STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 265 (C13)

Leergang Besliskunde 3e druk

Hoofdstuk II

Differentiaal- en Integraalrekening

door

J. van de Lune

januari 1964

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inleiding

Omdat in de Mathematische Besliskunde niet zelden gebruik gemaakt wordt van begrippen en methoden uit de differentiaal- en integraalrekening, zullen wij in dit hoofdstuk een schetsmatige uiteenzetting geven van de voor ons doel belangrijkste onderwerpen uit dit deel van de wiskunde.

1. De getallenrechte, funkties en rijen

Om het getalbegrip, dat volkomen abstract is, meer aanschouwelijk te maken, bedienen wij ons van het begrip getallenrechte.
Op een rechte lijn r kiezen wij twee punten O en E, en plaatsen daarbij de getallen 0 resp. 1 (zie fig. 1.1).

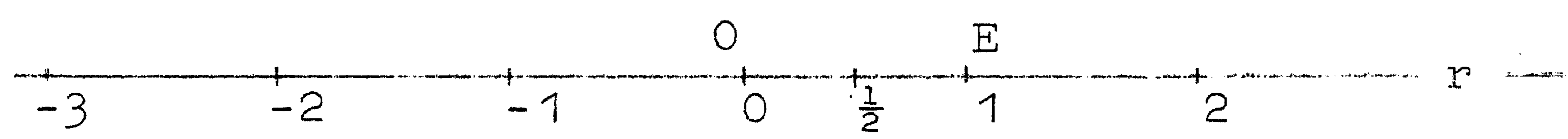


fig. 1.1 De getallenrechte

In fig. 1.1 is aangegeven hoe, uitgaande van de punten O en E, op systematische wijze elk rationaal getal aan een punt van de rechte r kan worden toegevoegd [1]. Ook de irrationale getallen kunnen in principe aan punten van r worden toegevoegd, zoals bij wijze van voorbeeld in fig. 1.2 gedemonstreerd wordt voor $\sqrt{2}$.

----

1) Wij zullen, zoals gebruikelijk, de positieve getallen steeds rechts van het punt O plaatsen.

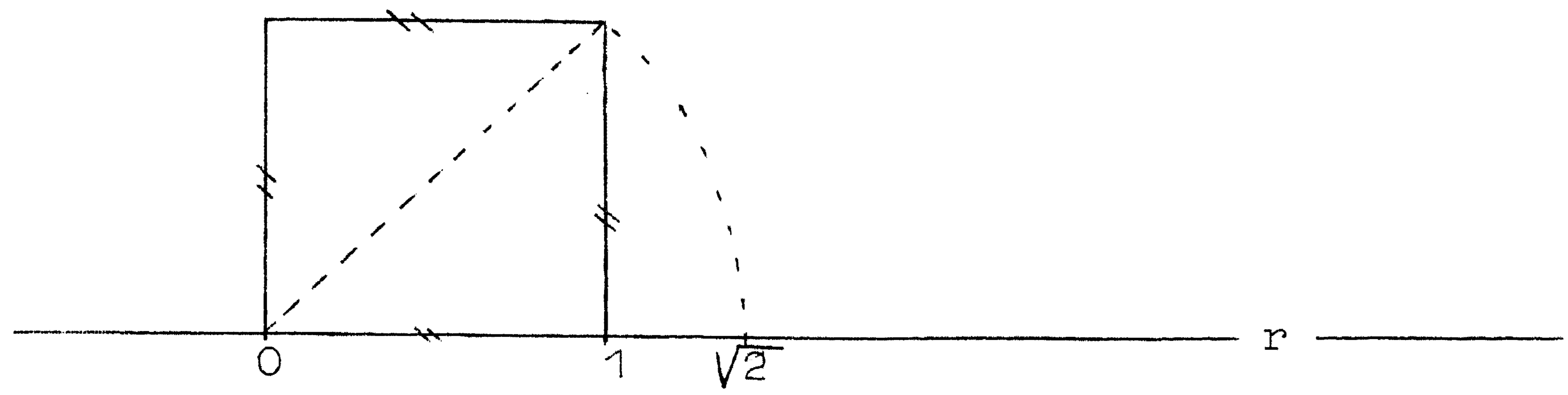


fig 1.2. Plaatsing van het irrationale getal $\sqrt{2}$ op de getallenrechte.

De tot stand gebrachte toevoeging van de reële getallen aan de punten van de rechte r is ondubbelzinnig; d.w.z. verschillende getallen hebben verschillende beeldpunten op r. Verder is de afbeelding ook omkeerbaar; dit laatste houdt in dat elk punt van r het beeldpunt is van precies één reëel getal.
De afstand van een punt van de getallenrechte tot het nulpunt O, noemt men de absolute waarde van het getal, dat bij dat punt behoort.
De absolute waarde van een getal a duiden we aan met $|a|$.
Met betrekking tot het begrip absolute waarde vermelden we een aantal eenvoudige regels:

$$\left.\begin{aligned} |a| &= a \text{ als } a \geqq 0 \\ |a| &= -a \text{ als } a < 0 \end{aligned}\right] \qquad (1.1)$$

$$|a \pm b| \leqq |a| + |b| \qquad (1.2)$$

$$|a \pm b| \geqq \big||a| - |b|\big| \qquad (1.3)$$

$$\left.\begin{aligned} |a.b| &= |a| \, . \, |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \end{aligned}\right] \qquad (1.4)$$

Intervallen

Een open interval is de verzameling van alle reële getallen, gelegen tussen twee vaste getallen a en b.
Is $a < b$, dan geven we het bijbehorende open interval aan met

$$a < x < b. \qquad (1.5\underline{a})$$

Is niets bekend over de orderelatie tussen a en b dan schrijven we voor het betreffende open interval

$$(a,b). \qquad (1.5\underline{b})$$

Is $a < b$, dan vormen alle reële getallen x die voldoen aan

$$a \leqq x \leqq b, \qquad (1.6\underline{a})$$

een gesloten interval. Zo'n interval wordt ook vaak aangegeven met

$$[a,b]. \qquad (1.6\underline{b})$$

Hebben we een verzameling reële getallen x die gekarakteriseerd kan worden door één van de ongelijkheden

$$x < a;\ x \leqq a;\ x > a;\ x \geqq a \qquad (1.7)$$

dan spreken we van een onbegrensd interval; ook de verzameling van alle reële getallen wordt tot de onbegrensde intervallen gerekend.
Een eindig interval correspondeert op de getallenrechte met een lijnstuk. Al naar gelang de eindpunten van het lijnstuk tot het interval behoren of niet, spreekt men van een gesloten c.q. open interval.
Verder kunnen we nog onderscheiden:

a links-open intervallen: $a < x \leqq b$ of $(a,b]$

b rechts-open intervallen: $a \leqq x < b$ of $[a,b)$.

De onbegrensde intervallen kunnen op soortgelijke wijze worden ingedeeld.

Funkties

Bij de opstelling van de definitie van het begrip funktie gaan wij uit van een van te voren gedefinieerde getallenverzameling D; voegen we nu aan elk getal uit D een (eventueel ander) getal toe, dan zeggen we dat we een funktie geconstrueerd hebben. Deze toevoeging van getallen (=funktiewaarden) aan de elementen van D wordt vastgelegd met behulp van een toevoegingsvoorschrift f. Dit toevoegingsvoorschrift moet zodanig gekozen worden dat aan elk getal $x \in D$ één en slechts één getal als funktiewaarde wordt toegevoegd. Voor het volgens het voorschrift f aan $x \in D$ toegevoegde getal schrijven wij $f(x)$.
De verzameling D(=verzameling van x-waarden) wordt vaak met Df (D=domain) en de verzameling van alle funktiewaarden $f(x)$ met Rf (R=range) aangegeven.

Voorbeeld. Wanneer een artikel in elke gewenste hoeveelheid kan worden ingekocht, dan kunnen we de inkoopsprijs opvatten als een funktie van de ingekochte hoeveelheid. Bij elke ingekochte hoeveelheid $x(\geqq 0)$ zal n.l. ondubbelzinnig één bepaalde inkoopsprijs $f(x)$ behoren. Df is in dit geval de verzameling $x \geqq 0$.
Als het nuttig is een funktie in een meer aanschouwelijke vorm weer te geven, dan kunnen wij gebruik maken van een z.g. grafische voorstelling. Hierbij worden de x-waarden uit D aangegeven op de getallenrechte r, terwijl de bijbehorende funktiewaarden worden uitgezet in een richting die loodrecht op r staat. Positieve funktiewaarden zullen wij steeds boven de getallenrechte uitzetten.

Voorbeeld 1.1. Beschouw de getallenverzameling $D=\{1,2,3,4\}$ en stel aan deze getallen resp. de getallen 7,4,3 en 5 toegevoegd.

Dus:

$$f(1) = 7,\ f(2) = 4,\ f(3) = 3 \text{ en } f(4) = 5. \qquad (1.8)$$

In dit voorbeeld is de funktie rechtstreeks vastgelegd, door bij elk getal uit de oorspronkelijke verzameling de funktiewaarde te geven. Doorgaans wordt een funktie niet op deze rechtstreekse wijze vastgelegd, maar wordt de funktie bepaald door een rekenvoorschrift.

Voorbeeld 1.2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2} && \text{voor } x \leqq 0 \\ f(x) &= x + \tfrac{1}{2} && \text{"} \quad 0 < x < 1 \\ f(x) &= \tfrac{5}{2} - x && \text{"} \quad x \geqq 1. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Door dit rekenvoorschrift is aan elke x ondubbelzinnig een funktiewaarde f(x) toegevoegd. Grafisch kan deze funktie als volgt voorgesteld worden:

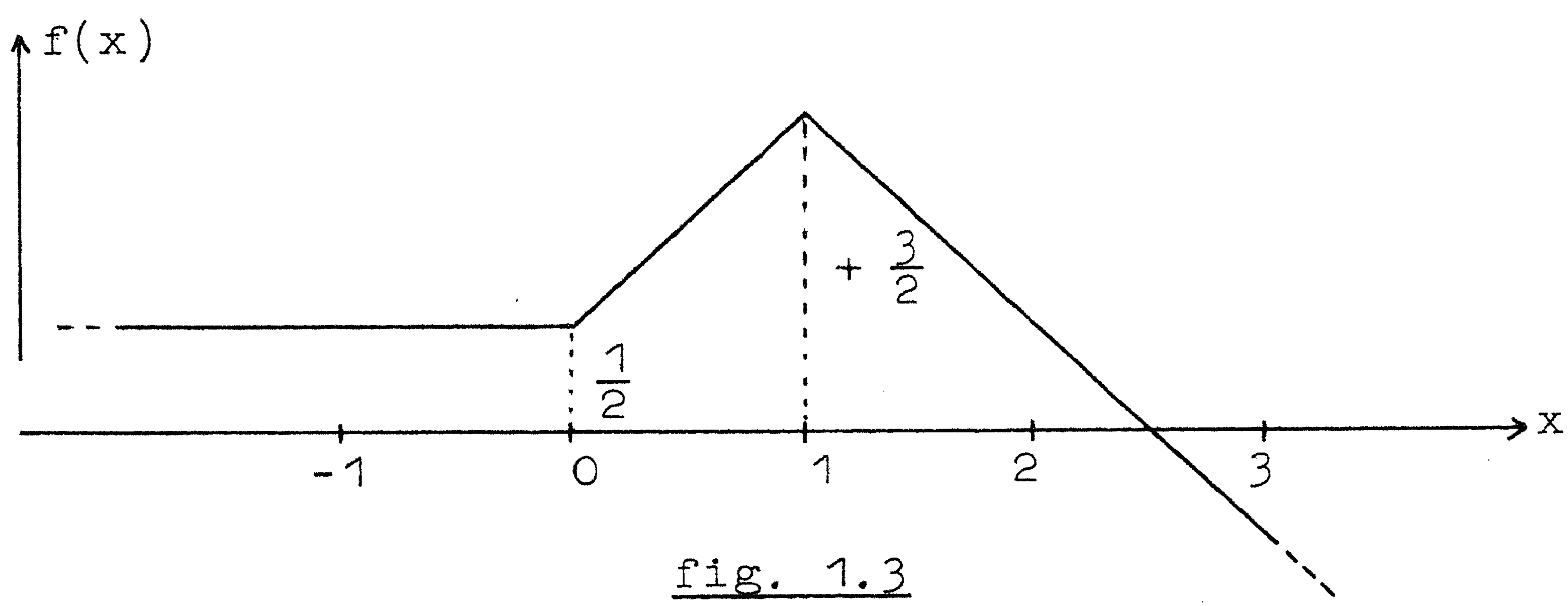


fig. 1.3

Grafische voorstelling van de funktie (1.9)

Opm.: Het is, zoals uit voorbeeld 1.2 blijkt, niet noodzakelijk dat aan verschillende waarden van x verschillende funktiewaarden worden toegevoegd. Hier is b.v. aan elke $x \leqq 0$ het getal $\frac{1}{2}$ als funktiewaarde toegevoegd.

De kromme die in figuur (1.3) is getekend is een samenhangende kromme. Anders gezegd: Een kleine verandering in de waarde van x leidt tot een kleine verandering in de waarde van f(x). Een funktie met deze eigenschap noemt men een continue funktie. We zullen dit begrip nog in meer wiskundige termen bespreken.

Een funktie die aan alle waarden van de variabele x hetzelfde getal c als funktiewaarde toevoegt, wordt een constante funktie genoemd. Bekijken wij b.v. de funktie (1.9) alleen op het interval $x \leqq 0$, dan zien we dat f(x) op dit interval overal gelijk aan $\frac{1}{2}$ is. De grafische voorstelling van de funktie is op dit interval een horizontale rechte lijn.

Een funktie waarbij een toename van de variabele x steeds gepaard gaat met een toename van f(x), wordt een monotoon stijgende funktie genoemd. Gaat een toename van x steeds gepaard met een afname van f(x), dan spreekt men van een monotoon dalende funktie. Grafisch worden deze funkties voorgesteld door krommen welke respectievelijk stijgen of dalen wanneer de x-as van links naar rechts doorlopen wordt. Op het interval $0 < x < 1$ is de funktie (1.9) monotoon stijgend; op $x \geqq 1$ is deze funktie monotoon dalend.

Inverse funkties (omkeerfunkties)

Wij beschouwen nu het geval dat op de verzameling D een funktie f zodanig gedefinieerd is, dat uit $x_1 \neq x_2$ volgt $f(x_1) \neq f(x_2)$; d.w.z. aan verschillende waarden van x zijn verschillende getallen als funktiewaarde toegevoegd.

In zo'n geval is elk getal t uit Rf de funktiewaarde van één en slechts één getal x uit D.

Dit feit brengt de mogelijkheid met zich mee op Rf een funktie φ te definiëren die aan elk getal t uit Rf dát getal x uit D als funktiewaarde toevoegt waarvoor geldt

$$f(x) = t.$$

De funktie φ heeft dus Rf tot domain en Df tot range terwijl verder geldt dat $\varphi(t)$ gelijk is aan de ondubbelzinnig bepaalde oplossing van de vergelijking $t=f(x)$, waarin x als onbekende optreedt.
Dus: is t een getal uit $D\varphi$ (=Rf) dan is $\varphi(t)$ een getal uit $R\varphi$ (=Df) en volgens de definitie van φ geldt, dat $f(\varphi(t))$ gelijk is aan t.

Is x een getal uit Df, dan is f(x) een getal uit Rf, d.w.z. f(x) is een getal uit $D\varphi$; volgens de definitie van φ moet nu gelden

$$\varphi(f(x)) = x.$$

De funktie φ noemen wij de <u>inverse funktie</u>(of omkeerfunktie) van f; het behoeft geen nader betoog dat f dan de inverse funktie van φ is.

De inverse funktie φ van de funktie f, gedefinieerd in voorbeeld 1.1, is bepaald door

$D\varphi = \{3,4,5,7\}$ en het voorschrift (1.10)

$\varphi(3) = 3,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4$ en $\varphi(7) = 1$ (1.11)

Het zal duidelijk zijn dat de funktie (1.9) geen inverse funktie heeft.

Wanneer een funktie f een inverse funktie φ heeft dan noemen we f <u>omkeerbaar</u>.

Zonder bewijs vermelden we nog de belangrijke

<u>Stelling</u>: Als f(x) op zeker interval D continu en monotoon is, dan is f(x) omkeerbaar op dat interval. De omkeerfunktie $\varphi(t)$ is dan ook continu en bovendien monotoon in dezelfde zin als f(x).

<u>Voorbeeld 1.3.</u> $f(x) = x^2$ op $x \geqq 0$.
Deze funktie is op $x \geqq 0$ continu en monotoon stijgend.
De omkeerfunktie van f is $\varphi(t) = \sqrt{t}$ op $t \geqq 0$.
$\varphi(t)$ is ook continu en monotoon stijgend.

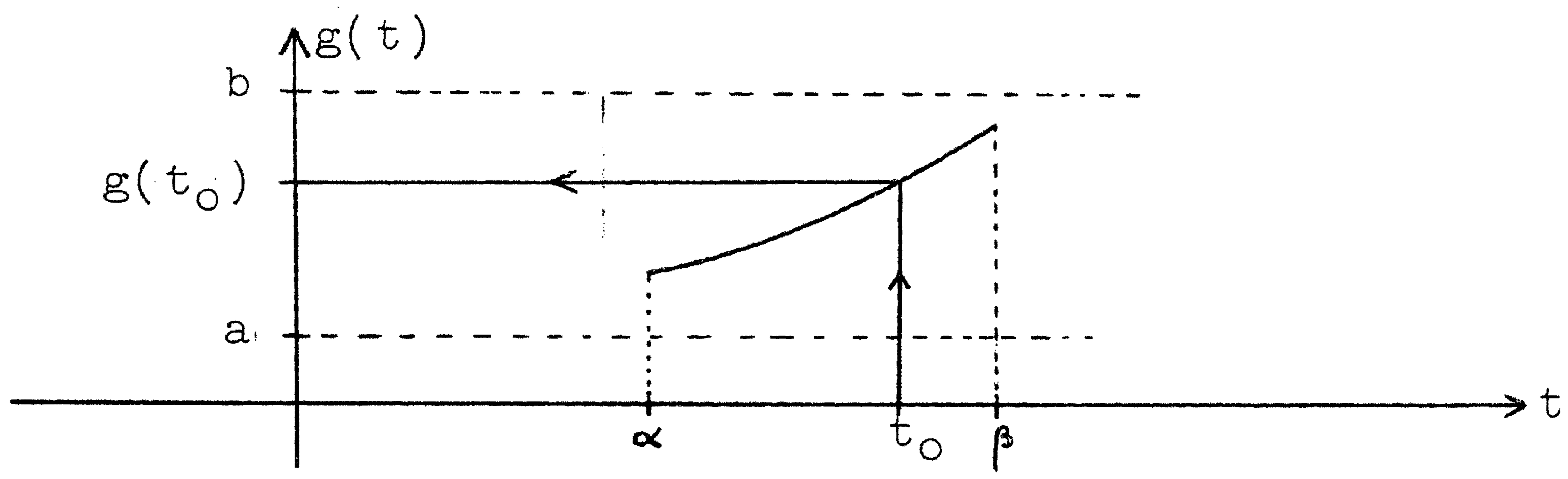
<u>Samengestelde funkties</u>

De funktie g zij gedefinieerd op het interval

$$\alpha \leqq t \leqq \beta$$

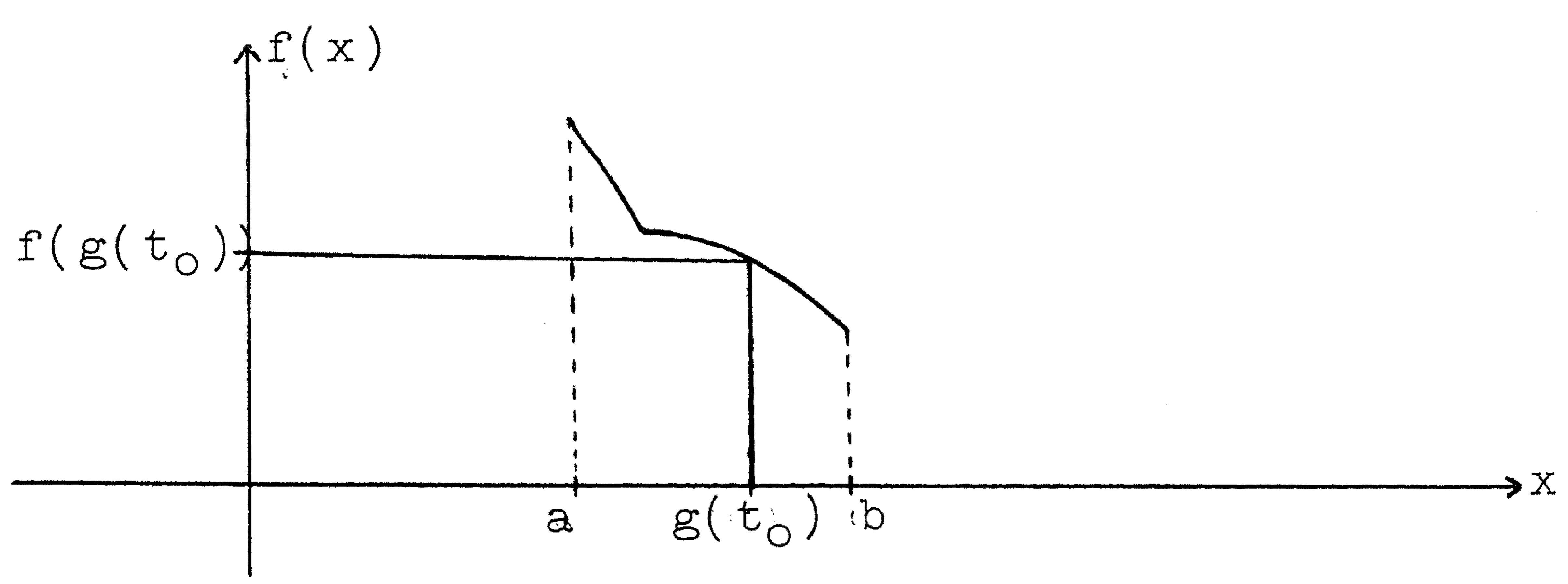
terwijl voor elke funktiewaarde g(t) geldt

$$a \leqq g(t) \leqq b. \qquad \text{(zie fig. 1.4)}$$



<u>fig 1.4. Grafische voorstelling van de funktie g op $[\alpha, \beta]$</u>

Op het interval $a \leqq x \leqq b$ zij vervolgens de funktie f gedefinieerd. (zie fig. 1.5)



<u>fig 1.5. Grafische voorstelling van de funktie f op [a,b]</u>

Nemen we nu een getal t_o uit het interval $[\alpha, \beta]$ dan behoort daarbij volgens het funktievoorschrift g een zekere funktiewaarde $g(t_o)$. Dit getal ligt in het interval $[a,b]$ en dus behoort bij dit punt (=getal) volgens het voorschrift f de funktiewaarde $f(g(t_o))$. Voeren wij deze procedure uit voor alle punten t van het interval $[\alpha, \beta]$, dan verkrijgen wij een nieuwe funktie op het interval $[\alpha, \beta]$. Voor deze nieuwe funktie schrijven wij f(g); dit is een z.g. samengestelde funktie (of een funktie van een funktie).

Voorbeeld 1.4

$g(t) = 1-t^2$ op het interval $-1 \leq t \leq +1$

$f(x) = \sqrt{x}$ op $x \geq 0$.

De samengestelde funktie f(g) komt er nu als volgt uit te zien

$$f(g(t)) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{op} \quad -1 \leq t \leq +1.$$

Rijen: Onder een rij verstaan wij een funktie die gedefinieerd is op de verzameling van alle gehele positieve getallen (ook natuurlijke getallen genoemd)

Voorbeeld 1.5. De som van de eerste n natuurlijke getallen kunnen wij opvatten als een funktie van n.
Het funktievoorschrift luidt:

$$f(n) = 1+2+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1);\ n=1,2,3,\ldots \quad (1.12)$$

Voorbeeld 1.6. Het gedurig product van de eerste n natuurlijke getallen:

$$f(n) = 1.2.\ldots\ldots(n-1).n = \prod_{k=1}^{n} k = n!;n=1,2,3,\ldots(1.13)$$

(voor n! leze men "n faculteit")

Wij definiëren: $0\,! = 1$.
Wij hebben zojuist een rij gedefiniëerd als een funktie, die gedefiniëerd is op de verzameling van alle natuurlijke getallen. Op grond van deze definitie en de geordendheid van de verzameling der natuurlijke getallen, kunnen wij een rij ook opvatten als een verzameling van aftelbaar oneindig veel getallen (funktiewaarden $f(n)$) welke door één of ander voorschrift zijn vastgelegd en geordend. De getallen (elementen) van deze geordende verzameling noemen wij dan de termen van de rij en de n^e term wordt doorgaans aangeduid met a_n in plaats van met $f(n)$.
Het een en ander komt er dus hier op neer dat wij in gedachte de getallen a_n achter elkaar opschrijven naar opklimmende grootte van n. Dus:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \text{ ad inf.}$$

<u>Dubbelrijen</u>: Onder een dubbelrij verstaan wij een funktie, die gedefinieerd is op de roosterpunten (m,n) van het eerste kwadrant van een x-y-vlak.

<u>Voorbeeld 1.7. Binomiaal-coëfficienten</u>

De binomiaalcoëfficienten $\binom{n}{m}$ worden als volgt gedefiniëerd: (n en m geheel en $\geqq 0$)

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad \text{als } m \leqq n \\ \binom{n}{m} &= 0 \qquad\qquad\quad\; \text{als } m > n \end{aligned} \tag{1.14}$$

De binomiaalcoëfficienten ontstaan wanneer wij $(a+b)^n$ in termen van a en b uitschrijven:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} \,.\, b^m \tag{1.15}$$

Deze betrekking heet het <u>binomium van Newton</u>.

Enkele eenvoudige eigenschappen van binomiaalcoëfficienten:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{\underline{a}} & \binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1} & \text{als } m > 0 \\ \underline{\underline{b}} & \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} & \text{als } \quad 0 \leqq m \leqq n \\ \underline{\underline{c}} & \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \\ \underline{\underline{d}} & \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} & \end{array}\right] \qquad (1.16)$$

2. Limieten; Reeksen

Limiet van een rij getallen. Wij beschouwen de rij $a_n = \frac{1}{n}$. Geen enkel getal van deze rij is gelijk aan nul, maar hoe groter n wordt gekozen, des te dichter ligt a_n bij nul. Kiezen we nu een willekeurig klein interval $(0, \varepsilon)$, dan is er altijdeen getal N te vinden, zodanig dat alle a_n, waarvoor geldt $n \geqq N$, binnen dit interval liggen. Kiest men nl. $N > \frac{1}{\varepsilon}$ dan zal voor alle a_n met $n \geqq N$, $a_n < \varepsilon$ zijn. We zeggen nu dat de rij a_n naar nul convergeert, of dat de limiet van de rij a_n voor n naar oneindig de waarde 0 heeft. Schrijfwijze:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (2.1)$$

Definitie van de limiet van een rij. Wanneer voor een oneindige rij $a_1, a_2, \ldots$ geldt, dat bij elk positief getal ε een getal N gevonden kan worden, zodanig dat voor alle $n \geqq N$ geldt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (2.2)$$

dan heeft de rij a_n de limiet a (voor n naar oneindig). Schrijfwijze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ . \qquad (2.3)$$

Het getal N in de vorenstaande definitie zal in het algemeen afhankelijk zijn van de keuze van ε en wordt daarom ook vaak aangegeven met $N(\varepsilon)$.

Zonder bewijs vermelden wij een aantal stellingen betreffende het limietbegrip.

LO: Een rij heeft hoogstens één limiet.

Is a_n een rij met de limiet a en b_n een rij met de limiet b, dan heeft de rij

L1: $c_n = a_n + b_n$ de limiet $c = a+b$, (2.4)

L2: $d_n = a_n - b_n$ de limiet $d = a-b$, (2.5)

L3: $e_n = a_n \cdot b_n$ de limiet $e = a.b$, (2.6)

L4: $f_n = \frac{a_n}{b_n}$ $(b_n \neq 0)$ de limiet $f = \frac{a}{b}$ mits $b \neq 0$. (2.7)

L5: Elke monotoon niet-dalende rij die begrensd is, heeft een reëel getal tot limiet.

Stelling L5 geldt niet als we ons beperken tot het systeem der rationale getallen. De monotoon stijgende rij $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, die uit louter rationale getallen bestaat, heeft in het systeem der rationale geen limiet. In het systeem der reële getallen heeft e_n de irrationale limiet e.

Het getal e

Wij beschouwen de rij $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.
Ontwikkeling van $(1 + \frac{1}{n})^n$ in termen van 1 en $\frac{1}{n}$ volgens het binomium van Newton levert:

$$(1 + \tfrac{1}{n})^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} . 1^{n-m} . (\tfrac{1}{n})^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{n}{m}}{n^m} = \frac{\binom{n}{0}}{n^0} + \frac{\binom{n}{1}}{n^1} + \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Hieruit is gemakkelijk af te leiden:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqq$$

$$\leqq 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n} =$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 3 - \frac{1}{n} < 3$$

De rij e_n is dus begrensd:

$$0 < e_n < 3 \qquad (2.8)$$

Verder tonen we aan dat de rij e_n monotoon stijgend is.
Door volledige induktie naar n is gemakkelijk te bewijzen dat:

$$(1 + h)^n > 1 + n.h \quad \text{als } h > -1, h \neq 0 \qquad (2.9)$$

en $\qquad n = 2, 3, 4, \ldots$

Voor het quotient van twee opeenvolgende termen in de rij e_n geldt nu ($n \geqq 2$)

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} >$$

$$> \left(1 - n.\frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 ;$$

hieruit volgt dat de rij e_n monotoon stijgend is :

$$e_{n-1} < e_n . \qquad (2.10)$$

Op grond van eigenschap L5 kunnen we nu dus zeggen dat de rij e_n convergeert; de bijbehorende limiet geven we aan met de letter e.

Dus:
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (2.11)$$

Een benadering van e is 2,718281828 4590....

Limieten van funkties met een "continue variabele".
Tot nu toe hebben we alleen limieten beschouwd van rijen, dus van funkties waarbij de variabele alleen gehele waarden aanneemt. We zullen nu limieten beschouwen van funkties f(x), waarbij x een "continue variabele" is. We zeggen dat f(x) naar een limiet l convergeert, voor x naderend tot a, wanneer alle waarden van de funktie f(x) voor x voldoende dicht bij a, willekeurig weinig van l verschillen.

Precies gedefinieerd: De funktie f(x) convergeert, voor x naderend tot a, naar l, wanneer bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden, zodanig dat voor iedere $x \neq a$ in het interval $|x-a| < \delta$ geldt: $|f(x)-l| < \varepsilon$

We schrijven dan:
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \qquad (2.12)$$

Definitie: Een funktie f(x) is in het punt x=a continu wanneer:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

De funktie f(x) is in het punt x = a dan en slechts dan continu als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

1e f(x) is gedefinieerd op $a-\alpha < x < a+\alpha$ $(\alpha > 0)$

2e de limiet $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat

3e deze limiet is gelijk aan f(a).

Definitie: De funktie f(x) is in het punt x=a links-continu (rechts-continu) als bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodanig dat

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

voor alle waarden van x die voldaan aan

$$a-\delta < x < a (a < x < a+\delta).$$

Definitie: De funktie f(x) heet op het interval $a < x < b$ continu als f(x) continu is in elk punt van dit interval. Is f(x) bovendien rechts-continu in a en links-continu in b dan zeggen we dat f(x) continu is op het interval

$$a \leqq x \leqq b.$$

Zonder bewijs vermelden we de

Stelling: Als f(x) en g(x) continu zijn in het punt x=a, dan is dat ook het geval met de funkties

$$f(x) + g(x),$$

$$f(x) - g(x),$$

$$f(x) \,.\, g(x)$$

en $$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mits } g(a) \neq 0.$$

Stelling: De funktie f(x)=x (voor alle waarden van x) is overal continu.

Bewijs: Beschouw de gegeven funktie in het punt $x=x_o$. Kies een $\varepsilon > 0$ en stel $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Voldoet x nu aan

$$|x - x_o| < \delta$$

dan geldt

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

en hiermee is het bewijs voltooid.

Gevolg: Met $f(x) = x$ zijn ook de funkties

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

overal continu(a_i constant).
Verder zijn de funkties

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

ook continu, behalve in de punten waar de noemer gelijk aan nul is.
Hierbij is gebruik gemaakt van de stelling dat een constante funktie continu is; het bewijs van deze stelling is zeer eenvoudig en wordt aan de lezer overgelaten.

Voorbeeld 2.1 Gevraagd $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
Oplossing. Voor $x \neq 1$ kunnen we schrijven

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

Het linkerlid is voor $x = 1$ niet gedefinieerd, het rechterlid wel. Het rechterlid is zelfs een overal continue functie van x.
Stellen we

$$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

dan geldt dus

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = n.$$

De waarde n noemen wij de continu makende waarde van de op $x \neq 1$ gedefinieerde funktie

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

in het punt $x = 1$.

Stelling. Is $g(t)$ continu in $t = t_o$ en $f(x)$ continu in $x = g(t_o)$, dan is $f(g(t))$ continu in $t = t_o$. M.a.w. een continu funktie van een continu funktie is continu. Het bewijs van deze stelling laten we aan de lezer over.

Reeksen

Als uitgangspunt voor een beknopte inleiding in de theorie der reeksen nemen wij een willekeurige rij van reële getallen:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots$$

Met behulp van de termen van deze rij construeren wij een nieuwe rij

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots\ldots$$

volgens het voorschrift:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n \qquad (2.13)$$

Deze rij s_n wordt de bij de rij a_n behorende reeks genoemd. Doorgaans wordt deze som-rij aangeduid als de reeks $\sum a_n$. Als de rij s_n convergent is met de limiet S, dan zeggen we dat de reeks $\sum a_n$ convergeert en S tot som heeft. De gebruikelijke notatie hiervoor is

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (2.14)$$

Voorbeeld 2.2. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$

De bij de rij a_n behorende reeks is

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dus $$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Hieruit volgt dat s_n de limiet 1 heeft:

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \qquad (2.15)$$

<u>Convergentie kriteria voor reeksen</u>.

Zonder bewijs vermelden wij enkele stellingen, met behulp waarvan we in een aantal eenvoudige gevallen kunnen uitmaken of een reeks al dan niet convergent is.

R1: Als de reeks $\sum |a_n|$ convergent is dan is ook de reeks $\sum a_n$ convergent.

In dit geval wordt $\sum a_n$ <u>absoluut convergent</u> genoemd.

Anders geformuleerd: Als

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

een limiet heeft voor $n\to\infty$, dan heeft ook

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

een limiet voor $n\to\infty$.

R2: Geldt voor een rij a_n dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

dan is de reeks $\sum a_n$ convergent.

R3: Heeft de reeks $\sum a_n$ louter positieve termen en is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

dan is de reeks $\sum a_n$ convergent.

R4: Een noodzakelijke voorwaarde voor de convergentie van een reeks $\sum a_n$ is

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Deze voorwaarde is evenwel niet voldoende, wat in de voorbeelden 2.3 en 2.4 zal worden aangetoond.

<u>Voorbeeld 2.3</u>

We beschouwen de z.g. <u>harmonische</u> reeks, d.w.z. de reeks bij de rij $a_n = \frac{1}{n}$. Nu geldt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

De algemene term $\frac{1}{k}$ van deze reeks heeft de limiet 0. Toch is de reeks divergent, wat uit onderstaande schatting blijkt.

$$\begin{aligned} s_{10^n} = {} & 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{10^2}\right) + \\ & + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{10^3}\right) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \left(\frac{1}{10^{n-1}+1} + \frac{1}{10^{n-1}+2} + \ldots \frac{1}{10^n}\right) > \\ & > 1 + 9 . \frac{1}{10} + 90 . \frac{1}{100} + \ldots + \end{aligned}$$

$$+ (10^n - 10^{n-1}) . \frac{1}{10^n} = 1 + (n-1) . \frac{9}{10} > \frac{9}{10} . n$$

Omdat s_n bovendien monotoon stijgend is, moet wel gelden

$$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$$

waarmee we slechts willen aangeven dat s_n onbeperkt groot wordt voor $n \to \infty$.

s_n heeft dus geen limiet; m.a.w. de reeks

$$\sum \frac{1}{k}$$

is <u>divergent</u>.

<u>Voorbeeld 2.4</u>

Nu is

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots . + \frac{1}{\sqrt{n}} >$$

$$> n . \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} .$$

Hoewel de algemene term van de reeks naar 0 convergeert, toch is de reeks divergent.

Dat de in dit voorbeeld genoemde reeks divergent is hadden we ook kunnen afleiden uit de divergentie van de reeks uit voorbeeld 2.3. Immers:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dus

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty ,$$

waarmee we slechts willen aangeven dat de reeks

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergent is.

Voorbeeld 2.5 De meetkundige reeks.

De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is convergent voor $|x| < 1$ en voor de som geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ .}$$

Bewijs:

$$\sum_{n=0}^{k-1} x^n = \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} \text{ .}$$

Om te bewijzen dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ convergent is met de som $\frac{1}{1-x}$, moeten we dus aantonen dat $\lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{1-x} = 0$ of

$\lim_{k\to\infty} x^k = 0$ ($|x| < 1$).

Het geval x=0 levert geen moeilijkheden.

Uit $0 < |x| < 1$ volgt $\frac{1}{|x|} > 1$. Beschouwen we x als een constante dan kunnen we schrijven

$$\frac{1}{|x|} = 1 + h \text{ met } h > 0.$$

Verder kunnen we schrijven

$$\frac{1}{|x|}^k = (1 + h)^k > 1 + k.h \ (k > 1) \text{ of}$$

$$|x|^k < \frac{1}{1+k.h} \text{ ,}$$

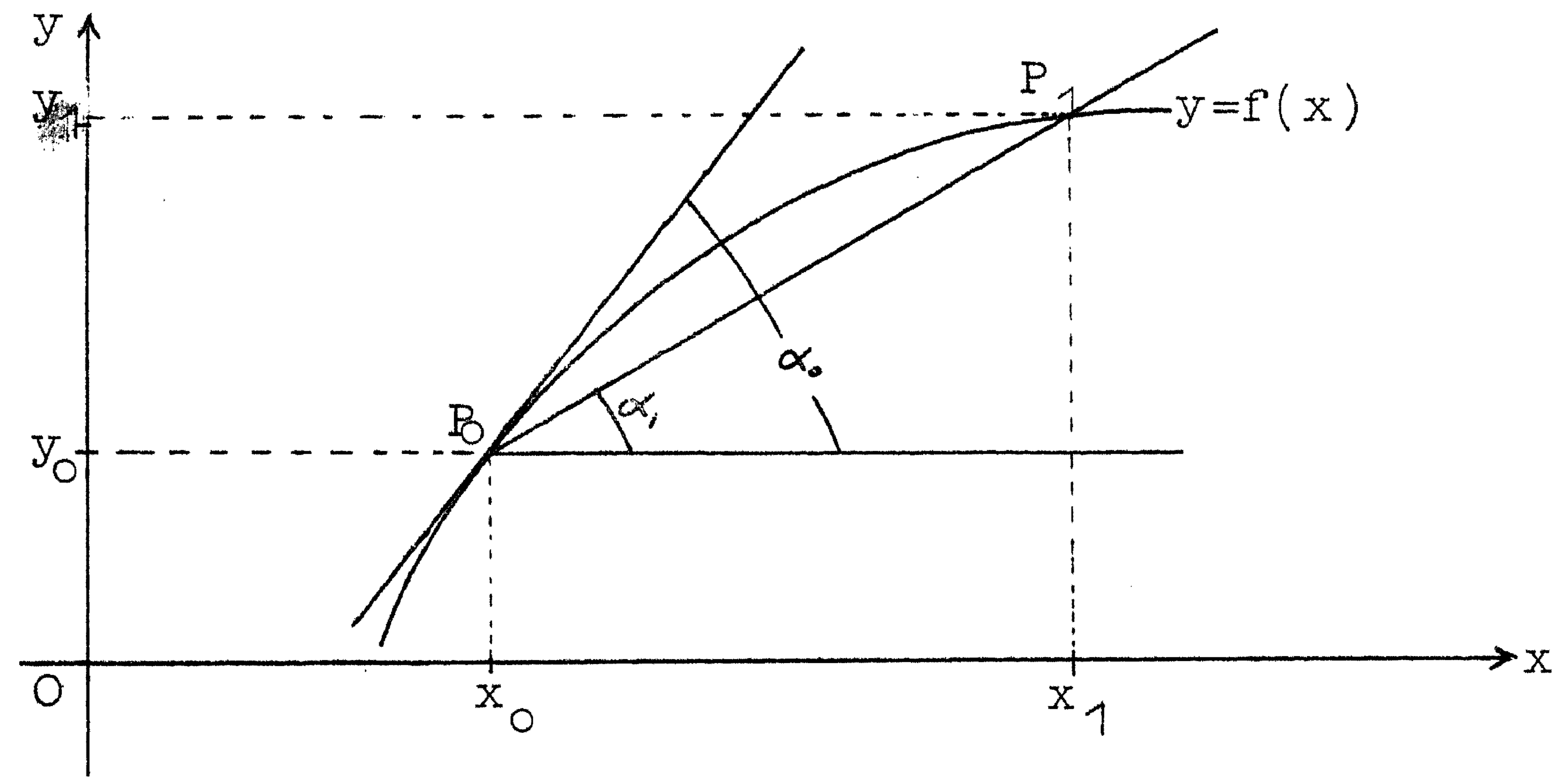
waaruit gemakkelijk afgeleid kan worden dat

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \text{ voor } |x| < 1.$$

Q.E.D.

3. Differentiaalrekening

Voordat we een analytische definitie geven van het differentiaalquotient, zullen we dit begrip minder exact bespreken aan de hand van de volgende figuur.



Stel P_0 een punt op de kromme $y=f(x)$. We definiëren de raaklijn aan de kromme in P_0 als de limietstand van een koorde P_0P_1 als P_1 langs de kromme naar P_0 beweegt. Hiervoor is het nodig dat de hoek α_1 die P_0P_1 met de x-as maakt een limiet α_0 bezit. Dus, in een gemakkelijk te begrijpen notatie:

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_1 = \alpha_0 \qquad (3.1)$$

Zijn nu $x_0, y_0(=f(x_0))$ en $x_1, y_1(=f(x_1))$ de coördinaten van respectievelijk P_0 en P_1, dan zal dus moeten gelden:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} . \qquad (3.2)$$

Met het oog op (3.1) kunnen we nu schrijven:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \mathrm{tg}\,\alpha_0 . \qquad (3.3)$$

Deze limiet bestaat echter niet altijd.

Onafhankelijk van een meetkundige voorstelling definieert men nu het differentiaalquotient van een funktie f(x) in het punt x_0 door:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad (3.4)$$

mits deze limiet bestaat.
Uit het bestaan van (3.4) volgt dat

$$\lim_{h \to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right] = 0.$$

Dus: Een <u>differentieerbare</u> funktie is noodzakelijk continu. Het omgekeerde geldt echter niet. Een continue funktie is niet noodzakelijk differentieerbaar.

Tot nu toe hebben we het differentiaalquotient bekeken in een vast punt x_0. Laten we nu in (3.4) x_0 veranderen, dan zal ook het bijbehorende differentiaalquotiënt veranderen. We kunnen dus het differentiaalquotient als een funktie van x beschouwen. Van deze funktie f'(x) kunnen we weer het differentiaalquotient, overeenkomstig (3.4) bepalen. Dit <u>tweede differentiaalquotient</u> wordt aangegeven met:

$$\left.\frac{df'(x)}{dx}\right|_{x_0} = f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}. \qquad (3.5)$$

Zo voortgaande kan men alle <u>hogere</u> differentiaalquotienten definiëren (onder het voorbehoud dat ze bestaan).
In plaats van differentiaalquotient gebruikt men ook vaak de term <u>afgeleide</u>.Men spreekt dan van de eerste afgeleide (kortweg afgeleide), tweede afgeleide, enz....

<u>Enige rekenregels voor differentiaalquotienten</u>

<u>1</u> . Als de funkties f(x) en g(x) differentieerbaar zijn in $x=x_0$ met de afgeleiden $f'(x_0)$ resp.$g'(x_0)$,

dan is ook de funktie $\varphi(x)=f(x)+g(x)$ differentieerbaar in $x=x_o$ met als afgeleide

$$\varphi'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o) \tag{3.6}$$

Bewijs: $\dfrac{\varphi(x_o+h) - \varphi(x_o)}{h} =$

$$= \frac{[f(x_o+h) + g(x_o+h)] - [f(x_o) + g(x_o)]}{h} =$$

$$= \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} + \frac{g(x_o+h) - g(x_o)}{h}$$

Hieruit volgt door de limietovergang $h \to 0$ vrijwel direkt het gestelde.

2. Maken we dezelfde veronderstellingen als onder 1 dan is ook de funktie $\varphi(x)=f(x).g(x)$ differentieerbaar in $x=x_o$ en wel met de afgeleide

$$\varphi'(x_o) = f'(x_o).g(x_o) + f(x_o).g'(x_o) \tag{3.7}$$

Bewijs: $\dfrac{\varphi(x_o+h)-\varphi(x_o)}{h} = \dfrac{f(x_o+h).g(x_o+h)-f(x_o).g(x_o)}{h} =$

$$= \frac{f(x_o+h).g(x_o+h)-f(x_o+h).g(x_o)+f(x_o+h).g(x_o)-f(x_o).g(x_o)}{h} =$$

$$= f(x_o+h).\frac{g(x_o+h)-g(x_o)}{h} + g(x_o).\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h},$$

waaruit door de limietovergang $h \to 0$ het gestelde volgt.
Dat $\lim_{h\to 0} f(x_o+h)$ gelijk is aan $f(x_o)$, volgt uit de continuïteit van $f(x)$ in $x=x_o$.

3. Als $f(x)$ differentieerbaar is in $x=x_o$, dan is ook $\varphi(x)=c.f(x)$ differentieerbaar in $x=x_o$ en wel met de afgeleide

$$\varphi'(x_o) = c.f'(x_o) \tag{3.8}$$

Hierbij is c een constante.
Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

4 Als f(x) en g(x) differentieerbaar zijn in $x=x_0$ met de afgeleiden $f'(x_0)$ resp. $g'(x_0)$, dan is ook $\varphi(x)=f(x) + - g(x)$ differentieerbaar in $x=x_0$ en wel met de afgeleide

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \qquad (3.9)$$

Bewijzen: a. Analoog aan het bewijs onder 1
b. Stel c=-1 in 3 en pas daarna 1 toe.

5 Als de funkties $f_i(x)(i=1, 2,\ldots,n)$ differentieerbaar zijn in $x=x_0$ met de afgeleiden $f_i'(x_0)$, dan is ook

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$$

differentieerbaar in $x=x_0$ en wel met de afgeleide

$$\varphi'(x_0)=f_1'(x_0).f_2(x_0)\ldots.f_n(x_0)+f_1(x_0).f_2'(x_0)\ldots f_n(x_0)+$$

$$+\ldots.+f_1(x_0).f_2(x_0)\ldots.f_n'(x_0) \qquad (3.10)$$

6 Zijn f(x) en g(x) differentieerbaar in $x=x_0$ dan is ook

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

differentieerbaar in $x=x_0$ mits $g(x_0)\neq 0$. Voor de afgeleide geldt

$$\varphi'(x_0)= \frac{g(x_0).f'(x_0) - g'(x_0).f(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad (3.11)$$

Bewijs:

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = \frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_o+h).g(x_o)}{h} - \dfrac{f(x_o).g(x_o+h)}{h}}{g(x_o+h).g(x_o)} =$$

$$= \frac{g(x_o).\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} - f(x_o).\dfrac{g(x_o+h)-g(x_o)}{h}}{g(x_o+h).g(x_o)} ,$$

waaruit door de limietovergang $h \to 0$ het gestelde volgt.

Differentiatie van enige eenvoudige funkties:

1) $f(x)=c$ (c = constante). Voor elke waarde van x heeft de funktie dezelfde waarde c, dus:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \qquad (3.12)$$

2) $$f(x) = x,\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \qquad (3.13)$$

3) $f(x)=x^n$ (n geheel en positief). Toepassing van de produktregel (3.10) op $x^n = x.x....x$ geeft:

$$f'(x) = 1.x^{n-1} + 1.x^{n-1} .....+1.x^{n-1} = nx^{n-1} \qquad (3.14)$$

Opgave: Tracht dit resultaat ook te bereiken met behulp van de definitie van het differentiaalquotient en het binomium van Newton.

4) $f(x)= \frac{1}{x^n}$ (n geheel en positief). Toepassing van de quotientregel (3.11), (3.12) en (3.14) geeft:

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} (x \neq 0) \qquad (3.15)$$

5) $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

Toepassing van (3.6),(3.8) en (3.14) geeft:

$$f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)\ a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1.$$

Bij differentiatie van een veelterm ontstaat een nieuwe veelterm, waarvan de graad één lager is dan die van de oorspronkelijke veelterm. Van een veelterm van de n^e graad zijn dus de $(n+1)^e$ en hogere afgeleiden alle identiek gelijk nul.

<u>De afgeleide van de inverse funktie</u>

We hebben reeds opgemerkt dat een continue funktie f(x) een continue inverse funktie $\varphi(t)$ heeft in elk interval waar die funktie monotoon is. In aansluiting hierop geldt nu de volgende stelling:

<u>Stelling 3.1.</u> Als de monotone funktie f(x) op een interval D differentieerbaar is[1] dan bezit de inverse funktie $\varphi(t)$ ook een afgeleide in elk punt van het interval $D\varphi$(=Rf).
Voor de afgeleide van de funktie $\varphi(t)$ in t_o geldt

$$\varphi'(t_o) = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{\varphi(t_o)}} \qquad (3.16)$$

Bewijs:

$$\frac{\varphi(t_o+h)-\varphi(t_o)}{h} = \frac{\varphi(t_o+h)-\varphi(t_o)}{(t_o+h)-t_o} =$$

$$= \frac{\varphi(t_o+h)-\varphi(t_o)}{f(\varphi(t_o+h))-f(\varphi(t_o))} = \frac{1}{\frac{f(\varphi(t_o+h))-f(\varphi(t_o))}{\varphi(t_o+h)-\varphi(t_o)}}$$

In verband met de continuïteit van $\varphi(t)$ in t_o volgt hieruit, door de limietovergang $h\rightarrow 0$ het gestelde.

---

1)met $f'(x)\neq 0$ op D.

Voorbeeld 3.1. De funktie $f(x)=x^n$ is continu en monotoon stijgend op $x > 0$.
De omkeer funktie $\varphi(t)$ is de funktie $\varphi(t)=t^{\frac{1}{n}}$ op $t > 0$.
Volgens (3.16) vinden we voor de afgeleide van $\varphi(t)$

$$\varphi'(t)=\frac{1}{f'(\varphi(t))}=\frac{1}{n.(\varphi(t))^{n-1}}=\frac{1}{n(t^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=$$
$$=\frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}$$

Differentiatie van samengestelde funkties

Stel $\varphi(u)$ een funktie op het interval $\alpha \leq u \leq \beta$, zodanig dat voor elke waarde van u uit dit interval geldt

$$a \leq \varphi(u) \leq b.$$

Als $f(x)$ nu gedefinieerd is op het interval $a \leq x \leq b$, dan is $f(\varphi(u))$ een funktie van u op het interval

$$\alpha \leq u \leq \beta$$

Voorbeeld 3.2

$$\varphi(u)=u^2+\sqrt{u} \quad \text{op } 0 < u$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \quad \text{op} \quad x > 0$$

Dan is: $f(\varphi(u))=\sqrt[3]{u^2+\sqrt{u}}$ op $0 < u$

Stelling 3.2. Als $\varphi(u)$ differentieerbaar is op $\alpha \leq u \leq \beta$ terwijl $a \leq \varphi(u) \leq b$, en $f(x)$ is differentieerbaar op $a \leq x \leq b$, dan is $f(\varphi(u))$ differentieerbaar op $\alpha \leq u \leq \beta$.
Voor de afgeleide geldt

$$\left.\frac{df(\varphi(u))}{du}\right|_{u_0}=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{\varphi(u_0)}\cdot\left.\frac{d\varphi(u)}{du}\right|_{u_0} \qquad (3.18)$$

(Dit is de z.g. kettingregel)

Bewijs: Voor $\frac{f(\varphi(u))-f(\varphi(u_0))}{u-u_0}$ kunnen we schrijven

$$\frac{f(\varphi(u))-f(\varphi(u_0))}{\varphi(u)-\varphi(u_0)} \cdot \frac{\varphi(u)-\varphi(u_0)}{u-u_0}$$

als $\varphi(u) \neq \varphi(u_0)$ voor $u \neq u_0$.
Laten we nu u tot u_0 naderen dan vinden we vrijwel direct (3.18). Formule (3.18) kan evenwel ook bewezen worden zonder de beperkende veronderstelling: $\varphi(u) \neq \varphi(u_0)$ voor $u \neq u_0$.

<u>Voorbeeld 3.3.</u> Bepaal de afgeleide van

$$\sqrt[3]{u^2+\sqrt{u}} \quad \text{op } u>0$$

Oplossing: Stel $\varphi(u)=u^2+\sqrt{u}$ en

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}.$$

De afgeleide van $\sqrt[3]{u^2+\sqrt{u}}=f(\varphi(u))$ is dus gelijk aan het produkt van $f'(\varphi(u))$ en $\varphi'(u)$.
Nu is

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{en}$$

$$\varphi'(u)=2u+\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Dus

$$\frac{d f(\varphi(u))}{du}=\frac{1}{3(u^2+\sqrt{u})^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(2u+\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)$$

<u>Voorbeeld 3.4.</u> Bepaal de afgeleide van

$$u^{\frac{p}{q}} \quad \text{op } u>0.$$

Oplossing: Stel $f(x)=x^p$ en $\varphi(u)=u^{\frac{1}{q}}$

Dan geldt:

$$\frac{df(\varphi(u))}{du} = p\,\varphi^{p-1}(u).\ \frac{1}{q}\,u^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,u^{\frac{p}{q}-1} \qquad (3.19)$$

Hiermee is nu bewezen dat voor alle rationale getallen geldt:

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad (x > 0) \qquad (3.19)$$

Een middelwaarde-stelling

Zonder bewijs geven we de

Stelling 3.3. Is $f(x)$ op $a < x < b$ differentieerbaar en bovendien continu in a en b dan is er een getal ζ tussen a en b met de eigenschap

$$f(b)-f(a) = (b-a).f'(\zeta) \qquad (3.20)$$

De meetkundige betekenis van deze stelling wordt geïllustreerd in fig. 3.2.

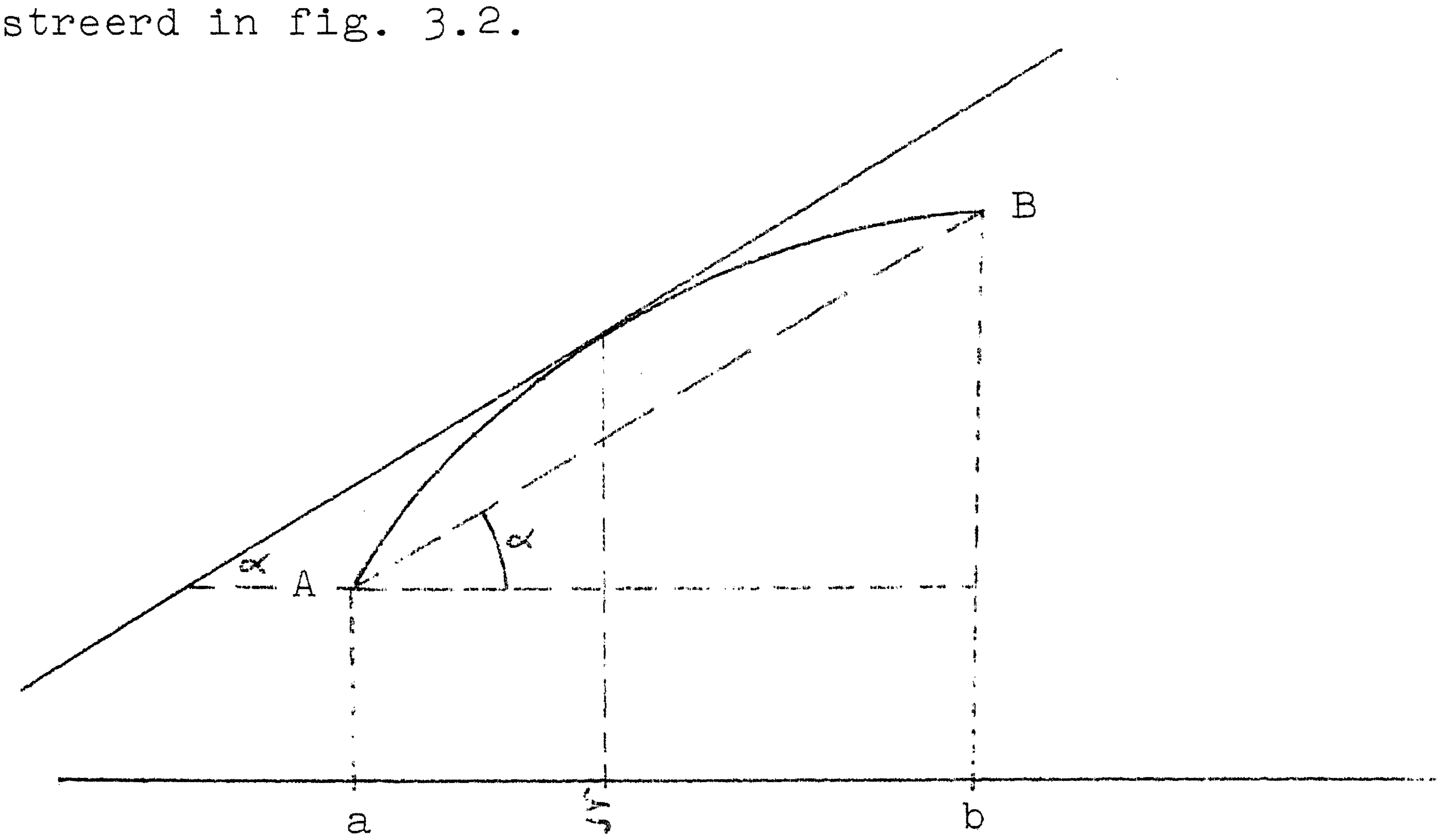


fig. 3.2

De (eerste) middelwaarde-stelling uit de differentiaalrekening zegt dat er tussen a en b een punt ξ bestaat, zodanig dat de raaklijn aan de kromme $y=f(x)$ in het punt $(\xi, f(\xi))$ evenwijdig loopt met de koorde die A en B verbindt;
m.a.w.

$$f'(\xi)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{3.20}$$

<u>Toepassingen</u>

<u>1</u> . Als voor de afgeleide $f'(x)$ van de funktie $f(x)$ op het interval $a \leqq x \leqq b$ steeds geldt

$$f'(x) > 0,$$

dan is $f(x)$ op dat interval monotoon stijgend.
Bewijs: Kies op $a \leqq x \leqq b$ twee punten x_1 en x_2 zodanig dat $x_1 < x_2$.
Volgens de eerste middelwaarde-stelling geldt dan

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1).f'(\xi)$$

voor zekere ξ met $x_1 < \xi < x_2$.
Daar volgens het gegeven voor ξ geldt $f'(\xi) > 0$, vinden we

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

of

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>2.</u>Is $f(x)$ op zeker <u>interval</u> differentieerbaar met $f'(x)= = 0$ voor elke x uit dit interval dan is $f(x)$ een constante funktie.
Bewijs: Zij $x_1 \neq x_2$ dan geldt volgens de middelwaarde stelling
$f(x_1)-f(x_2) = (x_1-x_2).f'(\xi) = (x_1-x_2).\ 0=0,$
dus $f(x_1)=f(x_2)$. q.e.d.

De exponentiële funktie E(x)

In vrijwel alle delen van de wiskunde speelt de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

een bijzonder belangrijke rol.

We onderzoeken deze reeks op convergentie m.b.v. R3; kiezen we voor x een vaste waarde $x_o \neq 0$ en beschouwen we de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_o^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_o|^n}{n!}$$

dan is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x_o|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x_o|^n}{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x_o|}{n+1} = 0 < 1.$$

De te onderzoeken reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ is dus voor elke waarde van x absoluut convergent.

Voor de som van de reeks, die afhankelijk is van x, schrijven we

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (3.21)$$

Zonder bewijs vermelden we, dat E(x) overal differentieerbaar is en dat de afgeleide funktie gevonden wordt door de reeks termsgewijs te differentiëren. Dus

$$E'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x). \qquad (3.22)$$

De funktie $E(x)$ heeft dus de zeer merkwaardige eigenschap, gelijk te zijn aan zijn afgeleide $E'(x)$.
Met behulp van deze eigenschap kunnen we tal van andere eigenschappen van $E(x)$ zeer eenvoudig afleiden.
Beschouwen wij b.v. de funktie

$$\varphi(x) = E(x).\ E(-x),$$

dan geldt:

$$\varphi'(x)=E'(x).\ E(-x)+E(x).\left[E(-x)\right]'=$$

$$= E(x).\ E(-x) + E(x).\ \left[-E(-x)\right] =$$

$$= E(x).\ E(-x) - E(x).\ E(-x) = 0$$

De funktie $\varphi(x)$ heeft dus in elk punt de afgeleide 0 en is derhalve constant. Daar

$$\varphi(0) = E(0)\ .\ E(-0) = E^2(0) = 1$$

geldt dus

$$\varphi(x) = E(x).\ E(-x) = 1 \text{ voor elke } x.$$

Dit resultaat kan ook geschreven worden als

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)}\ . \tag{3.23}$$

Uit bovenstaande formules volgt vrijwel direct dat $E(x) \neq 0$ is voor elke waarde van x.
Uit de definitie van $E(x)$ volgt dat $E(x)$ positief is voor $x \geqq 0$; uit (3.23) volgt dan dat $E(x)$ ook positief is voor $x < 0$.
Dus $E(x) > 0$ voor elke x. Omdat $E'(x) = E(x)$ geldt dus ook $E'(x) > 0$ voor elke x, waaruit volgt dat $E(x)$ monotoon stijgend is.
Voor $x > 0$ geldt (zie 3.21)

$$E(x) > x$$

dus $\lim\limits_{x \to \infty} E(x) = +\infty$

waar weer uit volgt

$$\lim_{x\to\infty} E(-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{E(x)} = 0 \ . \qquad (3.24)$$

Beschouwen we nu de funktie

$$\psi(x) = \frac{E(x)}{E(x+a)}$$

dan geldt

$$\psi'(x) = \frac{E(x+a).E'(x) - E'(x+a).E(x)}{E^2(x+a)} =$$

$$= \frac{E(x+a).E(x) - E(x+a).E(x)}{E^2(x+a)} = 0.$$

De funktie $\psi(x)$ is dus een constante funktie en daar $\psi(0) = \frac{E(0)}{E(a)} = \frac{1}{E(a)}$ geldt

$$\frac{E(x)}{E(x+a)} = \frac{1}{E(a)}$$

of

$$E(x+a) = E(x).\ E(a) \qquad (3.25)$$

voor elke x en elke a.

Stellen we $E(1) = E$ (3.26)

dan vinden we

$$E = E(1) = E.(q.\tfrac{1}{q}) = \left[E(\tfrac{1}{q})\right]^q$$

of

$$E(\tfrac{1}{q}) = E^{\frac{1}{q}}. \quad \text{(q geheel en positief).}$$

Voor $E(\frac{p}{q})$ vinden we zo (p en q geheel en positief)

$$E(\tfrac{p}{q}) = E(p.\tfrac{1}{q}) = \left[E(\tfrac{1}{q})\right]^p = E^{\frac{p}{q}}$$

Voor rationale getallen $r \geqq 0$ geldt dus

$$E(r) = E^r.$$

Is het rationale getal $r < 0$ dan stellen we $r = -p$ met $p > 0$.

$$E(r) = E(-p) = \frac{1}{E(p)} = \frac{1}{E^p} = E^{-p} = E^r$$

waarmee aangetoond is dat voor elk rationaal getal r geldt

$$E(r) = E^r. \qquad (3.27)$$

Zij α nu een irrationaal getal en $r_1, r_2, r_3, \dots$ een rij rationale getallen met de limiet α. Op grond van de continuïteit van $E(x)$ kunnen we nu zeggen

$$\lim_{n\to\infty} E(r_n) = E(\alpha)$$

Daar het in de analyse gebruikelijk is a^α (α irrationaal) te definieren als

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \quad (r_n \text{ rationaal}, a > 0) \ ^{1)}$$

waarbij r_n een rij is met de limiet α, kunnen we dus schrijven

$$E(\alpha) = \lim_{n\to\infty} E(r_n) = \lim_{n\to\infty} E^{r_n} = E^\alpha.$$

Hiermee is bewezen dat voor alle reële getallen x geldt

$$E(x) = E^x, \qquad (3.28)$$

waarbij

$$E = E(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \qquad (3.29)$$

---

1) Deze limiet bestaat en is verder onafhankelijk van de keuze van de rij r_n.

4. Maxima en minima van funkties van één variabele.

We zullen nu veronderstellen dat de funktie $f(x)$ tweemaal differentieerbaar is en dat de tweede afgeleide continu is.

De afgeleide $f'(x)$ van een funktie $f(x)$ geeft de helling van de kromme $y=f(x)$ aan. Deze helling kan weer voorgesteld worden door een kromme $y=f'(x)$. De helling van deze kromme wordt bepaald door de afgeleide van $f'(x)$, de tweede afgeleide $f''(x)$ van $f(x)$. Wanneer de tweede afgeleide $f''(x)$ positief is in het punt x_0, dan is $f''(x)$ positief in een klein interval, dat het punt x_0 bevat. Dit volgt uit de veronderstelde continuïteit van $f''(x)$. De afgeleide $f'(x)$ neemt dus toe in dat interval en de kromme $y=f(x)$ keert zijn bolle kant naar de x-as (zie figuur 4.1). Wanneer $f''(x_0) < 0$ geldt het omgekeerde en keert de kromme $y=f(x)$ de holle kant in de richting van de x-as (zie fig. 4.2).

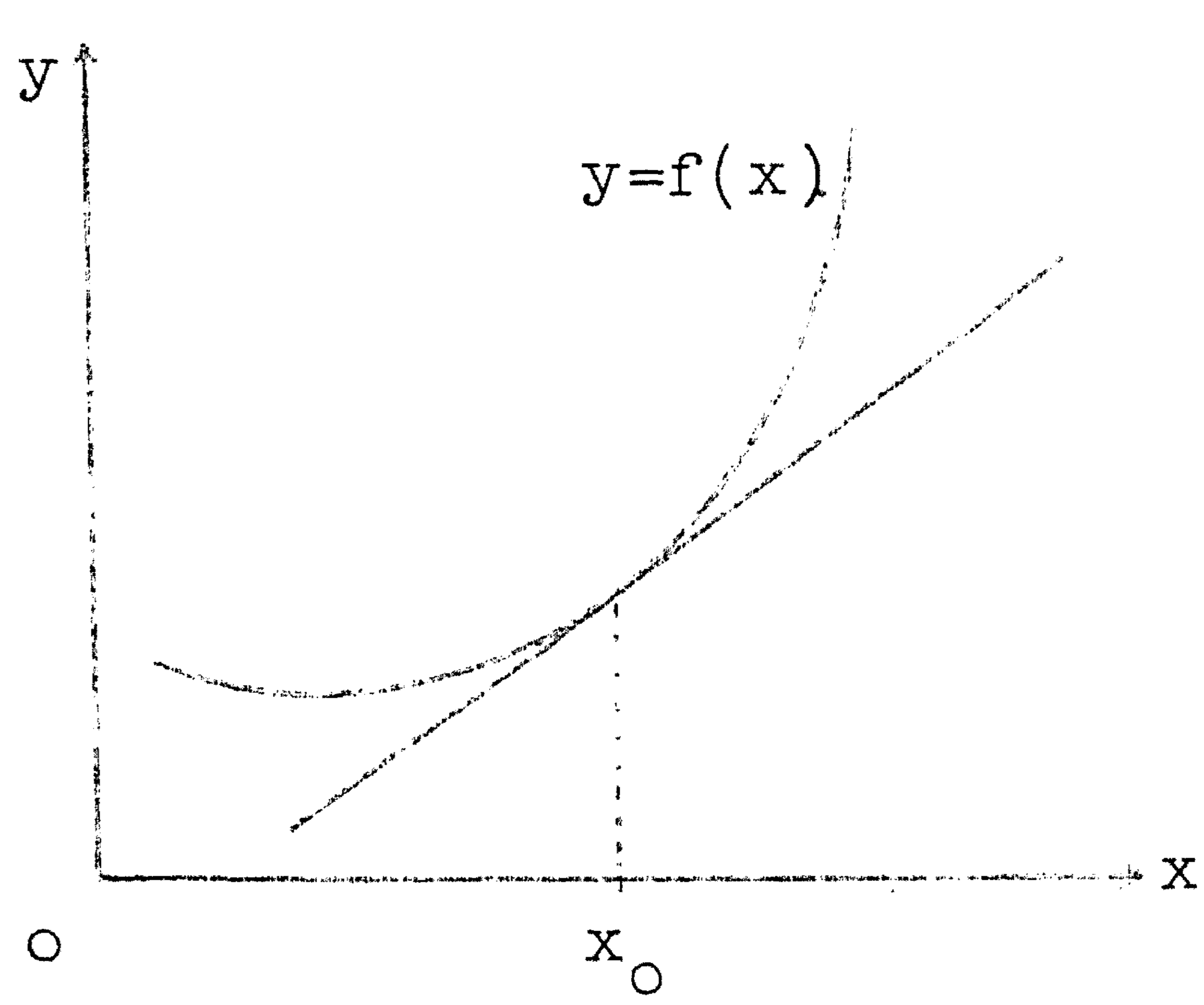


fig. 4.1

$f''(x_0) > 0$

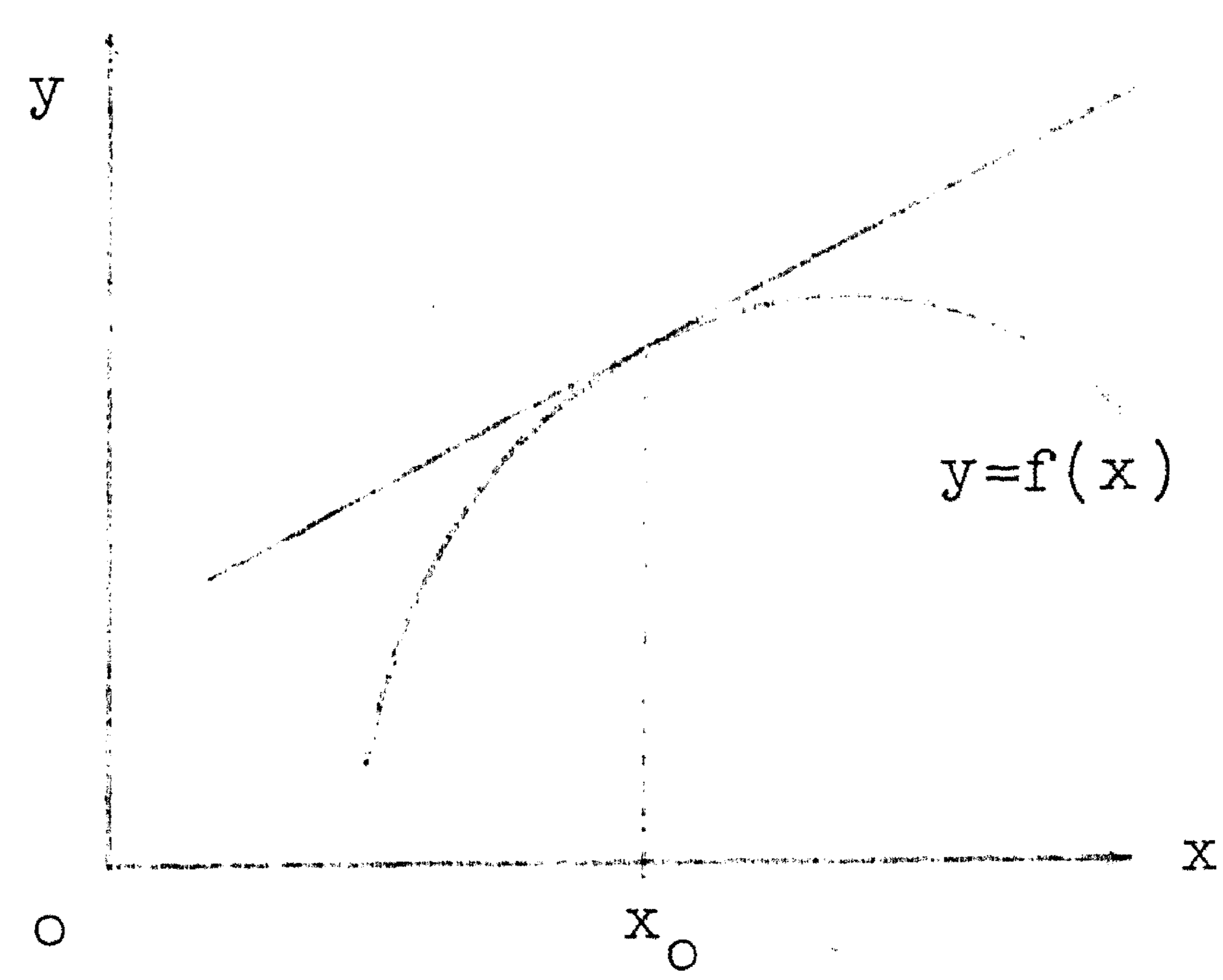


fig. 4.2

$f''(x_0) < 0$

Wanneer $f''(x_0) > 0$ is, zal de kromme $y=f(x)$ in de omgeving van x_0 <u>boven</u> de raaklijn aan de kromme in x_0 liggen. Wanneer $f''(x_0) < 0$ zal de kromme <u>onder</u> de raaklijn liggen.

Definitie: Een funktie $f(x)$ heeft een relatief maximum (minimum) in een punt c, wanneer in een omgeving van c de waarde van $f(x)$ voor alle $x \neq c$ kleiner (groter) is dan $f(c)$. Een omgeving van een punt c is een interval $a < x < b$ dat het punt c (inwendig) bevat ($a < c < b$). Men spreekt van relatieve extreme waarden, omdat het maximum of minimum slechts betrekking heeft op een omgeving. Geometrisch zijn deze maxima en minima de toppen en dalen van de kromme $y=f(x)$ (zie figuur 4.3).

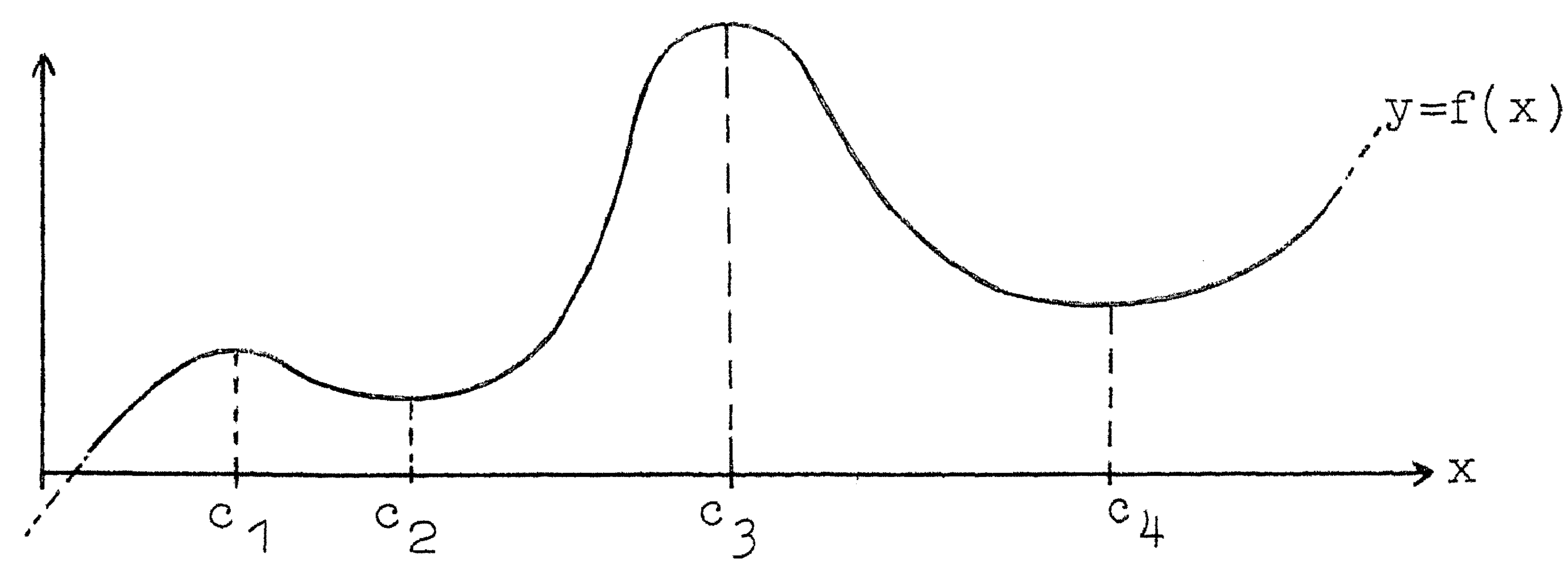


fig. 4.3
Relatieve maxima en minima

Een bepaald relatief maximum kan zeer goed kleiner zijn dan een relatief minimum. In figuur 4.3 bijvoorbeeld is het relatief maximum in c_1 kleiner dan het relatief minimum in c_4.

Stelling 4.1. Een noodzakelijke voorwaarde voor het optreden van een relatief maximum of minimum in het punt c van de differentieerbare functie $f(x)$ luidt:

$$f'(c) = 0 \qquad (4.1)$$

Aan de hand van figuur 4.3 is het duidelijk dat in een extreem punt de raaklijn horizontaal moet zijn en dus (4.1) moet gelden. Een exact bewijs van (4.1) loopt als volgt: Stel $f(x)$ neemt in c een relatief minimum aan. Voor voldoend kleine $|h|$ is $f(c+h) - f(c) > 0$.

Het teken van het quotiënt:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{4.2}$$

zal dus overeenkomen met het teken van h. Is nu $h < 0$ en laten we h tot nul naderen, zodanig dat steeds $h < 0$, dan blijft het quotiënt (4.2) negatief. Voor de limiet zal dus gelden $f'(c) \leq 0$. Kiezen we nu $h > 0$ en laten we h tot nul naderen, steeds $h > 0$ houdende, dan volgt $f'(c) \geq 0$. Uit de beide betrekkingen $f'(c) \leq 0$ en $f'(c) \geq 0$ volgt $f'(c) = 0$.

Op dezelfde wijze kan men bewijzen dat $f'(c) = 0$, wanneer $f(x)$ in c een maximum heeft.

We hebben gezien dat, wanneer $f''(c) > 0$, de kromme $y=f(x)$ in de omgeving van c boven de raaklijn aan de kromme in c ligt. Wanneer dus $f''(c) > 0$ en $f'(c) = 0$, dan bezit de funktie $f(x)$ een minimum in c. Wanneer $f''(c) < 0$, dan ligt de kromme $y=f(x)$ onder de raaklijn in het punt c. Is dus $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$, dan bezit de funktie $f(x)$ in c een maximum.

<u>Stelling 4.2.</u> Een tweemaal differentieerbare funktie $f(x)$ bezit in het punt c een relatief maximum, wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$. Het punt c is een relatief minimum wanneer $f'(c) = 0$ en $f''(c) > 0$.

<u>Voorbeeld 4.1</u>. Bepaal de relatieve extrema van de funktie

$$f(x) = x^3+5x^2+8x+3.$$

$$f'(x)= 3x^2+10x+8 = (x+2)(3x+4)$$
$$f''(x)= 6x+10$$

$f'(x) = 0$ voor $x = -2$ en $x = -\frac{4}{3}$. Verder is $f''(-2) = -2 < 0$ en $f''(-\frac{4}{3})=+2 > 0$. De onderzochte funktie bezit dus in $x=-2$ een maximum en in $x = -\frac{4}{3}$ een minimum.

Extrema bij rijen

De rij a_n heeft per definitie in het punt $n=n_o$ een relatief maximum als:

$$\left[\begin{array}{l} f(n_o+1) \leqq f(n_o) \\ \text{èn} \\ f(n_o-1) \leqq f(n_o) \end{array}\right. \qquad (4.3)$$

a_n heeft in het punt $n=n_o$ een relatief minimum als:

$$\left[\begin{array}{l} f(n_o+1) \geqq f(n_o) \\ \text{èn} \\ f(n_o-1) \geqq f(n_o) \end{array}\right. \qquad (4.4)$$

a_n heeft in $n=n_o$ een absoluut maximum als:

$$f(n) \leqq f(n_o) \text{ voor elke } n$$

Opgave: a . Geef de definitie van een absoluut minimum van een rij a_n.

b . Tracht de definities betreffende de extrema van rijen a_n uit te breiden tot definities betreffende extrema van "twee dimensionale rijen" (dit zijn funkties die gedefinieerd zijn op de roosterpunten van het eerste kwadrant van een x,y-vlak)

Voorbeeld 4.2. Bepaal de extrema van de rij:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-k} (n - 3 - k - m).$$

Oplossing: Een minimum van a_n voldoet aan de relaties:

$$a_n - a_{n-1} \leqq 0$$

$$a_n - a_{n+1} \leqq 0$$

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-k} (n-3-k-m) - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-1-3-k-m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-(n-1)} \left[n-3-(n-1)-m \right] + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-k} (n-3-k-m) +$$

$$- \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-4-k-m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{1} (-2-m) + \sum_{k=1}^{n-2} \left[\sum_{m=1}^{n-1-k} (n-3-k-m) + (-3) \right] +$$

$$- \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} (n-4-k-m) =$$

$$= -3 + \sum_{k=1}^{n-2} (-3) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} \left[(n-3-k-m) - (n-4-k-m) \right] =$$

$$= -3 -3(n-2) + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-1-k} 1 =$$

$$= -\,3n + 3 + \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k) = -3n + 3 + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(n-8)(n-1).$$

Dus $a_n - a_{n-1} \leqq 0$ als $1 \leqq n \leqq 8$.
Verder geldt:

$$a_n - a_{n+1} = -(a_{n+1} - a_n) = -\tfrac{1}{2}(n-7)(n).$$

Dus $a_n - a_{n+1} \leqq 0$ als $n \geqq 7$.

De rij a_n is dus minimaal in de punten $n=7$ en $n=8$. (ga na dat deze minima gelijk zijn aan -28)

<u>Opgave</u>: Bepaal de waarde van n waarvoor a_n een relatief maximum aanneemt. Bereken deze maximale waarde (antwoord : $n=1$, $a_1=0$)

5. Integraalrekening

De bepaalde integraal. We veronderstellen voorlopig dat de funktie f(x) continu en positief is op het interval $a \leqq x \leqq b$; verderop zullen wij deze restrictie laten vervallen. Grafisch stellen we de funktie weer voor door een kromme. Wij vragen nu naar de oppervlakte F_a^b van het gebied, dat begrensd wordt door de kromme y=f(x), de vertikalen in a en b en de x-as tussen a en b (figuur 5.1).

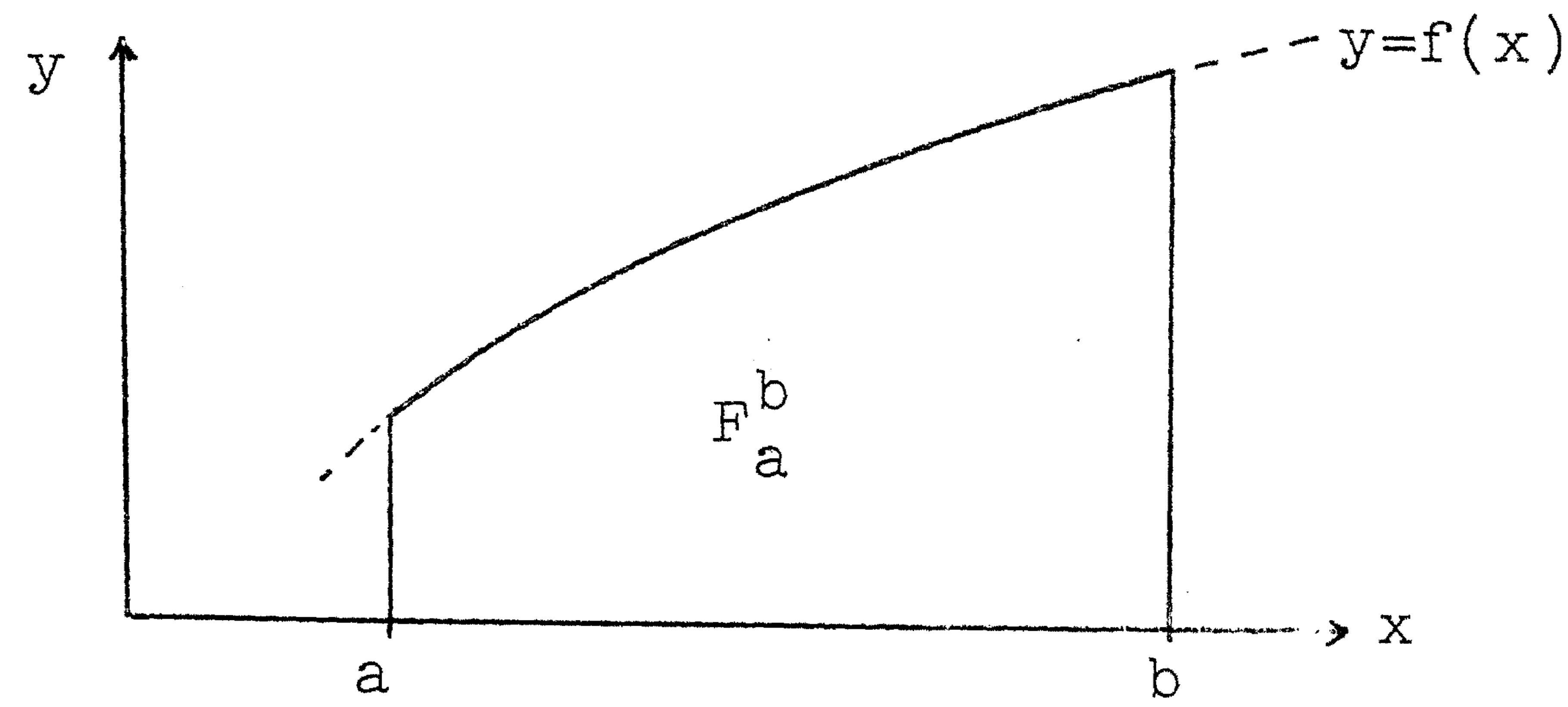


fig. 5.1
De bepaalde integraal

Deze oppervlakte noemen we de bepaalde integraal van de funktie f(x) tussen de grenzen a en b. Oppervlakten waarvan de begrenzingen niet uit rechten bestaan kunnen we in het algemeen niet rechtstreeks bepalen. De oppervlakte F_a^b kan men echter beschouwen als de limietwaarde van een som van oppervlakten van rechthoeken. We verdelen de x-as tussen a en b in n gelijke delen en richten in ieder deelpunt de verticaal op. Het oppervlak wordt hierdoor in n delen verdeeld. Vervolgens bepalen we in elk deelinterval de grootste en kleinste funktiewaarde. Tenslotte construeren wij twee rijen rechthoeken met als basis de lengte van het deelinterval van de x-as en als hoogte de grootste en de kleinste funktiewaarde in dat interval (zie figuur 5.2).

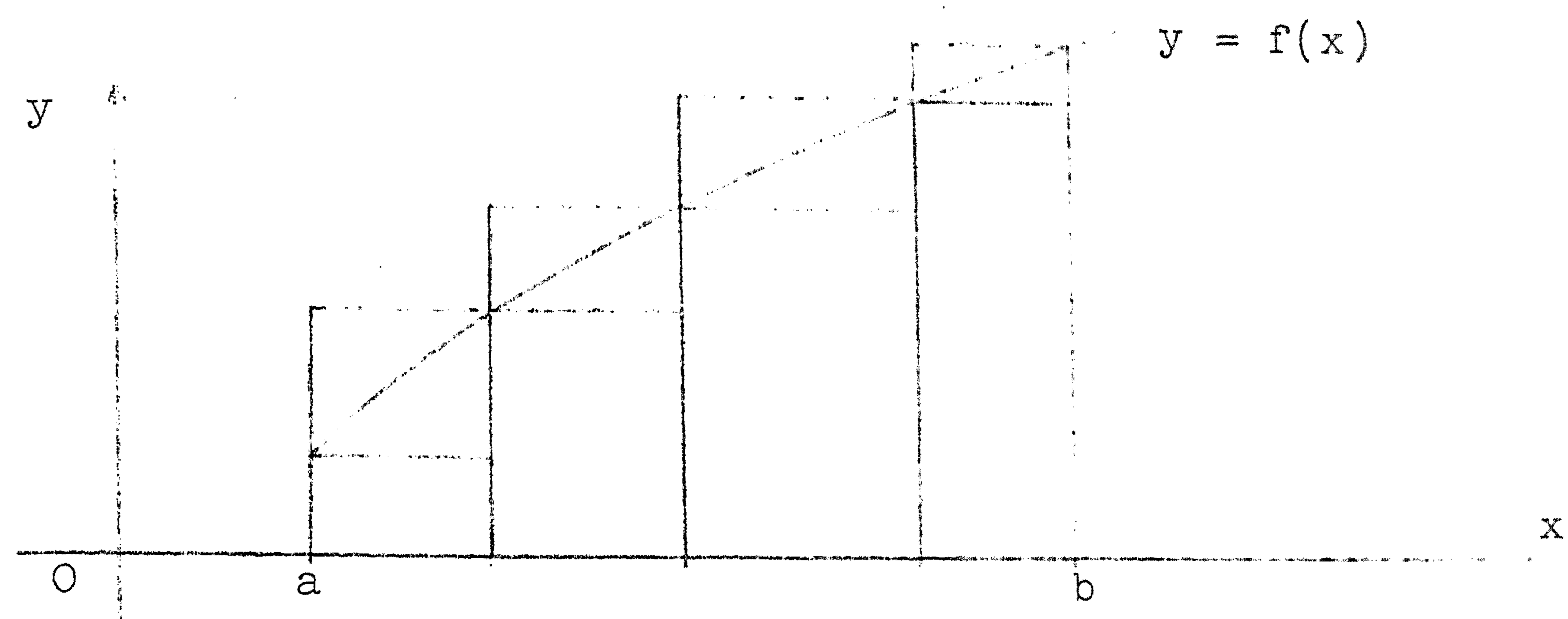


fig. 5.2

Benadering van de bepaalde integraal met behulp van in- en omgeschreven rechthoeken

De som van de oppervlakten van de eerste rij rechthoeken, dus de rechthoeken met als hoogten de grootste funktiewaarden in de opvolgende deelintervallen (in figuur 5.2 zijn van deze rechthoeken de bovenste begrenzingen gestippeld) geven we aan met $\bar{F}_n$. De som van de oppervlakten van de rechthoeken waarvan de hoogten gelijk zijn aan de kleinste funktiewaarden in de opvolgende deelintervallen geven we aan met $\underline{F}_n$. Het is dan duidelijk dat de relatie:

$$\underline{F}_n \leq F_a^b \leq \bar{F}_n \qquad (5.1)$$

geldt voor elke n. Wordt de verdeling van het interval $[a, b]$ fijner gemaakt door n groter te kiezen, dan zal het verschil $\bar{F}_n - \underline{F}_n$ naar nul convergeren, wanneer n willekeurig toeneemt. $\underline{F}_n$ en $\bar{F}_n$ bezitten dus dezelfde limiet F_a^b.

$$F_a^b = \lim_{n\to\infty} \underline{F}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{F}_n. \qquad (5.2)$$

Deze stelling, die we niet zullen bewijzen, houdt in dat men aan het gebied onder een continue kromme een bepaalde numerieke waarde kan toekennen.

Dezelfde limiet F_a^b wordt verkregen, wanneer het interval $[a,b]$ in n willekeurige deelintervallen wordt verdeeld, op de deelintervallen rechthoeken worden opgericht op dezelfde wijze als hierboven, en men vervolgens n willekeurig laat toenemen zodanig dat de lengte van het langste deelinterval (de grofheid van de onderverdeling) willekeurig klein wordt. Tenslotte is het niet noodzakelijk dat men voor de hoogte van de rechthoeken hetzij de grootste of de kleinste functiewaarde in een deelinterval kiest. Kiest men als hoogte voor de rechthoeken een funktiewaarde tussen de grootste en kleinste in dan verkrijgt men dezelfde limiet.

De tot nu toe gehouden redenering kan zonder moeite uitgebreid worden tot funkties die in het interval ook negatieve waarden aannemen. Wel moet uiteraard steeds rekening gehouden worden met het teken dat bij de oppervlakten behoort: een oppervlak boven de x-as geeft een positieve bijdrage en één onder de x-as een negatieve.

De bepaalde integraal van de funktie f(x) tussen de grenzen a en b kan dus als volgt worden gevonden: Deel het interval $a \leqq x \leqq b$ in n deelintervallen, met deelpunten $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$, kies in elk deelinterval een punt ζ , dus in het i^e deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ een punt ζ_i en vorm de som:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i).\Delta x_i. \qquad (5.3)$$

Wanneer de limiet van deze som bij onbepaalde toename van n, zodanig dat de lengte van het grootste en dus van alle deelintervallen willekeurig klein wordt, bestaat, dan noemt men die limiet de bepaalde integraal van f(x) tussen de grenzen a en b. De funktie f(x) wordt in dit geval integreerbaar genoemd.

Men schrijft de bepaalde integraal als:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta x_i \qquad (5.4)$$

In de integraalrekening moet men dus steeds nagaan of deze limieten bestaat. Dit wordt vereenvoudigd door zogenaamde existentietheorema's, waarin het bestaan van deze limieten voor klassen van funkties wordt bewezen. Eén van deze stellingen houdt in dat de integraal over een eindig gesloten interval van een begrensde funktie bestaat, wanneer de funktie op dit interval continu is of hoogstens eindig veel discontinuïteiten bevat.

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we verondersteld dat $a < b$. Deze beperking in de definitie kunnen we gemakkelijk verwijderen. Wanneer $a > b$ is, zullen, wanneer het interval van a naar b doorlopen wordt, de Δx_i negatief zijn. We kunnen dus de definitie (5.4) blijven gebruiken voor dit geval, alleen zullen nu de Δx_i negatief zijn. Dit leidt tot de volgende definitie.

<u>Definitie</u>:

Als $a > b$, dan is $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (5.5)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (5.6)$$

De volgende stellingen, die wij hier niet zullen bewijzen, zijn m.b.v. de definitie van het integraalbegrip gemakkelijk te doorzien.

<u>Stelling 5.1</u>. Als f(x) integreerbaar is op $a \leq x \leq b$ en c is een getal tussen a en b dan geldt

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (5.7)$$

Stelling 5.2. Als $f(x)$ integreerbaar is op $a \leq x \leq b$ en c een constante is, dan geldt:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx \qquad (5.8)$$

Stelling 5.3. Als $f(x)$ en $g(x)$ integreerbaar zijn op $a \leqq x \leqq b$ dan geldt:

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\,dx = \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx. \qquad (5.9)$$

Opmerking: We hebben de bepaalde integraal geschreven in de vorm $\int_a^b f(x)dx$. De wijze waarop de integratievariabele wordt aangegeven heeft echter geen enkele betekenis. In plaats van de letter x voor de integratievariabele hadden we een willekeurige andere letter kunnen schrijven, b.v:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Funkties van de bovenste grens.

De waarde van de bepaalde integraal van een funktie $f(t)$ is in het algemeen afhankelijk van de keuze van de integratiegrenzen a en b.
In het vervolg zullen we aannemen dat de onderste integratiegrens a vast gekozen is en we zullen de integraal beschouwen als een funktie van de bovenste integratiegrens b. We schrijven x in plaats van b(om het variabele karakter van de bovenste integratiegrens beter tot uitdrukking te brengen) en we definiëren $F(x)$ door:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

en we noemen $F(x)$ een funktie van de bovenste grens behorende bij de funktie $f(t)$.

Het spreekt vanzelf dat er bij f(t) oneindig veel funkties van de bovenste grens behoren; we behoeven slechts voor a een andere waarde te kiezen om een andere funktie van de bovenste grens te krijgen.

Stelling 5.4. Het verschil tussen twee funkties van de bovenste grens, behorende bij dezelfde funktie f(t), is een constante.

Bewijs; We stellen de twee funkties van de bovenste grens voor door:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{en} \quad G(x) = \int_b^x f(t)dt$$

Dan geldt: (zie stelling 5.1)

$$F(x) - G(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_b^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

en de waarde van deze integraal is onafhankelijk van x en dus constant.

De afgeleide van de funktie van de bovenste grens

Stelling 5.5. (Hoofdstelling van de integraalrekening)
Als de funktie f(t) continu is op het interval $a \leqq t \leqq b$, dan is de funktie:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{(a constant)}$$

differentieerbaar op hetzelfde interval en bovendien geldt:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{5.10}$$

Bewijs:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt + \right.$$

$$\left. - \int_a^x f(t)dt \right] = \lim_{h\to o} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Stel dat $f(x)$ in het interval $[x, x+h]$ de grootste waarde [1] bereikt in x_0 en de kleinste waarde in x_1, dan geldt de volgende ongelijkheid voor $h > 0$:

$$hf(x_0) \geq \int_x^{x+h} f(t)dt \geq hf(x_1).$$

Laten we nu h tot nul naderen dan zullen, wegens de continuïteit van de funktie $f(x)$, $f(x_0)$ en $f(x_1)$ tot $f(x)$ naderen.

Wij vinden dus

$$f(x_0) \geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \geq f(x_1)$$

en

$$f(x) \geq \lim_{h\to o} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \geq f(x).$$

Hieruit volgt:

$$f(x)=\lim_{h\to o} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt. \qquad \text{q.e.d.}$$

Aangezien: $\int_a^x f(t)dt = -\int_x^a f(t)dt$ (vergelijk 5.5)

volgt nu onmiddellijk

$$\frac{d}{dx} \int_x^a f(t)dt = -f(x) \qquad (5.11)$$

---

1) Een continue funktie op een gesloten interval neemt op dit interval een grootste en een kleinste waarde aan.

De hoofdstelling van de integraalrekening geeft dus de oplossing van het volgende omkeerprobleem: Gegeven een continue funktie $f(x)$, bepaal dan een funktie $F(x)$ zodanig dat $F'(x) = f(x)$.

Elke funktie $F(x)$ zodanig dat $F'(x) = f(x)$ wordt een primitieve funktie van $f(x)$ genoemd. We weten reeds dat elke funktie van de bovenste grens, behorende bij $f(x)$, een primitieve funktie van $f(x)$ is (stelling 5.4 en 5.5.). Men kan verder gemakkelijk bewijzen dat het verschil van twee primitieve funkties $F_1(x)$ en $F_2(x)$ van dezelfde funktie $f(x)$ een constante funktie is, zodat de volgende stelling geldt:

Stelling 5.6. Wanneer $F(x)$ een primitieve funktie van $f(x)$ voorstelt, dan kan elke primitieve funktie van $f(x)$ geschreven worden als:

$$F(x) + C,$$

waarbij C een willekeurige constante is. Dus geldt ook:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \qquad (5.12)$$

(hierbij is C een nog onbekende constante !)
Berekening van bepaalde integralen kan nu geschieden met behulp van primitieve funkties. Als $F(x)$ een primitieve funktie van $f(x)$ is, dan volgt uit (5.12):

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

waarbij C een nog onbekende constante is. De substitutie $x = a$ levert:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0$$

en dus is : $C = -F(a)$, en hiermee is de bepaalde integraal berekend.

M.a.w. wij hebben de funktie van de bovenste grens uitgedrukt in een primitieve funktie, door middel van de relatie:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (5.13)$$

<u>Stelling 5.7.</u> De bepaalde integraal van een continue funktie $f(x)$ over een interval $[a,b]$ is gelijk aan de toename van <u>een</u> primitieve funktie van $f(x)$ over dat interval.

De toename van eèn primitieve funktie over het interval $[a,b]$, $F(b) - F(a)$, wordt vaak aangegeven met $F(x)\Big|_a^b$.
Een primitieve funktie $F(x)$ van $f(x)$ schrijft men ook vaak als volgt:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

<u>Voorbeeld 5.1.</u> Voor $n \neq -1$ is $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}+C$ een primitieve funktie van x^n.
Bewijs:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\right) = x^n. \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>De substitutiemethode</u>

Met de kettingregel (3.18) correspondeert de z.g. substitutie-methode van de integraalrekening.
Stel $f(x)$ een continue funktie op $a \leq x \leq b$ met de stamfunktie $F(x)$ 1). De funktie $\varphi(u)$ zij op het interval $\alpha \leq u \leq \beta$ differentieerbaar met de continue afgeleide $\varphi'(u)$. Verder zij voor alle waarden van u uit $\alpha \leq u \leq \beta$ $a \leq \varphi(u) \leq b$. Onder deze voorwaarden heeft $F(\varphi(u)$ op $\alpha \leq u \leq \beta$ de continue (en dus integreerbare) afgeleide

---

1) Stamfunktie = primitieve funktie.

$$f(\varphi(u)).\ \varphi'(u),$$

en dus kunnen we schrijven:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\,du = F(\varphi(u))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) +$$

$$- F(\varphi(\alpha)) = F(x)\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

Resumerend:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx \qquad (5.14)$$

<u>Voorbeeld 5.2</u>. Bepaal $\int_{\alpha}^{\beta} u(u^2+1)^n\ du.$

Oplossing: Stel $f(x)=x^n$ en $\varphi(u)=u^2+1$.
Voor de integrand kan dan geschreven worden

$$u(u^2+1)^n = \frac{1}{2}.(u^2+1)^n.2u = \frac{1}{2}\,f(\varphi(u)).\ \varphi'(u)$$

Dus

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(u^2+1)^n\ du = \frac{1}{2}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} x^n\ dx = \frac{1}{2(n+1)}\ x^{n+1}\Big|_{\alpha^2+1}^{\beta^2+1} =$$

$$= \frac{(\beta^2+1)^{n+1} - (\alpha^2+1)^{n+1}}{2(n+1)}\ .$$

<u>De substitutieregel in een andere vorm</u>

De funktie $f(x)$ zij continu op $a \leqq x \leqq b$ met de stamfunktie $F(x)$. De funktie $\varphi(u)$ zij op $\alpha \leqq u \leqq \beta$ differentieerbaar met de continue afgeleide $\varphi'(u)$, terwijl $\varphi(\alpha) = a$ en $\varphi(\beta) = b$.

Verder zij $\varphi(u)$ omkeerbaar op $\alpha \leqq u \leqq \beta$, met als omkeerfunktie $\psi(t)$ op het interval $a=\varphi(\alpha) \leqq t \leqq \varphi(\beta) = b$.[1]

De funktie $F(\varphi(u))$ heeft nu op $\alpha = \psi(a) \leqq u \leqq \psi(b) = \beta$ de afgeleide

$$\frac{dF(\varphi(u))}{du} = f(\varphi(u)).\varphi'(u)$$

Dus:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du =$$

$$= F(\varphi(u))\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Resumerend:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du. \qquad (5.15)$$

<u>De logaritmische funktie log t</u>

De funktie $f(x) = \frac{1}{x}$ is op $x > 0$ continu en dus op het vak $[1,t]$, met $t > 0$, integreerbaar.
We stellen nu per definitie

$$\log t = \int_1^t \frac{dx}{x} \text{ op } t > 0. \qquad (5.16)$$

Omdat log t een funktie van de bovenste grens van een continue funktie is, geldt

$$\frac{d \log t}{dt} = \frac{1}{t} \text{ op } t > 0. \qquad (5.17)$$

Hieruit volgt meteen al dat log t op $t > 0$ monotoon stijgend is;

---

1) Uit de gegevens volgt dat $\varphi(u)$ monotoon stijgend is.

Dus, daar $\log 1 = \int_1^1 \frac{dx}{x} = 0$, is

$$\begin{cases} \log t < 0 & \text{op } 0 < t < 1 \\ \log t > 0 & \text{op } t > 1 \end{cases} \qquad (5.18)$$

Stellen we $\varphi(t) = \log at$ $(a > 0)$ op $t > 0$ dan vinden we voor de afgeleide van $\varphi(t)$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{at} \cdot a = \frac{1}{t}$$

De funkties $\varphi(t)$ en $\log t$ hebben dus dezelfde afgeleide en verschillen derhalve een constante.
Stellen we $\varphi(t) = \log t + C$ dan levert de substitutie $t = 1$

$$C = \varphi(1) - \log 1 = \log a$$

Voor $a > 0$ en $t > 0$ geldt dus

$$\log at = \log a + \log t. \qquad (5.19)$$

Hieruit volgt: $\log a^n = n \log a$ als $a > 0$ en n een natuurlijk getal is. Is a weer een positieve constante dan is

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \text{ en dus } \log a = n \log a^{\frac{1}{n}} \text{ of } \log a^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n} \log a. \text{ (} n \text{ geheel en positief)}$$

Zij $r = \frac{p}{q}$ met p en q natuurlijke getallen dan is

$$\log a^r = \log a^{\frac{p}{q}} = \log (a^{\frac{1}{q}})^p = p. \log a^{\frac{1}{q}} = \frac{p}{q} \log a =$$

$$= r \log a.$$

Voor alle positieve rationale getallen $r > 0$ geldt dus

$$\log a^r = r \log a.$$

Zij $x > 0$ dan is

$$0 = \log 1 = \log (x.\frac{1}{x}) = \log x + \log \frac{1}{x}$$

of $$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

of $$\log x^{-1} = (-1).\log x$$

Zij r nu een rationaal getal < 0;
Stellen we $r=-s$ met $s > 0$ dan is

$$\log a^r = \log a^{-s} = \log \frac{1}{a^s} = -\log a^s = -s \log a = r \log a$$

Voor alle rationale getallen r geldt dus

$$\log a^r = r \log a \qquad (5.20)$$

Zij α nu een irrationaal getal en r_n een rij rationale getallen met de limiet α.
Bedenken we dat log t continu is, dan kunnen we schrijven

$$\lim_{n\to\infty} \log a^{r_n} = \log a^{\alpha}. \qquad (a > o)$$

Ook geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \log a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} r_n.\log a = \alpha.\log a.$$

Dus

$$\log a^{\alpha} = \alpha \log a \qquad (5.21)$$

voor elke reële α.
Beschouwen we verder de funktie

$$\varphi(x) = \log E(x).$$

Voor $\varphi'(x)$ vinden we volgens de kettingregel

$$\varphi'(x) = \frac{1}{E(x)}.E'(x) = \frac{1}{E(x)}.E(x) = 1$$

De afgeleide van $f(x) = x$ is ook gelijk aan 1 waaruit volgt dat

$$\varphi(x) = x + C \quad (C \text{ constant})$$

Daar $\varphi(0) = \log E(0) = \log 1 = 0$, vinden we $C = 0$, of $\log E(x) = x$ voor alle x of $\log E^x = x \log E = = x$. (5.22)

Hieruit volgt weer $\log E = 1$. (5.23)

Hierna tonen we aan dat de constante $E=E(1)$ gelijk is aan de reeds in paragraaf 2 ingevoerde constante e. We definieerden

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

waaruit wegens de continuïteit van log t volgt

$$\log e = \lim_{n\to\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log 1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{d\log t}{dt}\Bigg|_{t=1} = \frac{1}{1} = 1$$

dus $\log E=1$ en $\log e=1$.

Omdat log t een monotoon stijgende funktie is, moet wel gelden

$$e = E. \tag{5.24}$$

Beschouwen we tenslotte de funktie

$$\psi(t) = \frac{t}{E(\log t)} \quad \text{op } t > 0.$$

Voor $\psi'(t)$ geldt nu

$$\psi'(t) = \frac{E(\log t).\ 1 - t.\ E(\log t).\ \frac{1}{t}}{E^2(\log t)} = 0$$

dus is $\psi(t)$ op $t > 0$ een constante funktie.

$$\psi(t) = \psi(1) = \frac{1}{E(\log 1)} = \frac{1}{E(0)} = 1 \text{ op } t > 0$$

of

$$E(\log t) = t \quad \text{op} \quad t > 0 \tag{5.25}$$

Uit het een en ander volgt dat $E(x)$ en log t elkaars omkeerfunkties zijn.

Lossen we nu de vergelijking

$$E(x) = e^x = b (b > 0)$$

op, dan is

$$\log e^x = \log b$$

of

$$x \log e = \log b$$

of

$$x = \log b.$$

Volgens de schoolalgebra is de oplossing van $e^x = b$ per definitie gelijk aan ${}^e\log b$, waarmee het verband

$$\log t = {}^e\log t \qquad (t > 0) \tag{5.26}$$

gelegd is, tussen de bekende logaritme en de funktie log t.

Voorbeeld 5.4. Bepaal voor $x > 0$

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

Oplossing:

$$n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}\log x} - e^0}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{n}\log x} - e^0}{\frac{1}{n}\log x} \cdot \log x$$

dus $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=0} . \log x = e^0 . \log x = \log x.$

Hierbij is gebruik gemaakt van de zeer belangrijke limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=0} = e^0 = 1 \tag{5.27}$$

Voorbeeld 5.5. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Oplossing:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = E\left(\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) =$$

$$= E\left(n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = E\left(\frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{\frac{x}{n}} . x\right)$$

Wegens

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \log 1}{\frac{x}{n}} = \left.\frac{d \log x}{d x}\right|_{x=1} = 1$$

vinden we

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = E(1.x) = E(x) = e^x. \tag{5.28}$$

Voorbeeld 5.6. Bepaal de afgeleide van

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{op} \quad x > 0.$$

Oplossing:

$$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \log x};$$

volgens de kettingregel geldt dus

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} . \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} . \frac{\alpha}{x} = \alpha . x^{\alpha - 1}$$

Hiermee is dus aangetoond dat ook voor irrationale getallen α geldt

$$\frac{dx^{\alpha}}{dx} = \alpha . x^{\alpha - 1} \tag{5.29}$$

Partiële integratie

De regel voor de differentiatie van een produkt van twee differentieerbare funkties luidt:

$$\left[f(x).g(x)\right]' = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$$

Zijn alle in deze formule voorkomende funkties nu integreerbaar, dan geldt

$$f(x).g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x).g'(x)\,d\,x + \int_a^b f'(x).g(x)\,d\,x$$

of (5.30)

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)\,d\,x$$

Dit is de formule voor <u>partiële integratie</u>.

Partiële integratie maakt het dikwijls mogelijk integraties te vereenvoudigen. Moet men een funktie h(x) integreren, dan tracht men h(x) te schrijven in de vorm $h(x) = f(x).g'(x)$, zodanig dat de funktie $f'(x).g(x)$ eenvoudiger te integreren is dan de oorspronkelijke funktie.

<u>Voorbeeld 5.7</u>

<u>a</u> $\int_\varepsilon^1 \log x\,d\,x = \int_\varepsilon^1 1.\log x\,d\,x = x\log x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x.\frac{1}{x}\,d\,x =$

$= -\varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon) = -\varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon - 1$

<u>b</u> $\int_0^a x\,e^x\,d\,x = x.e^x\Big|_0^a - \int_0^a e^x\,d\,x = a.e^a - (e^a - e^0) =$

$= a.e^a - e^a + 1$

<u>c</u> $\int_1^e \frac{\log x}{x}\,d\,x = \log^2 x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x}\,d\,x$

of

$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}(\log^2 e - \log^2 1) = \frac{1}{2}$

<u>Oneigenlijke integralen</u>

Tot nu toe hebben wij alleen funkties besproken die op een eindig interval begrensd waren en ook de integratie beperkt tot eindige intervallen.

Het is echter mogelijk ook in andere gevallen onder bepaalde voorwaarden integralen te definiëren. Hiervan behandelen wij eerst integralen over eindige intervallen van funkties die op die intervallen niet begrensd zijn. Een dergelijke funktie is b.v.

$$f(x)=\log x \text{ op het vak } 0 < x \leq 1.$$

In dit geval geldt n.l. $\log 2^{-n} = -n \log 2$ en daar $\log 2 > \log 1 = 0$, is $\lim_{x \to 0} \log x = -\infty$; m.a.w. $\log x$ is op $0 < x \leq 1$ niet begrensd.

<u>Definitie</u>. Wanneer de funktie $f(x)$ continu is op $a < x \leq b$ en $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, dan definieert men de integraal van $f(x)$ over het interval $[a,b]$ door:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx, \text{ met } \varepsilon > 0 \tag{5.31}$$

mits deze limiet bestaat.

<u>Voorbeeld 5.8</u>. We veronderstellen $\alpha \neq -1$; dan geldt:

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}(1-\varepsilon^{\alpha+1}). \tag{5.32}$$

We onderscheiden nu de volgende mogelijkheden:

1. $\alpha > -1$. Voor $\varepsilon \to 0$ convergeert het rechterlid naar $\frac{1}{1+\alpha}$, dus de bepaalde integraal van x^α over het interval $[0,1]$ bestaat en is gelijk aan $\frac{1}{1+\alpha}$.

2. $\alpha < -1$. Voor $\varepsilon \to 0$ divergeert het rechterlid naar oneindig en de integraal van x^α over het interval $[0,1]$ bestaat niet.

3. Tenslotte onderzoeken we nog $\alpha = -1$:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log 1 - \log \varepsilon = -\log \varepsilon. \tag{5.33}$$

Voor $\varepsilon \to 0$ divergeert (5.33) en de integraal bestaat dus niet. Samenvattend kan men dus zeggen dat x^{α} integreerbaar is over het interval $[0,1]$ voor $\alpha > -1$.

Voorbeeld 5.9. Volgens voorbeeld 5.7 geldt:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx = -\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon - 1.$$

Nu is

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon \log \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{u \to \infty} \frac{\log e^u}{e^u} = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{e^u} = 0 \quad ^{1)}$$

dus:

$$\int_{0}^{1} \log x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \log x \, dx = -1.$$

Een tweede type oneigenlijke integralen ontstaat, wanneer de lengte van het interval waarover geïntegreerd wordt willekeurig groot wordt.

Definitie: Wanneer de integraal van de funktie $f(x)$ over het interval $[a,R]$ bestaat voor $R > a$ en eveneens de limiet hiervan voor $R \to \infty$, dan definiëert men de integraal van $f(x)$ van a tot ∞ door :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{a}^{R} f(x)dx. \qquad (5.34)$$

---

1) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots > \frac{u^2}{2}$ voor $u > 0$,

waaruit volgt $0 < \frac{u}{e^u} < \frac{2}{u}$.

Dus $\lim_{u \to \infty} \frac{u}{e^u} = 0$.

Voorbeeld 5.10. We onderzoeken weer de integraal van x^{α} : $\alpha \neq -1$ onderstellende. Volgens de definitie is

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \, dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{\alpha} \, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\alpha+1} (R^{\alpha+1}-1). \quad (5.35)$$

De limiet in het rechterlid van (5.35) bestaat voor $\alpha < -1$ en dus ook de integraal in het linkerlid. Voor $\alpha > -1$ divergeert het rechterlid en de integraal in het linkerlid bestaat dus niet. Tenslotte divergeert ook de integraal:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \log R.$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen: De funktie x^{α} is integreerbaar over het interval $[1,\infty)$ voor $\alpha < -1$.

Voor $\alpha \geqq -1$ bestaat de oneigenlijke integraal van de funktie x^{α} over het interval $[1,\infty)$ niet.

Evenals bij eigenlijke integralen dient men ook hier steeds na te gaan of de betreffende integralen bestaan. Wij gaan hier echter niet verder op in en beperken ons tot het geven van twee belangrijke oneigenlijke integralen (waarvan de existentie kan worden aangetoond) die wij onder andere in hoofdstuk III zullen gebruiken.

Voorbeeld 5.11. De gammafunktie wordt als volgt gedefiniëerd:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \ , \ p > 0 \quad (5.36)$$

Door partiële integratie van (5.36) vindt men:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = -x^{p-1}e^{-x}\Big|_0^{\infty} + (p-1)\int_0^{\infty} x^{p-2}e^{-x}dx$$

of:

$$\Gamma(p) = (p-1).\Gamma(p-1). \quad (5.37)$$

Zet men de partiële integratie voort voor $\Gamma(p-1)$, $\Gamma(p-2)$, ,..., dan vindt men:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2).....(p-k)\int_0^\infty x^{p-k-1}e^{-x}dx.$$

De partiële integratie kan men hierbij voortzetten zolang $p-k > 0$ is. In het bijzonder vindt men voor gehele waarden van p:

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2).....3.2.1\int_0^\infty e^{-x}dx$$

en aangezien:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

volgt dus

$$\Gamma(p) = (p-1)\,! \qquad (5.38)$$

Voorbeeld 5.12. Een oneigenlijke integraal, die in de statistiek een belangrijke plaats inneemt, is:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Men kan op dezelfde wijze als $\int_0^\infty f(x)dx$ de integraal $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ definiëren:

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)dx.$$

Men kan bewijzen dat:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Verder kan men aantonen:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx + \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad (5.39)$$

De funktie:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \qquad (5.40)$$

staat in de statistiek bekend als de verdelingsfunktie van de normale verdeling.

6. Funkties van meer dan één variabele

In de toepassingen van de wiskunde kunnen we ons meestal niet beperken tot funkties van één variabele, maar zijn we veelal gedwongen funkties te beschouwen van meer dan één variabele. We zullen alleen funkties van twee variabelen x en y behandelen. Uitbreiding tot meer dan twee variabelen kan op analoge wijze geschieden.

Vergelijkingen van de vorm: $z = x^2+y^2$, $z = x^5y^3 + x^2$ en dergelijke geven een funktioneel verband aan tussen een paar waarden (x,y) en een waarde z. We zeggen dat z een funktie is van de variabelen x en y. De verzameling van waarden die het paar (x,y) kan aannemen wordt het <u>definitiegebied</u> van de funktie $z = f(x,y)$ genoemd. In het vervolg zullen we ons vrijwel geheel beperken tot een rechthoekig definitiegebied: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Evenals bij funkties van één variabele speelt ook bij funkties van meer variabelen het begrip continuïteit een belangrijke rol.

<u>Definitie:</u> De funktie $f(x,y)$ gedefinieerd op een gebied D is continu in het punt (x_0,y_0) van D als bij elke $\varepsilon > 0$ een δ_1 en δ_2 gevonden kunnen worden zodanig dat:

$$\left| f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon \qquad (6.1)$$

zodra:

$$|h| < \delta_1 \quad \text{en} \quad |k| < \delta_2 .$$

Afgeleide van funkties van twee variabelen

Geven we in een funktie van meerdere variabelen alle variabelen, met uitzondering van één, een vaste (numerieke waarde), dan verkrijgen we een funktie van één variabele. Zo wordt de funktie $z = f(x,y)$ voor een vaste waarde y_o van y een funktie van x, waarvan wij op de in paragraaf 3 aangegeven wijze het differentiaalquotiënt (naar x) kunnen bepalen, bijvoorbeeld in het punt $x=x_o$. Deze afgeleide is dan de limiet:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o)}{h} \ . \qquad (6.2)$$

Men noemt deze limiet de partiële afgeleide naar x van de funktie $f(x,y)$ in het punt (x_o,y_o) en men schrijft

$$\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(x_o,y_o)} \qquad \text{of} \qquad f'_x(x_o,y_o).$$

Laten we x_o en y_o weer variëren, dan is de partiële afgeleide $f'_x(x,y)$ een funktie van x en y. Uiteraard is het niet noodzakelijk dat de partiële afgeleide overal bestaat.

Op dezelfde wijze wordt nu de partiële afgeleide van $f(x,y)$ naar y gedefiniëerd:

$$\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{(x_o,y_o)} = f'_y(x_o,y_o) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_o,y_o+k)-f(x_o,y_o)}{k} . \qquad (6.3)$$

We kunnen nu de hogere partiële afgeleiden van $f(x,y)$ verkrijgen door de partiële afgeleiden van de eerste orde $f'_x(x,y)$ en $f'_y(x,y)$ te differentiëren naar één van de variabelen. De volgorde van de differentiatie wordt door de volgorde van de indices of de symbolen ∂x en ∂y aangegeven, waarbij de laatst uitgevoerde operatie links wordt geplaatst, bijv.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = f'''_{xyx}$$

Men kan nu voor de "gemengde" afgeleiden van de tweede orde f''_{xy} en f''_{yx} bewijzen, dat als f''_{xy} en f''_{yx} continu zijn in een gebied D, overal binnen dat gebied D geldt:

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \qquad (6.4)$$

Voorbeeld 6.1. We bepalen de eerste en enkele tweede afgeleiden van $z = f(x,y) = x^3y\ e^{xy}$. Differentiëren we naar x en houden we y vast, dan kunnen we y als een constante beschouwen en de differentiatie uitvoeren met de regels voor de differentiatie van een funktie van één variabele.

$$f'_x(x,y) = 3x^2ye^{xy}+x^3y^2e^{xy} = (3+xy)x^2e^{xy}$$

$$f'_y(x,y) = x^3e^{xy}+x^4ye^{xy} = (1+xy)x^3e^{xy}$$

$$f''_{yx}(x,y) = x^3ye^{xy}+(3+xy)x^2e^{xy}+(3+xy)x^3ye^{xy}$$

$$= x^2(x^2y^2+5xy+3)e^{xy}$$

$$f''_{xy}(x,y) = x^3ye^{xy}+3(1+xy)x^2e^{xy}+(1+xy)x^3ye^{xy}$$

$$= x^2(x^2y^2+5xy+3)e^{xy}.$$

We zien dus dat inderdaad $f''_{yx} = f''_{xy}$, in overeenstemming met (6.4).

De kettingregel. In veel gevallen is een funktie van x en y gegeven in de vorm $z = f(u,v\ldots)$, waarin $u,v\ldots.$ funkties zijn van x en y. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y),\ldots$

We zeggen dan dat $z = f(u,v,\ldots) = f(u(x,y),v(x,y)\ldots)$ $= F(x,y)$ een samengestelde funktie is.

Voorbeeld 6.2. De funktie in voorbeeld 6.1 kunnen we schrijven in de vorm

$$z = x^3ye^{xy} = ue^v$$

met:

$$u = x^3y, \; v = xy.$$

We zullen nu aannemen dat de funkties $u(x,y)$, $v(x,y)$... gedefinieerd zijn op een gebied G.

Met elk punt (x,y) uit G correspondeert dan een punt $(u,v,\ldots)$ en de volgende onderstelling is nu dat het punt $(u,v,\ldots)$ weer in een gebied H ligt, waarop $f(u,v,\ldots)$ gedefinieerd is.

Stelling 6.1. Als de funktie $z = f(u,v,\ldots)$ continu is in H en de funkties $u = u(x,y), v = v(x,y), \ldots$ zijn continu in G, dan is de samengestelde funktie $z = f(x,y)$ continu in G

We beschouwen nu funkties van het type $z = f(u,v\ldots)$, waarin $u,v,\ldots$ alleen afhangen van de variabele x, $u=u(x)$, $v = v(x)\ldots$

Voor deze funkties geldt de volgende stelling.

Stelling 6.2. Als de funktie $z = f(u,v,\ldots)$ in H continue partiële afgeleiden van de eerste orde heeft en de funkties $u = u(x)\ldots$ $v = v(x)\ldots$ hebben continue eerste afgeleiden in het interval D: $a \leq x \leq b$. Dan heeft $z = f(u,v,\ldots) = F(x)$ een continue afgeleide in R en :

$$F'(x) = f'_u(u,v,\ldots)u'(x) + f'_v(u,v,\ldots)v'(x)+\ldots \quad (6.5)$$

Gewone integralen als funktie van een parameter

Als $f(x,y)$ een continue funktie van x en y is in een rechthoekig gebied $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, dan kunnen we, als we x een vaste waarde geven, de funktie $f(x,y)$, welke nu een funktie van één variabele y is, integreren over het interval $c \leq y \leq d$.

We verkrijgen dan de uitdrukking:

$$\int_c^d f(x,y)dy \qquad (6.6)$$

Deze uitdrukking is nog afhankelijk van de waarde die we aan x hebben toegekend. Anders gezegd: (6.6.) is een funktie van de parameter x.

Stelling 6.3. De integraal:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy \qquad (6.7)$$

is een continue funktie van x op $a \leq x \leq b$, als $f(x,y)$ een continue funktie is op: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Stelling 6.4. Als voor $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ de funktie $f(x,y)$ een continue afgeleide naar x bezit, mogen we voor $a \leq x \leq b$ de differentiatie van $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ naar x onder het integraalteken uitvoeren. D.w.z.

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy \qquad (6.8)$$

Tot nu toe hebben we het geval beschouwd dat de integratiegrenzen c en d onafhankelijk van x zijn. Stel nu dat we de uitdrukking:

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

willen differentiëren, dan kan dit met behulp van de volgende stelling.

Stelling 6.5. Laten $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ continue afgeleiden naar x bezitten en laat $f(x,y)$ continu differentieerbaar zijn in het gehele gebied waar $f(x, \varphi_1(x))$ en $f(x, \varphi_2(x))$ bestaan, dan geldt

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy =$$

$$= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dy + \varphi_2'(x)f(x, \varphi_2(x)) - \varphi_1'(x)f(x, \varphi_1(x)). \qquad (6.9)$$

Bewijs: We schrijven voor $F(x)$:

$$F(x) = \int_u^v f(x,y)dy = G(x,u,v)$$

met

$$u = \varphi_1(x) \quad \text{en} \quad v = \varphi_2(x).$$

Volgens de kettingregel (stelling 6.2) geldt nu:

$$F'(x) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Passen wij op

$$\frac{\partial G}{\partial u} \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial v}$$

de hoofdstelling van de integraalrekening toe (vgl.par. 5), dan vinden wij

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -f(x,u) \text{ resp. } \frac{\partial G}{\partial v} = f(x,v).$$

Dit, samen met stelling 6.4, leidt tot:

$$F'(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy - \varphi_1'(x)f(x,\varphi_1(x)) +$$
$$+ \varphi_2'(x)f(x,\varphi_2(x)).$$

Voorbeeld 6.3. Gevraagd: de afgeleide naar x te bepalen van:

$$\int_x^{3x+5} x^2 y dy.$$

Toepassing van (6.9) geeft:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{3x+5} x^2 y dy = \int_x^{3x+5} 2xydy + 3x^2(3x+5) - x^3 =$$

$$= x\left[(3x+5)^2 - x^2\right] + 3x^2(3x+5) - x^3 = 16x^3 + 45x^2 + 25x.$$

<u>Dubbelintegralen</u>. De funktie $f(x,y)$ zij gedefinieerd op de rechthoek R, bepaald door:

$a \leqq x \leqq b$ en $c \leqq y \leqq d$. (zie fig. 6.1)

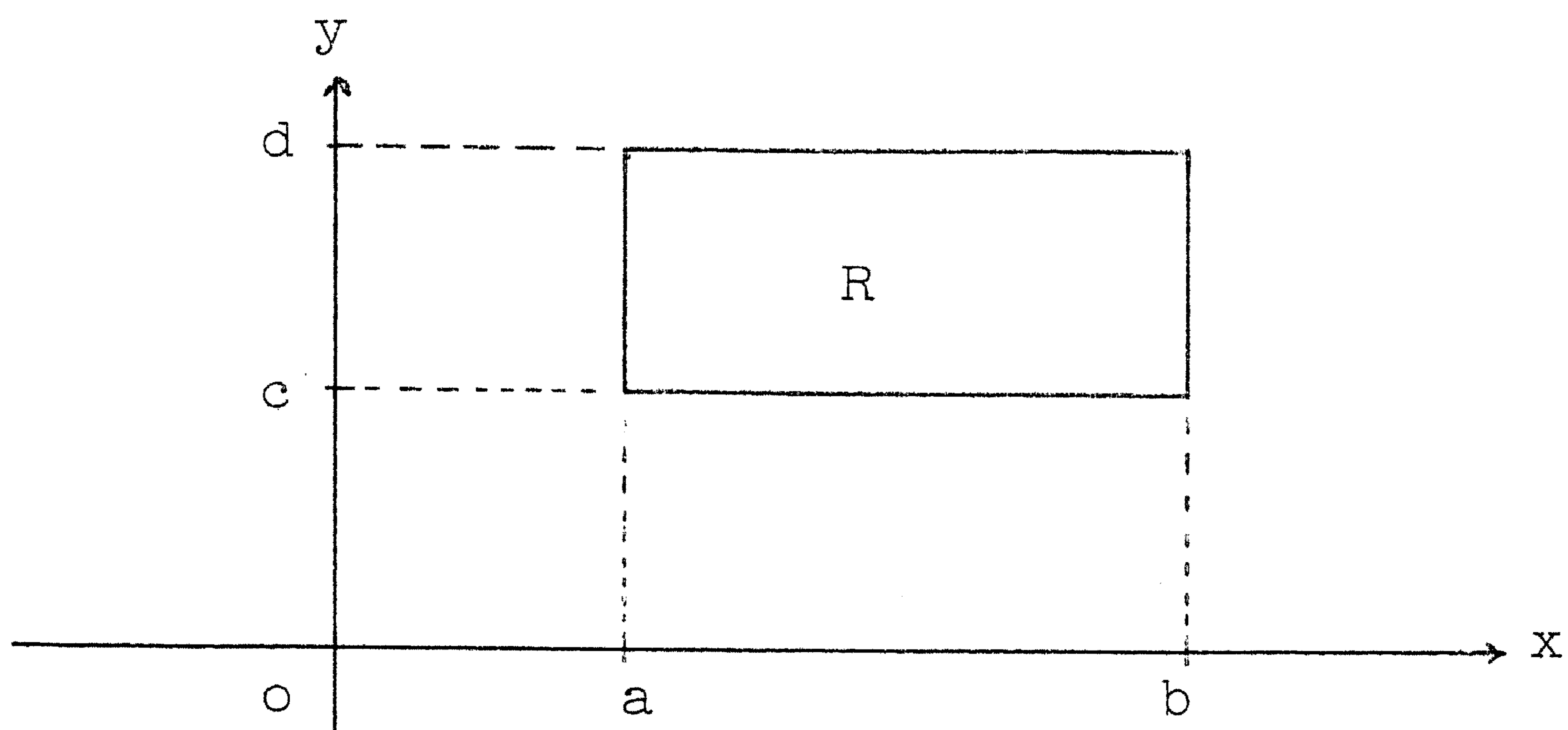


fig. 6.1

Door een onderverdeling te maken van de intervallen $a \leqq x \leqq b$ èn $c \leqq y \leqq d$ ontstaat eveneens een onderverdeling van R in deelrechthoeken.(zie fig. 6.2)

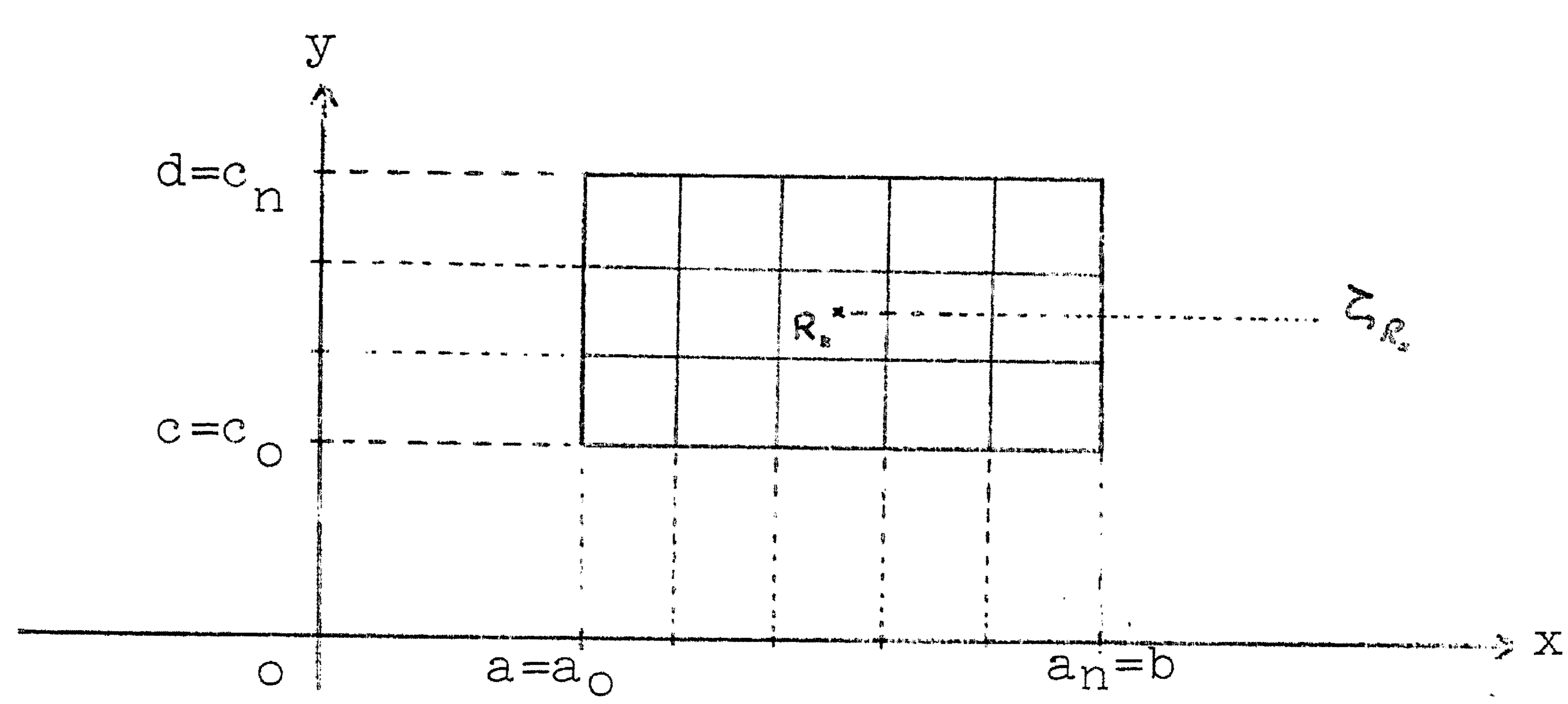


fig. 6.2

De rechthoek R wordt dus d.m.v. verticale en horizontale lijnen in een aantal deelrechthoeken verdeeld ; bij deze onderverdeling van R maken we een som:

$$S = \sum_k R_k . f(\zeta_{R_k}),$$

waarbij R_k de oppervlakte van een deelvakje van R en ξ_{R_k} een willekeurig punt (x,y) in dit deelvakje voorstelt. Onder de grofheid van de onderverdeling van R verstaan we de grootste van de grofheden van de onderverdelingen van het x- en het y- interval.
Bij voortdurende verfijning van de onderverdeling van R, zodanig dat de grofheid van de onderverdeling tot nul nadert, zal, in het geval dat f(x,y) continu is op R, de som

$$S = \sum_k R_k . f(\xi_{R_k})$$

een limiet L hebben. Deze limiet schrijven we als:

$$L = \iint_R f(x,y)dx\ dy$$

en we noemen deze limiet de dubbelintegraal van f(x,y) over de rechthoek R.

Berekening van dubbel-integralen:

Als f(x,y) continu is op de rechthoek R, dan geldt:

$$\iint_R f(x,y)dx\ dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \qquad (6.10)$$

Dit houdt dus ook in dat bij herhaalde integratie van een continue funktie met vaste integratiegrenzen de integratievolgorde mag worden verwisseld.
Ook kan men zeggen dat er in zo'n geval "onder het integraalteken" geïntegreerd mag worden.
In paragraaf 5 hebben we gezien dat de enkelvoudige integraal betrekking heeft op een oppervlak; op gelijksoortige wijze is gemakkelijk in te zien dat een dubbelintegraal kan worden geïnterpreteerd als een inhoud.

Dubbelintegralen over een normaal gebied

Onder een normaal gebied verstaan we een gebied in het x-y vlak dat begrensd wordt door twee verticalen x=a en x=b en twee continue krommen (funkties) $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ zodanig dat steeds geldt: $\varphi(x) \leq \psi(x)$. (zie fig 6.3)

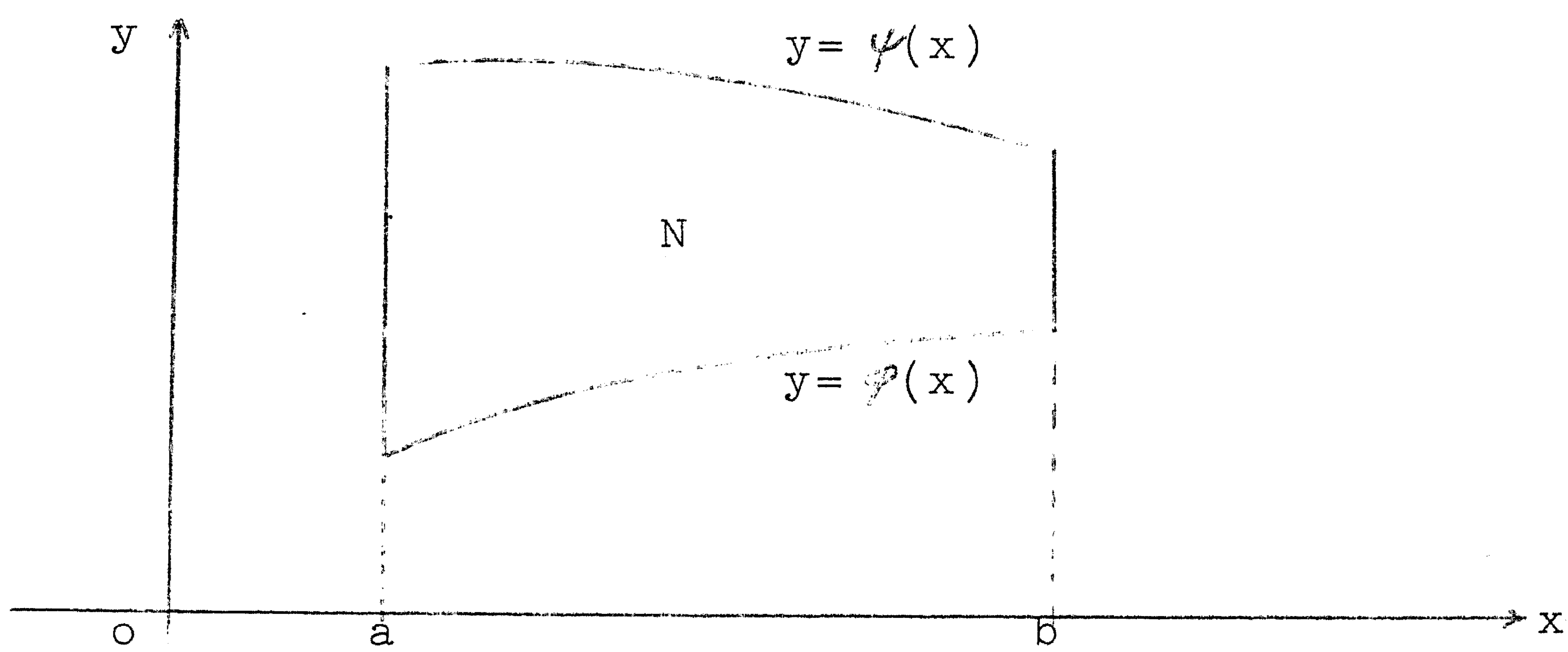


fig. 6.3

De inhoud van het lichaam, gevormd door het vlak z = = f(x,y), het x-y vlak en de verticale cylinder door de omtrek van het normaalgebied N, kan nu berekend worden met behulp van de formule:

$$I = \iint_N f(x,y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \qquad (6.11)$$

Hierbij moet men wel bedenken dat het gedeelte van de bedoelde inhoud, dat onder het x-y vlak ligt, gerekend wordt negatief te zijn.
Formule (6.10) wordt nu een bijzonder geval van (6.11) door voor de funkties $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ respectievelijk de constante funkties $\varphi(x) = c$ en $\psi(x) = d$ te nemen.

Voorbeeld 6.4. Als f(x,y) op het gehele normaalgebied gelijk is aan 1 dan moet

$$\iint_N f(x,y)dx\ dy$$

gelijk zijn aan de oppervlakte van het normaalgebied. Dit blijkt ook uit (6.11), want:

$$\iint_N f(x,y)dx\ dy = \iint_N (1)dx\ dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy =$$

$$= \int_a^b \left[\psi(x) - \varphi(x)\right] dx = \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx =$$

oppervlakte van N.

Voorbeeld 6.5

$$\iint_{\substack{0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq \sqrt[3]{x}}} xy^2 dx\ dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} xy^2 dy = \int_0^1 x.(\tfrac{1}{3}\ x)dx = \frac{1}{9}$$

Evenals bij enkelvoudige integralen kan het bij dubbelintegralen voorkomen, dat het gebied, waarover geïntegreerd moet worden, niet begrensd is. Deze omstandigheid leidt tot het invoeren van oneigenlijke dubbelintegralen. Deze worden steeds gedefinieerd met behulp van het limietbegrip en dus moeten we in principe hierbij steeds aantonen dat deze limieten (van dubbelintegralen over eindige gebieden, de z.g. eigenlijke dubbelintegralen) bestaan. De theorie van dit onderwerp, die we hier niet zullen behandelen, verloopt analoog aan die van de enkelvoudige oneigenlijke integralen.

Ter toelichting geven wij hier een aantal voorbeelden, waarbij wij steeds zullen veronderstellen dat de oneigenlijke integralen bestaan:

Voorbeeld 6.6. $f(x,y)$ zij gedefinieerd op het eerste kwadrant van het x-y vlak (zie fig.6.4)

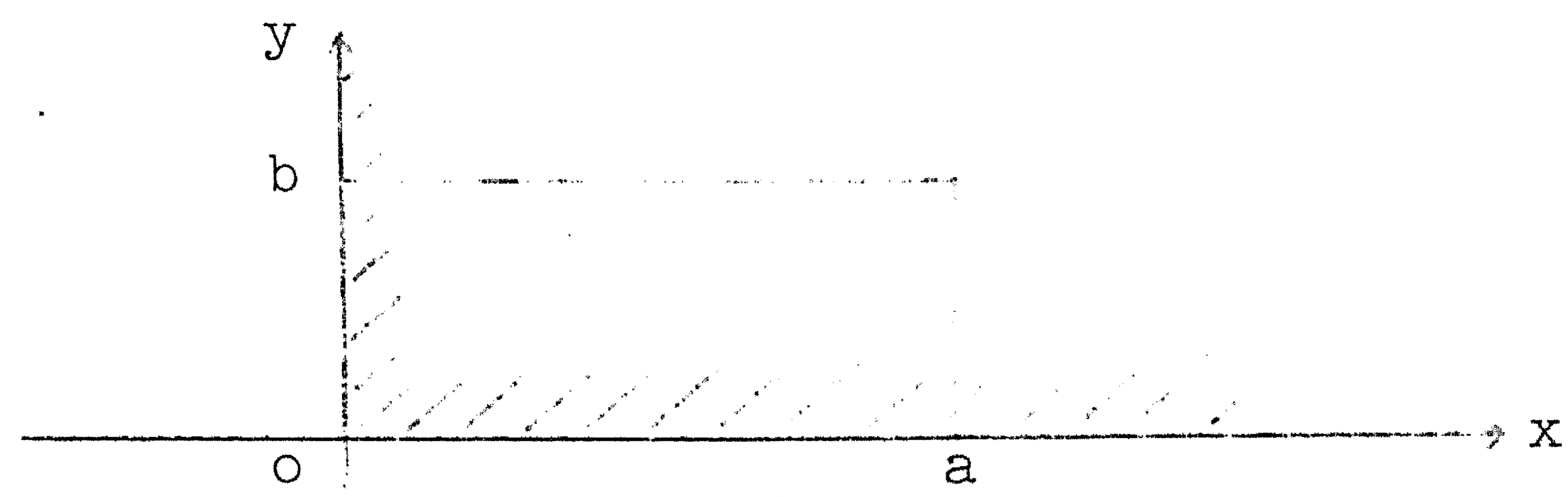


fig. 6.4

De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over deze (niet begrensde) rechthoek is:

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_0^a dx \int_0^b f(x,y)dy$$

en in het geval dat deze limiet bestaat, blijkt deze gelijk te zijn aan:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)dy$$

Voorbeeld 6.7

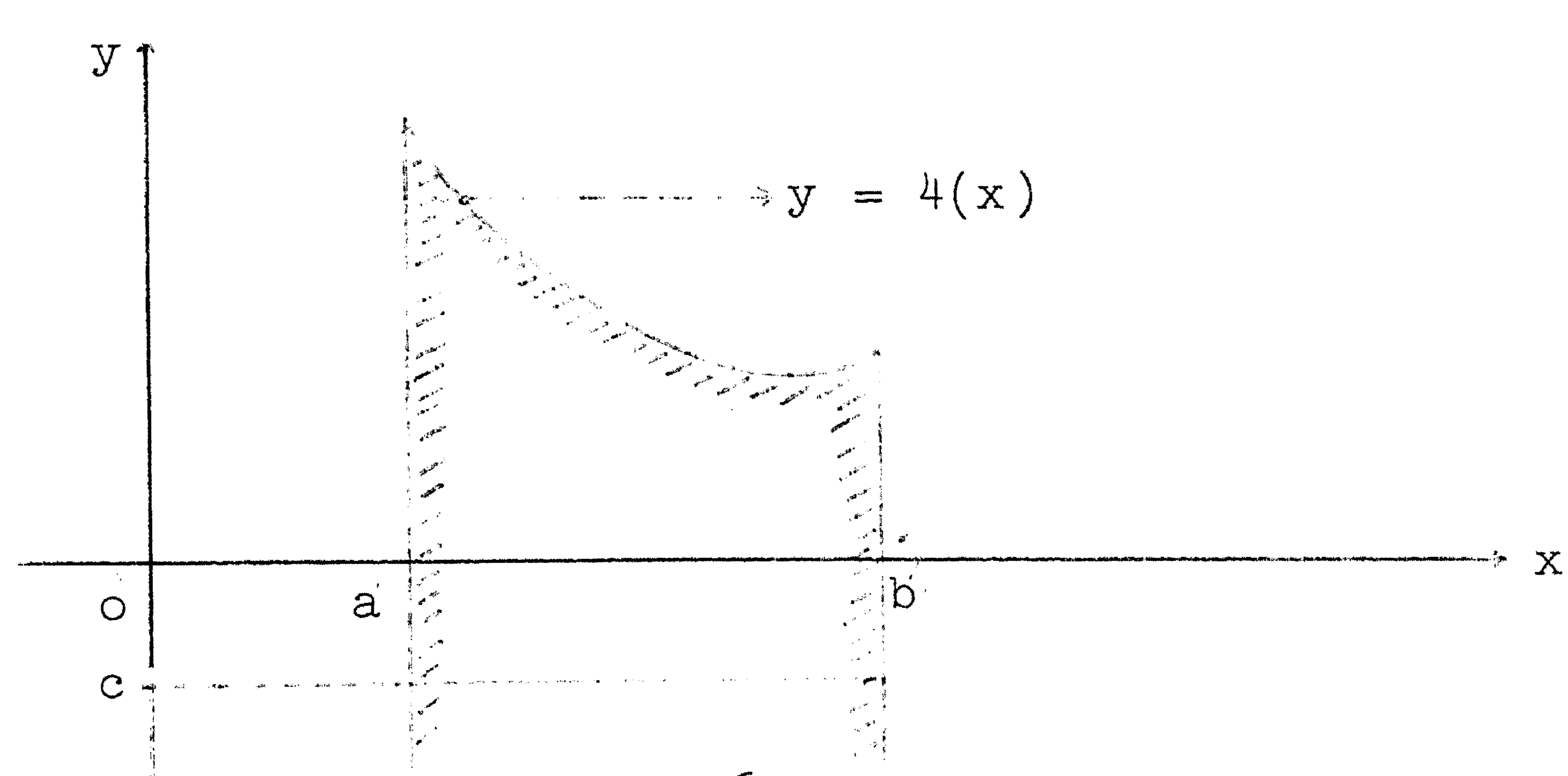


fig. 6.5

$f(x,y)$ is gedefinieerd op het gebied $a \leq x \leq b, y \leq \varphi(x)$ (zie fig.6.5)
De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over dit (niet begrensde) normaal-gebied is:

$$\lim_{c \to -\infty} \int_a^b dx \int_c^{\varphi(x)} f(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

Voorbeeld 6.8

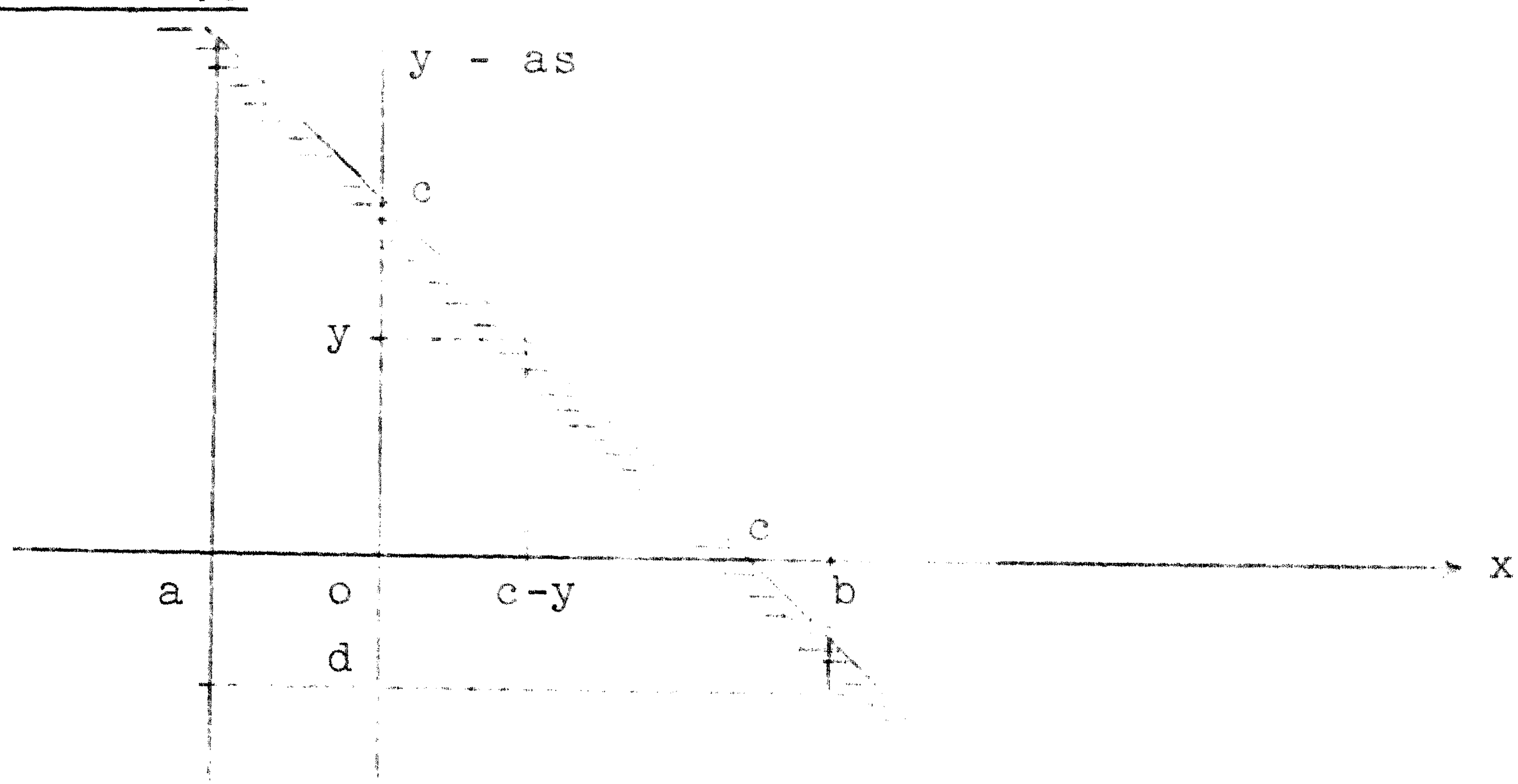


fig. 6.6

De funktie $f(x,y)$ zij gedefinieerd op het gebied $x + y \leq c$.
De dubbelintegraal van $f(x,y)$ over dit normaalgebied is:

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty \\ d \to -\infty}} \int_a^b dx \int_d^{-x+c} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{-x+c} f(x,y)dy.$$

Hierbij willen we nog opmerken dat het bij dubbelintegralen over normaalgebieden soms (zoals o.a. in dit geval) mogelijk is de integratie volgorde te verwisselen. Bovenstaande dubbelintegraal kan n.l. ook geschreven worden als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{c-y} f(x,y)dx,$$

zoals blijkt wanneer we eerst in de x - richting integreren met als uitkomst

$$\int_{-\infty}^{c-y} f(x,y)dx$$

en deze funktie van y vervolgens integreren van - ∞ naar + ∞ langs de y-as.

<u>Opgave</u>:Tracht op soortgelijke wijze aan te tonen dat:

<u>a</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{e^x}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\log y} f(x,y)dx.$

<u>b</u> $\displaystyle\int_{0}^{a} dx \int_{x^2}^{a^2} f(x,y)dy = \int_{0}^{a^2} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

<u>Maxima en minima bij funkties van twee variabelen</u>

De funktie $z=f(x,y)$ heeft een relatief maximum in het punt (x_o,y_o) wanneer alle waarden van z in een omgeving van dat punt kleiner zijn dan $f(x_o,y_o)$.Dus $(x_o,$ $,y_o)$ is een relatief maximum van $f(x,y)$ als er een δ bestaat, zodanig dat voor alle (x,y) waarvoor $0<(x-x_o)^2+$ $+(y-y_o)^2 < \delta$ geldt $f(x,y) < f(x_o,y_o)$. Op overeenkomstige wijze wordt een relatief minimum gedefinieerd.

We zullen eerst <u>noodzakelijke</u> voorwaarden geven voor de aanwezigheid van een extreme waarde. Stel $(x_o.y_o)$ is een extreem punt. De funktie $f(x,y_o)$ bezit dan als funktie van één variabele een extreem punt voor $x=x_o$, zodat noodzakelijk is de voorwaarde

$$\left.\frac{\partial f(x,y_o)}{\partial x}\right|_{x_o} = f'_x(x_o,y_o) = 0.$$

Evenzo is noodzakelijk de voorwaarde:

$$f'_y(x_o,y_o) = 0.$$

De <u>mogelijke</u> extreme punten zijn de gemeenschappelijke oplossingen van de vergelijkingen:

$$f'_x(x,y) = 0 \qquad (6.14)$$

en

$$f'_y(x,y) = 0 \qquad (6.15$$

Een oplossing van (6.14) en (6.15) is echter niet noodzakelijk een extreem punt, hetgeen men bijvoorbeeld kan zien aan de funktie $z = xy$, waarvoor deze vergelijkingen het punt (0,0) als oplossing bezitten. In het punt (0,0) bezit deze funktie de waarde nul, terwijl in iedere omgeving van (0,0), hoe klein ook genomen, de funktie zowel positieve als negatieve waarden bezit; (0,0) kan dus geen extreem zijn. Wij moeten derhalve meer eisen, hetgeen in de volgende stelling tot uitdrukking komt.

Stelling 6.7. De funktie $f(x,y)$ bezit een relatief minimum in (x_o,y_o) wanneer $f'_x(x_o,y_o) = f'_y(x_o,y_o) = 0$ en bovendien:

$$f''_{xx}(x_o,y_o)\, f''_{yy}(x_o,y_o) - \left[f''_{xy}(x_o,y_o)\right]^2 > 0$$

en

$$f''_{xx}(x_o,y_o) > 0.$$

De funktie $f(x,y)$ bezit een relatief maximum in (x_o,y_o), wanneer $f'_x(x_o,y_o) = f'_y(x_o,y_o) = 0$ en bovendien

$$f''_{xx}(x_o,y_o)\, f''_{yy}(x_o,y_o) - \left[f''_{xy}(x_o,y_o)\right]^2 > 0$$

en (6.17)

$$f''_{xx}(x_o,y_o) < 0.$$

Maxima en minima met bijvoorwaarden

In vele problemen komt het voor, dat men een uiterste waarde van een funktie $f(x,y)$ moet bepalen, waarbij x en y aan een relatie $\varphi(x,y) = 0$ moeten voldoen.

Men kan hier bijvoorbeeld denken aan een kapitaal k dat men op twee verschillende wijzen kan aanwenden. Wendt men een gedeelte x van het kapitaal k op de ene wijze aan en het overblijvende gedeelte y op de andere wijze, dan bedraagt de opbrengst f(x,y).

Men kan vragen naar de maximale opbrengst onder de bijvoorwaarde x+y = k. In dit geval is dus de bijvoorwaarde:

$$\varphi(x,y) = x+y-k = 0$$

Stelling 6.8. De uiterste waarden van de funktie f(x,y) onder de voorwaarde $\varphi(x,y) = 0$ worden gevonden door de onvoorwaardelijke extremen te bepalen van de funktie $F(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$ als funktie van x, y en λ waarin λ onafhankelijk is van x en y. Noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van uiterste waarden zijn dus:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'_x(x,y)+\lambda\cdot\varphi'_x(x,y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0$$

en (6.18)

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}= \varphi(x,y) = 0.$$

Uit deze drie vergelijkingen kunnen λ,x en y worden opgelost. Men noemt deze methode de multiplicatorenmethode van LAGRANGE.

Voorbeeld 6.9. Bepaal de uiterste waarden van f(x,y) = $= x^3+3x^2y$ onder de voorwaarde x+y=10 of $\varphi(x,y)=x+y-10=0$. De op te lossen vergelijkingen luiden dan:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2+6xy+\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2+\lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x+y-10 = 0.$$

Oplossing van deze vergelijkingen geeft $x_0=0$, $y_0=10$ en $x_1=10$, $y_1=0$. Men kan aantonen dat de eerste oplossing een minimum, de tweede een maximum is van $f(x,y)$.

Voorbeeld 6.10. Een andere oplossingsmethode willen we toelichten aan de hand van een voorbeeld.

De verzameling punten (x,y) met $\varphi(x,y)=0$ kan vaak worden voorgesteld als een kromme met een z.g. parametervoorstelling:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \qquad a \leq t \leq b \tag{6.19}$$

In voorbeeld 6.9 luidt deze parameter-voorstelling:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= 10-t \end{aligned}\right] \text{voor elke } t.$$

Als $f(x,y)$ op deze kromme gedefinieerd is dan zullen de extremen van $f(x,y)$ onder de voorwaarde $\varphi(x,y)=0$ voldoen aan:

$$\frac{df(x(t),y(t))}{dt} = 0. \tag{6.20}$$

Nemen we als voorbeeld de funkties uit voorbeeld 6.9 dan vinden we

$F(t)=f(x(t),\ y(t)) = t^3+3t^2(10-t) = -2t^3+30t^2$

We stellen nu $F'(t)$ gelijk aan nul.

$$F'(t) = -6t^2+60t = 0$$

Deze vergelijking in t heeft als oplossingen:

$$t_1=0 \text{ en } t_2 = 10.$$

Daar $F''(t) = -12t + 60$, geldt

$$F''(0) = 60 > 0 \text{ en } F''(10) = -60 < 0.$$

Voor $t = 0$ is $F(t)$ dus minimaal en voor $t = 10$ maximaal.

De oplossing $t_1 = 0$ levert het punt $(0,10)$, $t_2 = 10$ levert het punt $(10,0)$.

Opgave: Bepaal de extrema van

$$f(x,y) = x + 4y^2$$

Onder de voorwaarde

$$(x,y) = x\cdot y-1 = 0$$

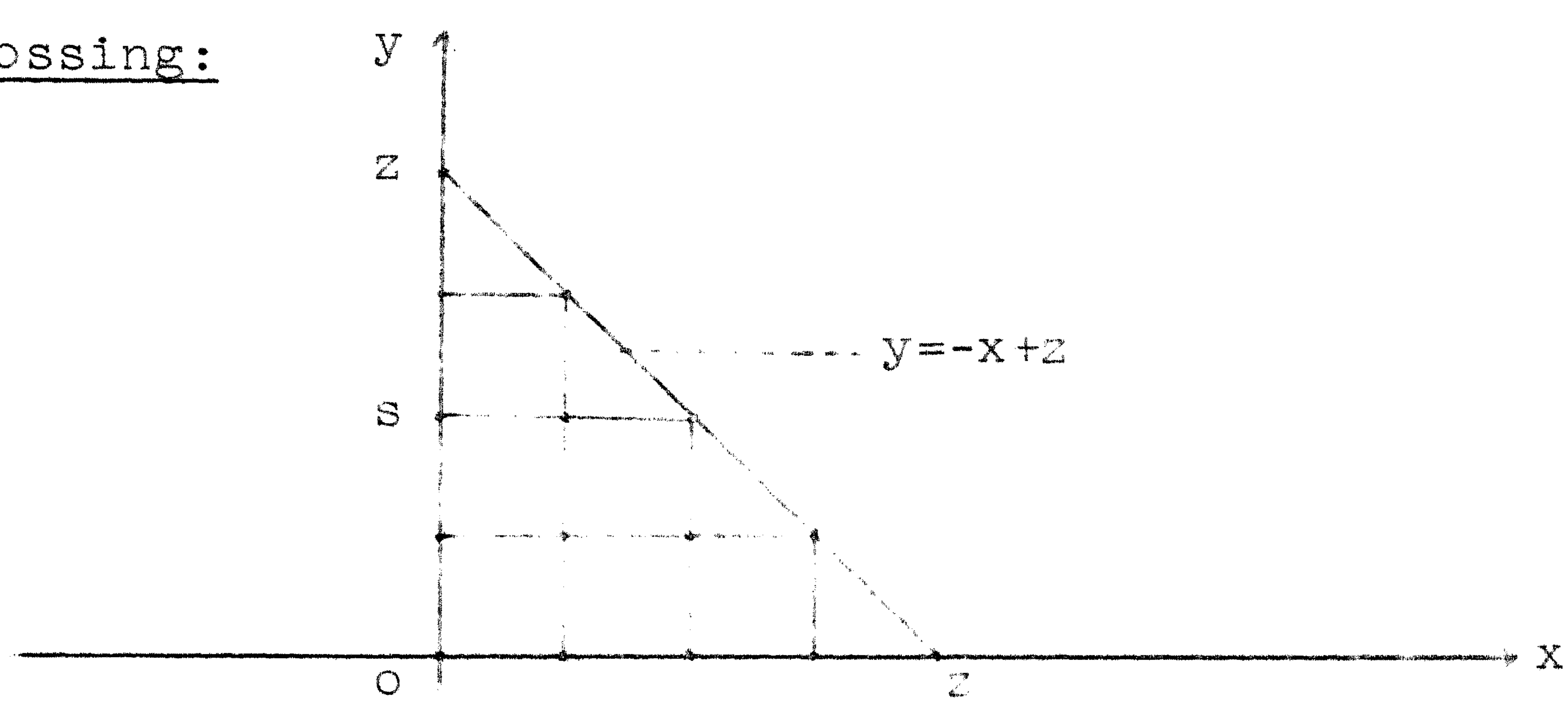
(Antwoord: $f(x,y)$ is minimaal in $(2,\frac{1}{2})$; $f(2,\frac{1}{2}) = 3$)

7. Dubbelsommen

Evenals met dubbelintegralen krijgen we te maken met dubbelsommen.

In paragraaf 6 hebben we gezien dat het soms mogelijk is, bij dubbelintegralen over een normaalgebied, de integratievolgorde te verwisselen.
Bij dubbelsommen kan ook iets dergelijks voorkomen, wat we aan de hand van een voorbeeld willen toelichten.
$f(n,m) = a_{n,m}$ zij gedefinieerd in de punten (n,m) van het x-y vlak, gelegen in de driehoek gevormd door de lijnen $x=0$, $y=0$ en $y = -x+z$.
(n en m zijn gehele getallen en z is een natuurlijk getal).
Bepaal de som S van alle funktiewaarden $f(n,m)$ op de roosterpunten van deze driehoek.

Oplossing:



We sommeren eerst over de horizontale lijn $y=s$ en vinden voor de som van de funktiewaarden op deze lijn:

$$\sum_{n=0}^{z-s} f(n,s).$$

Deze uitkomst sommeren we over s van $s=0$ tot en met $s=z$.
Dit levert:

$$s = \sum_{s=0}^{z} \sum_{n=0}^{z-s} f(n,s).$$

Door eerst over de verticale lijn x=k te sommeren en daarna over k van k=0 tot k=z vinden we:

$$s = \sum_{k=0}^{z} \sum_{m=0}^{z-k} f(k,m).$$

Het een en ander komt er hier dus op neer dat we de sommatie-volgorde verwisseld hebben.