STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk VIII

Grondbegrippen uit de Vector- en Matrixrekening

door

F. Göbel

augustus 1960

1. Inleiding; vectorrekening

Het belangrijkste argument voor het invoeren van vectoren en matrices is wel de verkorte schrijfwijze, die leidt tot een grotere overzichtelijkheid van de formules en de besparing van veel schrijfwerk. Vooral bij de lineaire en kwadratische programmering, maar ook in de waarschijnlijkheidsrekening en bij de dynamische programmering hebben vectoren en matrices bewezen van groot nut te zijn.

We zullen beginnen met de vectorrekening. Onder een n-dimensionale vector A verstaan we een rij van n reële getallen: $A = (a_1,\dots,a_n)$. De getallen $a_1,\dots,a_n$ noemt men de componenten van de vector A.

Zo kunnen de maandomzetten van een bedrijf in een bepaald jaar als een 12-dimensionale vector gezien worden, waarvan de eerste component gelijk is aan de omzet in januari, enz.

Ook de aantallen personeelsleden in de diverse afdelingen van een bedrijf vormen een vector; als er vijf afdelingen zijn, kan de "personeel-situatie" op iedere dag beschreven worden door een 5-dimensionale vector.

Aan vectoren wordt vaak een meetkundige betekenis gehecht, en wel op de volgende wijze. Als $A = (a_1,\dots,a_n)$ een n-dimensionale vector is, beschouw dan het punt dat ten opzichte van een n-dimensionaal rechthoekig assenstelsel de coördinaten $a_1,\dots,a_n$ heeft. Het lijnsegment van de oorsprong naar het punt $(a_1,\dots,a_n)$ is nu een meetkundige voorstelling van de vector A. Het is gebruikelijk om dit lijnsegment als een pijl te tekenen met de pijlpunt in het punt $(a_1,\dots,a_n)$.

De 2-dimensionale vectoren $A = (3,2)$, $B = (1,4)$ en $C = (-1,0)$ hebben dus de in figuur 1.1 aangegeven meetkundige voorstellingen. Hierbij is de eerste component afgezet langs de horizontale of x_1-as en de tweede component langs de verticale of x_2-as.

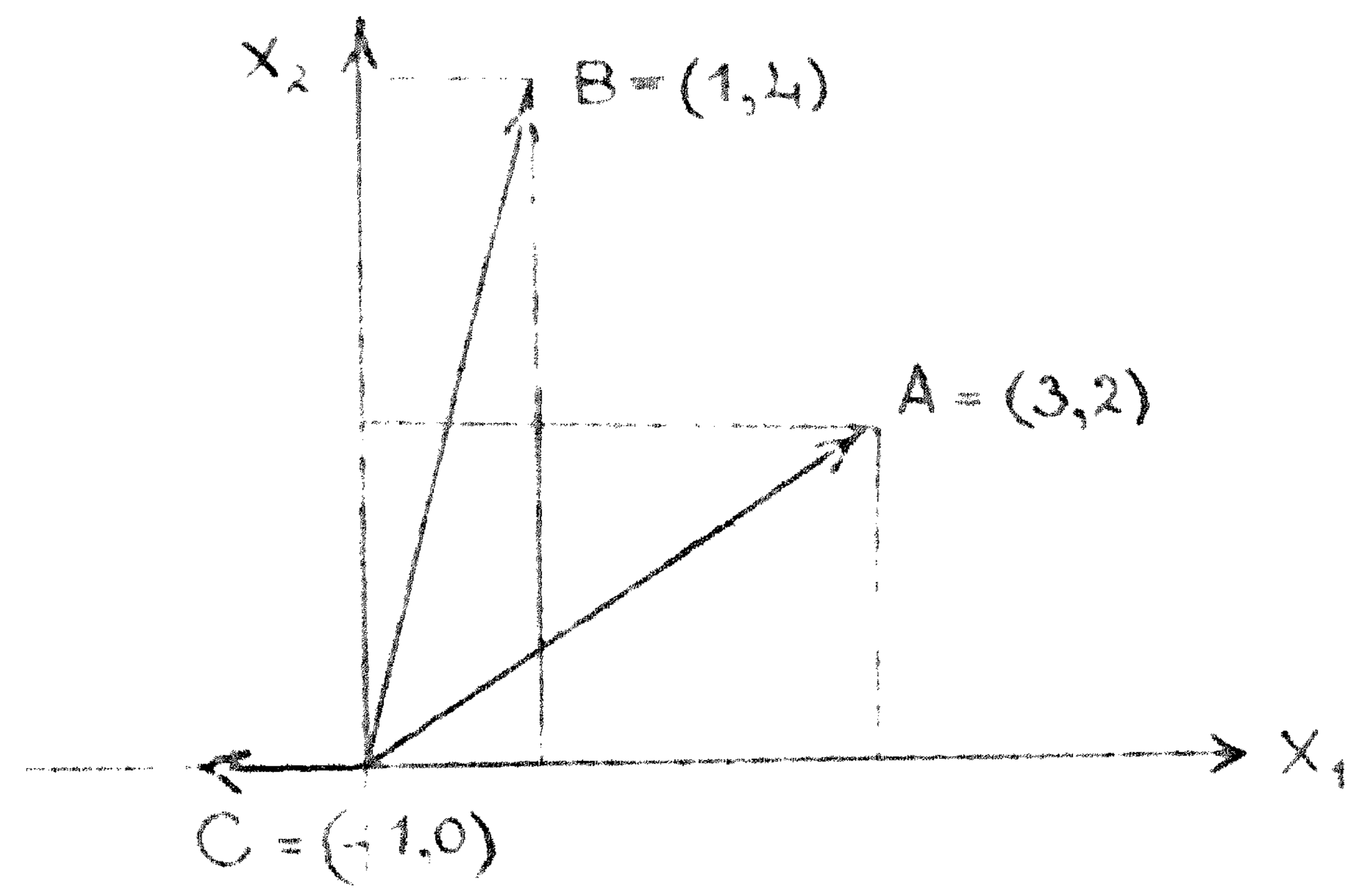

fig. 1.1

De meetkundige voorstelling van enkele 2-dimensionale vectoren

De componenten zijn in deze tekening gemakkelijk terug te vinden als de lengten van de projecties op de assen. Wordt bijvoorbeeld de eerste component van A gevraagd, dan projecteren we het met A corresponderende lijnsegment op de eerste as. De lengte van deze projectie is gelijk aan 3, dus de eerste component van A is eveneens gelijk aan 3. In formule: $a_1=3$.

Figuur 1.2 toont de meetkundige voorstelling van de driedimensionale vector $V = (4,5,2\frac{1}{2})$ met zijn componenten.

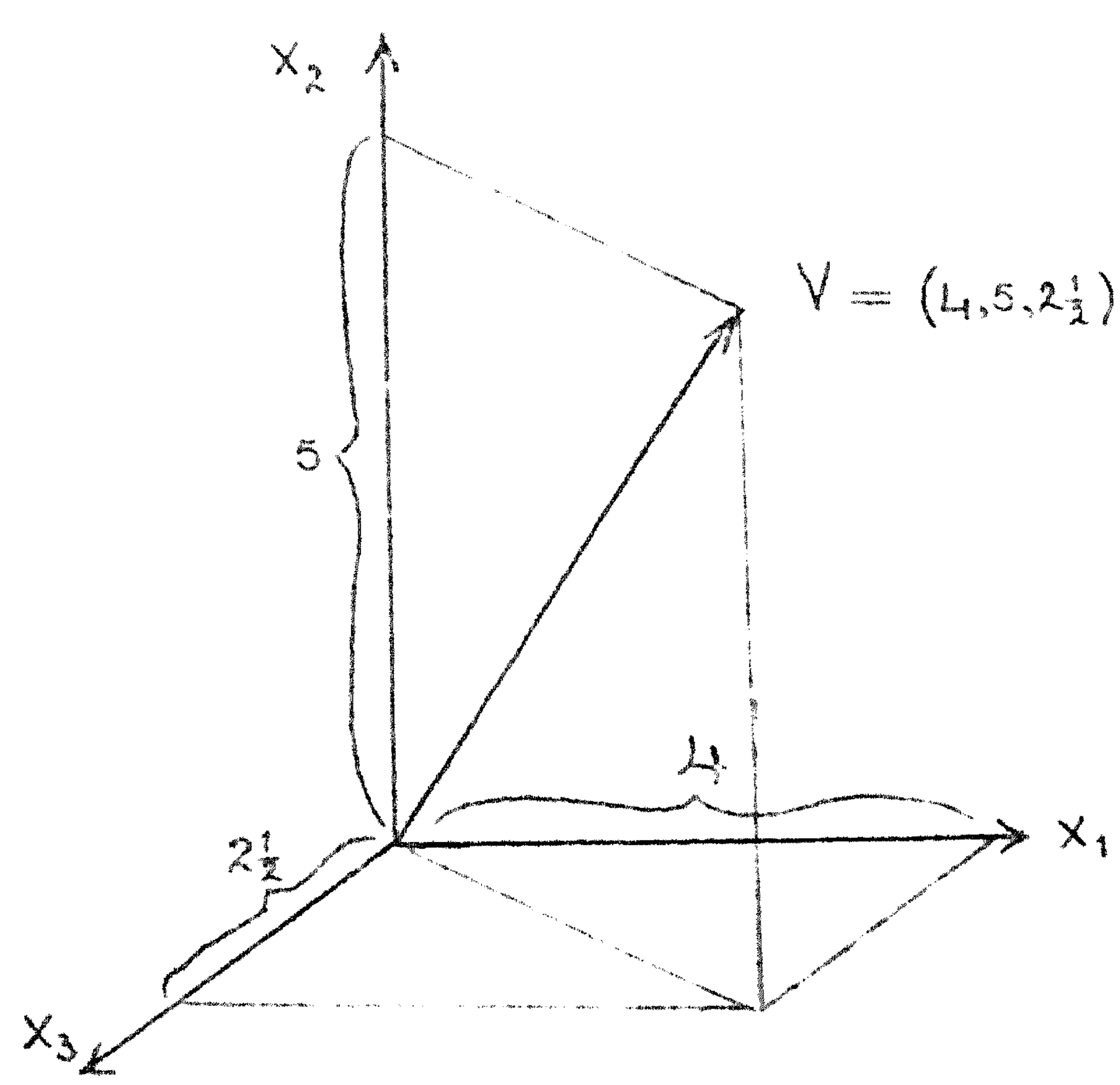

fig. 1.2

Meetkundige voorstelling van een 3-dimensionale vector

Een n-dimensionale vector hadden we gedefinieerd als een rij van n reële getallen. Een 1-dimensionale vector kan men dus op voor de hand liggende wijze identificeren met een reëel getal. Nu kan men met de reële getallen allerlei bewerkingen uitvoeren, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, enz. en men kan zich afvragen of vergelijkbare bewerkingen ook op vectoren toegepast kunnen worden. In het volgende zal blijken dat dit inderdaad het geval is.

Wij beginnen met de optelling. Aangezien reële getallen kunnen worden opgeteld kan men definiëren

$$(a_1) + (b_1) = (a_1 + b_1) ,$$

welke formule dan als volgt gelezen moet worden: de som van twee 1-dimensionale vectoren met componenten a_1 resp. b_1 is weer een 1-dimensionale vector waarvan de component gelijk is aan a_1+b_1.

We breiden deze definitie nu als volgt uit: onder de <u>som</u> A+B van de n-dimensionale vectoren $A = (a_1,\ldots,a_n)$ en $B = (b_1,\ldots,b_n)$ verstaan we de n-dimensionale vector $(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$.

Volgens deze definitie is dus de som van de tweedimensionale vectoren (5,2) en (3,10) gelijk aan (5+3, 2+10) = (8,12). De corresponderende meetkundige voorstelling is in fig. 1.3 getekend.

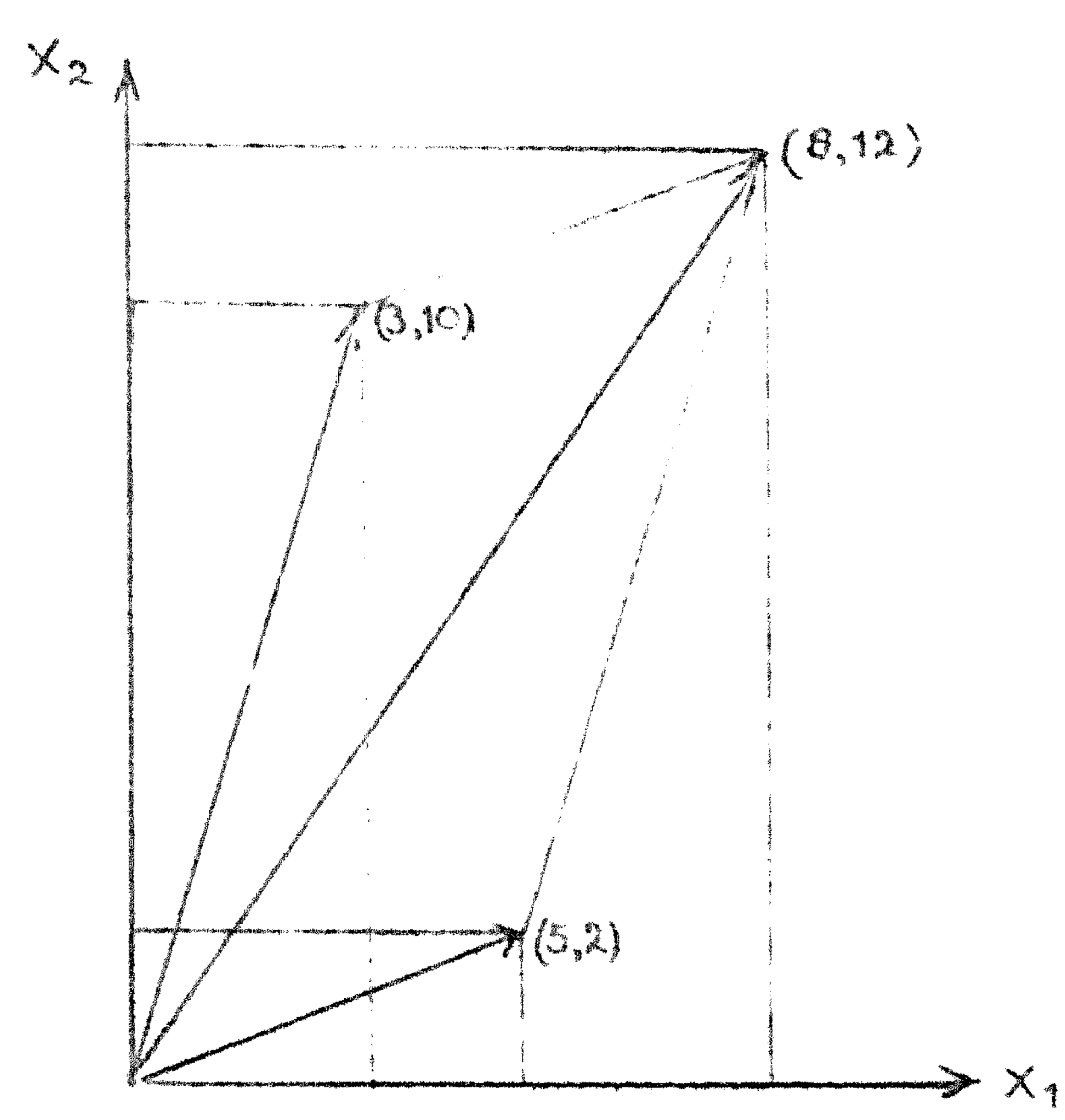

fig. 1.3

<u>De som van twee tweedimensionale vectoren</u>

Ter verdere toelichting beschouwen we een bedrijf met twee filialen. Voor ieder der beide filialen kan men, zoals we zoëven hebben gezien, de reeks der maandelijkse omzetten gedurende een bepaald jaar interpreteren als een 12-dimensionale vector. Deze vectoren noemen we $P=(p_1,\ldots,p_{12})$ en $Q=(q_1,\ldots,q_{12})$ Wat stelt nu P+Q voor? Volgens de zojuist gegeven definitie zijn de componenten van deze vector $p_1+q_1,\ldots,p_{12}+q_{12}$ Nu is p_1+q_1 de gezamenlijke januari-omzet van de beide filialen

De vector P+Q geeft dus de maandomzetten in beide bedrijven tezamen.

Tenslotte beschouwen we een firma die drie fabrieken beheert, waarvan ieder 5 afdelingen telt. De aantallen personeelsleden worden voor de drie fabrieken gegeven door

$$P = (p_1,\ldots,p_5)$$
$$Q = (q_1,\ldots,q_5)$$
$$R = (r_1,\ldots,r_5).$$

p_2 is dus het aantal personeelsleden op de tweede afdeling van de eerste fabriek, enz. Dan geldt

$$S = P+Q+R = (p_1+q_1+r_1,\ldots,p_5+q_5+r_5),$$

waarin een component van de somvector S nu blijkbaar het aantal arbeiders op een bepaalde afdeling in alle drie fabrieken tezamen voorstelt.

Geheel analoog aan de gang van zaken bij reële getallen wordt het verschil van twee vectoren A en B gedefinieerd als de vector C, die, bij B opgeteld, A als som geeft. Dus als $A = (a_1,\ldots,a_n)$ en $B = (b_1,\ldots,b_n)$, dan is $C = A-B = (a_1-b_1,\ldots,a_n-b_n)$.

Het produkt van een vector $A = (a_1,\ldots,a_n)$ en een reëel getal α noteren we als αA; het is per definitie gelijk aan de vector $(\alpha a_1,\ldots,\alpha a_n)$. (zie fig. 1.4)

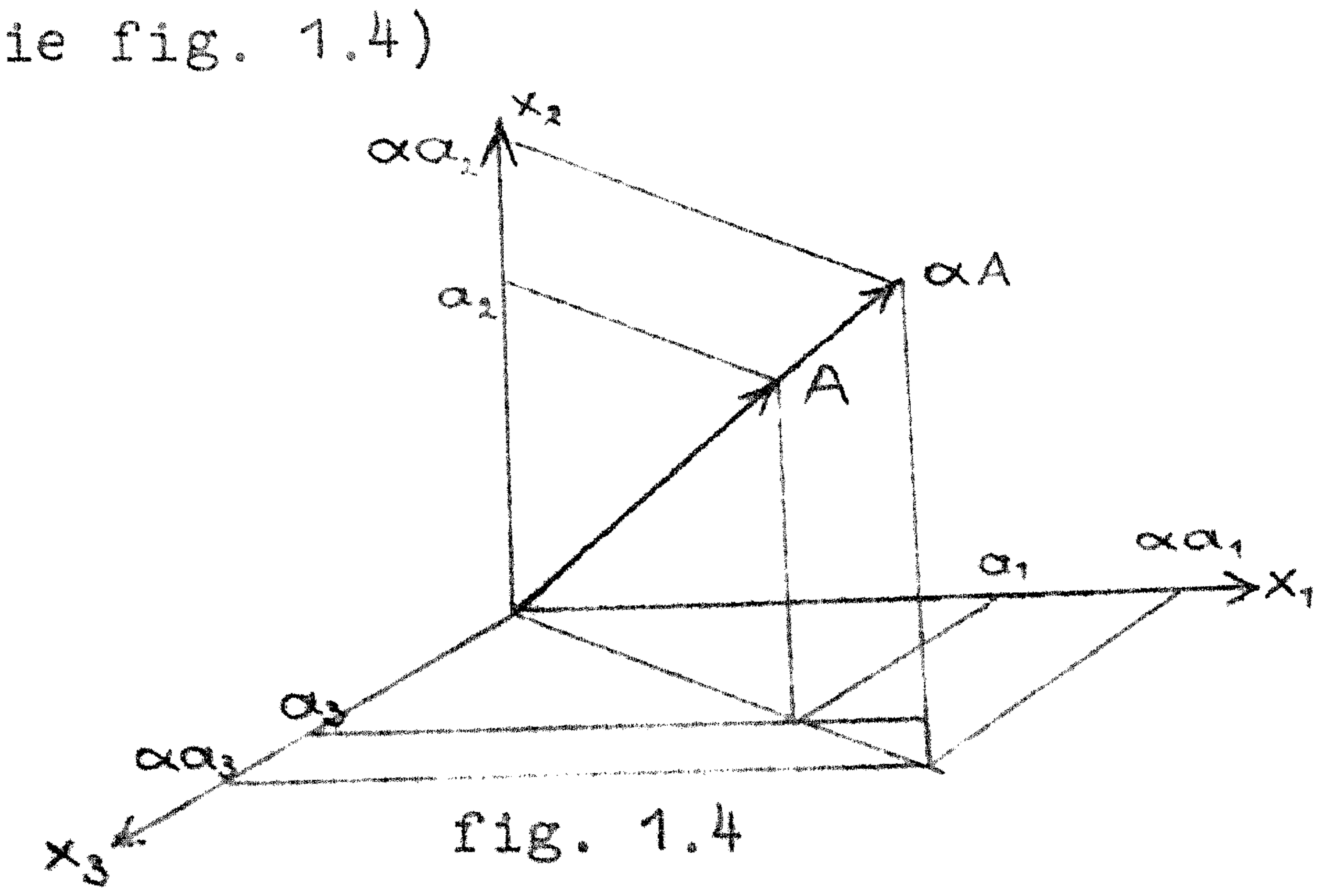

fig. 1.4

Het produkt van een driedimensionale vector A met een reëel getal α.

Is bijvoorbeeld $A = (a_1,\ldots,a_{12})$ weer de vector van de maandomzetten, laten wij zeggen in guldens, dan is $\alpha A=(\alpha a_1,\ldots,\alpha a_{12})$ voor geschikte α, de vector der maandomzetten omgerekend in zwitserse francs.

Een som van de vorm $\alpha A+\beta B+\gamma C$ (waarin α, β en γ reële getallen zijn, terwijl A, B en C gelijkdimensionale vectoren voorstellen) noemt men een lineaire combinatie van de vectoren A, B en C. De lineaire combinatie van drie tweedimensionale vectoren kan men in een figuur vinden door eerst uit de vectoren A, B, C af te leiden de vectoren αA, βB en γC, vervolgens bijvoorbeeld eerst de vectoren αA en γC op te tellen en daarna de som te bepalen van de vectoren $\alpha A + \gamma C$ en βB (vgl. figuur 1.5)

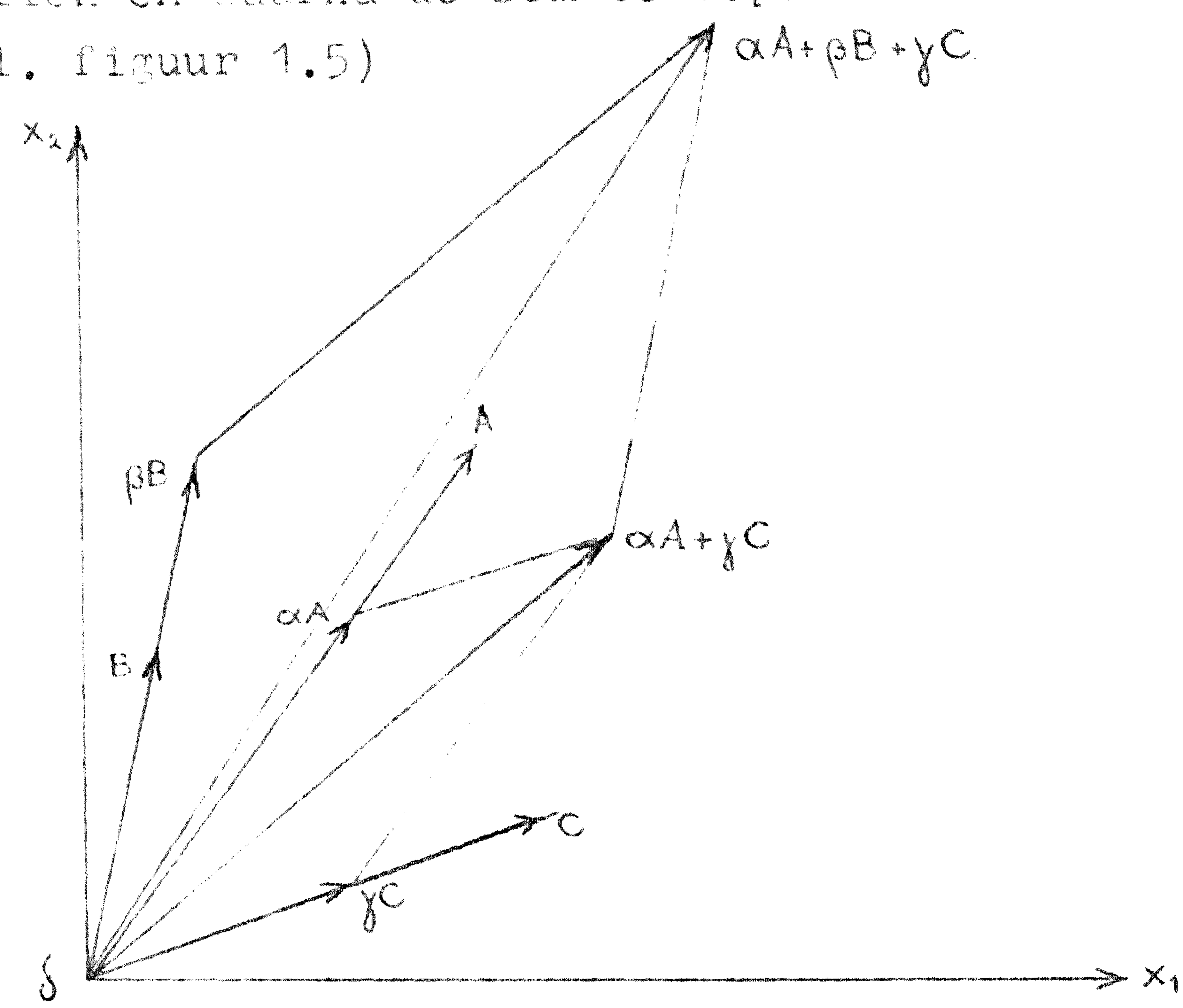

fig. 1.5

Het meetkundig bepalen van de lineaire combinatie $\alpha A+\beta B+\gamma C$ van de twee-dimensionale vectoren A, B en C

Een toepassing hiervan is de volgende: laat 1 kg van een bepaald mengsel van twee grondstoffen zijn samengesteld uit a_1 kg van grondstof G_1 en a_2 kg van grondstof G_2. Met dit mengsel correspondeert dus een vector $A=(a_1,a_2)$. Stel we hebben nog twee van dergelijke mengsels van dezelfde grondstoffen, maar eventueel in een andere verhouding: $B=(b_1,b_2)$ en $C=(c_1,c_2)$. Vermengen we nu x, y resp. z kg van de drie mengsels, dan ontstaat een nieuw mengsel waarvan de corresponderende vector, zoals men gemakkelijk inziet, juist $xA + yB + z..$ is.

Het scalair produkt AB van de vectoren $A=(a_1,\ldots,a_n)$ en $B=(b_1,\ldots,b_n)$ is per definitie het reële getal $a_1b_1+\ldots+a_nb_n$. Als voorbeeld noemen we de prijs van een mengsel van n grondstoffen. Stel dat 1 kg van het mengsel is samengesteld uit a_1 kg van grondstof $G_1,\ldots,a_n$ kg van grondstof G_n, terwijl de prijs van de grondstoffen resp. $b_1,\ldots,b_n$ per kg bedraagt. De prijs van 1 kg van het mengsel is dan gelijk aan $a_1b_1+\ldots+a_nb_n$, het scalair produkt van de vectoren $A=(a_1,\ldots,a_n)$ en $B=(b_1,\ldots,b_n)$.

De (n-dimensionale) nulvector is de (n-dimensionale) vector waarvan alle componenten nul zijn. De meetkundige voorstelling ervan in de vorm van een lijnsegment met een pijl valt in het water, omdat het lijnsegment niet bepaald is.

De (n-dimensionale) eenheidsvector E_j is de (n-dimensionale) vector waarvan de j^e component gelijk is aan 1, terwijl alle overige componenten nul zijn. In de n^e dimensie hebben we dus n eenheidsvectoren (zie fig. 1.6).

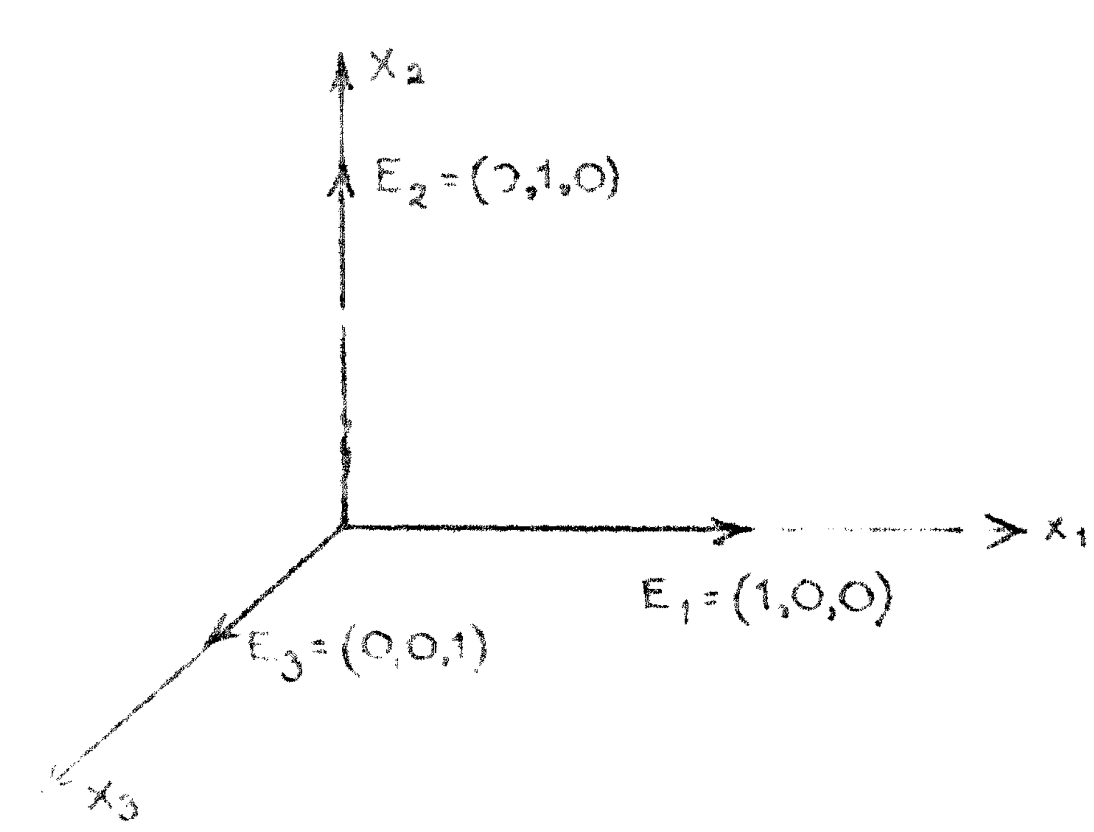

fig. 1.6
De drie-dimensionale eenheidsvectoren

2. Lineaire afhankelijkheid en lineaire onafhankelijkheid

Voor veel problemen is het nodig te weten of een gegeven vector te schrijven is als lineaire combinatie van een aantal andere, eveneens gegeven vectoren. Het kan bijvoorbeeld voorkomen dat men uit twee gegeven mengsels A en B van drie grondstoffen een derde mengsel C wil maken door A en B in een geschikte verhouding te vermengen. Laten we eens aannemen dat 15 kg van het mengsel A bestaat uit 5, 4 resp. 6 kg van ieder der grondstoffen, terwijl

9 kg B bestaat uit 3, 1 resp. 5 kg van ieder der grondstoffen. In vectornotatie: $A = (5,4,6)$, $B = (3,1,5)$. Is het nu mogelijk om hieruit een mengsel $C = (3,2,4)$ te maken? Inderdaad is dit mogelijk, want $C = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B$, zoals men gemakkelijk narekent. Het is echter onmogelijk om $D = (3,2,5)$ te schrijven als lineaire combinatie van A en B, zodat we met stelligheid kunnen zeggen dat niet ieder mengsel van drie grondstoffen kan worden samengesteld uit de mengsels A en B.

Men zou zich kunnen afvragen of de oorzaak misschien in de samenstelling van A en B ligt. Met andere woorden: zouden de twee gegeven mengsels A en B van zodanige samenstelling kunnen zijn dat wèl ieder ander mengsel[1] kan worden verkregen? Zoals later zal blijken is dit niet mogelijk. Indien wij echter drie mengsels tot onze beschikking zouden hebben is het in sommige gevallen wèl mogelijk om ieder gewenst mengsel te maken. "In sommige gevallen" hebben we gezegd, want wanneer iemand bijvoorbeeld zou beweren dat hij uit bovenstaande mengsels A, B en C ieder gewenst mengsel kan maken, dan zou hij dit ook moeten kunnen met A en B alleen. Stel nl. dat bijvoorbeeld het bovengenoemde mengsel D uit A, B en C samengesteld zou kunnen worden en dat gold

$$D = xA + yB + zC \ . \tag{2.1}$$

Dan geldt tevens

$$D = xA + yB + z(\tfrac{3}{7}A + \tfrac{2}{7}B) = (x+\tfrac{3}{7}z)A + (y+\tfrac{2}{7}z)B \ . \tag{2.2}$$

Wij hebben echter gezien dat D niet uit A en B kan worden samengesteld en dus kan (2.2) niet correct zijn en derhalve (2.1) evenmin. Wanneer de vectoren drie componenten bezitten, dan kunnen ze dus soms wel worden samengesteld uit drie andere vectoren en in sommige gevallen niet. Om hier orde in te scheppen zullen wij in deze en de volgende paragraaf een aantal definities invoeren en stellingen afleiden.

----

1) In dit voorbeeld beschouwen we steeds mengsels van <u>drie</u> grondstoffen.

Definitie 2.1.

We zeggen dat een aantal vectoren de ruimte voortbrengt, indien iedere vector te schrijven is als lineaire combinatie van deze vectoren.

Voorbeeld 2.1.

Beschouw de twee-dimensionale vectoren (3,1), (2,2) en (5,4). We zullen hier niet bewijzen dat deze vectoren de twee-dimensionale ruimte voortbrengen, maar dit althans plausibel maken door lineaire combinaties op te geven die de vectoren (5,0), (5,3) en (0,-2) als uitkomst geven:

$$2(3,1) - 3(2,2) + 1(5,4) = (6,2) - (6,6) + (5,4) =$$
$$= (6-6+5, 2-6+4) = (5,0)$$

$$1(3,1) + 1(2,2) + 0(5,4) = (3,1) + (2,2) + (0,0) =$$
$$= (3+2+0, 1+2+0) = (5,3);$$

$$2(3,1) + 2(2,2) - 2(5,4) = (6,2) + (4,4) + (-10,-8) =$$
$$= (6+4-10, 2+4-8) = (0,-2).$$

In de volgende stelling maken we kennis met een ander stelsel van vectoren dat de ruimte voortbrengt.

Stelling 2.1.

De eenheidsvectoren brengen de ruimte voort (zie fig. 2.1).

Bewijs:

Laat $A = (a_1, \ldots, a_n)$ een willekeurige vector zijn. We moeten nu trachten een lineaire combinatie van de eenheidsvectoren te vinden die gelijk is aan A. Welnu, $a_1E_1 + \ldots + a_nE_n$ is zo'n lineaire combinatie, want de j^e component van deze vector is gelijk aan

$$a_1.0 + \ldots + a_j.1 + \ldots + a_n.0 = a_j;$$

dit geldt voor iedere j. Inderdaad geldt dus

$$A = a_1E_1 + \ldots + a_nE_n. \qquad \text{q.e.d.}$$

Voorbeeld 2.2.

Een onmiddellijk gevolg van stelling 2.1 is, dat iedere legering van bijv. 4 metalen gemaakt kan worden, indien men ieder der metalen in zuivere toestand beschikbaar heeft. Een zuiver metaal kan nl. worden opgevat als een legering van 4 metalen waarin 3 componenten ontbreken, zodat de bijbehorende vector de gedaante (1,0,0,0) of (0,1,0,0) enz. heeft. De legering (3,1,2,5) kan dan als volgt uit de zuivere metalen worden verkregen:

$$(3,1,2,5) = 3(1,0,0,0) + (0,1,0,0) + 2(0,0,1,0) + 5(0,0,0,1).$$

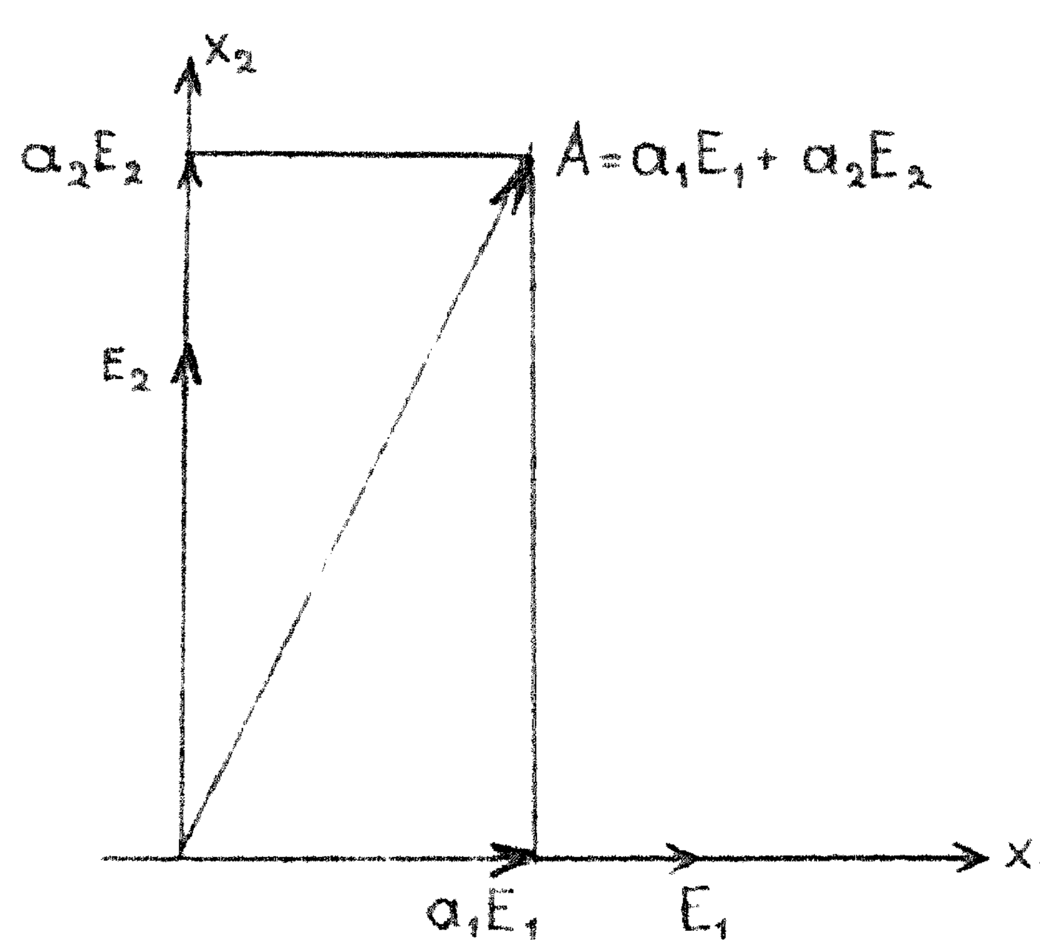

fig. 2.1

De vector A geschreven als lineaire combinatie van E_1 en E_2

Het aan het begin van deze paragraaf gegeven voorbeeld leidt tevens tot de volgende begrippen:

Definitie 2.2.

k vectoren $A_1, \ldots, A_k$ heten lineair afhankelijk, indien er reële getallen $x_1, \ldots, x_k$ bestaan, niet alle nul, zodanig dat $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k$ de nulvector is.

Definitie 2.3.

k vectoren $A_1, \ldots, A_k$ heten lineair onafhankelijk indien dergelijke x'en niet bestaan.

Definitie 2.4.

Een vector A heet lineair afhankelijk van $A_1, \ldots, A_k$ indien A te schrijven is als lineaire combinatie van $A_1, \ldots, A_k$.

In bovengenoemd voorbeeld is dus wegens $C = \frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B$ de vector C lineair afhankelijk van A en B. Ook is het stelsel A,B,C lineair afhankelijk, wegens $\frac{3}{7}A + \frac{2}{7}B - C = 0$. Tenslotte is de vector D <u>niet</u> lineair afhankelijk van A en B.

We merken omtrent definitie 2.3 nog het volgende op: als gegeven is dat $A_1, \ldots, A_k$ lineair onafhankelijk zijn, en er is ook gegeven dat $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$, dan zijn noodzakelijkerwijs alle **x**'en gelijk aan 0.

<u>Stelling 2.2</u>.

De eenheidsvectoren zijn lineair onafhankelijk.

<u>Bewijs</u>:

Stel dat de eenheidsvectoren lineair afhankelijk waren. Dan zouden er reële getallen $x_1, \ldots, x_n$, niet alle 0, bestaan, zodanig dat $x_1E_1 + \ldots + x_nE_n = 0$ (de nulvector). De j^e component van de vector $x_1E_1 + \ldots + x_nE_n$ is dus voor iedere j gelijk aan 0. Anderzijds is deze j^e component gelijk aan

$$x_1.0 + \ldots + x_j.1 + \ldots + x_n.0 = x_j .$$

We zien dus dat $x_j = 0$ voor iedere j, hetgeen in tegenspraak is met de veronderstelling. De eenheidsvectoren zijn dus lineair onafhankelijk.

3. <u>Het begrip basis</u>

<u>Definitie 3.1</u>.

Een basis is een stelsel van lineair onafhankelijke vectoren dat de ruimte voortbrengt.

Uit de stellingen 2.1 en 2.2 volgt dus dat de eenheidsvectoren een basis vormen, en de vraag ligt voor de hand of er nog andere bases bestaan. De volgende stelling geeft een gedeeltelijk antwoord op deze vraag.

<u>Stelling 3.1</u>.

Ieder stelsel van n lineair onafhankelijke n-dimensionale vectoren is een basis.

Voorbeeld 3.1.

Beschouw de tweedimensionale vectoren (2,1) en (1,3), en stel dat voor zekere x en y zou gelden

$$x(2,1) + y(1,3) = 0 \text{ (de nulvector) .}$$

Hieruit volgt voor de componenten

$$2x + y = 0$$

$$x + 3y = 0.$$

Indien we x en y uit dit stelsel oplossen, vinden we als enige oplossing $x=0$, $y=0$.
De vectoren (2,1) en (1,3) zijn dus lineair onafhankelijk, zodat ze volgens stelling 3.1 een basis vormen. Iedere tweedimensionale vector kan dus worden geschreven als lineaire combinatie van de vectoren (2,1) en (1,3).

Voorbeeld 3.2.

Laten we dit eens toepassen op legeringen. Stel iemand heeft twee legeringen tot zijn beschikking: 3 kg van de ene bevat 2 kg koper en 1 kg nikkel, 4 kg van de andere bevat 1 kg koper en 3 kg nikkel. Hij wil hieruit 24 kg van de legering maken die 11 kg koper en 13 kg nikkel bevat. In vectortaal luidt zijn probleem dus: zoek reële getallen x en y zodanig dat

$$x(2,1) + y(1,3) = (11,13) \ .$$

Aangezien (2,1) en (1,3) lineair onafhankelijke vectoren zijn, weten we dat zulke reële getallen bestaan. Inderdaad voldoet $x=4$, $y=3$ aan bovenstaande vectorvergelijking. Als we dus $4x3 = 12$ kg van de legering (2.1) met $3x4 = 12$ kg van de legering (1,3) versmelten, ontstaat 24 kg van de legering (11,13).
Om stelling 3.1 te kunnen bewijzen hebben we de volgende stelling nodig.

Stelling 3.2

Als $A_1,\dots,A_k$ de ruimte voortbrengen, en $B_1,\dots,B_m$ is een stelsel van lineair onafhankelijke vectoren, dan is $m \leq k$, en het is mogelijk om het stelsel $B_1,\dots,B_m$ met $k-m$ der vectoren $A_1,\dots,A_k$ aan te vullen tot een stelsel dat de ruimte voortbrengt. (De "Austauschsatz" van Steinitz).

Bewijs:

Voor $m=0$ is de stelling triviaal. We zullen nu, uitgaande van de veronderstelling dat de stelling juist is voor $(m-1)$ vectoren B, bewijzen dat hij ook geldt voor m vectoren B (principe van de volledige inductie).

Laat dus $A_1,\ldots,A_k$ een stelsel zijn dat de ruimte voortbrengt, en laten de vectoren $B_1,\ldots,B_{m-1}$ lineair onafhankelijk zijn. We weten dan dat $m-1 \leqslant k$, en ook dat het mogelijk is om het stelsel $B_1,\ldots,B_{m-1}$ met $k-(m-1)$ der vectoren $A_1,\ldots,A_k$ aan te vullen tot een nieuw stelsel dat de ruimte voortbrengt. We kunnen wel aannemen dat deze $k-m+1$ aanvullende vectoren $A_m,\ldots,A_k$ zijn.

$B_1,\ldots,B_{m-1}, A_m,\ldots,A_k$ brengen dus de ruimte voort, d.w.z. iedere vector A is te schrijven als

$$A = y_1B_1 + \ldots + y_{m-1}B_{m-1} + y_mA_m + \ldots + y_kA_k \qquad (3.1)$$

In het bijzonder is het mogelijk een dergelijke betrekking te vinden voor de vector B_m:

$$B_m = x_1B_1 + \ldots + x_{m-1}B_{m-1} + x_mA_m + \ldots + x_kA_k \, . \qquad (3.2)$$

Hierin zijn niet alle x'en vanaf x_m gelijk aan 0. Dit zou immers betekenen dat de vectoren $B_1,\ldots,B_m$ lineair afhankelijk zijn, wat in strijd is met het gegeven.
We kunnen dus zonder beperking van de algemeenheid aannemen dat $x_m \neq 0$ is. Een eenvoudig gevolg hiervan is dat $m-1 < k$, dus dat $m \leqslant k$. Verder heeft het niet-nul zijn van x_m tot gevolg dat we A_m uit (3.2) kunnen oplossen:

$$A_m = z_1B_1 + \ldots + z_mB_m + z_{m+1}A_{m+1} + \ldots + z_kA_k \, . \qquad (3.3)$$

Als we nu (3.3) sibstitueren in (3.1), hebben we A uitgedrukt in $B_1,\ldots,B_m, A_{m+1},\ldots,A_k$, waarmee de stelling 3.2 bewezen is, omdat A een willekeurige vector uit de ruimte was.

Bewijs van stelling 3.1.

We moeten aantonen dat ieder stelsel $B_1,\ldots,B_n$ van lineair onafhankelijke vectoren een basis is. Aangezien de lineaire onafhankelijkheid al gegeven is kunnen we volstaan met te bewijzen dat $B_1,\ldots,B_n$ de ruimte voortbrengen.

Neem in de stelling 3.2 nu m=k=n en $A_i=E_i$ voor $i=1,\ldots,n$. Inderdaad geldt dat $B_1,\ldots,B_n$ lineair onafhankelijk zijn en dat $E_1,\ldots,E_n$ de ruimte voortbrengen (stelling 2.1), dus we kunnen de stelling 3.2 toepassen:
$n \leqslant n$, en het is mogelijk om het stelsel $B_1,\ldots,B_n$ met $n-n=0$ der vectoren E_1 aan te vullen tot een stelsel dat de ruimte voortbrengt.
Hiermee is stelling 3.1 bewezen.

We zien dus dat niet alleen het stelsel der (lineair onafhankelijke) eenheidsvectoren, maar zelfs ieder stelsel van n lineair onafhankelijke vectoren een basis is. De volgende stelling leert ons dat hiermede tevens <u>alle</u> bases gegeven zijn.

<u>Stelling 3.3</u>.

Als het stelsel $A_1,\ldots,A_k$ een basis is, geldt $k=n$.

<u>Bewijs</u>:

Laat $B_1,\ldots,B_n$ een stelsel van lineair onafhankelijke vectoren zijn, dus een basis. $A_1,\ldots,A_k$ brengen de ruimte voort, dus volgens de stelling 3.2 geldt $n \leqslant k$. Anderzijds brengen $B_1,\ldots,B_n$ de ruimte voort, terwijl $A_1,\ldots,A_k$ lineair onafhankelijk zijn, dus $n \geqslant k$, en dus $n=k$.

<u>Samenvatting</u>.

Ieder stelsel van n lineair onafhankelijke vectoren is een basis en er zijn geen andere. In het bijzonder vormen de eenheidsvectoren een basis.

4. <u>Een tweetal stellingen</u>

<u>Stelling 4.1</u>.

Als $A_1,\ldots,A_n$ een basis vormen en A is een willekeurige vector, dan bestaan er eenduidig bepaalde reële getallen $x_1,\ldots,x_n$ zodanig dat

$$A = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \tag{4.1}$$

<u>Bewijs</u>:

Dat dergelijke x'en bestaan weten we al; we moeten nog bewijzen dat ze op slechts één manier kunnen worden gekozen.

Stel dus dat A, behalve volgens (4.1) "ontbonden" kan worden op een andere manier:

$$A = y_1A_1 + \dots + y_nA_n \quad . \tag{4.2}$$

Uit (4.1) en (4.2) volgt dan

$$(x_1-y_1)A_1 + \dots + (x_n-y_n)A_n = 0 \text{ (de nulvector)}$$

en aangezien $A_1,\dots,A_n$ lineair onafhankelijk zijn volgt hieruit dat $x_1-y_1=0,\dots,x_n-y_n=0$, waarmee de eenduidigheid bewezen is.

Toepassingen.

In voorbeeld 2.2 hebben wij gezien hoe een willekeurige legering kan worden gemaakt indien de metalen die erin voorkomen alle in zuivere toestand beschikbaar zijn.

Stelling 4.1 leert ons nu dat de daar aangegeven methode de enige is.

Iets minder triviaal is de toepassing op het maken van een legering uit andere legeringen. In voorbeeld 3.2 hebben we gezien dat de legering (11,13) kan worden samengesteld uit de legeringen (2,1) en (1,3).

Maar, neem nu eens aan dat we de legering (1,8) zouden willen maken. De corresponderende vectorvergelijking luidt:

$x(2,1) + y(1,3) = (1,8)$.

Uit stelling 4.1 volgt dat deze vergelijking precies één oplossing heeft. Zodra we dus, door proberen of hoe dan ook, gevonden hebben dat $x=-1$, $y=3$ een oplossing van deze vergelijking is, kunnen we ertoe besluiten dat het niet mogelijk is om de legering (1,8) uit (2,1) en (1,3) te verkrijgen.

Stelling 4.2.

(n+1) n-dimensionale vectoren $A_1,\dots,A_{n+1}$ zijn altijd lineair afhankelijk.

Bewijs

Beschouw de vectoren $A_1,\dots,A_n$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

a) $A_1,\ldots,A_n$ zijn lineair afhankelijk. In dit geval bestaat er een betrekking $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = 0$ waarin niet alle x'en gelijk aan nul zijn.
Maar dan geldt ook $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n + 0.A_{n+1} = 0$. Hierin is weliswaar de coëfficiënt van A_{n+1} gelijk aan 0, maar niet <u>alle</u> coëfficiënten zijn nul, dus $A_1,\ldots,A_{n+1}$ zijn lineair afhankelijk.

b) $A_1,\ldots,A_n$ zijn lineair onafhankelijk. Dan vormen ze een basis, zodat voor zekere y_i geldt

$$A_{n+1} = y_1A_1 + \ldots + y_nA_n \ .$$

Dus ook in dit geval zijn $A_1,\ldots,A_{n+1}$ lineair afhankelijk, q.e.d.

<u>Toepassing</u>

In 2.1 hebben we laten zien dat de vectoren (3,1), (2,2) en (5,4) de ruimte voortbrengen. Uit stelling 4.2 blijkt echter dat deze vectoren lineair afhankelijk zijn. Inderdaad geldt

$$\tfrac{1}{2}(3,1) + \tfrac{7}{4}(2,2) - (5,4) = 0 \ .$$

We kunnen de vector (3,1) hieruit oplossen:

$$(3,1) = -\tfrac{7}{2}.(2,2) + 2.(5,4) \qquad (4.3)$$

en deze betrekking gebruiken om de vectoren (5,0), (5,3) en (0,-2), die we in (3,1), (2,2) en (5,4) hadden uitgedrukt, te schrijven als lineaire combinatie van (2,2) en (5,4) alleen.

We hadden bijvoorbeeld gevonden

$$(5,0) = 2(3,1) - 3(2,2) + (5,4) \ . \qquad (4.4)$$

Substitutie van (4.3) in (4.4) levert

$$(5,0) = 2\{-\tfrac{7}{2}(2,2) + 2(5,4)\} - 3(2,2) + (5,4) =$$
$$= -10(2,2) + 5(5,4).$$

5. Matrices

Onder een mxn - matrix verstaan we een rechthoekig schema van reële getallen met m rijen en n kolommen; dus

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) .$$

Als m=n spreken we van een vierkante matrix, of van een nxn - matrix.

Voorbeeld 5.1

De omzetten (in guldens) van een bepaald bedrijf van verschillende goederen in verschillende jaren kunnen in een matrix worden geplaatst; iedere rij correspondeert met een bepaald artikel en iedere kolom met een bepaald jaar.

$$\begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1956 & 1957 & 1958 & 1959 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2350 & 2410 & 2676 & 2390 \\ 5264 & 5800 & 7140 & 7220 \\ 4021 & 3547 & 2827 & 2184 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voorbeeld 5.2

De transportkosten per ton van een bepaalde grondstof kunnen in een matrix worden geplaatst. M_1, M_2, M_3 zijn bijv. mijnen; F_1, F_2, F_3 zijn fabrieken.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.02 & 3.54 & 1.76 \\ 2.43 & 4.10 & 2.41 \\ 2.75 & 6.03 & 0.00 \end{pmatrix} \end{array}$$

Uit deze matrix blijkt o.a. dat F_2 zeer ongunstig gelegen is, terwijl de grondstoffen uit M_3 ter plaatse kunnen worden verwerkt.

Voorbeeld 5.3

Als twee personen A en B een spel spelen waarbij ieder één zet mag doen, kunnen we de winst van A voor alle mogelijke spelverlopen aangeven door een matrix.

Laten wij aannemen dat "een zet doen" voor A betekent dat hij mag kiezen uit de mogelijkheden a_1, a_2, a_3 en a_4 en voor B dat hij mag kiezen uit de alternatieven b_1 t/m b_5. Nadat beiden gekozen hebben, krijgt A een bepaald bedrag, afhankelijk van de gedane keuzen. Deze bedragen zouden aangegeven kunnen worden door:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bij het spelverloop a_2, b_2 (d.w.z. als A de zet a_2 speelt, en B de zet b_2) is de winst van A dus gelijk aan 3. Is het spelverloop a_2, b_3, dan is de winst voor A gelijk aan -3, d.w.z. hij verliest 3.

Voorbeeld 5.4

In de economie maakt men gebruik van z.g. aanvoer-afvoer-matrices (input output tabels; transactions matrices). Men gebruikt ze o.a. om inzicht te krijgen hoeveel goederen ieder jaar door verschillende bedrijfstakken aan elkaar geleverd worden.

In ons voorbeeld correspondeert iedere rij en iedere kolom met een bepaalde industrie. Is bijv. het 4e element van de eerste rij 19, dan is de afvoer van industrie 1 naar industrie 4 gelijk aan 19 van de beschouwde eenheden. Voor een vijftal industrieën had deze matrix in 1947 in de Verenigde Staten de volgende vorm[1]:

----

1) Ontleend aan R.G.D. Allen, Mathematical Economics, p.347.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \delta & 3 & 19 & 27 \\ 3 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 30 & 5 & 17 & 0 & 12 \\ 3 & \delta & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

δ stelt hierin een getal tussen 0 en $\frac{1}{2}$ voor; de eenheid is $ 100.000.000.-. De cijfers langs de matrix stellen de volgende takken van industrie voor:

1. landbouw, voedsel
2. kolen, energie
3. bouwmaterialen, hout
4. chemicaliën, rubber
5. textiel, kleding.

Een symmetrische matrix is een vierkante matrix met de eigenschap $a_{ij}=a_{ji}$ voor alle i en j.

Voorbeeld 5.5

Een afstandstabel is gewoonlijk een symmetrische matrix:

	A	B	C
A	0	19	27
B	19	0	23
C	27	23	0

De omstandigheid dat op de diagonaal van links-boven naar rechts-onder[1] uitsluitend nullen staan is voor een symmetrische matrix niet karakteristiek; voor een afstandstabel natuurlijk wel.

Het is direct duidelijk dat een dergelijke afstandstabel veel overtollige informatie bevat: als de afstand van A naar B 19 km is, is de afstand van B naar A uiteraard ook 19 km. Men maakt daarom tegenwoordig wel afstandstabellen waarin de getallen rechts van de hoofddiagonaal wegkilometers aangeven, zodat de linkerhelft beschikbaar komt voor spoorwegkilometers. Een dergelijke matrix is in het algemeen niet meer symmetrisch.

1) Deze diagonaal heet de hoofddiagonaal van de matrix.

Voorbeeld 5.6

In hoofdstuk III, paragraaf 4, hebben we gezien dat aan twee stochastische grootheden $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ een reëel getal kan worden toegevoegd, covariantie genaamd, door te definiëren (vgl. (4.37) van hoofdstuk III):

$$\mathrm{cov}(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = \mathcal{E}(\underline{x}_1 - \mathcal{E}\underline{x}_1)(\underline{x}_2 - \mathcal{E}\underline{x}_2) \tag{5.1}$$

Heeft men nu, in plaats van twee, n stochastische grootheden $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ dan kan men van ieder paar $\underline{x}_i,\underline{x}_j$ de covariantie berekenen. Stellen we nu

$$\mathrm{cov}(\underline{x}_i,\underline{x}_j) = a_{ij}$$

dan kunnen we de grootheden a_{ij} in een vierkante matrix plaatsen:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Men noemt deze matrix de <u>covariantiematrix</u> van de stochastische grootheden $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$; op de hoofddiagonaal staan de varianties van de grootheden $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$.

Uit formule (5.1) volgt onmiddellijk $\mathrm{cov}(\underline{x}_1,\underline{x}_2) = \mathrm{cov}(\underline{x}_2,\underline{x}_1)$, dus $a_{12}=a_{21}$. Men ziet gemakkelijk in dat algemeen geldt

$$a_{ij} = a_{ji} \,.$$

Een covariantiematrix is dus altijd symmetrisch.

Men zou een symmetrische matrix ook kunnen karakteriseren door de eigenschap dat hij niet verandert als men hem om de hoofddiagonaal omklapt. Bij omklappen komt nl. het element a_{ij} op de plaats van het element a_{ji}, en deze elementen zijn in een symmetrische matrix volgens definitie aan elkaar gelijk. Indien we echter een willekeurige matrix $\mathcal{A}$ om de hoofddiagonaal omklappen[1], ontstaat in het algemeen een andere matrix. Deze noemen we de <u>gespiegelde</u> van $\mathcal{A}$ en we gebruiken hiervoor de notatie $\mathcal{A}'$.

----

1) Strikt genomen kan men een willekeurige matrix niet om zijn hoofddiagonaal omklappen, omdat alleen een vierkante matrix een hoofddiagonaal heeft. De formule $a'_{ij}=a_{ji}$ is echter een voor alle gevallen passende definitie.

Voor een symmetrische matrix geldt dus $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, voor een niet-symmetrische matrix is dit niet meer het geval, maar wel geldt, als wij de elementen van $\mathcal{A}$ weer aangeven met a_{ij} en die van $\mathcal{A}'$ met a'_{ij}

$$a'_{ij} = a_{ji} \qquad (5.2)$$

Evenals met getallen en vectoren, kan men ook met matrices allerlei rekenkundige bewerkingen uitvoeren.

De <u>som</u> $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ van twee matrices $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ is alleen gedefinieerd voor het geval waarin beide matrices evenveel rijen en evenveel kolommen hebben, en is dan gelijk aan de matrix $\mathcal{C}$ waarvan de elementen zijn $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

<u>Voorbeeld 5.7</u>

Zou men voor een aantal magazijnen van één firma de omzetmatrices (zie voorbeeld 5.1) kennen, dan zijn de elementen van de sommatrix de omzetten per jaar per artikel voor alle magazijnen tezamen. Stel bijvoorbeeld dat

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} '56 & '57 & '58 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 24 & 27 \\ 53 & 58 & 71 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \end{array}$$

de omzetmatrix voor het eerste magazijn is en

$$\mathcal{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} '56 & '57 & '58 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 12 & 28 \\ 4 & 37 & 68 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \end{array}$$

die voor het tweede magazijn. Volgens de zojuist gegeven definitie geldt dan

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 24+3 & 24+12 & 27+28 \\ 53+4 & 58+37 & 71+68 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} '56 & '57 & '58 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 27 & 36 & 55 \\ 57 & 95 & 139 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \end{array},$$

waarbij $\mathcal{C}$ de gezamenlijke omzetmatrix is.

Dit betekent o.a. dat in 1956 van het artikel G_2 in beide magazijnen tezamen 57 eenheden werden omgezet.

Voorbeeld 5.8

De som van een aantal aanvoer-afvoermatrices die correspon-deren met een reeks van opeenvolgende jaren, geeft de aan- en afvoer voor een bepaald tijdvak

Het verschil $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ van de matrices $\mathcal{A}=(a_{ij})$ en $\mathcal{B}=(b_{ij})$ is eveneens alleen gedefinieerd als deze matrices evenveel rijen en evenveel kolommen hebben, en is dan gelijk aan de matrix $\mathcal{C}=(c_{ij})$, waarin $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Evenals vectoren kunnen ook matrices met een reëel getal worden vermenigvuldigd. Dit doet men door alle elementen van de matrix met dat reële getal te vermenigvuldigen.

Noemen we $\alpha\mathcal{A}$ even $\mathcal{B}$, dan geldt dus voor de elementen b_{ij} van $\mathcal{B}$:

$$b_{ij}=\alpha a_{ij}$$

Het produkt $\mathcal{A}\mathcal{B}$ van de mxn-matrix $\mathcal{A}$ en de pxq-matrix $\mathcal{B}$ is alleen gedefinieerd als n=p, en is dan gelijk aan de mxq-matrix $\mathcal{C}$, waarin

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\,. \qquad (5.3)$$

Voorbeeld 5.9

Een firma heeft in de jaren 1951-1954 twee typen machines verkocht aan een drietal landen; de machines kunnen slechts in combinatie gebruikt worden. De matrix $\mathcal{A}$ geeft de prijzen voor ieder der machines in de verschillende jaren.

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}(1951)&(1952)&(1953)&(1954)\end{array} \\ \begin{pmatrix} 2500 & 2600 & 2650 & 2800 \\ 3480 & 3480 & 3300 & 3350\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \text{type 1} \\ \text{type 2}\end{array}$$

In de beschouwde periode werden aan Peru, India en Polen de volgende aantallen machines verkocht:

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43}\end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{Peru}&\text{India}&\text{Polen}\end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ 1951 \\ 1952 \\ 1953 \\ 1954\end{array}$$

$\mathcal{A}$ is een 2x4-matrix, $\mathcal{B}$ is een 4x3-matrix. Het produkt $\mathcal{AB}$ is dus gedefinieerd: de uitkomst is een 2x3-matrix, die wij weer met $\mathcal{C}$ aangeven.

Volgens (5.3) geldt nu

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} =$$

$$= 2500.2 + 2600.4 + 2650.1 + 2800.0 =$$

$$= 5000 + 10400 + 2650 = 18050.$$

$$c_{23} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}b_{j3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} + a_{24}b_{43} =$$

$$= 3480.0 + 3480.2 + 3300.1 + 3350.1 =$$

$$= 0 + 6960 + 3300 + 3350 = 13610.$$

Op deze wijze kan men alle elementen van de matrix $\mathcal{C}$ berekenen. Het resultaat is

$$\begin{array}{cccc} & \text{Peru} & \text{India} & \text{Polen} & \\ \mathcal{C} = & \left(\begin{array}{c} 18050 \\ 24180 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 24000 \\ 30440 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 10650 \\ 13610 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{type 1} \\ \text{type 2} \end{array} \end{array}$$

We lezen hieruit bijv. af dat India in de jaren '51-'54 aan machines van het type 1 een bedrag 24000 heeft besteed.

Een eenheidsmatrix is een vierkante matrix waarvan de elementen op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1, terwijl alle overige elementen nul zijn. In formules:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \quad \text{als} \quad i \neq j \\ a_{ii} &= 1 \quad \text{voor} \quad i = 1,\dots,n \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Wij zullen een eenheidsmatrix steeds aangeven met de letter $\mathcal{J}$, en de elementen met δ_{ij}.

De eenheidsmatrix speelt in de matrixrekening eenzelfde rol als het getal 1 bij het vermenigvuldigen van reële getallen. Er geldt nl. de volgende stelling:

Stelling 5.1

Voor het produkt van een willekeurige matrix $\mathcal{A}$ en een eenheidsmatrix geldt

$$\mathcal{A}\mathcal{J} = \mathcal{A} \tag{5.5}$$

en

$$\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{A} \tag{5.6}$$

Is $\mathcal{A}$ vierkant dan geldt

$$\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{J} = \mathcal{A} \tag{5.7}$$

Bewijs

Noem de uitkomst van $\mathcal{A}\mathcal{J}$ even $\mathcal{C}$, met elementen c_{ik}, dan geldt volgens (5.3)

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = \sum_{j\neq k} a_{ij}\delta_{jk} + a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$$

want $\delta_{jk}=0$ als $j\neq k$.

Dus $\mathcal{A}\mathcal{J} = \mathcal{C} = \mathcal{A}$.

Op dezelfde manier bewijst men $\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Indien $\mathcal{A}$ niet vierkant is kunnen we deze beide betrekkingen bezwaarlijk samenvatten. Want, als $\mathcal{A}$ een mxn-matrix is, dan is de eenheidsmatrix in (5.5) een nxn-matrix, en die in (5.6) een nxm-matrix.

Is $\mathcal{A}$ echter vierkant, d.w.z. m=n, dan zijn deze beide eenheidsmatrices toch dezelfde, zodat dan (5.7) geldt.

Als $\mathcal{A}$ een gegeven vierkante matrix is, kan men in sommige gevallen (d.w.z. voor sommige $\mathcal{A}$) een matrix $\mathcal{B}$ vinden, zodanig dat $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{J}$. Matrices $\mathcal{A}$ waarbij zo'n $\mathcal{B}$ bestaat noemt men niet-singulier. $\mathcal{B}$ heet de [1] inverse van $\mathcal{A}$, en wordt genoteerd als $\mathcal{A}^{-1}$. Er geldt dus $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{J}$. We zullen er hier niet op ingaan hoe men onderzoekt of $\mathcal{A}$ een inverse heeft, en zo ja, hoe men deze dan bepaalt. We volstaan met het geven van een eenvoudig voorbeeld.

----

1) Men kan bewijzen dat $\mathcal{B}$, indien hij bestaat, eenduidig bepaald is.

Voorbeeld 5.10

Onderzoek of de matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ niet-singulier is. Deze opgave is aequivalent met de volgende: onderzoek of er reële getallen p, q, r en s bestaan, zo, dat voldaan is aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} 1.p + 0.r &= 1, \text{ dus } p=1 \\ 1.q + 0.s &= 0, \text{ dus } q=0 \\ -1.p + 2.r &= 0, \text{ dus } r=\tfrac{1}{2} \\ -1.q + 2.s &= 1, \text{ dus } s=\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dus $\mathcal{A}$ is niet-singulier, en

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De betrekking (5.7) geldt voor iedere vierkante matrix $\mathcal{A}$, dus ook voor $\mathcal{A} = \mathcal{I}$. Substitueren we dit in (5.7), dan staat er

$$\mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}$$

Volgens de definitie van inverse matrix betekent dit dat de inverse van $\mathcal{I}$ gelijk aan $\mathcal{I}$ is.

Ieder weet dat het produkt van reële getallen commutatief is, d.w.z. in een produkt kan men de volgorde van de factoren veranderen zonder dat de uitkomst verandert: xy = yx. Het matrixprodukt is echter niet commutatief, dus niet altijd geldt $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Als $\mathcal{A}$ en/of $\mathcal{B}$ niet vierkant is, dan kan het zelfs gebeuren dat het produkt $\mathcal{A}\mathcal{B}$ wel gedefinieerd is maar het produkt $\mathcal{B}\mathcal{A}$ niet. Doch ook als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ beide mxm matrices zijn, behoeft $\mathcal{A}\mathcal{B}$ niet gelijk aan $\mathcal{B}\mathcal{A}$ te zijn. Vergelijk bijvoorbeeld de onderstaande matrices

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

In sommige gevallen mogen de factoren wel worden verwisseld: $\mathcal{A}\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{A}$ wanneer $\mathcal{A}$ een vierkante matrix is, en ook, zoals men kan bewijzen, $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$.[1)]

Voorbeeld 5.11

Bepaal $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}$ als

----

1) In verband hiermee maakt het geen verschil of men zegt dat $\mathcal{A}^{-1}$ de inverse van $\mathcal{A}$ is, dan wel dat $\mathcal{A}$ de inverse van $\mathcal{A}^{-1}$ is. Dit rechtvaardigt de uitdrukking: $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^{-1}$ zijn elkaars inverse.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ is een 2x2-matrix, $\mathcal{B}$ een 2x3-matrix. Het produkt $\mathcal{B}\mathcal{A}$ is dus niet gedefinieerd, terwijl

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3-1.1 & 2.0+1.5 & 2.2+1.0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Stelling 5.2</u>

Voor ieder tweetal matrices $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, waarvoor het produkt $\mathcal{A}\mathcal{B}$ is gedefinieerd, geldt

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}' \tag{5.8}$$

<u>Bewijs</u>

Stel $\mathcal{A}$ is een pxq-matrix. Omdat het produkt $\mathcal{A}\mathcal{B}$ is gedefinieerd, is $\mathcal{B}$ dus een qxr-matrix. Hieruit volgt dat $\mathcal{B}'$ een rxq-matrix is, en $\mathcal{A}'$ een qxp-matrix. Het produkt $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$ is dus gedefinieerd.

Noemen we $\mathcal{A}\mathcal{B}$ even $\mathcal{C}$, dan geldt

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} . \tag{5.9}$$

Een element van de gespiegelde matrix $\mathcal{C}'$ vinden we door de indices te verwisselen (vgl. (5.2))

$$c'_{ik} = c_{ki}$$

Uit (5.9) volgt dus

$$c'_{ik} = \sum_j a_{kj} b_{ji} .$$

In het rechterlid kunnen we nu a_{kj} resp. b_{ji} vervangen door a'_{jk} resp. b'_{ij}:

$$c'_{ik} = \sum_j a'_{jk}b'_{ij} = \sum_j b'_{ij}a'_{jk} .$$

Noemen we $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$ even $\mathcal{D}$, dan geldt

$$d_{ik} = \sum_j b'_{ij}a'_{jk}$$

zodat $c'_{ik} = d_{ik}$, ofwel $(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$, q.e.d.

Een andere belangrijke eigenschap van de matrixvermenigvuldiging is de associativiteit, d.w.z. voor ieder drietal matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, waarvoor de produkten $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{C}$ gedefinieerd zijn, geldt

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}). \tag{5.10}$$

Voor de elementen van de matrices betekent dit

$$\sum_k \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk}c_{kl}\right) .$$

Het bewijs van deze eigenschap is zeer eenvoudig; we zullen het hier niet geven.

Stelling 5.3

Als de vectoren

$$B_1 = (b_{11}, \ldots, b_{n1})$$
$$B_2 = (b_{12}, \ldots, b_{n2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_n = (b_{1n}, \ldots, b_{nn})$$

een basis vormen, dan zijn de matrices

$$\mathcal{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ en } \mathcal{B}' \text{ niet-singulier.}$$

Bewijs

Iedere vector A is te schrijven als lineaire combinatie van de basisvectoren $B_1, \ldots, B_n$, dus voor iedere vector A kunnen we reële getallen $x_1, \ldots, x_n$ bepalen, zodanig dat

$$A = x_1B_1 + \ldots + x_nB_n \ . \tag{5.11}$$

Voor de j^e component a_j van A geldt dus

$$a_j = x_1b_{1j} + \ldots + x_nb_{nj} \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{5.12}$$

Neem nu voor A de k^e eenheidsvector E_k met componenten e_{kj}. (e_{kj} is dus 0 als $k \neq j$, maar gelijk aan 1 als $j=k$) Ook dan kunnen we getallen $x_1, \ldots, x_n$ vinden die echter van k zullen afhangen. We noemen ze daarom $x_{k1}, \ldots, x_{kn}$.
In plaats van (5.12) kunnen we nu zeggen:

$$e_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}b_{ij} \text{ voor } \begin{matrix} j = 1,\ldots,n \\ k = 1,\ldots,n \end{matrix} \tag{5.13}$$

In een enigszins gewijzigde vorm ziet de definitieformule (5.3) van het matrixprodukt er als volgt uit

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij} \ .$$

De grote overeenkomst van deze formule met (5.13) doet ons inzien dat (5.13) aequivalent is met

$$\mathcal{I} = \mathcal{X}\mathcal{B} \tag{5.14}$$

immers $e_{kj} = \delta_{kj}$ voor alle k en j.

De matrix $\mathcal{X}$ is dus de inverse van $\mathcal{B}$, dus $\mathcal{B}$ is niet-singulier.

Dat $\mathcal{B}'$ niet-singulier is, zou men op een dergelijke manier kunnen bewijzen. We zullen het hier anders doen.

Uit (5.14) en (5.8) volgt

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}' = (\mathcal{X}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{X}'$$

dus $\mathcal{B}'$ heeft een inverse. q.e.d.

6. Produkt van vector en matrix

Een matrix is een rechthoekig schema van reële getallen, hadden we gedefinieerd. Nemen we nu eens als bijzondere rechthoek een rechthoek van 1xn. We hebben dan in feite niets anders dan een rij van reële getallen, ofwel een vector. Een n-dimensionale vector kan dus worden opgevat als een 1xn-matrix. Een andere bijzondere rechthoek is een rechthoek van mx1. Ook dan hebben we weer een rij getallen, dus een vector:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Ter onderscheiding van de beide soorten vectoren spreekt men wel van rijvectoren en kolomvectoren.[1)]

Laat $X = (x_1, \dots, x_n)$ nu een n-dimensionale kolomvector zijn, dus een nx1-matrix. Dan is het produkt $\mathcal{A}.X$ gedefinieerd voor iedere mxn-matrix $\mathcal{A}$, en de uitkomst is een mx1-matrix, ofwel een m-dimensionale vector

$$Y = (y_1, \dots, y_m) = \mathcal{A}.X. \qquad (6.1)$$

Voorbeeld 6.1

Een firma levert aan n groothandelaren die in n verschillende plaatsen in Nederland gevestigd zijn. Deze firma heeft de bedoeling een nieuwe fabriek te bouwen en wil hiervoor uit m plaatsen diegene kiezen, waarvoor de totale vervoerskosten per jaar minimaal zijn. Laat a_{ij} de vervoerskosten per ton zijn tussen de plaatsen P_i en Q_j, en laat b_i de hoeveelheid zijn die jaarlijks door de groothandelaar uit P_i wordt gekocht.

----

1) Om technische redenen worden kolomvectoren soms als rijvectoren gedrukt.

Zou de firma nu haar nieuwe fabriek in Q_j bouwen, dan bedragen de totale vervoerskosten per jaar

$$c_j = a_{j1}b_1 + \dots + a_{jn}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_k \quad (j = 1,\dots,m) .$$

Vatten we de getallen c_j op als de componenten van een kolomvector, **dan geldt** voor deze vector C

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De vector C kan dus worden opgevat als het produkt van de mxn-matrix $\mathcal{A} = (a_{ij})$ en de nx1-vector $B = (b_j)$. Als dus c_k het kleinste element van de produktvector C is, dan is Q_k de optimale vestigingsplaats.

Stel bijv. $m=3$, $n=4$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$,

dan geldt $C = \mathcal{A}B = (97, 134, 124)$, zodat P_1 de voorkeur verdient.

De vector B verandert in veel gevallen van jaar tot jaar, en aangezien de afzet in de toekomst ons het meest interesseert moeten we B <u>schatten</u>.

Een schatting is altijd aan fouten onderhevig: het is heel goed mogelijk dat $B^x = (10,10,8,8)$ een betere schatting is dan $B = (12,8,7,9)$. We moeten nu nagaan of een foutieve schatting van B grote invloed heeft op de waarde van j waarvoor c_j minimaal is. Dit doen we door kleine veranderingen in B aan te brengen. Zo is $\mathcal{A}B^x = (102,126,122)$, dus ook bij deze schatting van de omzet-vector is P_1 de beste plaats voor de nieuwe fabriek. Op deze wijze te werk gaande, kan men onderzoeken, hoe groot de afwijkingen van de gemaakte schattingen moeten zijn, alvorens een andere vestigingsplaats de optimale wordt.

Als $\mathcal{A}$ een niet-singuliere vierkante matrix is, bestaat $\mathcal{A}^{-1}$, zodat uit formule (6.1) volgt:

$$\mathcal{A}^{-1}Y = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}X) = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})X = \mathcal{I}X = X.$$

We hebben dus a.h.w. X opgelost uit de vergelijking (6.1).

<u>Voorbeeld 6.2</u>

Zoek een vector X, zo, dat $\mathcal{A}X = Y$, waarin

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De componenten van X noemen we x_1 en x_2. $\mathcal{A}X=Y$ betekent dan, uitgeschreven

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 2 \\ 7x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

We zouden x_1 en x_2 hieruit kunnen oplossen, maar we geven er de voorkeur aan om de vector X te bepalen met behulp van $\mathcal{A}^{-1}$, zoals hierboven voor het algemene geval is gedaan. $\mathcal{A}^{-1}$ blijkt gelijk te zijn aan $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$[1].

We vinden nu zonder moeite

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Het voordeel van deze methode boven het direct oplossen van het stelsel (6.2) is dat men, zodra men $\mathcal{A}^{-1}$ eenmaal heeft bepaald, bij iedere Y direct de gezochte X kan vinden met behulp van de formule $X = \mathcal{A}^{-1}Y$.

----

1) Inderdaad geldt $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$