 4	625	603	1228	0,51
1 t/m 5	906	892	1798	0,50
1 t/m 6	974	953	1927	0,51

Hierbij valt nog op te merken, dat de fqn, die in de tabellen slechts in twee decimalen zijn opgegeven, wel "nauwkeuriger" berekend kunnen worden, doch dat het - juist vanwege de statistische variabiliteit - zinloos is dit te doen. Tegen deze regel, die betrekking heeft op alle verschijnselen, die statistische variabiliteit vertonen, wordt nogal eens gezondigd, waardoor dan een onverantwoorde suggestie van precisie ontstaat.

In aansluiting hierop doet zich de vraag voor, of wij het fq, verkregen uit alle gegevens tezamen, eigenlijk niet op 0,5 af zouden moeten ronden, d.w.z. of de tweede decimaal in dit resultaat "nog wel zin heeft". Deze vage uitdrukking kan men vervangen door de iets suggestievere: "Wijst de uitkomst 0,51 erop, dat er in Amsterdam systematisch meer jongens dan meisjes geboren worden, of is de afwijking van 0,50 slechts een toevallige?" Vraagt men zich nu af, wat men met de termen "systematisch" en "toevallig" bedoelt, dan kan het antwoord hierop als volgt luiden. Indien niet alleen in het onderzochte jaar, maar ook in voorafgaande en volgende jaren bijna altijd meer jongens dan meisjes geboren worden, spreken wij van een systematische afwijking van 0,50. In dat geval kan men dus ook voorspellen, dat er in een komend jaar meer jongens dan meisjes geboren zullen worden en die voorspelling zal dan in de regel uitkomen. Is dit niet zo, dus is er geen systematisch verschil tussen het aantal jongens- en meisjesgeboorten, dan noemt men de gevonden afwijking van 0,50 een toevallige afwijking. Een nadere precisering van deze, ook in bovenstaande terminologie nog verre van exacte, formulering, benevens de ontwikkeling van methoden, om op grond van gegevens van de in de tabellen I en II vermelde aard uit te maken in welk geval men verkeert, is nu juist de taak van de statistiek. Daarbij wordt dan gebruik gemaakt van een exact mathematisch model, dat een vereenvoudiging en schematisering van het onderzochte probleem inhoudt en waarin zowel voor de "toevallige" als voor de "systematische" verschillen exacte begrippen worden ingevoerd. Waargenomen verschillen, zoals hier het verschil tussen 0,50 en 0,51, worden in een dergelijk model gesplitst in twee delen, nl. een systematisch en een toevallig (de statistische vakterm is "stochastisch") verschil, terwijl dan op grond van de gevonden aantallen getoetst kan worden of het systematische deel wellicht gelijk aan 0 is. Tevens worden de voorspellingsmogelijkheden uitgewerkt en gepreciseerd.

3. Eigenschappen van frequentiequotiënten.

Statistiek en kansrekening houden zich, zoals in het voorafgaande betoogd is, in de eerste plaats bezig met fqn en het is dan ook van belang enkele eenvoudige eigenschappen van fqn af te leiden, die verderop van fundamentele betekenis zullen blijken te zijn.

Wij beschouwen daartoe een eindige verzameling Λ van N elementen λ en een aantal eigenschappen (of "kenmerken") A,B,C,.... Ieder element bezit geen, één of meer van deze kenmerken. De verzameling Λ kan bijvoorbeeld bestaan uit 500 op een enquete binnengekomen formulieren, waarop het kenmerk A kan zijn het antwoord dat men een artikel regelmatig gebruikt, het kenmerk B dat men het artikel niet gebruikt, het kenmerk C dat men niet geheel tevreden is over de verpakking, enzovoorts. In een ander voorbeeld bestaat Λ uit 928 Nederlandse mannen van wie gegevens verzameld zijn, zoals de kleur van de ogen (bruin is kenmerk A, blauw is kenmerk B, enz.), de kleur van het haar (rood is kenmerk K, blond is kenmerk L) enzovoorts.

Uit gegeven kenmerken kunnen door negatie ($\bar{A}$ = niet A), conjunctie ($A \wedge B$ = A en B) en disjunctie ($A \vee B$ = A of/en B) en door herhaling van deze operaties nieuwe kenmerken gevormd worden, waarvoor uiteraard hetzelfde opnieuw geldt. Zo stelt in het tweede voorbeeld $\bar{A}$ voor: geen bruine ogen, $B \wedge L$ betekent zowel blauwe ogen als blond haar en $A \vee B$ bruine of blauwe ogen.

Voor een willekeurig kenmerk S geven wij het aantal elementen λ, dat S bezit, aan met N(S). Vervolgens definiëren wij het fq van S door

$$(3;1) \qquad fq(S) \overset{\text{def}}{=} \frac{N(S)}{N} .$$

en het voorwaardelijke fq van S, onder de voorwaarde T, waarin T een kenmerk is met $N(T) \neq 0$, door

$$(3;2) \qquad fq(S|T) \overset{\text{def}}{=} \frac{N(S \wedge T)}{N(T)}$$

Nemen wij voor T het kenmerk "tot Λ te behoren", dan gaat fq(S|T) over in fq(S). Andersom kan men zeggen: de voorwaardelijke fqn onder voorwaarde T worden verkregen als gewone (onvoorwaardelijke) fqn indien men Λ vervangt door de verzameling van die elementen λ, die het kenmerk T bezitten.

De volgende eigenschappen van fqn zijn nu evident.

$$(3;3)\quad\begin{cases} \text{I} & 0 \leq fq(S) \leq 1 & \text{voor ieder der beschouwde kenmerken.} \\ \text{II} & fq(S)=0 & \text{dan en slechts dan als geen } \lambda\in\Lambda \text{ het kenmerk } S \text{ bezit.} \\ \text{III} & fq(S)=1 & \text{dan en slechts dan als iedere } \lambda\in\Lambda \text{ het kenmerk } S \text{ bezit.} \\ \text{IV} & fq(S\vee U)=fq(S)+fq(U)-fq(S\wedge U) & \text{voor ieder paar } S,U \text{ van beschouwde kenmerken.} \end{cases}$$

Eigenschap IV volgt direct uit

$$N(S\vee U)=N(S)+N(U)-N(S\wedge U)$$

Deling door N geeft het gewenste resultaat.
Een meetkundige illustratie van deze eigenschap vindt men in figuur 3.1; de verzameling Λ bestaat uit een rechthoek, waarvan ieder punt een element λ voorstelt. Er zijn twee kenmerken S en U en een deel van de elementen bezit beide kenmerken.

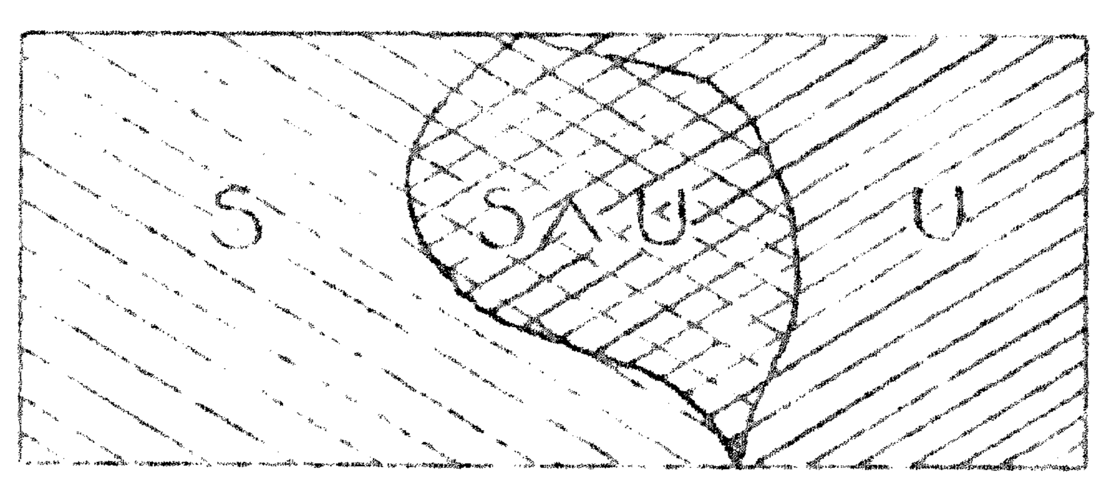

fig. 3.1
Meetkundige illustratie van eigenschap (3;3;IV)

Volgens definitie (3;2) en het daaronder vermelde gelden de eigenschappen (3;3) ook voor voorwaardelijke fqn. Dan gaat b.v. IV over in:

$$fq(S\vee U|T)=fq(S|T)+fq(U|T)-fq(S\wedge U|T)$$

Verder volgt uit (3;1) en (3;2):

$$(3;4)\qquad fq(S|T)=\frac{fq(S\wedge T)}{fq(T)} \quad \text{of:}\quad fq(S\wedge T)=fq(S|T)\,fq(T)$$

Nu kunnen op grond van (3;3) en (3;4) alleen,[1] dus zonder terug te grijpen op de definities (3;1) en (3;2), een aantal stellingen bewezen worden, die ook weer zowel voor onvoorwaarde-

1) En onder gebruikmaking van stellingen uit de logica met betrekking tot de conjunctie en disjunctie.

$$(3;3')\quad \begin{cases} \text{II } fq(S)=0 \text{ als geen } \lambda\in\Lambda \text{ het kenmerk } S \text{ bezit,} \\ \text{III } fq(S)=1 \text{ als iedere } \lambda\in\Lambda \text{ het kenmerk } S \text{ bezit,} \end{cases}$$

in plaats van (3;3;II) en (3;3;III).

De te bewijzen stellingen gelden, zoals gezegd, ook voor voorwaardelijke frequentiequotiënten, d.w.z. alle stellingen blijven gelden, indien men aan alle fqn dezelfde voorwaarde toevoegt; dit kan alleen spaak lopen doordat er voorwaardelijke fqn ontstaan, die onbepaald zijn omdat geen enkele λ meer aan de bij het fq behorende voorwaarde voldoet.

De eerste stelling die wij noemen is een generalisatie van (3;3;IV). Voor drie kenmerken S_1, S_2 en S_3 kan uit figuur 3.2 gemakkelijk afgeleid worden, dat geldt

$$fq(S_1\vee S_2\vee S_3)=fq(S_1)+fq(S_2)+fq(S_3)-fq(S_1\wedge S_2)-fq(S_1\wedge S_3)-fq(S_2\wedge S_3)$$
$$+fq(S_1\wedge S_2\wedge S_3).$$

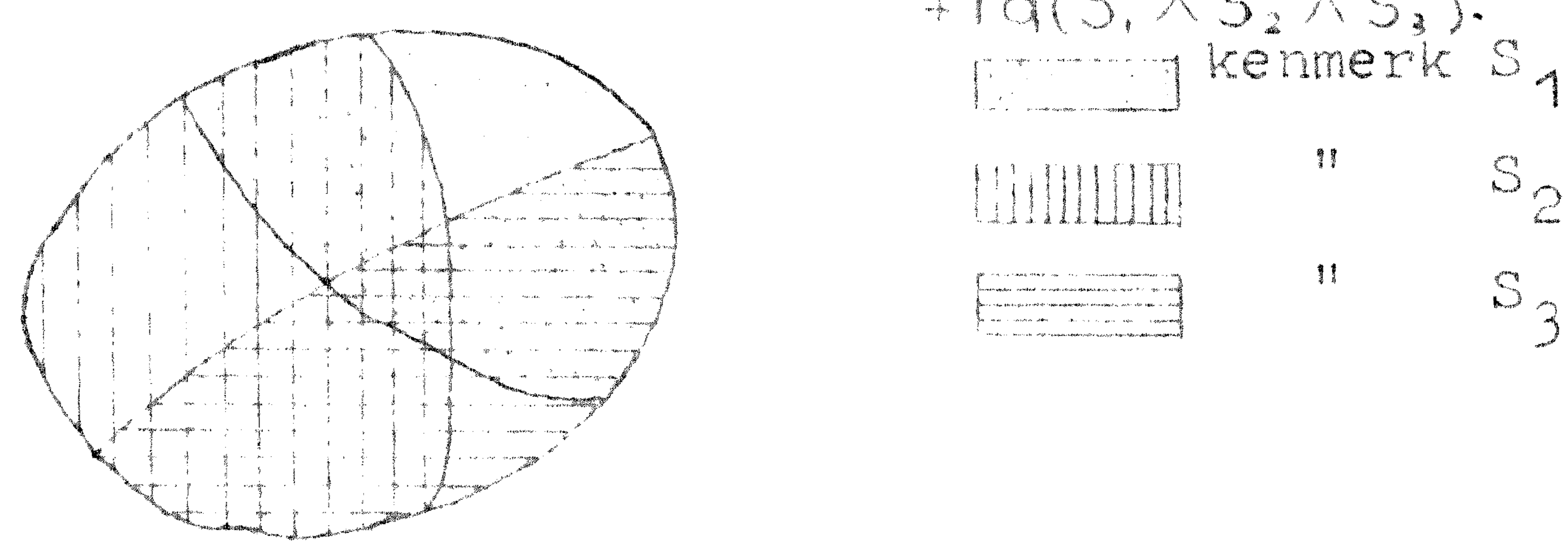

fig. 3.2

Eigenschap (3;3;IV) voor drie kenmerken

Een dergelijke stelling geldt niet alleen voor twee en voor drie kenmerken, doch algemeen voor een willekeurig aantal van k kenmerken.

Stelling 3;1 (algemene optelregel).

Zijn $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_k$ kenmerken en is

$$(3;5)\qquad \bigvee_{i=1}^{k} S_i \stackrel{def}{=} S_1\vee S_2\vee\ldots\vee S_k$$

en

$$(3;6)\qquad \bigwedge_{i=1}^{k} S_i \stackrel{def}{=} S_1\wedge S_2\wedge\ldots\wedge S_k,$$

dan is

$$(3;7)\quad fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i\right)=\sum_i fq(S_i)-\sum_{i<j} fq(S_i\wedge S_j)+\sum_{i<j<h} fq(S_i\wedge S_j\wedge S_h)-\ldots+(-1)^{k-1}fq\left(\bigwedge_{i=1}^{k} S_i\right).$$

Bewijs door volledige inductie.

Voor k=2 gaat (3;7) over in (3;3;IV).

Voor k+1 geldt, indien (3;7) voor k juist wordt ondersteld, volgens (3;3;IV):

$$fq\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i\right)=fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i \vee S_{k+1}\right)=fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i\right)+fq(S_{k+1})-fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i \wedge S_{k+1}\right).$$

Hierin is

$$\bigvee_{i=1}^{k} S_i \wedge S_{k+1} \equiv \bigvee_{i=1}^{k} (S_i \wedge S_{k+1}),$$

zodat, met behulp van (3;7) voor de waarde k, volgt

$$\begin{aligned} fq\left(\bigvee_{i=1}^{k+1} S_i\right) &= \sum_{i=1}^{k+1} fq(S_i)-\sum_{i<j}^{k} fq(S_i \wedge S_j)+\ldots\ldots+(-1)^{k-1} fq\left(\bigwedge_{i=1}^{k} S_i\right)+ \\ &-\sum_{i=1}^{k} fq(S_i \wedge S_{k+1})+\sum_{i<j}^{k} fq(S_i \wedge S_j \wedge S_{k+1})-\ldots+(-1)^{k+1} fq\left(\bigwedge_{i=1}^{k} S_i \wedge S_{k+1}\right)= \\ &=\sum_{i=1}^{k+1} fq(S_i)-\sum_{i<j}^{k+1} fq(S_i \wedge S_j)+\ldots\ldots+(-1)^{k} fq\left(\bigwedge_{i=1}^{k+1} S_i\right). \end{aligned}$$

q.e.d.

Stelling 3;2 (bijzondere optelregel)

Vormen de kenmerken $S_1, S_2, \ldots, S_k$ op Λ een exclusief systeem, d.w.z. dat géén $\lambda \in \Lambda$ meer dan één der kenmerken S_2 bezit, dan geldt

$$(3;8) \qquad fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i\right)=\sum_{i=1}^{k} fq(S_i).$$

Bewijs

Daar $S_1, S_2, \ldots, S_k$ een exclusief systeem vormen is er, voor iedere $i_1, i_2, \ldots, i_h$ met $h \geq 2$, geen $\lambda \in \Lambda$ die het kenmerk

$$S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \ldots \wedge S_{i_h}$$

bezit. Uit (3;3';II) volgt dan dat voor iedere $i_1, i_2, \ldots, i_h$ met $h \geq 2$

$$fq(S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \ldots\ldots \wedge S_{i_h})=0$$

Vult men dit in (3;7) in, dan vindt men (3;8).

Stelling 3;3

Vormen de kenmerken $S_1, S_2, \ldots, S_k$ op Λ een kategorisch systeem, d.w.z. dat iedere $\lambda \in \Lambda$ precies één der kenmerken S_i bezit, dan geldt

$$(3;9) \qquad \sum_{i=1}^{k} fq(S_i)=1$$

Bewijs

Daar ieder kategorisch systeem een exclusief systeem is, geldt volgens (3;8)

$$\sum_{i=1}^{k} fq(S_i)=fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} S_i\right).$$

Verder bezit bij een kategorisch systeem iedere $\lambda \in \Lambda$ het kenmerk $\bigvee_{i=1}^{k} S_i$.
Uit (3;3';III) volgt dan

$$fq\Big(\bigvee_{i=1}^{k} S_i\Big) = 1$$

<u>Bijzonder geval</u>

(3;10) $\quad fq(S) + fq(\bar{S}) = 1$

<u>Stelling 3;4</u>

Is $S_1, S_2, \ldots, S_k$ een <u>symmetrisch kategorisch systeem</u> op Λ, d.w.z. een kategorisch systeem met

(3;11) $\quad fq(S_1) = fq(S_2) = \ldots\ldots = fq(S_k)$,

dan is

(3;12) $\quad fq(S_i) = \frac{1}{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$.

<u>Bewijs</u>

Dit volgt uit stelling 3;3.

<u>Stelling 3;5</u>

Zijn S en U twee willekeurige kenmerken, dan geldt:

(3;13) $\quad fq(S \wedge U) \leqq fq(S)$

en

(3;14) $\quad fq(S \vee U) \geqq fq(S)$.

<u>Bewijs</u>

Uit

$$S \equiv (S \wedge U) \vee (S \wedge \bar{U})$$

en (3;8) volgt

$$fq(S) = fq(S \wedge U) + fq(S \wedge \bar{U}),$$

daar $S \wedge U$ en $S \wedge \bar{U}$ op Λ een exclusief vormen. Verder is, volgens (3;3;I)

$$fq(S \wedge \bar{U}) \geqq 0,$$

dus

$$fq(S \wedge U) \leqq fq(S)$$

Verder is volgens (3;3;IV)

$$fq(S \vee U) = fq(S) + fq(U) - fq(S \wedge U)$$

Daar volgens (3;13) geldt $fq(S \wedge U) \leq fq(U)$ is dus

$$fq(S \vee U) \geq fq(S) \qquad \text{q.e.d.}$$

De tot dusverre afgeleide stellingen kunnen alle gezien worden als generalisaties van (3;3;IV), respectievelijk specialisaties van (3;7). Wij geven nu nog drie stellingen, waarin voorwaardelijke fqn een belangrijke rol vervullen. De eerste hiervan is een generalisatie van (3;4) en luidt als volgt.

<u>Stelling 3;6</u> (algemene vermenigvuldigingsregel)

Als

(3;15) $\quad fq(\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i) > 0,$

dan geldt

(3;16) $\quad fq(\bigwedge_{i=1}^{k} S_i) = fq(S_1)\, fq(S_2|S_1)\, fq(S_3|S_1 \wedge S_2) \ldots fq(S_k|\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i)$

<u>Bewijs</u>

Uit (3;13) volgt

$$fq(S_1) \geq fq(S_1 \wedge S_2) \geq fq(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3) \geq \ldots \geq fq(\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i).$$

Daar volgens (3;15) $fq(\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i) > 0$ is zijn dus alle voorwaardelijke fqn in (3;16) gedefinieerd. De stelling wordt nu bewezen met volledige inductie.

Voor k=2 gaat de stelling over in (3;4):

$$fq(S_1 \wedge S_2) = fq(S_1)\, fq(S_2|S_1) \qquad \text{als} \qquad fq(S_1) > 0.$$

Onderstel nu de stelling juist voor de waarde k-1, dan volgt de stelling voor k uit

$$fq(\bigwedge_{i=1}^{k} S_i) = fq(\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i \wedge S_k) = fq(\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i)\, fq(S_k|\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i) =$$

$$fq(S_1)\, fq(S_2|S_1) \ldots fq(S_{k-1}|\bigwedge_{i=1}^{k-2} S_i)\, fq(S_k|\bigwedge_{i=1}^{k-1} S_i).$$

q.e.d.

<u>Stelling 3;7</u>

Is $T_1, T_2, \ldots, T_k$ een kategorisch systeem op Λ met $fq(T_i) > 0$ voor alle i en is S een willekeurig kenmerk, dan geldt:

(3;17) $\quad fq(S) = \sum_{i=1}^{k} fq(S|T_i)\, fq(T_i).$

Bewijs

Daar $T_1, T_2, \ldots, T_k$ een kategorisch systeem op Λ vormen, vormen $S \wedge T_i$ voor $i=1,2,\ldots,k$ een exclusief systeem op Λ en wegens

$$S \equiv \bigvee_{i=1}^{k} (S \wedge T_i)$$

geldt volgens (3;8)

$$fq(S) = fq\left(\bigvee_{i=1}^{k} (S \wedge T_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} fq(S \wedge T_i).$$

De stelling volgt dan uit

$$fq(S \wedge T_i) = fq(S \mid T_i)\, fq(T_i) \quad \text{als} \quad fq(T_i) > 0$$

q.e.d.

Stelling 3;8 (Stelling van Bayes)

Is $T_1, T_2, \ldots, T_k$ een kategorisch systeem op Λ en S een willekeurig kenmerk met $fq(S) \neq 0$ en $fq(T_i) \neq 0$ voor iedere i, dan geldt

$$(3;18) \qquad fq(T_i \mid S) = \frac{fq(S \mid T_i)\, fq(T_i)}{\sum_{i=1}^{k} fq(S \mid T_i)\, fq(T_i)} \qquad (i=1,2,\ldots,k).$$

Bewijs

Volgens (3;4) is

$$fq(S \wedge T_i) = fq(S) \cdot fq(T_i \mid S) = fq(T_i)\, fq(S \mid T_i) \qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

dus

$$fq(T_i \mid S) = \frac{fq(S \mid T_i) \cdot fq(T_i)}{fq(S)}.$$

De stelling volgt dan uit (3;17).

Opmerking

De stellingen 3;7 en 3;8 gelden ook als $T_1, T_2, \ldots, T_k$ alleen kategorisch zijn met betrekking tot S, d.w.z. op de deelverzameling van Λ, bestaande uit alle $\lambda \in \Lambda$, die S bezitten. Ook dan vormen namelijk de kenmerken $S \wedge T_i$ voor $i = 1,2,\ldots,k$ een exclusief systeem op Λ en is

$$S \equiv \bigvee_{i=1}^{k} (S \wedge T_i).$$

Ter illustratie van de in deze paragraaf behandelde begrippen en stellingen geven wij nog een <u>voorbeeld</u>.

Gegevens betreffende 928 Nederlandse mannen:

kleur ogen \ kleur haar	rood	blond	bruin	zwart	totaal
bruin	2	7	167	35	211
intermediair	1	36	164	8	209
blauw	9	184	307	8	508
totaal	12	227	638	51	928

Onvoorwaardelijke frequenties: fq (bruine ogen) $= \frac{211}{928} = 0{,}227$

fq (blond haar) $= \frac{227}{928} = 0{,}245$

Voorwaardelijke frequenties:

fq (br.o.| br.h.) $= \frac{167}{638} = 0{,}262$

fq (bl.o.| br.h.) $= \frac{307}{638} = 0{,}481$

fq (br.h.| br.o.) $= \frac{167}{211} = 0{,}791$

fq (bl.h.| br.o.) $= \frac{7}{211} = 0{,}033$

fq (bl.h.| bl.o.) $= \frac{184}{508} = 0{,}362$

fq (br.h.| bl.o.) $= \frac{307}{508} = 0{,}604$

<u>Toepassing algemene optelregel</u> (st.3;1)

fq(br.h. òf br.o.) $= \frac{211}{928} + \frac{638}{928} - \frac{167}{928} = \frac{2+7+167+35+164+307}{928} = 0{,}735$

<u>Algemene vermenigvuldigingsregel</u> (st 3;6.)

fq(bl.o. èn bl.h.) = fq(bl.o.)fq(bl.h.| bl.o.) $= \frac{508}{928} \cdot \frac{184}{508} = \frac{184}{928} = 0{,}198$

<u>Bizondere optelregel</u> (st.3;2.)

fq(r.h. of bl.h.) $= \frac{12}{928} + \frac{227}{928} = 0{,}258$

fq(r.h. of bl.h.|bl.o.) = fq(r.h.|bl.o.) + fq(bl.h.|bl.o.) =

$\frac{9}{508} + \frac{184}{508} = 0{,}380.$

st.3;7. Neem voor $T_1,\ldots,T_k$ de haarkleur en voor S: blauwe ogen, dan is:

$$fq(bl.o.) = fq(bl.o.|r.h.)fq(r.h.)+\ldots+fq(bl.o.|zw.h.)fr(zw.h.) = 0{,}547.$$

st.3;8. $T_1,\ldots,T_k$ haarkleur, S blauwe ogen

$$fq(bl.h.|bl.o.) = \frac{fq(bl.o.|bl.h.)\ fq(bl.h.)}{fq(bl.o.)} = \frac{\frac{184}{227}\cdot\frac{227}{928}}{\frac{508}{928}} = 0{,}362.$$

Een tweede toepassing van de bovenvermelde stellingen wordt in het begin van de volgende paragraaf gegeven.

4. Het kansbegrip

Het kansbegrip is oorspronkelijk ontwikkeld naar aanleiding van problemen omtrent "zuivere" kansspelen, zoals het dobbelspel (mits gespeeld met "zuivere" dobbelstenen). Als algemene beschrijving van één enkele maal spelen met een dergelijk spel kan het volgende gelden: er zijn n mogelijke "elementaire" uitkomsten $A_1,A_2,\ldots,A_n$, waarvan er precies één moet optreden en het spel is symmetrisch, d.w.z. hoewel de betekenis der A_i voor de regels van het spel voor verschillende i sterk kan verschillen, verandert het spel niet van eigenschappen, indien in de verlies- en winstregels de uitkomsten $A_1,A_2,\ldots,A_n$ aan een willekeurige permutatie onderworpen worden. Dit is dan een gevolg van het feit, dat $A_1,A_2,\ldots,A_n$ in principe alle even vaak optreden. Oorspronkelijk drukte men dit uit door te zeggen, dat $A_1,A_2,\ldots,A_n$ "gelijkelijk mogelijk" zijn.

De voor deze situatie door LAPLACE gegeven definitie van een kans is nu:

De kans op een gebeurtenis S is gelijk aan het quotiënt van het aantal (elementaire) mogelijkheden, waarbij S gerealiseerd wordt en het totale aantal mogelijkheden.

Zo is b.v. bij één worp met een ("zuivere") dobbelsteen de kans op het werpen van een even aantal ogen gelijk aan 3/6; de kans op het trekken van een schoppenkaart uit een ("goed geschud") kaartspel is 13/52 = 1/4; algemeen: de kans op ieder der elementaire uitkomsten $A_1,A_2,\ldots,A_n$ is 1/n.

Deze definitie heeft twee bezwaren. In de eerste plaats is hij kennelijk circulair zolang men geen definitie van "gelijkelijk mogelijk" geeft en de boven vermelde eis van symmetrie is zonder verdere uitwerking te vaag, om daartoe voldoende geacht te worden. Ook physische eisen van symmetrie zijn niet voldoende. Fabriceert men b.v. een zo zuiver mogelijk symmetrische munt van zeer homogeen materiaal, doch legt men deze telkens met "kruis" boven op tafel, dan kan men desgewenst de munt "zuiver" noemen, maar het zo uitgevoerde "kruis- of munt"-spel zeker niet. Men zal dus ook aan de wijze van werpen eisen moeten stellen, om tot een "zuiver" spel te komen en het is niet zo eenvoudig deze eisen te formuleren.

Een tweede bezwaar is de beperktheid van de definitie van LAPLACE. In lang niet alle situaties, waarop de statistiek van toepassing is, laten zich gelijkwaardige mogelijkheden aanwijzen, op grond waarvan de kans op een bepaalde gebeurtenis uitgerekend kan worden. VON MISES demonstreert dit aan het begrip "sterftekans": wat zijn daarbij de mogelijkheden, waaraan men gelijke kansen toe kan kennen? Hetzelfde doet zich trouwens reeds voor bij worpen met een "valse" dobbelsteen of munt, b.v. een punaise.

Wij zullen verderop zien, hoe deze bezwaren opgeheven kunnen worden.

Beschouwen wij voorlopig nog even de definitie van LAPLACE, dan is het verband met de stellingen over fqn, die in de vorige paragraaf gegeven zijn, duidelijk. Een verzameling Λ van n elementen $\lambda_i (i=1,2,\ldots,n)$, waarbij aan λ_i het kenmerk A_i wordt toegevoegd, is nu een wiskundig model van één uitvoering van het spel en de fqn op Λ zijn precies de boven gedefiniëerde kansen. In plaats van de abstracte elementen λ_i kunnen ook de A_i zelf als de elementen van Λ beschouwd worden.

Wij kunnen nu dan ook de in het begin van paragraaf 2 gestelde vraag trachten te beantwoorden met behulp van een stelling uit paragraaf 3. Deze vraag luidde als volgt. "Wat zal vaker gelukken: met 4 worpen van een dobbelsteen minstens éénmaal 6 te werpen of met 24 worpen met twee dobbelstenen minstens éénmaal dubbel 6?"[1]) Bij de behandeling van dit vraagstuk gaan wij uit van de onderstelling, dat de dobbelstenen "zuiver" zijn, zodat het spel symmetrisch is en de kansdefinitie van LAPLACE kan worden toegepast. Geven wij de gebeurtenis "minstens éénmaal 6 bij 4 worpen" aan met S_1 en "minstens éénmaal (6,6) bij 24 worpen met twee stenen" met S_2, dan behoeven wij dus, volgens het bovenstaande, slechts de fqn van deze twee kenmerken op de bij de spelen behorende verzamelingen Λ_1 resp. Λ_2 te berekenen.

De elementaire gebeurtenissen, die de elementen van Λ_1 vormen, zijn de 6^4 mogelijke viertallen uitkomsten van 4 worpen met een dobbelsteen. Wij geven ze aan met (A_1, A_2, A_3, A_4), waarin A_i het aantal ogen bij de i^e worp voorstelt. De uitkomst $A_i = 6$ geven wij kortweg aan met 6_i en de uitkomst $A_i \neq 6$ met $\bar{6}_i$. Dan is

$$S_1 \equiv 6_1 \vee 6_2 \vee 6_3 \vee 6_4 \, ,$$

en

$$\bar{S}_1 \equiv \bar{6}_1 \wedge \bar{6}_2 \wedge \bar{6}_3 \wedge \bar{6}_4 \, .$$

Volgens (3;10) is

$$fq(S_1) = 1 - fq(\bar{S}_1),$$

zodat het voldoende is $fq(\bar{S}_1)$ te berekenen. Volgens (3;16) is:

$$fq(\bar{S}_1) = fq(\bar{6}_1)\, fq(\bar{6}_2 | \bar{6}_1)\, fq(\bar{6}_3 | \bar{6}_1 \wedge \bar{6}_2)\, f(\bar{6}_4 | \bar{6}_1 \wedge \bar{6}_2 \wedge \bar{6}_3).$$

Nu is gemakkelijk na te gaan, dat de fqn van het rechterlid op Λ_1 alle gelijk aan 5/6 zijn, zodat

$$fq(\bar{S}_1) = (5/6)^4, \quad \text{dus} \quad fq(S_1) = 1-(5/6)^4 = 0{,}518$$

is. Geheel analoog kan men $fq(S_2)$ berekenen op Λ_2, een verzameling bestaande uit de 36^{24} mogelijke 24-tallen van uitkomsten van het tweede spel. De uitkomst is

$$fq(S_2) = 1-(35/36)^{24} = 0{,}491 \, .$$

----

1) Daar er bij één dobbelsteen 6 mogelijkheden zijn en bij 2 stenen 36, terwijl 4:6 = 24:36, verwachtte de steller van deze vraag (CHEVALIER DE MÉRÉ), dat de beide spelen gelijke winstkansen zouden geven. In de practijk won hij echter met het eerste, maar verloor met het tweede. Hij concludeerde hieruit, dat de wiskunde niet deugde.

Dit zijn dus tevens de kansen volgens LAPLACE en indien men ervan uitgaat, dat bij vele malen herhalen van de spelen voor ieder daarvan alle elementaire gebeurtenissen (ongeveer) even vaak zullen optreden, dan geven deze kansen aan, hoe vaak S_1 resp. S_2 ongeveer zullen optreden; S_1 treedt dan dus vaker dan in de helft der gevallen op en S_2 minder vaak.

Men kan nu verschillende wegen volgen, om deze opzet der kansrekening tot een goed gefundeerde theorie uit te breiden. Wij beperken ons tot één van deze wegen, namelijk <u>de axiomatische opzet</u> van de theorie. Deze is tegenwoordig de meest gebruikelijke, mede vanwege de eenvoudige wijze, waarop langs deze weg exactheid kan worden bereikt.

Bij de axiomatische opzet van de kansrekening laat men de gelijkwaardigheid van mogelijkheden - die de principiële moeilijkheid vormt bij de definitie van LAPLACE - vallen. Overigens is de opzet vrijwel analoog aan die van een regelrechte fqn-rekening, op één belangrijk verschil na. Indien men nl. wil werken met waargenomen fqn, moet men rekening houden met hun variabiliteit, waardoor telkens in alle formuleringen het woord "ongeveer" insluipt. De relatie "is ongeveer gelijk aan" (notatie: $\approx$) is echter niet transitief ($10^6 \approx 10^6-1 \approx \ldots \approx 1$), hetgeen het rekenen zeer bemoeilijkt.

Anderzijds hebben fqn in lange reeksen waarnemingen een neiging tot stabiliteit (experimentele wet der grote aantallen) en de kansrekening verdisconteert dit feit - daarbij tegelijkertijd bovengenoemde moeilijkheid oplossend - door aan de gebeurtenis, waarvan het fq beschouwd wordt, een (in de regel onbekend, maar constant) getal toe te voegen, dat de <u>kans</u> op (of <u>waarschijnlijkheid</u> van) die gebeurtenis heet. Deze kans is een wiskundig analogon van het in een lange reeks waarnemingen optredende fq, waarbij - in eerste instantie - van de onzekerheid van het fq afgezien is. Later blijkt, dat in het kansmodel het fq als zodanig, met zijn statistische fluctuaties, op natuurlijke wijze weer ingevoerd kan worden. Het kansbegrip wordt vastgelegd door axioma's, niet door een definitie.

Bij het begrip kans heeft men dus in gedachte de "constante kern" van het fq te karakteriseren. Het ligt daarom voor de hand voor de axioma's een aantal eenvoudige eigenschappen van fqn te nemen. Daarvoor blijken nu de eigenschappen (3;3) uitermate geschikt te zijn.

Aan deze eigenschappen lag een verzameling Λ ten grondslag, waarop kenmerken gedefinieerd waren. Een dergelijke verzameling hebben wij nu ook nodig en deze verzameling, die de basis van het wiskundige model vormt, is voor elk practisch probleem verschillend. Een practisch probleem, waarop de statistiek van toepassing is, heeft steeds betrekking op een situatie, die verschillende uitkomsten kan hebben. Voorbeelden daarvan hebben wij reeds herhaaldelijk genoemd. Deze verschillende mogelijke uitkomsten zijn nu de elementen van de basisverzameling, die wij met Γ aan zullen geven. Zij behoeven nu niet meer "gelijkelijk mogelijk" te zijn. Op Γ zijn nu weer kenmerken gedefinieerd, waaruit door negatie, conjunctie en disjunctie nieuwe kenmerken afgeleid kunnen worden. Voorbeeld: bij één worp met een dobbelsteen ("zuiver" of "vals", dat doet nu niet ter zake) bestaat Γ uit 6 elementen, de 6 zijden van de dobbelsteen. Als kenmerken treden op: de aantallen ogen 1,2,...,6; even, oneven, 6, etc. Deze kenmerken worden ook "<u>eventualiteiten</u>" genoemd, een term (ingevoerd door Prof. Dr D. VAN DANTZIG) die nauw aansluit bij hun karakter: eventueel optredende gebeurtenissen.

Is Γ nu eindig, dan kunnen wij de eigenschappen (3;3) letterlijk overnemen als axioma's voor de kansrekening. Vaak heeft men echter met oneindige Γ te maken. Een eenvoudig voorbeeld is het werpen met een munt tot voor het eerst kruis verkregen wordt. Het aantal worpen, dat bij dit experiment optreedt, kan dan alle waarden 1,2,... ad infinitum aannemen en Γ moet dus oneindig veel elementen bevatten. Dit maakt een kleine wijziging in de eigenschappen II en III wenselijk, terwijl een 5e axioma toegevoegd wordt, om het werken met oneindig veel mogelijkheden vlot te doen verlopen.

De kans op een eventualiteit S wordt aangegeven met P[S]. Aan alle op Γ gedefinieerde eventualiteiten wordt nu een constant getal als kans toegevoegd en deze kansen (die in de regel van onbekende grootte zijn) voldoen aan de volgende <u>axioma's</u>.

(4;1)

$$\begin{cases} \text{Axioma I.} & 0 \leqq P[S] \leqq 1 & \text{voor iedere beschouwde eventualiteit S.} \\ \text{Axioma II.} & P[S] = 0 & \text{als geen element van } \Gamma \text{ het kenmerk S bezit.} \\ \text{Axioma III.} & P[S] = 1 & \text{als ieder element van } \Gamma \text{ het kenmerk S bezit.} \\ \text{Axioma IV.} & P[S \vee U] = P[S] + P[U] - P[S \wedge U] & \text{voor ieder paar S,U van beschouwde eventualiteiten.} \end{cases}$$

Opmerking

De axioma's II en III worden ook vaak als volgt uitgedrukt: $P[S] = 0$ als S onmogelijk is; $P[S] = 1$ als S zeker is.

Het hier gegeven axiomastelsel kan door het volgende, eenvoudigere stelsel vervangen worden:

(4;1')

$$\begin{cases} \text{Axioma I'} & P[S] \geqq 0 & \text{voor iedere beschouwde eventualiteit S.} \\ \text{Axioma III'} & P[S] = 1 & \text{als ieder element van } \Gamma \text{ het kenmerk S bezit.} \\ \text{Axioma IV'} & P[S \vee U] = P[S] + P[U] & \text{voor ieder paar eventualiteiten, dat elkaar uitsluit.} \end{cases}$$

Uit de axioma's I', III' en IV' kunnen de in de axioma's I t/m IV genoemde eigenschappen worden afgeleid, zodat het voor de kansrekening geen verschil maakt, of men uitgaat van het stelsel (4;1), dan wel van het stelsel (4;1'). Op grond van symmetrieoverwegingen en het feit, dat het stelsel (4;1) iets meer aanspreekt, wordt hier van dit stelsel uitgegaan.

De op grond van de eigenschappen (3;3) voor onvoorwaardelijke fqn afgeleide stellingen gelden nu ook voor kansen, daar bij de bewijzen in paragraaf 3 geen gebruik werd gemaakt van (3;3;II) en (3;3;III), maar slechts van (3;3';II) en (3;3';III), die overeenkomen met (4;1;II) en (4;1;III).

Een van de stellingen (stelling 3;2) luidt dan:

Vormen de eventualiteiten $S_1, S_2, \ldots, S_k$ op Γ een exclusief systeem, dan geldt

$$P\left[\bigvee_{i=1}^{k} S_i\right] = \sum_{i=1}^{k} P[S_i] \qquad (4;2)$$

Deze eigenschap geldt voor iedere eindige k. Als 5e axioma wordt nu de overeenkomstige eigenschap voor oneindige exclusieve systemen genomen:

Axioma V:

Vormen $S_1, S_2, \ldots$ een oneindig exclusief systeem op Γ, dan geldt:

$$P\left[\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[S_i] \qquad (4;3)$$

Het axiomasysteem is nu volledig. Een verzameling Γ van eventualiteiten met bijbehorende kansen, die aan deze rij axioma's voldoen, wordt een kansveld of waarschijnlijkheidsveld genoemd.

Wij gaan nu over tot de invoering van voorwaardelijke kansen. De definitie daarvan is analoog aan (3;4): de voorwaardelijke kans, $P[S|T]$, op de eventualiteit S onder voorwaarde van het optreden van de eventualiteit T, die een kans $P[T] > 0$ bezit, wordt gedefiniëerd door

$$P[S|T] \overset{\text{def}}{=} \frac{P[S \wedge T]}{P[T]} \qquad (4;4)$$

Het is nu niet zonder meer duidelijk, dat de axioma's ook gelden voor voorwaardelijke kansen. Bij fqn volgde dit direct uit definitie (3;2), maar nu moeten wij deze eigenschappen bewijzen. Is dit gebeurd, dan gelden ook alle in hoofdstuk 3 afgeleide stellingen voor voorwaardelijke kansen.

Stelling 4;1

Indien $P[T] > 0$ is, geldt:

(4;5)

I. $0 \leqq P[S|T] \leqq 1$ voor iedere eventualiteit S.

II. $P[S|T] = 0$ als geen der elementen van Γ, die het kenmerk T bezitten, ook S bezit.

III. $P[S|T] = 1$ als ieder element, dat het kenmerk T bezit ook S bezit.

IV. $P[S \vee U|T] = P[S|T] + P[U|T] - P[S \wedge U|T]$ voor ieder paar kenmerken S en U.

V. $P\left[\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i \middle| T\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[S_i|T]$, als $S_1, S_2, \ldots$ een oneindig exclusief systeem vormen voor de elementen, waarvoor eventualiteit T optreedt.

Bewijs

I Volgens stelling 3;5 geldt

(4;6) $$P[S \wedge T] \leqq P[T],$$

dus

$$P[S|T] = \frac{P[S \wedge T]}{P[T]} \leqq 1.$$

Teller en noemer zijn verder beide niet negatief.

II Als geen der elementen van Γ zowel T als S bezit, is volgens axioma II: $P[T \wedge S] = 0$.

III Als ieder element, dat T bezit, ook S bezit, is volgens axioma II: $P[T \wedge \bar{S}] = 0$. Uit $P[T] = P[T \wedge S] + P[T \wedge \bar{S}]$ volgt dan $P[T] = P[T \wedge S]$.

IV $$P[(S \vee U) \wedge T] = P[(S \wedge T) \vee (U \wedge T)] =$$

$$= P[S \wedge T] + P[U \wedge T] - P[S \wedge U \wedge T].$$

$$P[S \vee U|T] = \frac{P[(S \vee U) \wedge T]}{P[T]} =$$

$$= \frac{P[S \wedge T]}{P[T]} + \frac{P[U \wedge T]}{P[T]} - \frac{P[S \wedge U \wedge T]}{P[T]} =$$

$$= P[S|T] + P[U|T] - P[S \wedge U|T].$$

V Als $S_1, S_2, \ldots$ een exclusief systeem vormen voor de elementen waarbij T optreedt, dan is

$$P[\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i|T] = \frac{P[\bigvee_{i=1}^{\infty} S_i \wedge T]}{P[T]} = \frac{P[\bigvee_{i=1}^{\infty} (S_i \wedge T)]}{P[T]} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P[S_i \wedge T]}{P[T]} = \sum_{i=1}^{\infty} P[S_i|T].$$

q.e.d.

Tenslotte voeren wij nog het begrip <u>stochastische onafhankelijkheid</u> in. De eventualiteit S is per definitie stochastisch onafhankelijk van de eventualiteit T, als

(4;7) $$P[S|T]=P[S].$$

Volgens definitie (4;4) is dan

(4;8) $$P[S\wedge T]=P[S].\,P[T],$$

zodat dan ook geldt:

(4;9) $$P[T|S]=P[T].$$

De relatie van stochastische onafhankelijkheid is dus wederkerig. Tevens geldt, als S en T stochastisch onafhankelijk zijn:

(4;10) $$\begin{cases} P[S|T]=P[S|\bar{T}]=P[S], \\ P[\bar{S}|T]=P[\bar{S}|\bar{T}]=P[\bar{S}] \end{cases}$$

en analoog met verwisseling van S en T. Het bewijs van deze eigenschappen en van de hieronder volgende laten wij aan de lezer over.

(4;11) als $S\rightarrow T$ (d.w.z. als S T impliceert), dan is $P[S]\leqq P[T]$ en $P[S\wedge T] = P[S]$, $P[S\vee T] = P[T]$,

(4;12) is $P[S] = 1$, dan is iedere T stochastisch onafhankelijk van S.

Stochastische onafhankelijkheid voor meer dan twee eventualiteiten wordt als volgt gedefiniëerd. De eventualiteiten S_1, $S_2,\ldots,S_k$ (k mag ∞ zijn) zijn stochastisch onafhankelijk, indien voor ieder h-tal ($h\leqq k$) $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_h}$ daaruit geldt:

(4;13) $$P[\bigwedge_{j=1}^{h} S_{i_j}]=\prod_{j=1}^{h} P[S_{i_j}].$$

Dit impliceert o.a. dat ieder tweetal S_a, S_b stochastisch onafhankelijk is en ook, dat

(4;14) $$P[\bigwedge_{i=1}^{k} S_i]=\prod_{i=1}^{k} P[S_i]$$ (<u>bijzondere productregel</u>; voor onafhankelijke eventualiteiten)

Paarsgewijze onafhankelijkheid en het vervuld zijn van (4;14) zijn echter niet voldoende om (4;13) te garanderen. Een tegenvoorbeeld voor het tweede is als volgt te construeren. Laat Γ uit 30 elementen bestaan, aangegeven door de nummers 1,...,30 en laat deze alle een kans 1/30 bezitten. Beschouw nu de volgende kenmerken:

$$A: 1 \vee 2 \vee \ldots \vee 10$$

$$B: 1 \vee 2 \vee \ldots \vee 20$$

$$C: (1 \vee 2) \vee (11 \vee 12) \vee (21 \vee 22 \vee 23 \vee 24 \vee 25).$$

A en B zijn dan afhankelijk, want A impliceert B.
Toch is

$$P[A].P[B].P[C] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{30} = \frac{1}{15}$$

en

$$P[A \wedge B \wedge C] = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

Een voorbeeld van een drietal paarsgewijze onafhankelijke eventualiteiten, waarvoor echter de productregel niet opgaat, is een Γ met 12 elementen (1,...,12), die ieder een kans 1/12 bezitten en

$$A: 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4,$$

$$B: 1 \vee 2 \vee 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8,$$

$$C: 1 \vee 2 \vee 5 \vee 9 \vee 10 \vee 11.$$

De verificatie van de juistheid van deze bewering laten wij aan de lezer over.

Het is van belang na te gaan, wat de practische interpretatie van het onafhankelijkheidsbegrip is, d.w.z. wanneer wij twee of meer mogelijk optredende gebeurtenissen S en T in het model zullen voorstellen door onafhankelijke eventualiteiten. Volgens (4;10) houdt onafhankelijkheid van S en T in, dat de kans op S niet beïnvloed wordt door het al of niet optreden van T. Of anders gezegd: dat de informatie of T wel of niet optreedt ons geen informatie verschaft over het al of niet optreden van S. Dit is echter reeds min of meer een practische interpretatie en indien het practisch onaannemelijk geacht wordt, dat het al of niet optreden van T dat van S beïnvloedt, kan men deze twee dus door onafhankelijke eventualiteiten voorstellen. Men kan zich daarbij uiteraard vergissen, doch dat is bij modelkeuze altijd het geval. Verkeert men in twijfel, dan late men in het model een eventuele afhankelijkheid toe. Deze kan dan, zoals wij later zullen merken, statistisch onderzocht worden.

Voorbeelden

Op elkaar volgende worpen met een dobbelsteen, met de nodige voorzorgen uitgevoerd, worden gewoonlijk als onafhankelijk beschouwd, daar men aanneemt dat een dobbelsteen "geen geheugen heeft". Door verschillende waarnemers uitgevoerde wegingen van een zelfde object, zonder dat de waarnemers van elkanders uitkomsten op de hoogte zijn, zijn onafhankelijk (zouden zij elkanders uitkomsten kennen, dan is beïnvloeding, dus afhankelijkheid, van psychologische aard niet uitgesloten). Anderzijds betekent afhankelijkheid van twee eventualiteiten nog niet, dat er een direct oorzakelijk verband bestaat; er kan ook een derde verschijnsel zijn, dat de beide eerste beïnvloedt. Beschouwt men b.v. voor ieder der na-oorlogse jaren het aantal verkochte auto's en het aantal schoolkinderen, dan vertonen deze beide kenmerken een duidelijke afhankelijkheid: in de jaren met veel schoolkinderen waren er ook veel auto's. Toch schaft men gewoonlijk geen auto aan omdat men zijn kinderen naar school moet brengen; ook stuurt men niet meer kinderen naar school omdat men een auto heeft. Het is de parallelle stijging met de tijd, die hier het statistische verband veroorzaakt. Over een jaar of wat kan dit er trouwens weer heel anders uitzien. Men zij dus voorzichtig met de interpretatie van afhankelijkheden.

De definitie van LAPLACE komt nu als speciaal geval te voorschijn. Als model voor een symmetrisch spel (b.v. één worp met een zuivere dobbelsteen) wordt nl. uiteraard een Γ genomen, waarvan alle elementen (de elementaire mogelijke uitkomsten van het spel) gelijke kans bezitten. Voor n elementen dus ieder kans 1/n. Uit stelling 3;2 (de bijzondere optelregel) volgt dan direct dat de kans op een willekeurige eventualiteit in zo'n geval berekend kan worden volgens de definitie van LAPLACE.

Opmerkingen

De hier beschreven practische interpretatie van het kansbegrip, als een model-analogon van een fq, wordt de frequentie-interpretatie genoemd. Naast deze interpretatie zijn nog verschillende andere ontwikkeld, waaronder ook van subjectivistische aard: een kans wordt dan opgevat als een "graad van redelijk geloof" in het optreden van een eventualiteit. Wij houden ons in deze cursus geheel aan de frequentie-interpretatie, die wegens zijn objectief en verifiëerbaar karakter een hechtere basis voor de toepassingen geeft dan de andere interpretaties.

Literatuur

De axiomatiek van de kansrekening is afkomstig van A KOLMOGOROV, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlijn 1933; Chelsea Publishing Co, New York 1946.

5. Voorbeelden van het berekenen van kansen

Ter illustratie van het gebruik van de axioma's geven wij in dit hoofdstuk een aantal elementaire voorbeelden van berekeningen van kansen.

Voorbeeld 5;1

Van een produkt dat aan de lopende band gemaakt wordt, bezit 10% een afwerkingsfout. Men kiest onafhankelijk van elkaar twee exemplaren van het produkt als deze van de band komen. Wat is de kans dat beide goed zijn, dat beide fout zijn en dat er één goed en één fout is? Wanneer men weet dat er één goed is en één fout, hoe groot is dan de kans dat eerst een goed en daarna een fout exemplaar werd aangetroffen?

Oplossing

Geven wij een goed exemplaar aan door het kenmerk S ("succes") en een fout door het kenmerk M ("mislukking"), dan is $P[M] = 0,1$ en (3.10) $P[S] = 0,9$. Daar de beide uitvoeringen van het experiment onafhankelijk zijn, is (4;8) van toepassing, dus is

$$P[SS]=0,81\ ,\quad P[SM]=P[MS]\ 0,09\ ,\quad P[MM]=0,01$$

Verder is volgens (3;8)

$$P[SM\vee MS]=P[SM]+P[MS]=0,18\,,$$

zodat definitie (4;4) geeft:

$$P[SM\,|\,SM\vee MS]=\frac{P[SM\wedge(SM\vee MS)]}{P[SM\vee MS]}=\frac{P[SM]}{P[SM\vee MS]}=\frac{0,09}{0,18}=\frac{1}{2}$$

Hetzelfde geldt voor de voorwaardelijke kans $P[MS\,|\,SM\vee MS]$ en dus is

(5;1)

$$P[SM\,|\,SM\vee MS]=P[MS\,|\,SM\vee MS]=\frac{1}{2}\,.$$

Men kan op dezelfde wijze, als hier is aangegeven, nagaan dat het resultaat (5;1) ook verkregen wordt, wanneer $P[M] = p$ en $P[S] = q = 1-p$ is.

Voorbeeld 5;2

Een doos bevat 100 briefjes waarop de getallen 00 t/m 99 geschreven zijn. Deze briefjes worden, nadat zij eerst grondig dooreen geschud zijn, één voor één blindelings uit de doos genomen en in volgorde van trekking neergelegd. Hoe groot is de kans, dat zij in een bepaalde van tevoren gegeven volgorde zullen komen te liggen.

Oplossing

Als model nemen wij in dit geval, dat bij elke trekking ieder der nog in de doos aanwezige briefjes gelijke kans bezit om bij de eerstvolgende trekking getrokken te worden. Als de briefjes even groot, even zwaar, even glad en op dezelfde wijze gevouwen (of niet gevouwen) zijn, kortom als men de voorzorg neemt ze - afgezien van hun nummer - vrijwel identiek te maken, voldoet dit model - naar experimenteel aangetoond kan worden - goed.[1)] Door dit model is het kansveld volledig beschreven.

De kans, dat de briefjes b.v. in de volgorde 00,01,02,...,99 getrokken zullen worden is nu gemakkelijk te berekenen met behulp van stelling 3;6. Geven wij het nummer van de trekking aan met een index, dan is, daar in dit geval de definitie van LAPLACE toepasbaar is:

$$P[1_1] = \frac{1}{100}, P[2_2 | 1_1] = \frac{1}{99}, P[3_3 | 1_1 \wedge 2_2] = \frac{1}{98}, \quad \text{enz.},$$

dus volgens stelling 3;6

$$(5;2) \qquad P[1_1 \wedge 2_2 \wedge \ldots\ldots \wedge n_n] = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99} \;\ldots\ldots\; \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{100!} .$$

De kans dat de briefjes in de volgorde 00 t/m 99 getrokken worden is dus $\frac{1}{100!}$. Ditzelfde geldt ook voor iedere andere volgorde, m.a.w. alle 100! permutaties hebben kans $\frac{1}{100!}$.

Bevatte de doos n briefjes met de getallen 1 t/m n, dan hebben alle n! permutaties de gelijke kans $\frac{1}{n!}$.

----

1) Daarbij valt op te merken, dat het dan niet nodig is tussen ieder tweetal trekkingen opnieuw te schudden; éénmaal grondig schudden van tevoren is genoeg.

Opmerking

Trekkingen, waarbij alle nog aanwezige briefjes (of in het algemeen elementen) gelijke kans hebben om getrokken te worden, worden aselecte trekkingen[1] genoemd. Wij hebben hier met aselecte trekkingen zonder teruglegging te maken. Wordt ieder getrokken briefje voor de uitvoering der volgende trekking weer in de doos gelegd, dan zijn het aselecte trekkingen met teruglegging; maar dan is schudden voor iedere trekking nodig.

Voorbeeld 5;3

Uit een doos met n briefjes worden aselect en zonder teruglegging $k(k \leqq n)$ briefjes getrokken. Hoe groot is de kans, dat deze de nummers 1,...,k in één of andere volgorde bevatten?

Oplossing

De kans, dat deze k briefjes de nummers 1,...,k in de natuurlijke volgorde dragen is, zoals direct uit het vorige voorbeeld blijkt

$$P[1_1 \wedge 2_2 \wedge \ldots \wedge k_k] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Voor iedere andere gegeven volgorde van deze k nummers geldt hetzelfde en daar er slechts één volgorde uit kan komen, is volgens stelling 3;2 (de bijzondere optelregel), de kans dat deze nummers er in de één of andere volgorde uit zullen komen gelijk aan de som van deze kansen. Daar er k! verschillende volgorden mogelijk zijn, is de gezochte kans gelijk aan

$$(5;3) \qquad \frac{k!\,(n-k)!}{n!} = \binom{n}{k}^{-1}.$$

Opmerking

Deze uitkomst geldt uiteraard niet alleen voor de nummers 1,...,k, doch voor ieder k-tal. De kans op ieder k-tal is dus dezelfde, zoals uit symmetrie-overwegingen reeds zonder meer te zien is. Daar er $\binom{n}{k}$ verschillende k-tallen zijn, volgt (5;3) hieruit met behulp van stelling 3;4. Een aselect zonder teruglegging getrokken k-tal wordt, indien de volgorde van trekking

----

1) Deze term is geïntroduceerd door Prof. Dr D. VAN DANTZIG.

buiten beschouwing gelaten wordt, een steekproef van de omvang k genoemd.

Wanneer men in de praktijk een dergelijke steekproef moet nemen, dan kiest men deze uit de populatie met behulp van een lijst met aselecte cijfers (random digits). Een dergelijke lijst bestaat uit rijen cijfers die verkregen zijn door onderling onafhankelijke trekkingen met teruglegging uit de getallen 0 t/m 9. Bij iedere trekking hebben dus alle waarden 0 t/m 9 een gelijke kans van $\frac{1}{10}$ om getrokken te worden. In een lijst met aselecte cijfers kan men ook steeds een gelijk aantal cijfers combineren; er ontstaan dan aselecte getallen. Combineert men bijvoorbeeld steeds drie cijfers, dan verkrijgt men aselecte getallen tussen 000 en 999. Een steekproef van 25 stuks wordt nu uit een monster van 1000 genummerde exemplaren genomen door 25 aselecte getallen van drie cijfers op te zoeken en de met deze getallen corresponderende exemplaren te controleren.

Over het opstellen van lijsten met aselecte cijfers/getallen en over hun eigenschappen zal in het hoofdstuk over Monte-Carlo-methoden uitvoerig worden gesproken.

Voorbeeld 5;4

Men zoekt in een tabel met aselecte cijfers 10 getallen op tussen 00 en 24. Hoe groot is de kans dat hierbij twee of meer gelijke getallen gevonden worden?

Oplossing

De gebeurtenis, het getal ligt tussen 00 en 24, geven wij aan met het kenmerk A. Alleen getallen met het kenmerk A kunnen gebruikt worden. Onder de voorwaarde dat A heeft plaatsgevonden, is de kans dat het getal ab getrokken wordt af te leiden met (4;4), (4;11)en (4;8). Men vindt

$$(5;4) \qquad P[ab\,|\,A] = \frac{P[ab \wedge A]}{P[A]} = \frac{P[ab]}{P[A]} = \frac{P[a].\,P[b]}{P[A]} = \frac{(\frac{1}{10})^2}{\frac{25}{100}} = \frac{1}{25}.$$

Onder de voorwaarde dat het aselecte getal ligt tussen 00 en 24 is de kans voor ieder getal dus even groot en wel $\frac{1}{25}$.

De gevraagde kans is één min de kans dat de aselecte getallen alle ongelijk zijn. Geven wij het eerste gevonden aselecte getal aan met a_1, het tweede met a_2, enzovoorts, dan is

$$(5;5)\quad P[a_{10}\neq a_9\neq \dots \neq a_1] = P[a_2\neq a_1]\cdot P[a_3\neq a_2\neq a_1 | a_2\neq a_1]\dots$$

$$\dots P[a_{10}\neq a_9\neq \dots\neq a_1 | a_9\neq a_8\neq \dots\neq a_1] = \frac{24}{25}\cdot\frac{23}{25}\dots\frac{16}{25} =$$

$$\frac{24.23\dots16}{25^9} = \frac{24!}{25^9.15!} = 0{,}12 .$$

en de gezochte kans is dus 1 - 0,12 = 0,88.

Voorbeeld 5;5

Uit een doos met M witte en N zwarte knikkers worden aselect k knikkers genomen. Hoe groot is de kans, dat k^e knikker wit is.

A. als de trekkingen met teruglegging geschieden,

B. als de trekkingen zonder teruglegging geschieden.

Oplossing

Bij trekkingen met teruglegging is de k^e trekking een aselecte trekking uit dezelfde verzameling knikkers als de eerste, zodat volgens de definitie van LAPLACE de gevraagde kans gelijk is aan

$$(5;6)\qquad \frac{M}{M+N} .$$

Bij trekkingen zonder teruglegging is de samenstelling van de knikker-verzameling bij de k^e trekking niet dezelfde als bij de eerste, maar hangt van de resultaten der eerste k-1 trekkingen af. Toch is de uitkomst dezelfde als eerst, zoals op de volgende wijze in te zien is. Als wij na de k^e trekking doorgaan tot alle M+N knikkers getrokken zijn, beïnvloeden wij het resultaat van de k^e trekking niet. Denken wij de knikkers genummerd van 1,..., M+N, dan zijn alle (M+N)! permutaties der trekkingsvolgorde even waarschijnlijk, zodat alle knikkers dezelfde kans bezitten om de k^e getrokkene te zijn. Er zijn dus voor de k^e trekking weer M+N mogelijkheden met gelijke kansen, waaruit volgt dat de kans op een witte k^e knikker weer gelijk is aan

$$\frac{M}{M+N} .$$

Opmerking

De berekende kans is de onvoorwaardelijke kans, dat de k^e knikker wit is. De voorwaardelijke kans hierop, bij gegeven resultaat van de eerste k-1 trekkingen is afhankelijk van dit resultaat en dus in het algemeen niet gelijk aan $^{M}/M+N$. Het verschil tussen aselecte trekkingen met en zonder teruglegging is dus, dat in het eerste geval de trekkingen stochastisch onafhankelijk zijn (anders gezegd: de kans is bij iedere trekking opnieuw, wat ook de vorige voor resultaat geven, dezelfde), terwijl in het laatste geval de trekkingen stochastisch afhankelijk zijn, ook al is de onvoorwaardelijke kans voor alle trekkingen dezelfde.

Voorbeeld 5;6

Iemand passeert elke ochtend op weg van zijn huis naar kantoor een brug, die de ene keer geopend is, een andere keer gesloten. Als hij heeft opgemerkt dat de brug één op de tien keer geopend is, hoe groot is dan de kans P_4 dat hij precies vier keer in eenmaand van 25 werkdagen moet wachten? En hoe groot is de kans dat hij minstens viermaal moet wachten?

Oplossing

Wij noemen een gesloten brug een succes (S) en een open brug een mislukking (M) en geven de kans op succes aan met p, de kans op mislukking met q = 1-p en het aantal experimenten (hier bijvoorbeeld autoritjes van huis naar kantoor) met n.

De trekkingen zijn onafhankelijk (zie opmerkingen bij voorbeeld 5), zodat wij de bijzondere produktregel (4;14) kunnen toepassen. Daaruit volgt, dat de kans op een rij uitkomsten van de vorm

$$SSMSMM \ldots\ldots M$$

gelijk is aan

$$ppqpqq \ldots\ldots\ldots q,$$

dus, als er in die rij k successen en n-k mislukkingen voorkomen, gelijk aan $p^k\, q^{n-k}$. Het aantal verschillende rijen met k successen en n-k mislukkingen is gelijk aan het aantal k-tallen plaatsen onder n plaatsen, dus $\binom{n}{k}$. Volgens de bijzondere optelregel is dus

(5;7) $$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \left(\text{met } \binom{n}{0} = 1\right).$$

Vullen wij in (5;7) de waarden n=25, k = 25-4 = 21 en p=0,1 in, dan vinden wij dat het antwoord op de eerste vraag luidt

$$(5;8)\qquad P_4 = \binom{25}{4}(0{,}1)^4\,(0{,}9)^{21} = 0{,}14\,.$$

Het antwoord op de tweede vraag wordt gevonden door de in (5;7) opgegeven kansen P_k na invullen van n=25 en p=0,9 te sommeren van k=4 tot k=25. Het resultaat is

$$(5;9)\qquad \sum_{k=4}^{25}\binom{25}{k}(0{,}1)^k\,(0{,}9)^{25-k} = 0{,}24\,.$$

Opmerking

De grootheid k kan de waarde 0,1,...,n aannemen. Daar deze n+1 mogelijkheden een kategorisch systeem vormen, geldt volgens stelling 3;3

$$(5;10)\qquad \sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = 1\,,$$

hetgeen overeenkomt met de binomiale ontwikkeling van

$$(p+q)^n.$$

De hier gevonden kansen P_k behoren bij de binomiale verdeling waarop wij onder andere in hoofdstuk III terugkomen.

Voorbeeld 5;7

Een rij van N posten in een kasboek moet nagekeken worden om te controleren of er veel fouten gemaakt zijn. Men neemt een steekproef zonder terugleggen van n exemplaren. Hoe groot is de kans dat er k fouten aangetroffen worden, wanneer er in totaal F gemaakt zijn?

Oplossing

Volgens voorbeeld 3 hebben alle $\binom{N}{n}$ n-tallen gelijke kans om getrokken te worden. De steekproef bezit het gezochte kenmerk, wanneer er k posten zijn met een fout en n-k zonder fout. Uit de F posten met een fout kunnen $\binom{F}{k}$ verschillende k-tallen gekozen worden en uit de N-F posten zonder fout $\binom{N-F}{n-k}$ (n-k)-tallen. Onder de $\binom{N}{n}$ n-tallen zijn er dus

$$\binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k}$$

met het gevraagde kenmerk, zodat volgens de definitie van LAPLACE geldt:

(5;11) $$P'_k = \frac{\binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Opmerking

De grootheid k neemt nu gehele waarden aan tussen max(n-N+F,0) en min(F,n), deze grenzen inbegrepen. Buiten deze grenzen is $P_k = 0$ en het rechterlid van (5;11) ook volgens de afspraak dat $\binom{a}{b} = 0$ als $b < 0$ of $> a$. Derhalve geldt volgens stelling 3;3

(5;12) $$\sum_k \binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

Als n, dus ook k klein is ten opzichte van F en N-F, dan is

(5;13) $$P'_k \approx P_k \quad \text{met} \quad p = \frac{F}{N}.$$

Dit is als volgt in te zien.

$$P'_k = \frac{F!}{k!(F-k)!} \cdot \frac{(N-F)!}{(n-k)!(N-F-n+k)!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!}$$

Hierin is als $k << F$

$$\frac{F!}{(F-k)!} = F(F-1)\ldots\ldots(F-k+1) \approx F^k$$

en, als $n-k << N-F$

$$\frac{(N-F)!}{(N-F-n+k)!} = (N-F)(N-F-1)\ldots\ldots(N-F-n+k+1) \approx (N-F)^{n-k}$$

Voor $n << N$ is verder

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\ldots\ldots(N-n+1) \approx N^n.$$

Vult men deze drie benaderingen, samen met $\frac{F}{N} = p$ in (5;11) in, dan vindt men

(5;14) $$P'_k \approx \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Hieruit blijkt - wat ook zonder bewijs wel duidelijk is - dat het niet terugleggen der getrokken elementen wel verwaarloosd kan worden zolang het er slechts weinig zijn in vergelijking met de aanwezige elementen, die dezelfde kenmerken dragen.

Voorbeeld 5;8

Wanneer in voorbeeld 7 het aantal posten 150 bedraagt, het aantal fouten 10 en de steekproef 50 posten omvat, hoe groot is dan de kans, dat geen enkele fraude ontdekt wordt?

Oplossing

In dit voorbeeld is N=150, F=10 en n=50, terwijl het vinden van geen enkele fout betekent, dat k=0 is. Substitutie van deze waarden in (5;11) geeft dan voor de gezochte kans

$$(5;15) \qquad P_0' = \frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{140}{50}}{\binom{150}{50}} = 0{,}015$$

Voorbeeld 5,9

Een bureau voor marktanalyse heeft voor zijn consumentenpanel 10 arbeidersgezinnen uit een provincieplaats nodig. Uit ervaring weet men dat het bij huisbezoek gelukt 40% van de bezochte gezinnen te overreden aan het panel deel te nemen. Hoe groot is de kans dat men bij het 20ste bezoek de 10de deelnemer vindt?

Oplossing

De gezochte kans is gelijk aan de kans, dat bij de eerste 19 bezoeken 19 successen verkregen worden en bij het 20ste ook een succes. De kans op het laatste is $\frac{2}{5}$ en die op het eerste wordt door (5;7) gegeven met n=19, k=q, $p=\frac{2}{5}$ en $q=\frac{3}{5}$.

Wegens de onafhankelijkheid der experimenten moeten deze beide kansen met elkaar vermenigvuldigd worden, hetgeen leidt tot

$$(5;16) \qquad Q_{20} = \binom{19}{9}\left(\tfrac{2}{5}\right)^{10}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{10} = 0{,}059$$

Algemeen geldt voor een reeks van onafhankelijke experimenten, ieder met kans p op succes, die wordt voortgezet tot precies k successen verkregen zijn, dat de kans Q_n, dat hiervoor n experimenten nodig zijn, gelijk is aan

$$(5;17) \qquad Q_n = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \qquad (q = 1-p)$$

Voorbeeld 5,10[1]

Een dictator, die van oordeel is, dat de verhouding van het

1) Dit voorbeeld werd mij medegedeeld door Prof. Dr N.G. de Bruijn. Het heeft niet direct betrekking op het berekenen van kansen, maar dient ter illustratie van het onafhankelijkheidsbegrip.

aantal jongensgeboorten tot het aantal meisjesgeboorten niet groot genoeg is, vaardigt een wet uit, die inhoudt dat in een gezin, waarin een meisje geboren is verder geen kinderen ter wereld mogen komen. Wat is de invloed van deze maatregel, indien aangenomen mag worden dat het geslacht van een nieuwe baby onafhankelijk is van dat van eventuele vroegere baby's van het gezin, terwijl de kans op een jongensgeboorte voor alle gezinnen dezelfde is?

Oplossing

Daar het door deze maatregel aan gezinnen, waarin een meisje geboren is, verboden wordt nog meer kinderen te krijgen, zal het totale aantal geboorten dalen, indien daar geen compensatie tegenover wordt gesteld. Onder de gestelde omstandigheden wordt echter de verhouding tussen de aantallen jongens- en meisjesgeboorten niet beïnvloed, daar bij iedere nieuwe geboorte de kans op een jongen gelijk aan p is, in welk gezin deze geboorte ook plaats vindt. Men kan het ook zo stellen; de ooievaar, die de kinderen brengt, neemt telkens een baby aselect uit een voorraad, waarin een vaste verhouding der geslachten aanwezig is. Door de invoering van de nieuwe wet brengt hij sommige baby's op andere adressen dan anders het geval zou zijn geweest, maar hij put ze op dezelfde wijze uit zijn voorraad, zodat er, afgezien van een zekere vertraging in de aflevering, niets aan de situatie verandert.

Opmerking

Indien de kans op een jongensgeboorte van gezin tot gezin verschilt heeft de maatregel wel invloed op de geslachts-samenstelling van de bevolking. Immers dan wordt de omvang van gezinnen met een kleinere kans op jongens sterker verkleind dan die met een grotere kans op jongens, omdat in de regel in de eerstgenoemde gezinnen eerder een meisje geboren wordt dan in de laatstgenoemde.

Voorbeeld 5;11

Op een cursus is afgesproken, dat alleen kan worden begonnen, wanneer de docent en alle cursisten aanwezig zijn. In het verleden is gebleken dat de docent één op de tien keer te laat komt en dat er één op de vijf keer een cursist te laat komt. Verder heeft de concierge opgemerkt dat de cursus één op de vijf keer te laat begint. Welke conclusie kunt U hieruit trekken over het al dan niet stochastisch onafhankelijk zijn van het te laat komen van cursisten en docent?

Oplossing

Noemen wij te laat komen van de docent gebeurtenis A en te laat komen van een cursist gebeurtenis B, dan is $P[A] = \frac{1}{10}$ en $P[B] = \frac{1}{5}$. De cursus begint te laat, wanneer de gebeurtenis $A \vee B$ optreedt. Uit

$$P[A \vee B] = P[A] + P[B] - P[A \wedge B],$$

samen met de gegevens volgt $P[A \wedge B] = \frac{1}{5}$. Wegens $P[A].P[B] = \frac{1}{50}$ is $P[A \wedge B] \neq P[A].P[B]$ en dus zijn de gebeurtenissen A en B niet stochastisch onafhankelijk.

De voorwaardelijke kansen $P[A|B]$ en $P[B|A]$ zijn respectievelijk

$$P[A|B] = \frac{P[A \wedge B]}{P[B]} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$$

en

$$P[B|A] = \frac{P[A \wedge B]}{P[A]} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = 1$$

6. Het meten van kansen

In de vorige paragraaf zijn een aantal voorbeelden gegeven van het berekenen van kansen. Meestal geschiedde dit op grond van gegeven kansen, maar soms, zoals in voorbeeld 6, door de berekening te baseren op een gegeven kans p, die dan ook in het resultaat (5;7) voorkomt. In alle voorbeelden, op het tiende na, konden de gevraagde kansen expliciet berekend worden. In feite werd in al die gevallen, waarin numerieke uitkomsten verkregen zijn, uitgegaan van de gelijkheid van een aantal kansen.

Voor de practische toepassing van de kansrekening kan men echter met de beheersing van dergelijke eenvoudige situaties niet volstaan. Algemeen geldt, dat het voor de toepasbaarheid van een axiomatisch uitgevoerd maatbegrip nodig is dit ook practisch meetbaar te maken, d.w.z. experimentele middelen aan te geven om er in practijkproblemen een (min of meer) bepaalde waarde aan toe te kennen. Denkt men b.v. aan het begrip "lengte", dan zal men een practisch uitvoerbare procedure aan moeten geven, die aan de volgende eisen voldoet.

a. Men moet na kunnen gaan of twee voorwerpen even lang zijn en, zo neen, welk het langst is.

b. Men voert een materiële standaard (standaardmeter) in.

c. Op grond van a en b moet aan ieder voorwerp een getal als lengte toegevoegd kunnen worden.

Pas als aan deze eisen voldaan is, kan de theorie ook in toepassing gebracht worden en deze toepassing strekt zich dan ook alleen uit tot objecten, waarvoor instrumenten ontworpen zijn, waarmee aan deze eisen voldaan kan worden.

Hetzelfde geldt voor het kansbegrip en de theorie daarvan (de kansrekening). Het instrumentarium, dat aan de toepasbaarheid ten grondslag ligt, wordt grotendeels geleverd door de statistiek.

Punt b is daarbij het eenvoudigst, daar een absolute maat voor het kansbegrip reeds in de axioma's II en III vervat is. Men kan dan ook langs eenvoudige weg en met simpele middelen een kans van willekeurige gegeven grootte "construeren".

De punten a en c eisen meer voorbereiding. Men ontmoet in de statistiek de oplossing van a resp. c in de vorm van statistische toetsen voor de hypothesen dat twee onbekende kansen gelijk zijn resp. dat een onbekende kans een gegeven waarde bezit. De theorie der betrouwbaarheidsintervallen - ten nauwste verbonden met de toetsingstheorie - maakt het mogelijk grenzen aan te geven voor het verschil tussen twee onbekende kansen resp. de waarde van één onbekende kans, terwijl de schattingstheorie de middelen beschrijft om een zo goed mogelijke getalwaarde ("schatting") van kansen en verschillen daarvan te verkrijgen en de nauwkeurigheid daarvan te onderzoeken. Al deze methoden berusten op de verwerking van waarnemingen, die verricht dienen te worden onder zodanige voorwaarden, dat de wiskundige modellen, waarop deze statistische methoden berusten, een getrouwe afspiegeling van de werkelijkheid vormen.

Wij zullen deze methoden, die overigens slechts een klein deel van de statistiek vormen, in deze cursus niet volledig behandelen, maar wel voorzover wij ze in de latere hoofdstukken nodig hebben.

Errata bij

Rapport S 265 (C13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk I

pag.	regel	staat	moet staan
2	9 v.b.	mogen	morgen
5	10 v.o.	SUSSKIND	SÜSSKIND
6	9 v.b.	fan	van
9	4 v.b.	enquete	enquête
10	onder 3 v.o.	tussenvoegen: lijke als voor voorwaardelijke fqn gelden. Bij de bewijzen van deze stellingen wordt bovendien steeds gebruik gemaakt van	
12	14 v.b.	S_2	S_i
13	5 v.o.	exclusief vormen	exclusief systeem vormen
19	13 v.b.	b_i	6_i
	17 v.b.	$fq(\bar{S}_1).$	$fq(\bar{S}_1),$
24	14 v.b.	$P[S \vee U \mid T] =$	$\therefore P[S \vee U \mid T] =$
28	11 v.o.	en (3.10)	en volgens (3.10)
	9 v.o.	$P[MS]\ 0{,}09$	$P[MS] = 0{,}09$
33	18 v.o.	succes	mislukking
	17 v.o.	mislukking	succes
	9 v.o.	p p q p q q ... q	q q p q p p ... p
	10 v.o.	k successen en n-k mislukkingen	k mislukkingen en n-k successen
	9 v.o.	successen	mislukkingen
	8 v.o.	mislukkingen	successen
34	3 v.b.	p=0,9	p=0,1
35	5 v.b.	$P_k = 0$	$P'_k = 0$
36	15 v.o.	k=q	k=9
	3 v.o.	werd mij	werd
38	3 v.o.	uitgevoerd	ingevoerd