STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk II

Grondbegrippen uit de Differentiaal- en Integraalrekening

door

A.H. Haitsma

Februari 1960

1. De begrippen getallenrechte, functie en rij.

Getallenrechte. Grafisch kan men de reële getallen voorstellen door punten op een lijn. Aan twee punten van de lijn wijst men dan resp. de getallen 0 en 1 toe. De afstand tussen deze twee punten dient dan als de schaal waarmee aan elk getal een punt op de lijn wordt toegekend. Kiest men zoals gebruikelijk het eenheidspunt rechts van het nulpunt, dan liggen alle positieve getallen rechts van het nulpunt en alle negatieve getallen links van het nulpunt.

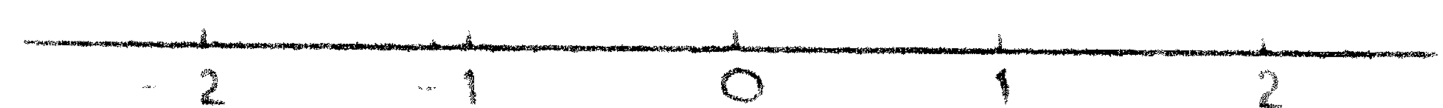

fig. 1

De getallenrechte

De afstand van een punt van de getallenrechte tot het nulpunt noemt men de absolute waarde van het getal, dat bij dat punt behoort. De absolute waarde van een getal a wordt met $|a|$ aangegeven. Er geldt nu:

$$|a| = a \text{ als } a > 0, \quad |a| = -a \text{ als } a < 0 \tag{1.1}$$

$$|a \pm b| \geq |a| - |b| \tag{1.2}$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b| \tag{1.3}$$

$$|ab| = |a||b| \tag{1.4}$$

Een interval is de verzameling van alle reële getallen, gelegen tussen twee vaste getallen a en b $(a < b)$. Een interval correspondeert dus op de getallenrechte met een lijnstuk. Al naar gelang de eindpunten van het interval tot de verzameling behoren of niet, spreekt men van gesloten of open intervallen. Een gesloten interval geeft men aan met:

$$a \leq x \leq b, \text{ of } [a,b] \tag{1.5}$$

Een open interval met:

$$a < x < b \quad \text{of } (a,b) \tag{1.6}$$

Een interval kan naar één van beide zijden onbegrensd zijn. Een dergelijke interval wordt bijvoorbeeld gevormd door alle getallen kleiner of gelijk aan een gegeven getal a. Men geeft het aan met:

$$x \leq a \qquad \text{of} \qquad -\infty < x \leq a. \tag{1.7}$$

In het bijzonder stelt de getallenrechte een naar beide zijden onbegrensd interval voor.

Functies. Een voorschrift dat aan elk getal x uit een verzameling (bijv. een interval) een getal y toevoegt noemt men een functie. Symbolisch schrijft men:

$$y = f(x) \tag{1.8}$$

Men noemt x de onafhankelijke en y de afhankelijke variabele.

Voorbeeld 1.1. Beschouw de getallenverzameling $\{1,2,3,4\}$, en stel aan deze getallen resp. de getallen 7,4,3 en 5 toegevoegd. Dus:

$$f(1) = 7 \quad f(2) = 4 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = 5 \tag{1.9}$$

In dit voorbeeld is de functie rechtstreeks vastgelegd, door bij elk getal uit de oorspronkelijke verzameling de functiewaarde te geven. Veelal is een functie niet op deze rechtstreekse wijze vastgelegd, maar wordt de functie bepaald door een rekenvoorschrift.

Voorbeeld 1.2.

$$\begin{array}{lll} y = \frac{1}{2} & \text{voor} & x \leq 0 \\ y = x + \frac{1}{2} & \text{"} & 0 < x < 1 \\ y = \frac{5}{2} - x & \text{"} & x \geq 1 \end{array} \tag{1.10}$$

Door dit rekenvoorschrift is bij elke x ondubbelzinnig een y vastgelegd. Grafisch kan deze functie in een rechthoekig coördinatenstelsel als volgt voorgesteld worden:

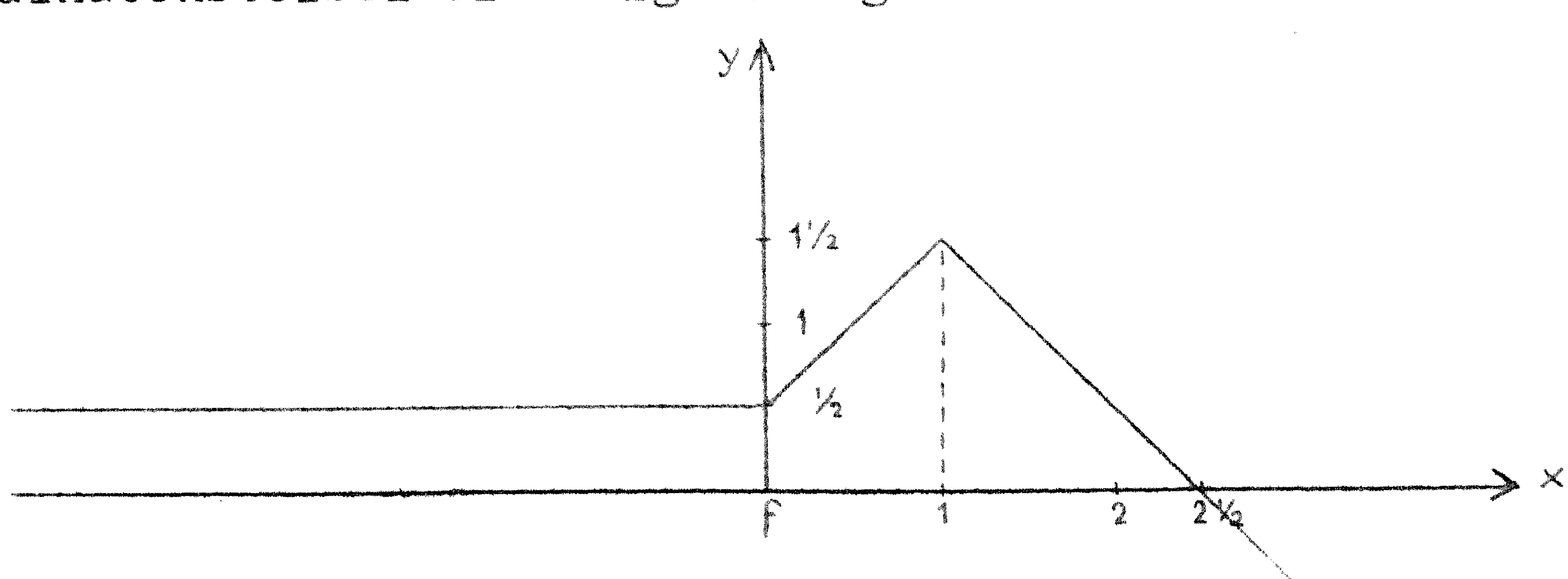

fig. 1.2

Grafische voorstelling van de functie (1.10)

Opm.: Het is zoals uit voorbeeld 1.2 blijkt niet noodzakelijk dat aan verschillende waarden van de onafhankelijke variabele x verschillende waarden van de afhankelijke variabele y zijn toegevoegd. Zo is hier de waarde $y=\frac{1}{2}$ toegevoegd aan alle $x \leq 0$.

De kromme die in figuur (1.2) is getekend is een samenhangende kromme. Anders gezegd: Een kleine verandering in de waarde van x leidt tot een slechts kleine verandering in de waarde van y. Een functie met deze eigenschap noemt men een continue functie. We zullen dit begrip nog in meer wiskundige termen bespreken.

Een functie die voor alle waarden van de onafhankelijke variabele dezelfde waarde $y=a$ aanneemt wordt een constante genoemd. Bekijken wij de functie (1.10) alleen in het interval $x \leq 0$, dan zien we dat in dat interval $y=\frac{1}{2}$ is. De grafische voorstelling van de functie is in dat interval een horizontale rechte lijn.

Een functie waarvoor een toename van de onafhankelijke variabele x, voor iedere x gepaard gaat met een toename van de afhankelijke variabele y wordt een monotoon stijgende functie genoemd. Gaat een toename voor iedere x gepaard met een afname van y, dan spreekt men van een monotoon dalende functie. Grafisch worden deze functies voorgesteld door krommen welke respectievelijk stijgen of dalen wanneer de x-as van links naar rechts doorlopen wordt. In het interval $0 < x < 1$ is de functie (1.10) monotoon stijgend; voor $x \geq 1$ is deze functie monotoon dalend.

Door het functieverband wordt aan elke x een y toegevoegd. Omgekeerd zullen aan elke y-waarde één of meer x-waarden toegevoegd zijn, nl. al die x-waarden, waaraan dezelfde y-waarde is toegevoegd. Deze toevoeging bepaalt een nieuwe functie, welke de inverse functie van de oorspronkelijke functie wordt genoemd. Wanneer elke y-waarde slechts aan één x-waarde is toegevoegd is de inverse functie eenduidig. Geven we de inverse functie aan met:

$$x = \varphi(y), \tag{1.11}$$

dan is de inverse functie van de functie $y = f(x)$ gedefiniëerd in voorbeeld 1.1 bepaald door:

$$\varphi(7) = 1 \quad \varphi(4) = 2 \quad \varphi(3) = 3 \quad \varphi(5) = 4 \,. \tag{1.12}$$

Deze functie $y = f(x)$ bezit dus een eenduidige inverse functie. In het bijzondere geval, waarin een functie $y = f(x)$ in een interval monotoon en continu is, correspondeert met elke waarde van x één waarde van y en een kleine verandering van x gaat gepaard met een kleine verandering van de overeenkomstige y-waarde. De inverse functie van een continue monotone functie zal dus ook weer continu en monotoon zijn. Een exact bewijs van deze stelling zullen we hier niet geven.

Rijen. Een bijzonder type functie ontstaat als de onafhankelijke variabele, die we hier met n aangeven, alleen gehele positieve waarden aanneemt. De gehele positieve getallen worden de natuurlijke getallen genoemd.

Voorbeeld 1.3. De som van de eerste n natuurlijke getallen:

$$S(n) = 1+2+3+ \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \tag{1.13}$$

is een functie van n.

Voorbeeld 1.4. Het gedurig product van de eerste n natuurlijke getallen:

$$n! = 1\,2 \ldots (n-1)\,n \tag{1.14}$$

(Voor n! leze men n faculteit)

Voorbeeld 1.5. De binomiaal coëfficiënten worden als volgt gedefiniëerd:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1) \ldots (n-k+1)}{1\,2 \ldots k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{1.15}$$

(Voor $\binom{n}{k}$ leze men: n boven k).

De binomiaalcoëfficiënten ontstaan wanneer men $(a+b)^n$ in termen van a en b gaat uitschrijven:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \tag{1.16}$$

Definieert men nu: $0!=1$, dan kan men (1.16) schrijven als:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \tag{1.17}$$

In het laatste lid van (1.17) staat nu in beknopte vorm het tweede lid herhaald.

Functies, waarbij de onafhankelijke variabele alleen gehele waarden aanneemt, komen meestal voor in de vorm van rijen van getallen. Onder een rij van getallen verstaan we een geordende rij van eindig of oneindig veel getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, niet noodzakelijk verschillend, welke door een of ander voorschrift zijn vastgelegd.

Voorbeelden van dergelijke rijen zijn onder andere:

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{n^2}{n!}$ en $a_n = (-1)^n$

2. Limieten.

Limiet van een rij getallen. We beschouwen de rij $a_n = \frac{1}{n}$. Geen enkel getal van deze rij is gelijk aan nul, maar hoe groter n wordt gekozen, des te dichter ligt a_n bij nul. Kiezen we nu een willekeurig klein interval $(0,\varepsilon)$, dan is er altijd een getal N te vinden, zodanig dat alle a_n waarvoor $n \geq N$ binnen dit interval liggen. Kiest men nl. $N > \frac{1}{\varepsilon}$ dan zal voor alle a_n met $n \geq N$ $a_n < \varepsilon$ zijn. We zeggen nu dat de rij a_n naar nul convergeert, of dat de limiet van de rij a_n voor n naar oneindig de waarde 0 heeft.
Symbolisch:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{2.1}$$

Definitie van de limiet. Wanneer voor een oneindige rij van getallen $a_1, a_2, \ldots$ bij elk positief getal ε een getal N gevonden kan worden, zodanig dat voor alle $n > N$ geldt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{2.2}$$

dan heeft de rij a_n de limiet a, dus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{2.3}$$

Het getal N in de bovenstaande definitie mag afhankelijk zijn van de gekozen ε_n en kan ook aangegeven worden met $N(\varepsilon)$.

Voorbeeld 2.1. Een ander voorbeeld van een convergente rij is:

$$a_n = \frac{n^2}{n!} \tag{2.4}$$

We zullen aantonen dat de limiet van de rij (2.4) gelijk 0 is. Bewezen moet dus worden, dat er een $N(\varepsilon)$ bestaat zodanig dat voor $n > N(\varepsilon)$ geldt:

$$\frac{n^2}{n!} < \varepsilon$$

Voor $n \geq 4$ is $(n-1)(n-2) > n$ en dus geldt voor $n \geq 4$,

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-3)!(n-2)(n-1)} < \frac{1}{(n-3)!}$$

Kiest men nu N zodanig dat $\frac{1}{(N-3)!} < \varepsilon$ (bijvoorbeeld $N > 3 + \frac{1}{\varepsilon}$) dan is voor iedere $n > N$:

$$\frac{n^2}{n!} < \frac{1}{(n-3)!} < \frac{1}{(N-3)!} < \varepsilon$$

Voorbeeld 2.2. De meetkundige reeks:

$$S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \qquad + p^{n-1} \qquad\qquad p \neq 1$$

Zoals bekend is de som van de meetkundige reeks:

$$S_n = \frac{1-p^n}{1-p} \tag{2.5}$$

We vragen ons nu af wat er gebeurt als n onbepaald toeneemt. Om dit te onderzoeken schrijven we (2.5) in de vorm:

$$S_n = \frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$$

Men kan nu gemakkelijk aantonen dat voor $(p) < 1$, p^n naar nul convergeert. Dus voor $|p| < 1$ heeft de rij S_n tot limiet $\frac{1}{1-p}$.

Een rij wordt divergent genoemd als de rij niet convergeert naar een eindig getal. Voorbeelden: $a_n = n$ en $a_n = (-1)^n$. In het eerste geval nemen de termen van de rij willekeurig grote waarden aan; in het tweede geval blijven de termen eindig maar naderen niet tot een vast getal.

Enige stellingen voor limieten.

Is a_n een rij met limiet a en b_n een rij met limiet b, dan heeft de rij:

a)	$c_n = a_n + b_n$	de limiet	$c = a + b$	(2.6)
b)	$d_n = a_n - b_n$	" "	$d = a - b$	(2.7)
c)	$e_n = a_n b_n$	" "	$e = ab$	(2.8)
d)	$f_n = \frac{a_n}{b_n}$	" "	$f = \frac{a}{b}$ mits $b \neq 0$	(2.9)

Het getal e. Men kan bewijzen dat de limiet van de rij

$S_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ voor $n \to \infty$ bestaat.

Deze limietwaarde wordt het getal e genoemd. Dus:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818 \qquad (2.10)$$

Dezelfde limietwaarde bezit ook de rij:

$$T_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \qquad + \frac{1}{n!}$$

Men kan dus ook voor e schrijven:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (2.11)$$

Het getal e speelt een belangrijke rol in de wiskunde en van de hier gegeven definitie van het getal e zullen we later veelvuldig gebruik maken.

Limieten bij een continu veranderlijke variabele. Tot nu toe hebben we alleen limieten beschouwd van rijen, dus van functies waarbij de onafhankelijke variabele alleen gehele waarden aanneemt. We zullen nu limieten beschouwen van functies $f(x)$, waarbij x een continu veranderlijke variabele is. We zeggen dat $f(x)$ naar een limiet l convergeert, voor x naderend tot a, wanneer alle waarden van de functie $f(x)$ voor x voldoende dicht bij a, willekeurig weinig van l verschillen.

Precies gedefinieerd: De functie $f(x)$ convergeert, voor x naderend tot a, naar l, wanneer bij iedere $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ gevonden kan worden, zodanig dat voor iedere $x\neq a$ in het interval $|x-a|<\delta$ geldt: $|f(x)-l|<\varepsilon$.
We schrijven dan:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \qquad (2.12)$$

Voorbeeld 2.3. We bewijzen: $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

Stelt men $x-2=h$, dan moeten we aantonen dat voor voldoend kleine $|h|$:

$$|(2+h)^2-4| = |4h+h^2| < \varepsilon$$

Nu is voor $|h|<1$, $|h^2|<|h|$. Kiezen we nu $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ dan geldt voor

$$|h|<\delta$$

$$|4h+h^2| \leq |4h| + |h^2| < 5|h| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \qquad (2.13)$$

De limietwaarde 4 die we hier vinden komt overeen met de functiewaarde voor x=2. We zeggen nu dat de functie voor x=2 continu is.

Definitie: Een functie f(x) is in het punt x=a continu wanneer:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Voor continuïteit zijn dus twee voorwaarden noodzakelijk:

1e Het bestaan van de limiet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2e Het samenvallen van deze limiet met f(a).

Voorbeeld 2.4. Gevraagd $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

De functie $f(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$ is voor x=1 niet gedefinieerd. Voor alle $x \neq 1$ kan men voor f(x) schrijven:

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \qquad + x + 1$$

Laten we nu $x \to 1$ naderen met x voortdurend $\neq 1$ dan wordt voor x voldoende dicht bij 1 het verschil tussen f(x) en n willekeurig klein. Hieruit volgt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n \qquad (2.13)$$

Definiëren we nu de functie f(x) door:

$$f(x) = \frac{x^n-1}{x-1} \qquad \text{voor } x \neq 1$$
$$f(x) = n \qquad \text{voor } x = 1$$

dan zien we dat deze functie in het punt x=1 continu is. De continuïteit wordt hier dus verkregen door f(1)=n te kiezen. Deze waarde n noemt men de continu makende waarde van de functie f(x) in x=1.

3. Differentiaalrekening.

Voordat we een analytische definitie geven van het differentiaalquotiënt, zullen we dit begrip minder exact bespreken aan de hand van de volgende figuur.

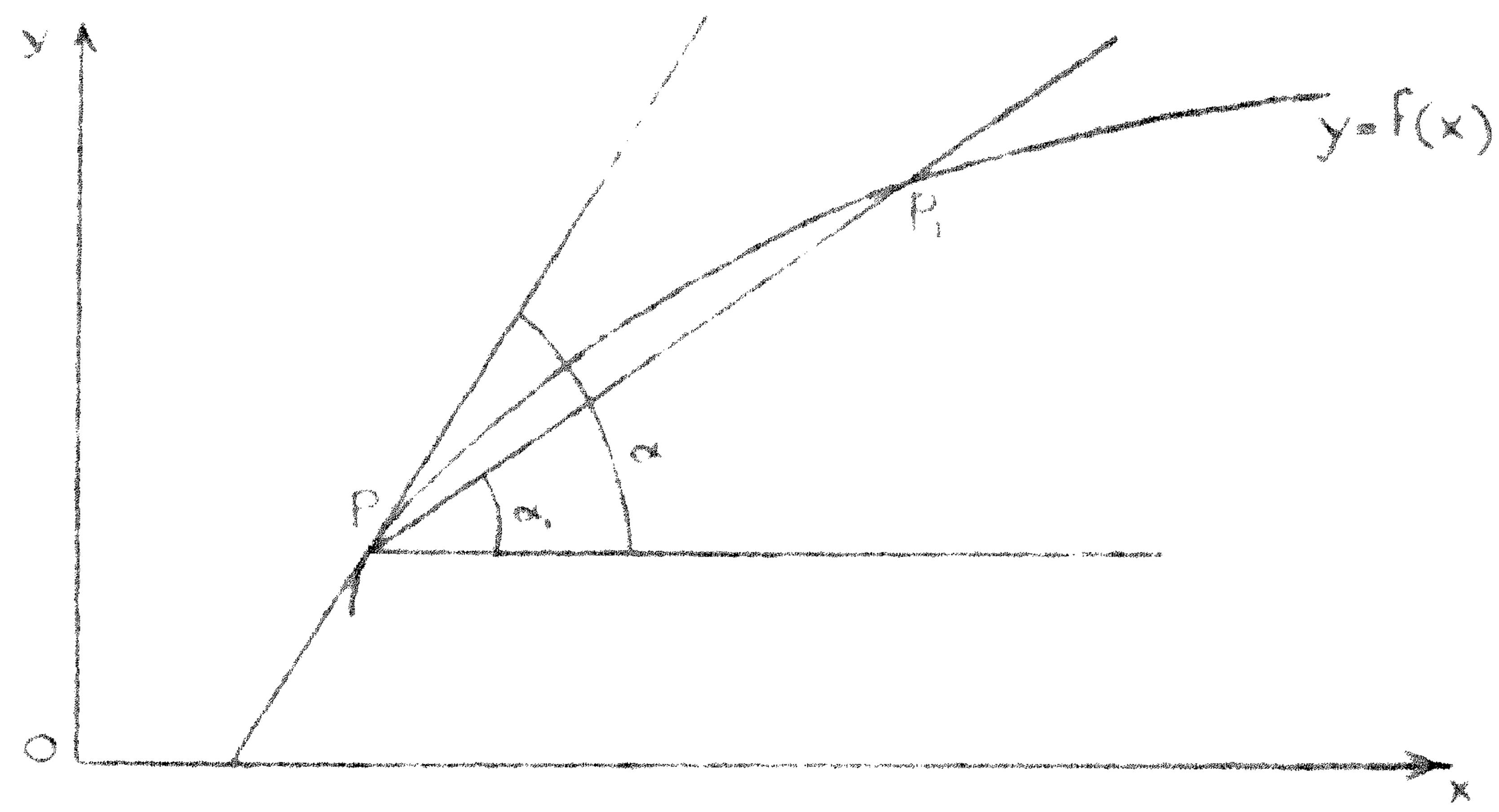

fig. 3.1

Illustratie van het differentiaalquotiënt

Stel P een punt op de kromme y=f(x). Definiëren we nu de raaklijn aan de kromme in P als de limietstand van een koorde P P_1 als P_1 langs de kromme naar P beweegt, dan zal de hoek α_1 die P P_1 met de x-as maakt een limiet α bezitten. Dus in een gemakkelijk te begrijpen notatie:

$$\lim_{P_1 \to P} \alpha_1 = \alpha \tag{3.1}$$

Zijn nu x,y(=f(x)) en x_1,y_1(=f(x_1)) de coördinaten van respectievelijk P en P_1, dan geldt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \tag{3.2}$$

Voor (3.1) kunnen we nu schrijven:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \operatorname{tg} \alpha \tag{3.3}$$

Deze limiet bestaat echter niet altijd.
Onafhankelijk van een meetkundige voorstelling definieert men nu het <u>differentiaalquotiënt</u> van een functie y=f(x) in het punt x door:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \,, \tag{3.4}$$

mits deze limiet bestaat.
Uit het bestaan van (3.4) volgt onmiddellijk dat
$\lim_{h \to 0} \{ f(x+h) - f(x) \} = 0$. Dus (vgl. eind paragraaf 2): Een <u>differentieerbare</u> functie is noodzakelijk continu. Het omgekeerde geldt

echter niet. Een continue functie is niet noodzakelijk differentieerbaar.

Tot nu toe hebben we het differentiaalquotiënt bekeken in een vast punt x. Laten we nu in (3.4) x veranderen, dan zal ook het bijbehorende differentiaalquotiënt veranderen. We kunnen dus het differentiaalquotiënt als een functie van x beschouwen. Van deze functie $y=f'(x)$ kunnen we weer het differentiaalquotiënt, overeenkomstig (3.4), bepalen. Dit tweede differentiaalquotiënt wordt aangegeven met:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \tag{3.5}$$

Zo voortgaande kan men alle hogere differentiaalquotiënten definiëren (onder het voorbehoud dat ze bestaan).
In plaats van differentiaalquotiënt gebruikt men ook de term afgeleide veelvuldig. Men spreekt dan van de eerste afgeleide, kortweg afgeleide, tweede afgeleide, hogere afgeleiden.

Enige rekenregels voor differentiaalquotiënten.

1e Als $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, dan geldt

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{3.6}$$

Bewijs:

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Evenzo bewijst men gemakkelijk:

2e Als $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ dan geldt

$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \tag{3.7}$$

en

3e als $\varphi(x) = c\ f(x)$ (c = constante) dan is:

$$\varphi'(x) = cf'(x) \tag{3.8}$$

4e Als $\varphi(x) = f(x)\ g(x)$ dan geldt:

$$\varphi'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \tag{3.9}$$

Bewijs: $\varphi'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\} + g(x)\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} f(x+h)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0} g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

5e Als $\varphi(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$, dan geldt:

$$\varphi'(x) = f_1'(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x)\, f_2'(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n'(x) \quad (3.10)$$

6e Als $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, dan geldt voor alle x met $f(x) \neq 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (3.11)$$

Bewijs:

$\varphi'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{g(x)\,f(x+h)}{h} - \dfrac{f(x)\,g(x+h)}{h}}{g(x)\,g(x+h)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\,g(x)} = \dfrac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2}$.

<u>Differentiatie van enige eenvoudige functies</u>:

1) $y=c$ (c = constante). Voor elke waarde van x heeft de functie dezelfde waarde c dus:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \quad (3.12)$$

2) $y=x$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)-x}{h} = 1 \quad (3.13)$

3) $y=x^n$ (n geheel). Toepassing van de produktregel (3.10) op $x^n = x.x.\ldots.x$ geeft:

$$\frac{dy}{dx} = 1.x^{n-1} + 1\,x^{n-1} \ldots + 1\,x^{n-1} = n\,x^{n-1} \quad (3.14)$$

4) $y = \dfrac{1}{x^n}$ (n geheel). Toepassing van de quotiëntregel (3.11), (3.12) en (3.14) geeft:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-n-1} \quad (3.15)$$

5) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Toepassing van (3.6), (3.8) en (3.14) geeft:

$$\frac{dy}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \quad + a_1$$

Bij differentiatie van een veelterm ontstaat een nieuwe veelterm, waarvan de graad een lager is dan van de oorspronkelijke veelterm. Van een veelterm van de n^e graad zijn dus de $(n+1)^e$ en hogere afgeleiden alle identiek gelijk nul.

De afgeleide van de inverse functie.

We hebben reeds opgemerkt dat een continue functie $y=f(x)$ een continue inverse functie $x=\varphi(y)$ heeft in elk interval waar die functie monotoon is. In aansluiting hierop geldt nu de volgende stelling:

Stelling 3.1. Als in een interval $a<x<b$ de functie $y = f(x)$ differentieerbaar is en overal in dat interval hetzij $f'(x)>0$, hetzij $f'(x)<0$, dan bezit de inverse functie $x=\varphi(y)$ ook een afgeleide in elk punt van het interval $f(a)<y<f(b)$ wanneer $y = f(x)$ monotoon toenemend is, of in het interval $f(b)<y<f(a)$ wanneer $y = f(x)$ monotoon dalend is. (Vgl. fig. 3.2)

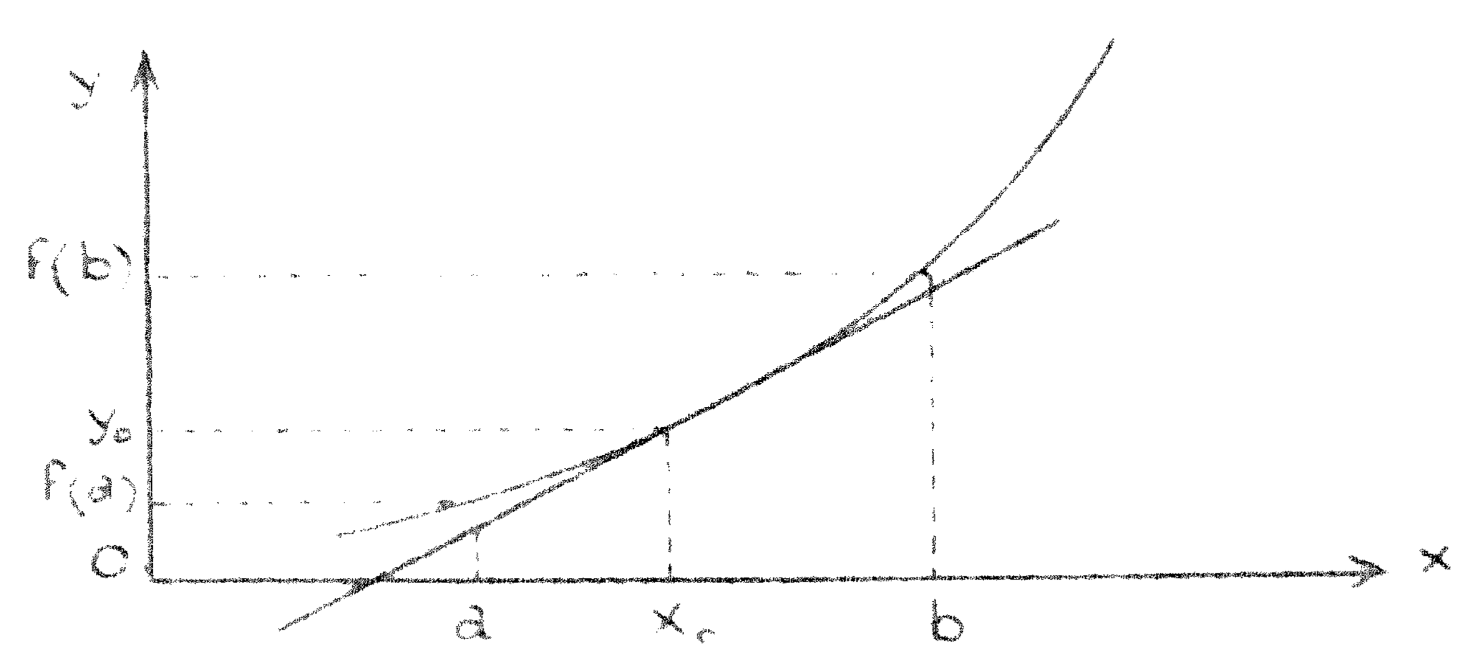

fig. 3.2
De afgeleide van de inverse functie

Voor die afgeleide geldt dan de betrekking voor corresponderende waarden x_0 en y_0:

$$f'(x_0)\,\varphi'(y_0) = 1 \tag{3.16}$$

Bewijs:

$$y_0' = f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Volgens onderstelling is deze limiet $\neq 0$. Wanneer x_1 tot x_0 nadert, zal op grond van de continuïteit van de functie $y=f(x)$

y_1 tot y_0 naderen. Aangezien bovendien $y=f(x)$ in het beschouwde interval monotoon is zal wanneer y_1 tot y_0 nadert, x_1 tot x_0 naderen. De relaties $x_1 \to x_0$ en $y_1 \to y_0$ zijn dus aequivalent. Dus ook de limiet:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \lim_{y_1 \to y_0} \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

bestaat en is gelijk $\frac{1}{f'(x_0)}$. Anderzijds is deze limiet gelijk $\varphi'(y_0)$, zodat

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$ q.e.d.

Voorbeeld 3.1.

De functie $y=x^{\frac{1}{n}}$ is monotoon stijgend en continu voor $x>0$, dus volgt voor de inverse functie $x=y^n$:

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$$

Verder geldt volgens stelling (3.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (3.17)$$

Differentiatie van een functie van een functie.

Stel $\varphi(x)$ een differentieerbare functie voor $a \leq x \leq b$, welke alle waarden in een interval $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ aanneemt. We beschouwen nu een tweede functie $g(\varphi)$ van de onafhankelijke variabele φ , welke differentieerbaar is voor $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. We kunnen nu de functie $g(\varphi) = g(\varphi(x)) = f(x)$ als een functie van x in het interval $a \leq x \leq b$ beschouwen.

Voorbeeld 3.2.

$\varphi(x) = x^2 + \sqrt{x}$ voor $1 \leq x \leq 4$; φ neemt nu alle waarden aan in het interval $2 \leq \varphi \leq 18$. Verder stellen we $g(\varphi) = \varphi^3$. De functie $f(x) = g(\varphi(x)) = (x^2 + \sqrt{x})^3$ is dus gedefinieerd voor $1 \leq x \leq 4$.

Deze methode om uit twee functies een nieuwe functie samen te stellen kunnen we uitbreiden tot meer dan twee functies, bijv. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2-1}}$, met $\varphi(x) = x^2-1$, $g(\varphi) = \sqrt[3]{\varphi}$ $h(g) = \sqrt{1+g}$, dus $f(x) = h\{g(\varphi(x))\}$.

Stelling 3.2.

Als $\varphi(x)$ en $g(\varphi)$ differentieerbare functies zijn van respectievelijk x en φ , dan is $y = f(x) = g(\varphi(x))$ differentieerbaar naar x en

$$f'(x) = g'(\varphi)\,\varphi'(x) \tag{3.18}$$

of

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx}$$

Overeenkomstig geldt voor functies samengesteld uit meer dan twee functies $f(x) = u_1(u_2(u_3,\ldots,u_n(x))\ldots)$

$$f'(x) = \frac{du_1}{du_2}\,\frac{du_2}{du_3}\cdots\cdots\frac{du_n}{dx}$$

<u>Bewijs</u> van (3.18): Onderstellen we $\varphi'(x) \neq 0$, dan volgt (vgl. bewijs stelling 3.1):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x} = \lim_{\varphi_1\to\varphi}\frac{y_1-y}{\varphi_1-\varphi}\;\frac{\varphi_1-\varphi}{x_1-x}$$

Dus: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\varphi}\,\dfrac{d\varphi}{dx}$

Met een enigszins anders geformuleerd bewijs kan men laten zien dat het niet noodzakelijk is $\varphi'(x) \neq 0$ te eisen.

De regel (3.18) wordt <u>de kettingregel</u> genoemd.

<u>Voorbeeld 3.3</u>.

De in voorbeeld 3.2. genoemde functie zullen we nu differentiëren:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \quad \text{met} \quad g(\varphi) = \varphi^3 \quad \text{en} \quad \varphi(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

Toepassing van (3.18) levert nu volgens (3.14) en (3.17)

$$f'(x) = g'(\varphi)\,\varphi'(x) = 3\varphi^2\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 3(x^2+\sqrt{x})^2\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

<u>Voorbeeld 3.4</u>.

$y = x^{\frac{p}{q}}$ met p geheel en q geheel en positief. Stel $y = \varphi^p$ met $\varphi = x^{\frac{1}{q}}$.

Volgens (3.14) of (3.15), (3.17) en (3.18) volgt nu:

$$y' = p\varphi^{p-1}\cdot\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}. \tag{3.19}$$

In (3.14), (3.15), (3.17) en (3.19) is nu bewezen dat voor alle rationele getallen α geldt:

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \tag{3.20}$$

(Een getal wordt rationaal genoemd, wanneer het geschreven kan worden als een breuk van twee gehele getallen).

Differentiatie van de logarithmische en de exponentiële functie.

Het getal e hebben we gedefinieerd door (vergelijk 2.10):

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Vervangen we de gehele waarden aannemende variabele n door de continue variabele z, dan verandert de limiet niet van waarde voor $z \to \infty$. Dus:

$$e = \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \tag{3.21}$$

Nu is $z \to \infty$ aequivalent met $\frac{1}{z} \to 0$. Dus geldt eveneens, als we $l = \frac{1}{z}$ stellen:

$$e = \lim_{l \to 0} (1 + l)^{\frac{1}{l}} \tag{3.22}$$

Het getal e nemen we nu als grondtal voor het logarithmestelsel. Dus log e = 1.

Voor de logarithme gelden zoals bekend de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} &\log ab = \log a + \log b && a > 0,\ b > 0 \\ &\log a^{\alpha} = \alpha \log a && a > 0 \\ &\log 1 = 0. && \end{aligned} \tag{3.23}$$

Zonder bewijs zullen we nu aannemen dat $y = \log x$ een continue functie is voor $x > 0$.

De afgeleide van $y = \log x$ kunnen wij als volgt bepalen:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

Verder volgt uit (3.23):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

Wegens de continuïteit van de logarithme mogen we nu de limiet en de logarithme verwisselen. Dus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right\}$$

Stellen we nu $\frac{h}{x} = l$, dan volgt uit (3.22):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log\left\{\lim_{l\to 0}(1+l)^{\frac{1}{l}}\right\} = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

<u>Stelling 3.3</u>. Wanneer e als grondtal van het logarithmestelsel wordt gekozen dan is voor $x > 0$:

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (3.24)$$

De inverse functie, behorende bij $y = \log x$ is $x = e^y$. Volgens (3.16) vinden we nu voor de afgeleide van deze inverse functie:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{x^{-1}} = x = e^y$$

<u>Stelling 3.4</u>. De afgeleide van de functie $y = e^x$ levert de oorspronkelijke functie op:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad (3.25)$$

De functie $y = a^x$ wordt nu geschreven als $y = e^{x\log a}$. Toepassing van de kettingregel (3.18) geeft nu voor de afgeleide van deze functie:

$$\frac{d\,e^{x\log a}}{dx} = e^{x\log a}\log a = a^x\log a \qquad (3.26)$$

Schrijven wij de functie $y = x^\alpha$ in de vorm $y = e^{\alpha\log x}$, dan geeft toepassing van de kettingregel (3.18) voor de afgeleide van deze functie:

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = e^{\alpha\log x}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

<u>Stelling 3.5</u>. Voor alle reële α geldt:

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (3.27)$$

4. Maxima en minima van functies van één variabele.

We zullen nu veronderstellen dat de functie $f(x)$ tweemaal differentieerbaar is en dat de tweede afgeleide continu is.

De afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$ geeft de helling van de kromme $y=f(x)$ aan. Deze helling kan weer voorgesteld worden door een kromme $y=f'(x)$. De helling van deze kromme wordt bepaald door de afgeleide van $f'(x)$, de tweede afgeleide $f''(x)$ van $f(x)$. Wanneer de tweede afgeleide $f''(x)$ positief is in het punt x, dan is $f''(x)$ positief in een klein interval, dat het punt x bevat. Dit volgt uit de veronderstelde continuïteit van $f''(x)$. De afgeleide $f'(x)$ neemt dus toe in dat interval en de kromme $y=f(x)$ keert zijn bolle kant naar de x-as (zie figuur 4.1). Wanneer $f''(x) < 0$ geldt het omgekeerde en keert de kromme $y=f(x)$ de holle kant in de richting van de x-as (zie fig. 4.2).

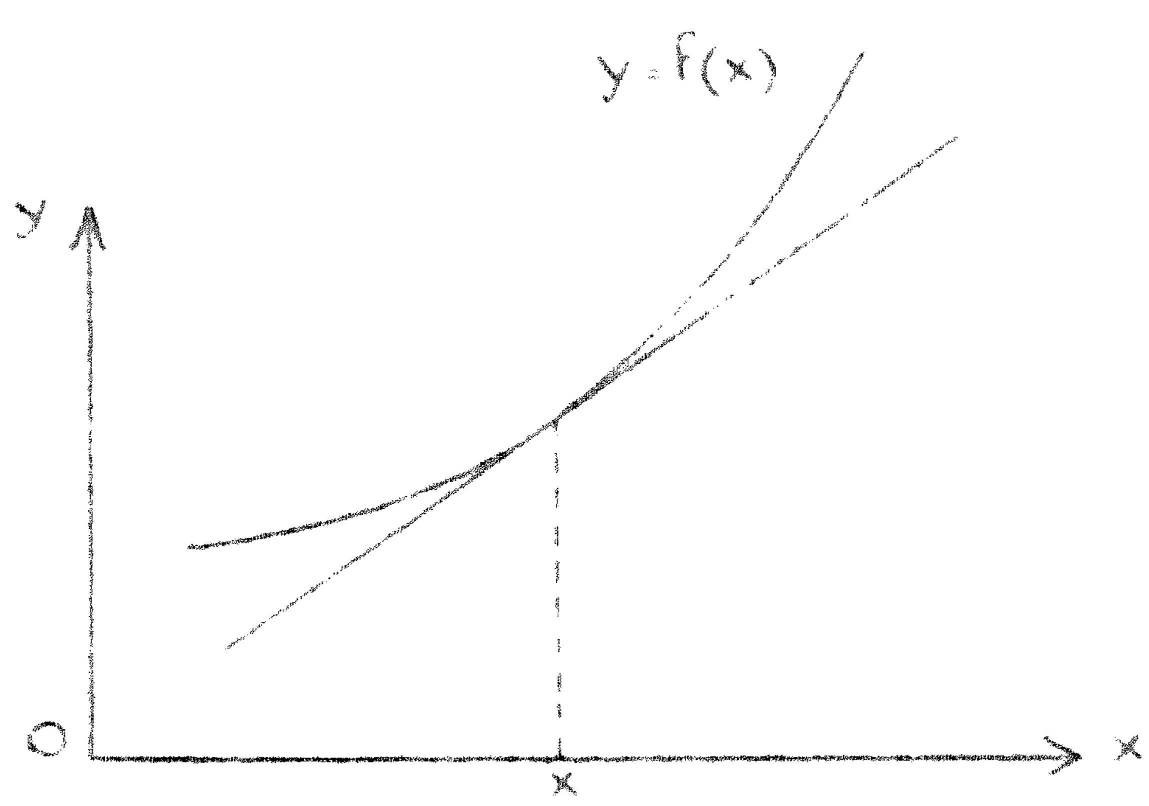

fig. 4.1

$f''(x) > 0$

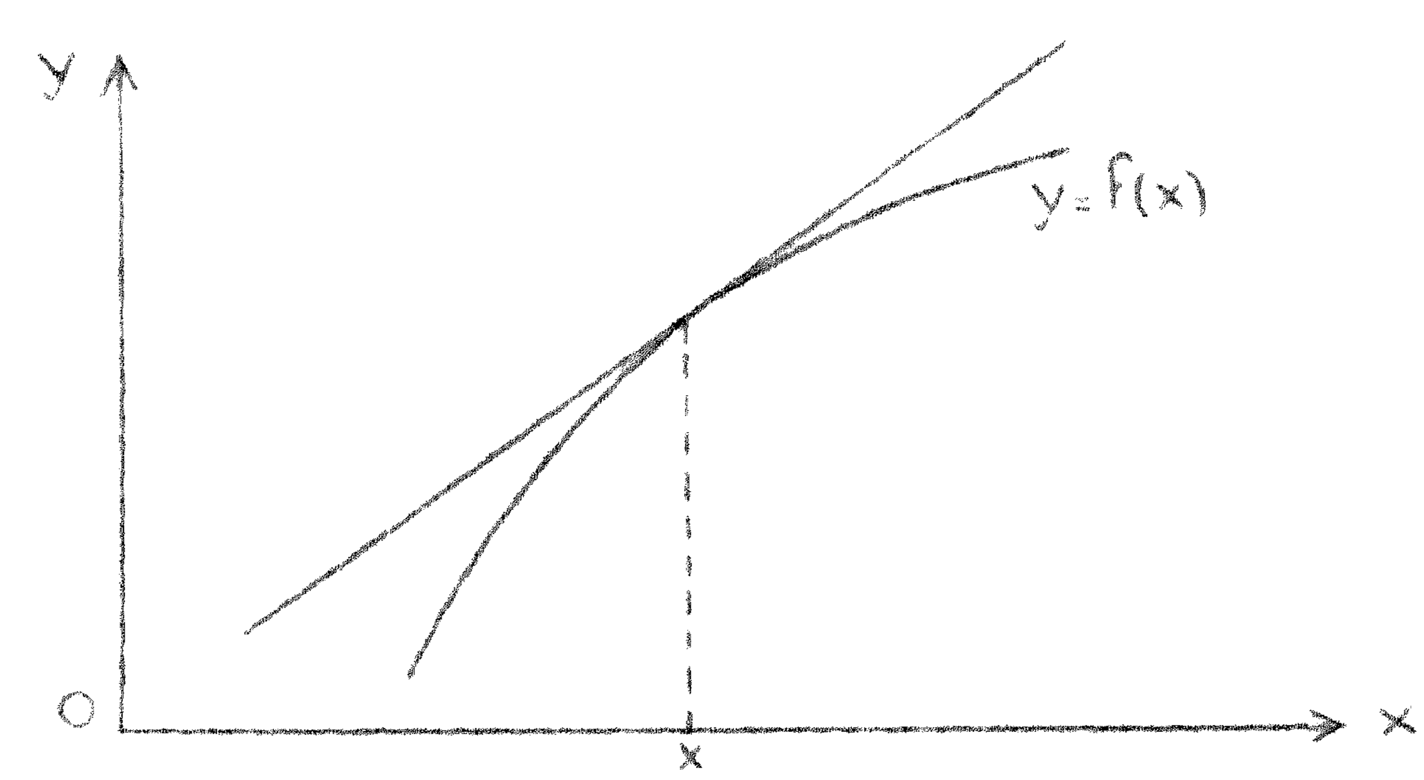

fig. 4.2

$f''(x) < 0$

Wanneer $f''(x) > 0$ is, zal de kromme $y=f(x)$ in de omgeving van x boven de raaklijn aan de kromme in x liggen. Wanneer $f''(x) < 0$ zal de kromme onder de raaklijn liggen.

Definitie: Een functie $y=f(x)$ heeft een relatief maximum (minimum) in een punt c, wanneer in een omgeving van c de waarde van $f(x)$ voor alle $x \neq c$ kleiner (groter) is dan $f(c)$. Een omgeving van een punt c is een interval $a \leq x \leq b$ dat het punt c inwendig bevat ($a < c < b$). Men spreekt van relatieve extreme waarden, omdat het maximum of minimum slechts betrekking heeft op een omgeving. Geometrisch zijn deze maxima en minima de golftoppen en dalen van de kromme $y=f(x)$ (zie figuur 4.3).

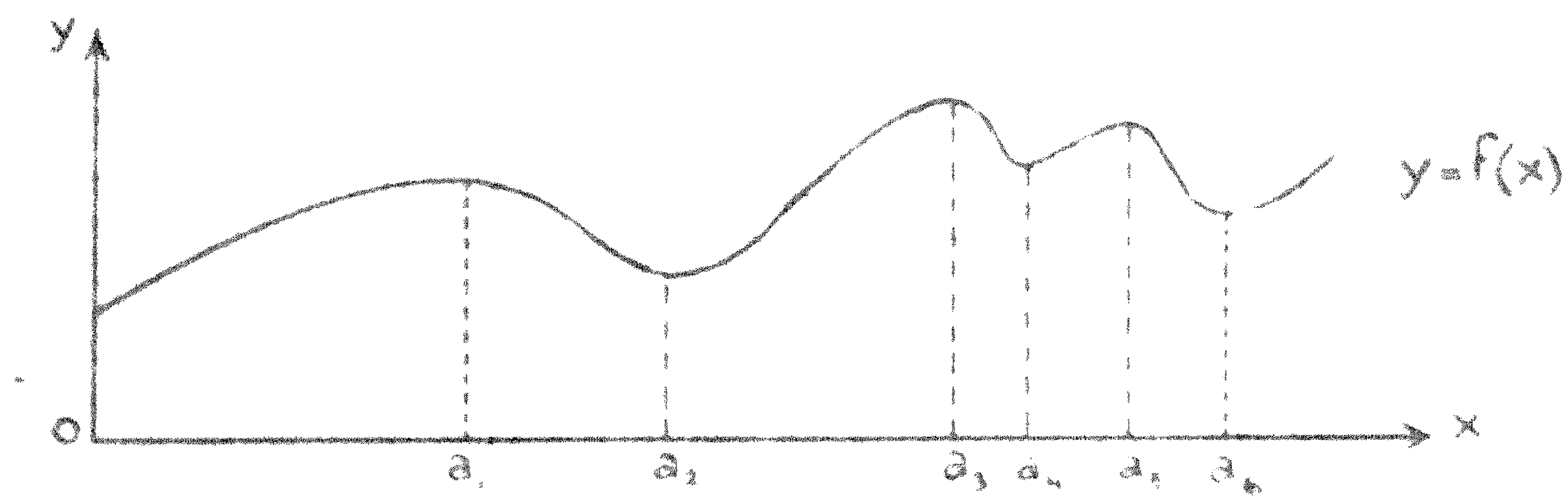

fig. 4.3

Relatieve maxima en minima

Een bepaald relatief maximum kan zeer goed kleiner zijn dan een relatief minimum. In figuur 4.3 bijvoorbeeld is het relatief maximum in a_1 kleiner dan het relatief minimum in a_4.

Stelling 4.1. Een noodzakelijke voorwaarde voor het optreden van een relatief maximum of minimum in het punt c van de differentieerbare functie y=f(x) luidt:

$$f'(c) = 0 \tag{4.1}$$

Aan de hand van figuur 4.3 is het duidelijk dat in een extreem punt de raaklijn horizontaal moet zijn en dus (4.1) moet gelden. Een exact bewijs van (4.1) loopt als volgt: Stel y=f(x) neemt in c een relatief maximum aan. Voor voldoend kleine $|h|$ is $f(c+h) - f(c) < 0$. Het teken van het quotiënt:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{4.2}$$

zal dus overeenkomen met het teken van h. Is nu $h < 0$ en laten we h tot nul naderen, zodanig dat steeds $h < 0$, dan blijft het quotiënt (4.2) negatief. Voor de limiet zal dus gelden $f'(c) \leq 0$. Kiezen we nu $h > 0$ en laten we h tot nul naderen, steeds $h > 0$ houdende, dan volgt $f'(c) \geq 0$. Uit de beide betrekkingen $f'(c) \leq 0$ en $f'(c) \geq 0$ volgt $f'(c) = 0$.

Op dezelfde wijze kan men bewijzen dat $f'(c) = 0$, wanneer y=f(x) in c een minimum heeft.

We hebben gezien dat, wanneer $f''(c) > 0$, de kromme y=f(x) in de omgeving van c boven de raaklijn aan de kromme in c ligt. Wanneer dus $f''(c) > 0$ en $f'(c) = 0$, dan bezit de functie y=f(x) een

een minimum in c. Wanneer $f''(c)<0$, dan ligt de kromme $y=f(x)$ onder de raaklijn in het punt c. Is dus $f'(c) = 0$ en $f''(c)<0$, dan bezit de functie $y=f(x)$ in c een maximum.

Stelling 4.2. Een tweemaal differentieerbare functie $y=f(x)$ bezit in het punt c een relatief maximum, wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c)<0$. Het punt c is een relatief minimum wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c)>0$.

Voorbeeld 4.1. Bepaal de relatieve extrema van de functie $y=e^x-x$. We bepalen de oplossing van de vergelijking:

$$y' = e^x - 1 = 0$$

Deze vergelijking heeft een oplossing $x=0$. Aangezien $y'' = e^x > 0$ bezit de onderzochte functie een relatief minimum in $x=0$. Aangezien de vergelijking $y'=0$ slechts één wortel bezit, is dit ook het enige extreem van de functie.

Voorbeeld 4.2. Bepaal de relatieve extrema van de functie $f(x) = x^3+5x^2+8x+3$.

$$f'(x) = 3x^2+10x+8 = (x+2)(3x+4)$$

$$f''(x) = 6x+10$$

$y'=0$ voor $x = -2$ en $x = -\frac{4}{3}$. Verder is $f''(-2) = -2<0$ en $f''(-\frac{4}{3})=+2>0$. De onderzochte functie bezit dus in $x = -2$ een maximum en in $x = -\frac{4}{3}$ een minimum.

5. Integraalrekening.

De bepaalde integraal. We veronderstellen voorlopig dat de functie $f(x)$ positief is in het interval $a \leq x \leq b$; verderop zullen wij deze restrictie laten vervallen. Grafisch stellen we de functie weer voor door een kromme. Wij vragen nu naar de oppervlakte F_a^b van het gebied, dat begrensd wordt door de kromme $y=f(x)$, de verticalen in a en b en de x-as tussen a en b (figuur 5.1).