STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk IX

# Waarschijnlijkheidsrekening

door

G. de Leve en F. Göbel

augustus 1960

## 1. Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken hebben wij reeds menigmaal kennisgemaakt met de verschillende aspecten van de whr.[1] Wij noemen hier slechts blz. 21 e.v. van hoofdstuk I, waar de axioma's van de whr en de begrippen eventualiteit en kansveld werden besproken. In dit hoofdstuk zullen wij enkele nieuwe begrippen invoeren, die nauw bij de vorige aansluiten.

De whr is een abstracte wiskundige theorie, ondanks het gebruik van niet-wiskundige termen, zoals "experiment". Ook zonder haar toepassingsmogelijkheden blijft de whr als onderdeel van de zg. maat- en integratietheorie een interessant arbeidsterrein. Maar het zijn uiteraard niet die facetten van de whr die in dit hoofdstuk zullen worden toegelicht.

## 2. Systeem, toestand, experiment, proces, keten

Ter illustratie van bepaalde aspecten van de whr wordt vaak gebruik gemaakt van dobbelstenen, speelkaarten en munten. Deze gewoonte geeft de lezer soms het gevoel dat de whr een eenvoudige zaak is. Dat dit ten onrechte is moge blijken uit het feit dat vele resultaten van de whr niet kùnnen worden geïnterpreteerd met behulp van een voorbeeld, hoe ingewikkeld ook, waarin bovengenoemde voorwerpen de hoofdrol spelen.

Wij zullen ons voortaan bedienen van het abstracte begrip systeem. Een systeem kan een dobbelsteen zijn, maar ook een voorraad bij een groot winkelbedrijf, of een rij wachtenden voor een loket. Een systeem kan in verschillende toestanden verkeren. Als het systeem een dobbelsteen is, ligt het voor de hand om zes toestanden te onderscheiden. Deze worden gekarakteriseerd door het aantal ogen op het bovenliggende zijvlak van de dobbelsteen. Men merke op dat de ruimtelijke positie van de dobbelsteen hierdoor geenszins is bepaald.

Als het systeem een rij wachtenden voor een loket is, correspondeert met ieder aantal wachtenden een bepaalde toestand van het systeem.

Wij beschouwen alleen systemen waarvan de toestanden beschreven kunnen worden door één of meer kwantitatieve grootheden.

Een proces vindt plaats wanneer een systeem onafhankelijk van de waarnemer achtereenvolgens verschillende toestanden aan-

---

1) whr = waarschijnlijkheidsrekening.

neemt. Indien de waarnemer echter de oorzaak is van de toestands-wijzigingen, zoals bij het werpen met een dobbelsteen, dan spreekt men liever van een experiment.[1]

Stel dat men iedere mogelijke toestand van het systeem kan vastleggen door n getallen, bijv. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Zo'n serie getallen noemt men een toestandsvector.

Wanneer het systeem slechts op discrete tijdstippen in een andere toestand overgaat, kunnen we het proces beschrijven met de reeks van de bijbehorende toestandsvectoren. Een dergelijke reeks noemen we een keten. Zo is de reeks van het aantal ogen op de achtereenvolgens bovenliggende zijden bij het experiment "werpen met een dobbelsteen" een keten. Men merke op dat in dit voorbeeld n gelijk is aan één: de toestandvector heeft slechts één component. Het is misschien nuttig er op te wijzen dat niet bij ieder proces (of experiment) een keten behoort: wanneer het systeem een meer is, en de toestand wordt beschreven door het peil, dan is het niet mogelijk een keten aan te wijzen die de "levensloop" van het systeem volledig beschrijft. De wijzigingen vinden immers niet op discrete tijdstippen plaats, maar min of meer continu.

## 3. Ketens

In deze paragraaf en de volgende beschouwen we uitsluitend processen die door een keten kunnen worden beschreven.

Stel dat het systeem in de toestand i is, dan is het mogelijk dat het systeem na het eerstvolgende experiment weer in de toestand i is. Het is echter ook mogelijk dat het systeem overgaat in een andere toestand j. We zullen de kans op dergelijke overgangen aangeven door de overgangswaarschijnlijkheid $p_{ii}$ resp. $p_{ij}$. Er geldt dus voor alle i

$$p_{ii} + \sum_{j(\neq i)} p_{ij} = 1 \qquad (3.1)$$

of ook $\sum_j p_{ij}=1$ voor alle i, waarbij j nu alle toestanden doorloopt (dus ook de toestand i).

Ter verduidelijking beschouwen we het volgende voorbeeld. Uit een doos, die 7 knikkers bevat: 4 rode, 2 zwarte en 1 witte, wordt op aselecte wijze een knikker getrokken. De doos is in dit voorbeeld

--------

1) We gebruiken de term "experiment" ook wel in de betekenis van "teweegbrenging van een toestandsverandering". Het onderscheid tussen "experiment" en "proces" is overigens niet wezenlijk voor de whr.

het systeem. We zeggen dat het systeem in de toestand 1(2,3) verkeert als de kleur van de getrokken knikker rood (zwart, wit) is. De kleur van de getrokken knikker geeft dus per definitie de toestand van het systeem aan.

Experiment A

Beschouw nu het volgende proces: we trekken een knikker, leggen deze terug, trekken opnieuw een knikker, leggen deze terug, enz. De kleur van de laatstgetrokken knikker geeft steeds de toestand van het systeem aan.

De bijbehorende toestanden vormen een keten, en we willen nu de overgangswh[1] $p_{31}$ berekenen. Dat wil dus zeggen: als de laatstgetrokken knikker wit was, hoe groot is dan de kans dat de volgende rood is? De kans is, omdat vier van de zeven knikkers rood zijn en ieder gelijke kans heeft om getrokken te worden, natuurlijk gelijk aan $\frac{4}{7}$. Doordat de getrokken knikker steeds wordt teruggelegd verandert de samenstelling van de doos niet. Bijgevolg geldt ook, dat $p_{11}$ en $p_{21}$ gelijk zijn aan $\frac{4}{7}$. Dus $p_{i1} = \frac{4}{7}$, en evenzo $p_{i2} = \frac{2}{7}$, $p_{i3} = \frac{1}{7}$ voor i=1,2,3.

Als we de trekkingen op deze wijze uitvoeren hangen de overgangswhn niet af van de uitgangstoestand. We spreken dan van een keten van onafhankelijke experimenten.

Experiment B

Wordt echter de eerstgetrokken knikker niet teruggelegd, dan hangen de overgangswhn wel af van het resultaat van de eerste trekking, zoals uit de volgende tabel blijkt:

$$\left.\begin{array}{lll} p_{11} = \frac{3}{6} & p_{12} = \frac{2}{6} & p_{13} = \frac{1}{6} \\ p_{21} = \frac{4}{6} & p_{22} = \frac{1}{6} & p_{23} = \frac{1}{6} \\ p_{31} = \frac{4}{6} & p_{32} = \frac{2}{6} & p_{33} = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

Voor het berekenen van de kansen $p_{1i}$ (i=1,2,3) bedenke men dat de doos nu bestaat uit 3 rode, 2 zwarte en 1 witte knikker. De overige kansen vindt men op analoge wijze.

--------
1) wh = waarschijnlijkheid
   whn = waarschijnlijkheden

Experiment C

Trekken we uit de doos met zeven knikkers achtereenvolgens drie knikkers zonder teruglegging, dan wordt de situatie nog iets ingewikkelder. Laat nl. $p_{(k)ij}$ de kans zijn op de overgang van toestand i bij de tweede trekking naar toestand j bij de derde trekking als het systeem bij de eerste trekking in toestand k was. Dan geldt:

$$\begin{aligned} p_{(1)32} &= \frac{2}{5} \\ p_{(2)32} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \qquad (3.3)$$

terwijl we aan $p_{(3)32}$ geen waarde kunnen toekennen, omdat $p_{33}=0$. Bij het berekenen van de kansen $p_{(k)ij}$ gaat men uit van het feit dat er na de eerste trekking nog vijf knikkers in de doos zijn.

We zien dus dat $p_{(k)ij}$ niet altijd onafhankelijk is van k. Wel volgt uit de wijze van berekenen onmiddellijk: $p_{(k)ij} = p_{(i)kj}$.

Experiment D

Weer wijzigen we ons experiment: we trekken een knikker, en daarna een tweede. Alvorens nu de derde knikker te trekken leggen we de eerste weer in de doos. Evenzo leggen we de tweede knikker terug voor de trekking van de vierde, enzovoorts. Zoals men gemakkelijk kan nagaan geldt nu

$$p_{(k)ij} = p_{ij},$$

d.w.z.: de overgangswhn hangen wel af van de uitgangstoestanden, maar niet van de daaraan voorafgaande toestand(en) van het systeem. Aangezien er bij iedere trekking steeds zes knikkers in de doos zijn, kunnen we hiermee een willekeurig lange keten construeren, dit in tegenstelling tot de experimenten B en C.

Het experiment D kunnen we nog als volgt generaliseren:

Experiment E

We trekken achtereenvolgens m-1 knikkers zonder teruglegging en daarna nog een $m^e$ knikker. Nu leggen we de eerste terug, trekken de $(m+1)^e$, leggen de tweede terug, enzovoorts. Hierbij is m een willekeurig natuurlijk getal.[1]

--------

1) m mag natuurlijk niet groter zijn dan het aantal knikkers dat bij het begin van het experiment in de doos ligt. Gaat U zelf eens na wat er gebeurt als m gelijk is aan dit aantal. (Bijzonder geval van een kringfuik; zie paragraaf 5)

Als m=2 voeren we experiment D uit, terwijl de keuze m=1 equivalent is met experiment A.

Experiment F

Tenslotte beschouwen we het volgende voorbeeld: de eerste twee trekkingen zijn zonder teruglegging; na de derde trekking leggen wij drie knikkers in de doos van dezelfde kleur als de knikker van de derde trekking. De vierde en vijfde knikker worden wederom zonder teruglegging getrokken, terwijl na de zesde trekking weer drie knikkers van dezelfde kleur als de zesde knikker in de doos worden gelegd, enzovoorts.

Aldus ontstaat een oneindig lange keten, waarbij de overgangswhn afhangen van alle voorgaande toestanden.

Wij onderscheiden nu vier soorten van ketens:

a. De overgangswhn hangen niet af van de uitgangstoestanden. Deze ketens noemen we ketens van onafhankelijke experimenten (zie hoofdstuk I, paragraaf 4). (Experiment A)

b. De overgangswhn hangen alleen af van de uitgangstoestand. Deze ketens noemen we enkelvoudige Markovketens. (Experiment D)

c. De overgangswhn hangen af van de uitgangstoestand en een begrensd aantal voorafgaande toestanden. Deze ketens worden meervoudige Markovketens genoemd. (Experiment E)

d. De overgangswhn hangen af van de uitgangstoestand en van een onbegrensd aantal voorafgaande toestanden. Deze ketens zullen wij in dit hoofdstuk niet bespreken.

Van deze vier soorten van ketens zijn de enkelvoudige Markovketens het belangrijkst. Dit hangt samen met de omstandigheid dat de ketens van onafhankelijke experimenten kunnen worden opgevat als een bijzonder geval van de enkelvoudige Markovketens, terwijl de onder c. genoemde ketens door het invoeren van andere toestanden eveneens herleid kunnen worden tot enkelvoudige Markovketens. Dit laatste kan men als volgt bewijzen:

Stel dat de overgangswhn afhangen van de uitgangstoestand, en van hoogstens m-1 voorafgaande toestanden. Deze whn kunnen we dus aanduiden door $p_{(i_1 \ldots i_{m-1}) i_m j_m}$.

We zeggen nu dat het systeem zich in de <u>toestand (nieuwe stijl)</u> $(i_1,\ldots,i_m)$ bevindt als het systeem in de toestand (oude stijl) $i_m$ is, terwijl $i_1,\ldots,i_{m-1}$ de voorafgaande toestanden zijn.

Als $T=(i_1,\ldots,i_m)$ en $U=(j_1,\ldots,j_m)$ twee toestanden (nieuwe stijl) zijn, en $p'_{TU}$ is de overgangswh van T naar U, dan geldt:

$$p'_{TU} = \begin{cases} p_{(i_1\ldots i_{m-1})i_m j_m} & \text{als } i_2=j_1,\ i_3=j_2,\ldots,i_m=j_{m-1} \\ 0 & \text{in alle overige gevallen.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Immers, uit de definitie van de toestand (nieuwe stijl) volgt, dat twee opeenvolgende toestanden (nieuwe stijl) van het systeem m-1 toestanden (oude stijl) gemeen hebben, en dus geldt $p'_{TU}=0$ als T en U geen m-1 toestanden (oude stijl) gemeenschappelijk hebben.

Verder geldt:

$$\sum_U p'_{TU} = \sum_{j_1,\ldots,j_m} p'_{(i_1\ldots i_m)(j_1\ldots j_m)} = \sum_{j_m} p'_{(i_1\ldots i_m)(i_2\ldots i_m j_m)} =$$

$$= \sum_{j_m} p_{(i_1\ldots i_{m-1})i_m j_m} = 1, \tag{3.5}$$

zodat de $p'_{TU}$ inderdaad op te vatten zijn als overgangswhn. We kunnen ons dus beperken tot de enkelvoudige Markovketens.

## 4. <u>Enkelvoudige Markovketens</u>

In deze paragraaf en alle volgende beschouwen wij systemen die in slechts eindig veel toestanden kunnen verkeren. De overgangswhn noemen we weer $p_{ij}$ $(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n)$.

<u>Stelling 4.1</u>

Laat $p_{ij}^{(m)}$ de kans zijn dat het systeem na precies m experimenten van de toestand i in de toestand j is gekomen.[1] Dan geldt

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m-1)} p_{kj} \tag{4.1}$$

<u>Bewijs</u>

De kans dat het systeem na precies m-1 stappen van de toestand i

--------

1) $p_{ij}^{(1)}$ is dus hetzelfde als $p_{ij}$.

in een toestand k is gekomen bedraagt, volgens definitie, $p_{ik}^{(m-1)}$, terwijl de kans om van k in j over te gaan (in één stap) gelijk is aan $p_{kj}$.

Het produkt $p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$ is dus de kans dat het systeem in m-1 stappen van i in k komt, en vandaar naar j gaat. Dus $\sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$ is de kans dat het systeem na m-1 stappen in één of andere toestand is en vandaar naar j gaat, hetgeen niets anders betekent dan dat het systeem vanuit i na m stappen in k is gekomen, q.e.d.

De vorm van de vergelijking (4.1) vertoont grote overeenkomst met die van een matrixprodukt (vgl. (5.3) uit hoofdstuk VIII). Het ligt daarom voor de hand om de volgende matrices in te voeren

$$\mathcal{P}^{(m)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \ldots\ldots & p_{1n}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & p_{22}^{(m)} & \ldots\ldots & p_{2n}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}^{(m)} & p_{n2}^{(m)} & \ldots\ldots & p_{nn}^{(m)} \end{pmatrix} \quad \text{voor } m = 1,2,\ldots \qquad (4.2)$$

Nemen we m=1, dan zijn de matrixelementen $p_{ij}^{(m)}$ weer de overgangswhn $p_{ij}$. De matrix $\mathcal{P}^{(1)}$, meestal afgekort tot $\mathcal{P}$, noemen we dan ook de matrix van de overgangswhn. Na bovenstaande definitie van $\mathcal{P}^{(m)}$ kunnen we nu de vergelijking (4.1) ook als volgt schrijven

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(m-1)} . \mathcal{P} \quad . \qquad (4.3)$$

Substitueren we hierin achtereenvolgens m = 2,3,... dan vinden we

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{m} \quad . \qquad (4.4)$$

<u>Voorbeeld 4.1</u>

Gegeven een systeem, dat in drie mogelijke toestanden (1,2,3) kan verkeren. De toestanden van het systeem vormen een Markovketen, waarvan de matrix der overgangswhn $\mathcal{P}$ gegeven wordt door:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

Gevraagd de kans te berekenen, dat het systeem zich na 3 stappen in de toestand 2 bevindt, als de begintoestand resp. 1,2 en 3 is. Uit (4.3) volgt:

$$\mathcal{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} + \frac{3}{16} & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \\ \frac{9}{16} & \frac{1}{16} + \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} + \frac{1}{16} & \frac{3}{16} + \frac{3}{16} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{4}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\mathcal{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{9}{16} & \frac{4}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{64} + \frac{21}{64} & \frac{4}{32} + \frac{5}{64} + \frac{7}{64} & \frac{4}{64} + \frac{15}{64} \\ \frac{9}{64} + \frac{9}{64} & \frac{9}{32} + \frac{4}{64} + \frac{3}{64} & \frac{9}{64} + \frac{12}{64} \\ \frac{3}{64} \quad \frac{18}{64} & \frac{3}{32} \quad \frac{7}{64} \quad \frac{6}{64} & \frac{3}{64} \quad \frac{21}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{64} & \frac{20}{64} & \frac{19}{64} \\ \frac{18}{64} & \frac{25}{64} & \frac{21}{64} \\ \frac{21}{64} & \frac{19}{64} & \frac{24}{64} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Uit (4.7) volgt:

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} & p_{13}^{(3)} \\ p_{21}^{(3)} & p_{22}^{(3)} & p_{23}^{(3)} \\ p_{31}^{(3)} & p_{32}^{(3)} & p_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{64} & \frac{20}{64} & \frac{19}{64} \\ \frac{18}{64} & \frac{25}{64} & \frac{21}{64} \\ \frac{21}{64} & \frac{19}{64} & \frac{24}{64} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

De gevraagde kansen kan men dus aflezen uit de tweede kolom van (4.8).

## 5. Fuiken en kringfuiken

Bij Markov-processen komt het wel eens voor dat het systeem na een aantal experimenten een groep van toestanden niet meer kan doorlopen. Men zegt dan dat het systeem zich in een <u>fuik</u> bevindt.

Wij kunnen de toestanden, welke het systeem doorloopt, als volgt beschrijven. Voor iedere toestand i geven wij aan welke toestanden j in een eindig aantal stappen vanuit deze toestand i bereikt kunnen worden. Deze toestanden j bezitten de eigenschap, dat voor minstens één eindige waarde van k geldt:

$$p_{ij}^{(k)} > 0 \tag{5.1}$$

Voorbeeld 5.1

Wij vinden bijv. voor een systeem, dat slechts 10 toestanden kan aannemen, de volgende tabel van bereikbare toestanden.

Tabel 5.I

Overzicht van de na eindig veel stappen te bereiken toestanden

| vanuit | zijn te bereiken na eindig veel stappen |
|---|---|
| 1 | 2,3,4,5,8,9 |
| 2 | 2,3,5,9 |
| 3 | 3,5 |
| 4 | 6,7,10 |
| 5 | 3,5 |
| 6 | 6,7,10 |
| 7 | 6,7,10 |
| 8 | 3,5 |
| 9 | 2,3,5,9 |
| 10 | 6,7,10 |

Indien wij deze tabel nauwkeurig bestuderen, dan kunnen wij de volgende conclusies trekken:

1° Het systeem kan alleen aan 't begin van de keten in de toestand 1 zijn. Daarna zal het nooit meer in deze toestand terugkeren.

2° Het systeem kan vanuit de toestand 2 wel in de toestand 3 en 5 komen maar niet omgekeerd. Vergelijk ook de toestanden

$$\begin{array}{lll} 4 & \text{met} & 6,7,10 \\ 6 & '' & 7,10 \\ 8 & '' & 3,5 \\ 9 & '' & 3,5 \end{array} \tag{5.2}$$

3° Indien het systeem eenmaal een toestand aangenomen heeft uit het toestandenpaar $\{3,5\}$ of uit het drietal $\{6,7,10\}$ dan zal het systeem geen andere toestanden aannemen dan die uit $\{3,5\}$ resp. $\{6,7,10\}$. De toestandencombinaties $\{3,5\}$ en $\{6,7,10\}$ zijn nu fuiken. De overige toestanden heten doorgangstoestanden.

Om een nauwkeurige definitie van een fuik te geven, voeren we het hulpbegrip moederfuik in.
Een moederfuik is een verzameling van toestanden met de volgende eigenschap: de overgangswh van iedere, tot de moederfuik behorende toestand naar een willekeurige toestand buiten de moederfuik is steeds gelijk aan nul. De verzameling van alle mogelijke toestanden is dus altijd een moederfuik.
In de in voorbeeld 5.1 geschetste situatie zijn de toestandencombinaties $\{1 \text{ t/m } 10\}$; $\{3,5,6,7,10\}$; $\{3,5\}$ en $\{6,7,10\}$ moederfuiken.

Voorbeeld 5.2

Als de matrix der overgangswhn de volgende vorm zou hebben

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.3}$$

Dan zijn de moederfuiken de volgende deelverzamelingen
$\{1,2,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3\}$, $\{4\}$.

Definitie 5.1

Een fuik is een moederfuik die geen twee of meer disjuncte moederfuiken bevat.

In voorbeeld 5.1 zijn de combinaties $\{1 \text{ t/m } 10\}$ en $\{3,4,6,7,10\}$ geen fuiken, terwijl in voorbeeld 5.2 noch $\{1,2,3,4\}$, noch $\{2,3,4\}$ een fuik is, daar beide twee disjuncte moederfuiken bevatten nl. $\{3\}$ en $\{4\}$. De verzamelingen van toestanden $\{3\}$ en $\{4\}$ zijn natuurlijk wèl fuiken.

Voorbeeld 5.3

Beschouw de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

(Het deterministische karakter van het bijbehorende proces doet niets af van het feit dat we hier toch met een Markov-proces te maken hebben.)

We vinden de volgende moederfuiken $\{1,2,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4\}$ en $\{4\}$. Ieder van deze deelverzameling is zelfs een fuik: weliswaar bevat bijv. $\{2,3,4\}$ de moederfuiken $\{3,4\}$ en $\{4\}$, maar deze zijn niet disjunct.[1)]

Voorbeeld 5.4

De matrix der overgangswh hebbe de volgende vorm:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|cc} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ \hline 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 \\ 0 & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{65} & p_{66} \end{array}\right) \qquad (5.5)$$

Bij dit proces zijn er twee fuiken: de eerste bestaat uit de toestanden 2,3 en 4, de tweede uit de toestanden 5 en 6.

Een andere situatie die zich bij Markov-processen kan voordoen is de volgende: de verzameling van alle toestanden kan worden verdeeld in m deelverzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ en wel zodanig dat vanuit een toestand tot $A_i$ behorend alleen een directe overgang mogelijk is naar een toestand die tot $A_{i+1}$ behoort, waarbij we $A_{m+1}$ met $A_1$ identificeren. Het getal m noemt men de orde van het Markov-proces.

Voorbeeld 5.5

De matrix der overgangswhn zou van de volgende vorm kunnen zijn

--------

1) We laten in het vervolg de triviale (moeder-)fuik, bestaande uit alle toestanden, buiten beschouwing.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 0 & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & p_{35} & p_{36} & p_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{45} & p_{46} & p_{47} \\ \hline p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{61} & p_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{71} & p_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (5.6)$$

De deelverzamelingen $A_1$ bestaan hier uit de volgende toestanden: 1 en 2, 3 en 4, 5 en 6 en 7.

Het systeem kan dus vanuit toestand 1 na twee stappen, na 5 stappen, na 3 stappen enz. in toestand 5 komen, maar nooit na bijv. 4 of 6 stappen.

Wanneer de laatstbeschreven situatie optreedt, zegt men dat het systeem zich in een kringfuik bevindt.

Voorbeeld 5.6

Tot slot van deze paragraaf geven we een voorbeeld van een matrix, waarin zowel een kringfuik als een fuik optreedt.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (5.7)$$

De in de definitie van kringfuik genoemde verzamelingen $A_i$ zijn hier $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$ en $\{7,8,9\}$. De verzameling $\{3,6,9\}$ is echter een fuik, zoals men gemakkelijk inziet.

## 6. De invariante verdeling

In verband met de bestudering van de overige eigenschappen van de Markovketens is het van belang te weten of de rij van getallen $p_{ij}^{(m)}$ een limiet[1] heeft voor iedere i en j als m naar $\infty$ gaat.

Laten we eerst eens het geval beschouwen, dat er geen kringfuiken zijn.

### Stelling 6.1

Indien de Markovketen geen kringfuiken bevat, dan bestaat

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)} = q_{ij} \tag{6.1}$$

voor alle i en j, en

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1 \tag{6.2}$$

voor alle i. Zijn verder i en h toestanden die tot dezelfde fuik behoren, dan geldt

$$q_{ij} = q_{hj} \ . \tag{6.3}$$

In het bijzonder is dus $q_{ij}$ onafhankelijk van i als er geen fuiken zijn.

Als er wel kringfuiken zijn, bestaat $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ niet, maar wel de zg. Cesarolimiet $q_{ij}^{c}$ van $p_{ij}^{(m)}$,

--------

1) Zie hoofdstuk II, paragraaf 2.

$$q^{c}_{ij} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p^{(k)}_{ij} \qquad (6.4)$$ [1)]

Stelling 6.2

Indien de Markovketen kringfuiken bevat, dan bestaat

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij} = q^{c}_{ij}, \qquad (6.4)$$

voor alle i en j, en

$$\sum_{j=1}^{n} q^{c}_{ij} = 1 \qquad (6.5)$$

voor alle i. Voor toestanden i en h uit dezelfde fuik geldt

$$q^{c}_{ij} = q^{c}_{hj} \; . \qquad (6.6)$$

In het bijzonder is $q^{c}_{ij}$ onafhankelijk van i als er geen fuiken zijn.

We zullen deze beide stellingen hier niet bewijzen.

De kansen $q_{ij}$ en $q^{c}_{ij}$ kan men als volgt interpreteren. Stel dat men de toestandsveranderingen van het systeem gedurende een zeer lange tijd niet heeft gadegeslagen, en dat men niet weet hoeveel toestandswijzigingen hebben plaatsgevonden, dan zal, als het systeem het laatst in toestand i werd aangetroffen, de kans dat het systeem zich nu in de toestand j bevindt, bij benadering gelijk zijn aan $q_{ij}$ of $q^{c}_{ij}$.

Beschouwen wij nog eens de vergelijkingen (4.1):

--------

1) De Cesarolimiet van een reeks kan blijkbaar bestaan, zonder dat de gewone limiet bestaat. Maar, als de gewone limiet bestaat, dan bestaat de Cesarolimiet eveneens. Het hieronder volgende bewijs kan zonder bezwaar bij eerste lezing worden overgeslagen.

Bewijs: Laat $s_1, s_2, \ldots$ een rij van getallen zijn met limiet s. Dan bestaat bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal N zodanig dat $|s_i - s| < \varepsilon$ als $i > N$. Beschouw nu een vaste $\varepsilon$, en laat n een getal zijn dat groter is dan de bij $\varepsilon$ behorende N. Dan geldt

$$\left| \frac{s_1+\ldots+s_n}{n} - s \right| = \frac{1}{n}\left|(s_1+\ldots+s_N-Ns) + (s_{N+1}-s)+\ldots+(s_n-s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left\{\sigma + |s_{N+1}-s|+\ldots+|s_n-s|\right\} < \frac{\sigma+(n-N)\varepsilon}{n} < 2\varepsilon, \text{ waarin}$$

$\sigma = |s_1+\ldots+s_N-Ns|$.

Aan de laatste ongelijkheid is voldaan voor $n > \frac{\sigma - N\varepsilon}{\varepsilon}$. Door $n > \max(N, \frac{\sigma-N\varepsilon}{\varepsilon})$ te nemen zien we dat ook de Cesarolimiet bestaat, en zelfs gelijk is aan de gewone limiet.

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{h=1}^{n} p_{ih}^{(m-1)} p_{hj} .$$

Hieruit volgt, indien er geen kringfuiken zijn

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)} = \sum_{h=1}^{n} \lim_{m\to\infty} p_{ih}^{(m)} \; p_{hj}$$

ofwel

$$\boxed{q_{ij} = \sum_{h=1}^{n} q_{ih} \; p_{hj}} \; . \tag{6.7}$$

Zijn er bovendien geen fuiken, dan kunnen we deze vergelijking ook schrijven als

$$\boxed{q_j = \sum_{h=1}^{n} q_h \; p_{hj}} \; . \tag{6.8}$$

Uit (4.1) vinden wij, als er wel kringfuiken zijn

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ij}^{(k)} = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p_{ih}^{(k)} \right\} . \; p_{hj} \; ,$$

ofwel

$$\boxed{q_{ij}^{c} = \sum_{h=1}^{n} q_{ih}^{c} \; p_{hj}} \; . \tag{6.9}$$

Zijn er wel kringfuiken, maar geen fuiken, dan geldt dus

$$\boxed{q_j^{c} = \sum_{h=1}^{n} q_h^{c} \; p_{hj}} \; . \tag{6.10}$$

De kansverdeling met kansen $q_{ij}$, $q_j$, $q_{ij}^c$ of $q_j^c$ noemt men de <u>invariante verdeling</u> van het Markovproces.

In de volgende paragraaf zullen wij in de gelegenheid zijn van enkele Markovprocessen de invariante kansen te berekenen, naar aanleiding van enige praktijkvoorbeelden.

## 7. Voorbeelden

### Voorbeeld 7.1

Een handelaar in machines heeft van één type machine drie exemplaren verkocht. Het onderhoud van deze machines geschiedt onder toezicht van de handelaar.

Hij heeft derhalve een voorraadje reserve onderdelen aangelegd, dat éénmaal per week kan worden aangevuld tot drie exemplaren.[1] De kansverdeling van de vraag d per week naar een bepaald reserve-onderdeel wordt gegeven door:

$$P[\underline{d}=0] = \frac{1}{6} \qquad P[\underline{d}=1] = \frac{1}{4} \qquad P[\underline{d}=2] = \frac{1}{3} \qquad P[\underline{d}=3] = \frac{1}{4}\,. \qquad (7.1)$$

Verder wordt verondersteld dat de voorraadkosten per week evenredig zijn met de omvang van de voorraad aan het eind van die week. Zodra de voorraad niet toereikend is, worden noodinkopen verricht, waarvan de extra kosten per eenheid 10x de voorraadkosten per eenheid bedragen. Tenslotte wordt voor iedere aanvulling van de voorraad een vast bedrag van 5x de voorraadkosten in rekening gebracht. Het probleem dat de handelaar nu stelt is het volgende:
"Moet ik de voorraad aanvullen als ik nog één of misschien zelfs twee onderdelen in voorraad heb? Of moet ik pas bijbestellen als alle onderdelen gebruikt zijn?"

Oplossing:

De mogelijke toestanden aan het eind van iedere week zullen we aanduiden door symbolen (i) met de volgende betekenis

(3) = de voorraad bedraagt drie exemplaren
(2) = " " " twee "
(1) = " " " één exemplaar
(0) = er is geen voorraad, maar het was niet nodig om noodinkopen te doen.
(-1)= er is éénmaal een noodinkoop verricht
(-2)= " " tweemaal " " " .

De handelaar heeft nu drie strategieën tot zijn beschikking: bijbestellen (tot 3 stuks) wanneer de voorraad aan het eind van de week ten hoogste gelijk is aan 0, 1 of 2. Wij zullen deze drie strategieën aanduiden door resp. $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$.

Wij vinden nu voor de overgangswhn als strategie $\alpha$ wordt gevolgd:

--------

1) We zouden ook kunnen toestaan dat de handelaar zijn voorraad steeds aanvult tot bijv. 2 exemplaren. We komen hierop nog terug.

$$\begin{aligned} p_{33} &= p_{22} = p_{11} = P[\underline{d}=0] = \tfrac{1}{6} \\ p_{32} &= p_{21} = p_{10} = P[\underline{d}=1] = \tfrac{1}{4} \\ p_{31} &= p_{20} = p_{1,-1} = P[\underline{d}=2] = \tfrac{1}{3} \\ p_{30} &= p_{2,-1} = p_{1,-2} = P[\underline{d}=3] = \tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Aangezien de voorraad tot 3 wordt aangevuld als de voorraad aan het eind van de week gelijk is aan nul of minder, geldt:

1) $p_{0,-1} = p_{0,-2} = p_{-1,-1} = p_{-1,-2} = p_{-2,-2} = 0$

2) $$\begin{aligned} p_{0,3} &= p_{-1,3} = p_{-2,3} = p_{3,3} = P[\underline{d}=0] = \tfrac{1}{6} \\ p_{02} &= p_{-1,2} = p_{-2,2} = p_{3,2} = P[\underline{d}=1] = \tfrac{1}{4} \\ p_{01} &= p_{-1,1} = p_{-2,1} = p_{31} = P[\underline{d}=2] = \tfrac{1}{3} \\ p_{00} &= p_{-1,0} = p_{-2,0} = p_{30} = P[\underline{d}=3] = \tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Verder zijn $p_{-2,-1} = p_{2,-2} = p_{3,-2} = p_{3,-1} = p_{1,2} = p_{13} = p_{23} = 0$.

Deze resultaten zijn verwerkt in matrix (7.4)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} (3) & (2) & (1) & (0) & (-1) & (-2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \\ (-1) \\ (-2) \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrix van overgangswaarschijnlijkheden bij strategie $\alpha$.

(7.4)

Indien <u>strategie $\beta$</u> wordt gevolgd zijn overgangen van 1 naar (-1) en (-2) uitgesloten. De toestand (-2) kan zich nu niet meer realiseren. Op analoge wijze te werk gaande als bij strategie $\alpha$ vindt men voor de matrix der overgangswhn (7.5)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & (3) & (2) & (1) & (0) & (-1) \\
\hline
(3) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
(2) & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
(1) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
(0) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
(-1) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0
\end{array}
$$

Matrix van overgangswaarschijnlijkheden bij strategie $\beta$

(7.5)

Indien tenslotte strategie $\gamma$ wordt toegepast zijn zowel de toestand (-1) als de toestand (-2) uitgesloten; de matrix der overgangswhn (7.6) wordt nu

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & (3) & (2) & (1) & (0) \\
\hline
(3) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
(2) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
(1) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
(0) & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Matrix van overgangswaarschijnlijkheden bij strategie $\gamma$

(7.6)

Het is gemakkelijk in te zien dat geen van deze matrices fuiken of kringfuiken bevat. Volgens stelling 6.1 geldt dus voor ieder der bovenstaande matrices:

$\lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ bestaat en is onafhankelijk van i.

Wij geven de limiet daarom aan met $q_j$, waarin j de mogelijke toestanden doorloopt (dus bij strategie $\beta$: j=3,2,1,0,-1).

We passen nu de vergelijkingen (6.8) toe om de invariante verdeling voor de verschillende strategieën te berekenen.

Strategie $\alpha$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tfrac{1}{6} q_3 & &+ \tfrac{1}{6} q_0 + \tfrac{1}{6} q_{-1} + \tfrac{1}{6} q_{-2} \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} q_3 + \tfrac{1}{6} q_2 & &+ \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} + \tfrac{1}{4} q_{-2} \\
q_1 &= \tfrac{1}{3} q_3 + \tfrac{1}{4} q_2 + \tfrac{1}{6} q_1 & &+ \tfrac{1}{3} q_0 + \tfrac{1}{3} q_{-1} + \tfrac{1}{3} q_{-2} \\
q_0 &= \tfrac{1}{4} q_3 + \tfrac{1}{3} q_2 + \tfrac{1}{4} q_1 & &+ \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} + \tfrac{1}{4} q_{-2} \\
q_{-1} &= \tfrac{1}{4} q_2 + \tfrac{1}{3} q_1 \\
q_{-2} &= \tfrac{1}{4} q_1
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Lossen we hieruit $q_3, \ldots, q_{-2}$ op, dan vinden wij

$$q_3 = \frac{200}{2148},\ q_2 = \frac{360}{2148},\ q_1 = \frac{588}{2148},\ q_0 = \frac{567}{2148},\ q_{-1} = \frac{286}{2148},\ q_{-2} = \frac{147}{2148}\ . \tag{7.8}$$

Strategie $\beta$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tfrac{1}{6} q_3 & &+ \tfrac{1}{6} q_1 + \tfrac{1}{6} q_0 + \tfrac{1}{6} q_{-1} \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} q_3 + \tfrac{1}{6} q_2 & &+ \tfrac{1}{4} q_1 + \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} \\
q_1 &= \tfrac{1}{3} q_3 + \tfrac{1}{4} q_2 & &+ \tfrac{1}{3} q_1 + \tfrac{1}{3} q_0 + \tfrac{1}{3} q_{-1} \\
q_0 &= \tfrac{1}{4} q_3 + \tfrac{1}{3} q_2 & &+ \tfrac{1}{4} q_1 + \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} \\
q_{-1} &= \tfrac{1}{4} q_2
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Hieruit volgt

$$q_3 = \frac{20}{156},\ q_2 = \frac{36}{156},\ q_1 = \frac{49}{156},\ q_0 = \frac{42}{156},\ q_{-1} = \frac{9}{156}\ . \tag{7.10}$$

Strategie $\gamma$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tfrac{1}{6} (q_3 + q_2 + q_1 + q_0) = \tfrac{1}{6} \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} (q_3 + q_2 + q_1 + q_0) = \tfrac{1}{4} \\
q_1 &= \tfrac{1}{3} (q_3 + q_2 + q_1 + q_0) = \tfrac{1}{3} \\
q_0 &= \tfrac{1}{4} (q_3 + q_2 + q_1 + q_0) = \tfrac{1}{4}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

We hebben nu alle invariante verdelingen berekend. Het gestelde probleem is hiermee overigens nog niet opgelost. Het is ons zelfs nog niet duidelijk waaròm we de invariante verdelingen hebben berekend. In par. 8 zal echter blijken dat het kennen van deze verdelingen van groot nut is bij de verdere oplossing, die in par. 9 zal worden uitgevoerd.

Voorbeeld 7.2

Een pont die tussen twee punten A en B op en neer vaart heeft een half uur nodig voor iedere oversteek. De pont vertrekt van ieder der oevers nooit op andere tijdstippen dan de hele en halve uren en het vertrek heeft inderdaad plaats wanneer een klant wacht aan de oever waar de pont ligt resp. aankomt. Het systeem verkeert derhalve in ieder interval van een half uur in een der vier volgende toestanden:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| toestand | 1: | de | pont | vaart | van | A | naar | B |
| " | 2: | " | " | " | " | B | " | A |
| " | 3: | " | " | wacht | in | A | | |
| " | 4: | " | " | " | " | B. | | |

De kans dat in een half uur minstens één klant in A resp. B aankomt zij a resp. b met $a \geqslant b$. Tenslotte veronderstellen we dat de klanten hoogstens een half uur wachten, en dat de pontbaas niet kan zien of er iemand aan de overkant wacht.

We willen nu onderzoeken welke van de drie volgende strategieën de beste is.

$\alpha$ De pontbaas wacht steeds tot er een klant komt, en zet deze op het eerstvolgende hele of halve uur over.

$\beta$ Als de pontbaas juist iemand naar A heeft gebracht blijft hij daar wachten op de volgende klant. Zodra hij deze naar B heeft overgezet keert hij terug (eventueel met een passagier).

$\gamma$ De pontbaas vaart voortdurend heen en weer.

Oplossing

Ook hier zullen we voorlopig alleen de invariante verdeling berekenen.

Indien strategie $\alpha$ wordt gevolgd dan zijn de volgende toestandsovergangen mogelijk:

1) Van toestand 1 naar de toestanden 2 en 4.
   De kansen $p_{12}$ en $p_{14}$ zijn resp. gelijk aan b en 1-b. (Waarom?)
2) Van toestand 2 naar de toestanden 1 en 3.
   De kansen $p_{21}$ en $p_{23}$ zijn resp. gelijk aan a en 1-a. (Waarom?)
3) Van toestand 3 naar de toestanden 1 en 3.
   De kansen $p_{31}$ en $p_{33}$ zijn resp. gelijk aan a en 1-a. (Waarom?)
4) Van toestand 4 naar de toestanden 2 en 4.
   De kansen $p_{42}$ en $p_{44}$ zijn resp. gelijk aan b en 1-b. (Waarom?)

De matrix der overgangswhn wordt dus gegeven door:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 1-b \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 & 1-b \end{pmatrix} \end{array} \qquad (7.12)$$

Voor strategie $\beta$ vindt men op analoge wijze de matrix

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \end{array} \qquad (7.13)$$

en voor strategie $\gamma$ tenslotte:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (7.14)$$

De vergelijkingen (6.8) hebben dus, indien strategie $\alpha$ wordt gevolgd, de volgende vorm:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = aq_2 + aq_3 \\ q_2 = bq_1 + bq_4 \\ q_3 = (1-a)q_2 + (1-a)q_3 \\ q_4 = (1-b)q_1 + (1-b)q_4 \end{array}\right\} \qquad (7.15)$$

De oplossingen zijn

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = q_2 = \dfrac{ab}{a+b} \\ q_3 = \dfrac{b-ab}{a+b} \\ q_4 = \dfrac{a-ab}{a+b} \end{array}\right\}. \qquad (7.16)$$

Voor strategie $\rho$ vinden wij de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \phantom{q_1} \quad aq_2 + aq_3 \\ q_2 &= q_1 \\ q_3 &= \phantom{q_1} \quad (1-a)q_2 + (1-a)q_3 \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

met als oplossingen

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_2 = \frac{a}{1+a} \\ q_3 &= \frac{1-a}{1+a} \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

In de matrix voor strategie $\gamma$ treedt een kringfuik op, zodat we de vergelijkingen (6.10) moeten toepassen. We vinden

$$\left.\begin{aligned} & q_1^c = q_2^c \\ & q_2^c = q_1^c \text{ , dus } q_1^c = q_2^c = \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

## 8. De wet van de grote aantallen; de centrale limietstelling

Beschouw een willekeurige Markovketen met overgangswhn $p_{ij}$. We zullen nu laten zien dat deze keten kan worden verkregen door knikkers uit bakjes te trekken. Stel nl. dat n bakjes met knikkers in n verschillende kleuren zijn gevuld; zowel de bakjes als de knikkers zijn genummerd van 1 t/m n. De bakjes zijn op een zodanige wijze gevuld dat de kans om uit het $i^e$ bakje een knikker van de kleur j te trekken gelijk is aan de gegeven waarde $p_{ij}$. Wij voeren nu het volgende experiment uit:

Trek een knikker uit bakje $i_1$; de kleur hiervan zij $i_2$; leg deze knikker weer terug. Trek dan de tweede knikker uit bakje $i_2$; de kleur hiervan zij $i_3$, enzovoorts.

De rij $i_1, i_2, i_3, \ldots$ is nu een Markovketen waarvan de overgangswhn juist gelijk zijn aan $p_{ij}$, zoals men gemakkelijk kan inzien.

De beginstap $i_1$ kunnen we bijv. bepalen met behulp van een apart bakje waarin van iedere kleur één knikker ligt.

Stel nu dat men bij iedere trekking van een knikker met nummer i een boete x(i) moet betalen, voor i=1,...,n. Laat verder $\underline{x}_m$ de boete zijn die men bij de $m^e$ trekking moet betalen, voor m=1,2,.... Deze grootheid is <u>stochastisch</u>. Immers men weet van tevoren niet welke kleur de $m^{de}$ getrokken knikker heeft. Men realisere zich dat de stochastische variabele $\underline{x}_m$ een van de waarden $x(i)$ $(i=1,\ldots,n)$ zal aannemen.

Als het systeem zich bij het begin van het experiment in de toestand i bevindt, dan geldt voor de boete die bij de $m^e$ trekking moet worden betaald

$$P\left[\underline{x}_m = x(j)\right] = p_{ij}^{(m)} . \tag{8.1}$$

Er geldt dus[1]

$$\mathcal{E}\,\underline{x}_m = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, p_{ij}^{(m)} . \tag{8.2}$$

Hieruit volgt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \mathcal{E}\,\underline{x}_m = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x(j)\, p_{ij}^{(m)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x(j) \left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} p_{ij}^{(m)} \right\} = \sum_{j=1}^{n} x(j).q_{ij}^{c} . \tag{8.3}$$

Men kan bewijzen dat het eerste lid van deze betrekking gelijk is aan

$$\mathcal{E}\left\{ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \underline{x}_m \right\} \tag{8.4}$$

Ook kan men aantonen dat de vorm tussen de accoladen in (8.4) een stochastische grootheid met spreiding 0 is, zodat uit (8.3) volgt

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{c}\, x(j) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \underline{x}_m \quad \text{met kans } 1 . \tag{8.5}$$

Tenslotte kan men bewijzen dat uit (8.5) volgt dat voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt

$$\lim_{k\to\infty} P\left[ \left| \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{c}\, x(j) - \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \underline{x}_m \right| > \varepsilon \right] = 0 . \tag{8.6}$$

Dit betekent dus: de kans dat $\left| \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{c}\, x(j) - \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \underline{x}_m \right|$ groter is dan $\varepsilon$ is een functie van k die naar nul nadert als k naar $\infty$ gaat.

--------

1) We gaan hierbij steeds uit van een vaste begintoestand i.

De betrekking (8.6) is het analogon voor Markovprocessen van de wet van de grote aantallen[1] voor onafhankelijke experimenten.

Stelling 3.2 van hoofdstuk IV leert ons dat voor onafhankelijke experimenten de grootheid $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \underline{x}_k$ een $N(\mathcal{E}\,\underline{x}_1, \frac{\sigma\,\underline{x}_1}{\sqrt{m}})$-verdeling heeft, mits de stochasten $\underline{x}_k$ alle dezelfde verdeling hebben. Men kan bewijzen dat ook voor Markovketens een dergelijk resultaat geldt.

## 9. Verdere behandeling van de voorbeelden

Een handelaar of fabrikant die zijn kosten wil verminderen komt al spoedig voor het probleem te staan over welke periode hij moet minimaliseren. Een periode van 1 jaar ligt nogal voor de hand, maar 2 jaar is waarschijnlijk beter, en 3 jaar nòg beter. We zouden zo kunnen doorgaan, maar de kosten over een oneindig lange periode zijn altijd oneindig groot, en hieraan valt niet veel te minimaliseren. Beschouwen we echter achtereenvolgens

de kosten gedurende een jaar
de gemiddelde kosten per jaar over een periode van 2 jaar
de gemiddelde kosten per jaar over een periode van 3 jaar
...... enz.,

dan krijgen we een rij van grootheden waarvan het minimaliseren steeds zinvoller wordt, terwijl deze getallen bovendien de prettige eigenschap hebben dat ze niet oneindig groot worden. We zullen dus steeds trachten de volgende grootheid te minimaliseren:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \underline{x}_m \, , \tag{9.1}$$

waarin $\underline{x}_m$ de kosten zijn die in de $m^e$ periode worden gemaakt.
Nu is de uitdrukking (9.1) volgens formule (8.5) met kans 1 gelijk aan

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{c}\, x(j) \; . \tag{9.2}$$

Indien we dus, in plaats van de (9.1), de vorm (9.2) minimaliseren, zullen we zeer vaak (nl. met kans 1) ons doel bereiken.

--------

1) Zie hoofdstuk IV, stelling 1.2.

Dit passen we nu toe bij de voorbeelden van par. 7, waar we de invariante verdelingen reeds hebben berekend.

$q^c_{ij}$ kunnen we in beide voorbeelden nog vervangen door $q^c_j$, omdat in de matrices van par. 7 geen fuiken voorkomen.

We zullen dus steeds die strategie gebruiken, waarvoor $\sum_{j=1}^{n} q^c_j\, x(j)$ zo klein mogelijk is.

Voorbeeld 7.1

Laten we eerst het geval beschouwen waarin de handelaar strategie $\alpha$ toepast.

In par. 7 hebben wij aangenomen dat de voorraadkosten per week evenredig zijn met de grootte van de voorraad aan het eind van die week. Kiezen wij de voorraadkosten per week per eenheid als geldeenheid, dan vinden wij voor strategie $\alpha$ :

$$x(3)=3 \qquad x(2)=2 \qquad x(1)=1 \ . \tag{9.3}$$

Verder lezen wij in deze paragraaf dat bij elke bestelling een bedrag van 5 geldeenheden aan onkosten wordt gemaakt, terwijl voor iedere noodinkoop 10 geldeenheden dienen te worden uitgegeven. Op grond van deze gegevens vinden wij:

$$x(0)=5 \qquad x(-1)=15 \qquad x(-2)=25 \ . \tag{9.4}$$

Voor de uitdrukking[1)]

$$\sum_{j=-2}^{3} q_j\, x(j)$$

vinden wij dus

$$\sum_{j=-2}^{3} q_j\, x(j) = 3 \times \frac{200}{2148} + 2 \times \frac{360}{2148} + 1 \times \frac{588}{2148} + 5 \times \frac{567}{2148} + $$
$$+ 15 \times \frac{286}{2148} + 25 \times \frac{47}{2148} = \frac{12708}{2148} \approx \underline{\underline{5,9}} \ . \tag{9.5}$$

Past de handelaar strategie $\beta$ toe, dan geldt:

$$x(3)=3; \qquad x(2)=2; \qquad x(1)=6; \qquad x(0)=5; \qquad x(-1)=15. \tag{9.6}$$

--------

1) De index c in $q^c_j$ kan in dit voorbeeld, dank zij het ontbreken van kringfuiken, steeds worden weggelaten.

Hieruit vinden we:

$$\sum_{j=-1}^{3} q_j x(j) = 3 \times \frac{20}{156} + 2 \times \frac{36}{156} + 6 \times \frac{49}{156} + 5 \times \frac{42}{156} +$$

$$+ 15 \times \frac{9}{156} = \frac{771}{156} \approx \underline{\underline{4{,}9}} \; . \tag{9.7}$$

Voor <u>strategie $\gamma$</u> geldt:

$$x(3)=3; \qquad x(2)=7; \qquad x(1)=6; \qquad x(0)=5, \tag{9.8}$$

zodat

$$\sum_{j=0}^{3} q_j x(j) = 3 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{4} = \underline{\underline{5{,}5}} \; . \tag{9.9}$$

De handelaar zal dus de voorkeur geven aan strategie $\beta$ , d.w.z. hij zal zijn voorraad aanvullen (tot drie stuks) zodra hij aan het einde van de week ten hoogste 1 reserve onderdeel in voorraad heeft. Zouden we hebben toegelaten dat de handelaar ook tot 2 stuks mag bijbestellen, dan was het probleem hierdoor niet moeilijker geworden. De extra-berekeningen zijn namelijk van dezelfde aard als de hierboven uitgevoerde, en zelfs nog eenvoudiger. Uit het resultaat van deze extra berekeningen volgt dat het voordeliger is als de handelaar toch steeds tot drie stuks bijbestelt: de besparing op de voorraadkosten weegt blijkbaar niet op tegen de nu veel hogere noodinkoopkosten.

<u>Voorbeeld 7.2</u>

Om uit te maken welke van de drie strategieën $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ voor de pontbaas optimaal is, moeten we ons afvragen welke grootheid we wensen te minimaliseren. We zullen hiervoor weer de kosten kiezen. Stel dat deze zijn samengesteld uit de volgende posten:

$C_0$ per half uur voor iedere mogelijke toestand (men kan hierbij aan slijtage- en onderhoudskosten denken),

$C_v$ per half uur als het systeem in de toestand 1 of 2 verkeert (kosten voor brandstof e.d.),

-F voor iedere overtocht waarbij iemand wordt overgezet.

We kunnen nu voor ieder der strategieën de grootheid $\sum q_j^c \, x(j)$ uitdrukken in a, b, $C_0$, $C_v$ en F.

Strategie $\alpha$:

$$x(1) = x(2) = C_0 + C_v - F \qquad x(3) = x(4) = C_0 \tag{9.10}$$

dus

$$\sum_{j=1}^{4} q_j x(j) = \frac{2ab}{a+b}(C_0+C_v-F) + \left(\frac{b-ab}{a+b} + \frac{a-ab}{a+b}\right) C_0 =$$

$$= C_0 + (C_v-F)\frac{2ab}{a+b} = C_0 + B_\alpha \tag{9.11}$$

waarin $B_\alpha = (C_v-F)\frac{2ab}{a+b}$ (9.12)

Strategie $\beta$:

$$x(1) = C_0 + C_v - F \qquad x(2) = C_0 + C_v - bF \qquad x(3) = C_0\,, \tag{9.13}$$

dus

$$\sum_{j=1}^{3} q_j\, x(j) = \frac{a}{1+a}\left\{2C_0+2C_v-F(1+b)\right\} + C_0\,\frac{1-a}{1+a} =$$

$$= C_0 + \frac{2a}{1+a}C_v - aF\,\frac{1+b}{1+a} = C_0 + B_\beta \tag{9.14}$$

waarin $B_\beta = \frac{2a}{1+a}C_v - aF\,\frac{1+b}{1+a}$ (9.15)

Strategie $\gamma$:

$$x(1) = C_0 + C_v - aF \qquad x(2) = C_0 + C_v - bF\,, \tag{9.16}$$

dus

$$\sum_{j=1}^{2} q_j^c\, x(j) = C_0 + C_v - \frac{a+b}{2}F = C_0 + B_\gamma \tag{9.17}$$

waarin

$$B_\gamma = C_v - \frac{a+b}{2}F\;. \tag{9.18}$$

Men kan gemakkelijk aantonen dat

$$B_\beta < B_\gamma \tag{9.19}$$

voor alle toelaatbare keuzen van a, b, F en $C_v$, zodat strategie $\gamma$ niet in aanmerking komt.

Verder blijkt na enig rekenen dat

$$B_\alpha < B_\beta \tag{9.20}$$

dan en slechts dan geldt als

$$\frac{C_v}{F} > \frac{a-b}{2a} \quad . \tag{9.21}$$

In dat geval is dus strategie $\alpha$ de beste. Is echter de verhouding $\frac{C_v}{F}$ groter dan $\frac{a-b}{2a}$, dan moet aan strategie $\beta$ de voorkeur worden gegeven.

## 10. Overige Markovprocessen

Er bestaan praktijkproblemen waarbij de optredende processen een stochastisch karakter dragen, terwijl toch het verloop ervan niet volledig door een keten kan worden beschreven. In par. 2 hebben wij reeds een voorbeeld hiervan genoemd. Aangezien de behandeling van dergelijke processen ons te ver zou voeren hebben wij ze echter niet in onze beschouwingen betrokken.

Deze opmerkingen zijn eveneens van toepassing op processen waarbij het systeem in een oneindig aantal toestanden kan verkeren. Aan het begin van par. 4 hebben wij ons beperkt tot systemen met eindig veel mogelijke toestanden. Voor sommige problemen is deze beperking echter te ernstig om nog tot een goede aanpassing te komen. Het kan zelfs gebeuren dat een continuum van mogelijke toestanden moet worden toegelaten.

## 11. Een verzekeringsprobleem

Een transportonderneming heeft bij een assurantiemaatschappij een schadeverzekering afgesloten. De voorwaarden, welke in de polis zijn beschreven, kunnen als volgt worden samengevat:

1) De verzekeringsmaatschappij kent 4 klassen van verzekerden. De transportonderneming betaalt in de eerste klasse een premie van ƒ 1.200.--. Voor de overige klassen bedraagt de premie resp. ƒ 900.--, ƒ 700.-- en ƒ 600.--.
   Indien de transportonderneming gedurende een kalenderjaar geen schade heeft geclaimd, dan wordt zij het volgende jaar, tenzij zij reeds tot de hoogste klasse behoort, ingedeeld in de daarop volgende hogere klasse.
   Voor het geval zij reeds tot de hoogste klasse behoort, blijft zij tot die klasse behoren.

Indien echter de transportonderneming een claim tot schadevergoeding heeft ingediend, dan wordt zij het volgende jaar gerekend te behoren tot de laagste klasse.

2) De transportonderneming behoeft slechts aan het eind van ieder jaar de totale schade op te geven.
Er wordt dan en slechts dan een schadevergoeding uitgekeerd als het schadebedrag groter is dan
a) *f* 750.-- voor de eerste klasse
b) *f* 600.-- voor de tweede klasse
c) *f* 500.-- voor de derde klasse
d) *f* 450 -- voor de vierde klasse.

De laatstgenoemde bedragen zijn de z.g. eigen risico's.

3) De uit te keren schadevergoeding is gelijk aan het schadebedrag verminderd met het eigen risico.

Het is zonder meer duidelijk, dat de transportonderneming in de eerste klasse geen schade zal claimen welke kleiner is dan *f* 1.050.-- Immers zij derft een premieverlaging voor het komende jaar, welke groter is dan de schadeuitkering. Ook voor de overige klassen kan men tot soortgelijke uitspraken geraken. Wellicht is het voor de eerste klasse nog voordeliger om de "claimgrens" hoger te kiezen dan *f* 1.050.--

In deze toepassing zullen wij trachten de optimale "claimgrenzen" $\alpha_i$ $(i=1,\ldots 4)$ voor de vier klassen te berekenen.

Eén en ander hangt uiteraard ook af van de kansverdeling van de totale schade per jaar. Indien de omvang van de schade wordt aangeduid met t, dan wordt de verdelingsfunctie F(t) van t gegeven door de kansdichtheid f(t):

$$f(t) = \frac{1}{1000}\, e^{-\frac{t}{1000}} \qquad (11.1)$$

Oplossing:

Uit het gestelde volgt, dat de transportonderneming, gezien als systeem, zich in 4 toestanden kan bevinden. Deze toestanden zullen wij overeenkomstig het nummer van de klasse aangeven met de getallen 1 t/m 4.

Aangezien men in de eerste klasse geen schade zal claimen, welke kleiner is dan $\alpha_1$, wordt de overgangswh $p_{12}$ gegeven door $F(\alpha_1)$. Op

dezelfde wijze vindt men de overgangswhn $p_{23}$ en $p_{34}$, welke resp. gegeven worden door $F(\alpha_2)$ en $F(\alpha_3)$.
De overgangswh $p_{44}$ is gelijk aan $F(\alpha_4)$
Indien de transportonderneming tot de eerste klasse van verzekerden behoort, zal zij het volgende jaar tot de eerste of tot de tweede klasse behoren. Dit betekent dat $p_{11} + p_{12} = 1$, zodat $p_{11}$ gelijk is aan $1-F(\alpha_1)$.
Op dezelfde wijze vinden we dat de overgangswhn $p_{21}$, $p_{31}$ en $p_{41}$ resp. gelijk zijn aan $1-F(\alpha_2)$, $1-F(\alpha_3)$ en $1-F(\alpha_4)$.
De matrix der overgangswhn heeft dus de volgende gedaante:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-F(\alpha_1) & F(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 1-F(\alpha_2) & 0 & F(\alpha_2) & 0 \\ 1-F(\alpha_3) & 0 & 0 & F(\alpha_3) \\ 1-F(\alpha_4) & 0 & 0 & F(\alpha_4) \end{pmatrix} \end{array} \qquad (11.2)$$

De invariante kansen $q_1$ t/m $q_4$ moeten nu voldoen aan de volgende betrekkingen: (vgl 6.8)

$$\begin{aligned} q_1 &= [1-F(\alpha_1)]q_1 + [1-F(\alpha_2)]q_2 + [1-F(\alpha_3)]q_3 + [1-F(\alpha_4)]q_4 \\ q_2 &= F(\alpha_1)q_1 \\ q_3 &= F(\alpha_2)q_2 \\ q_4 &= F(\alpha_3)q_3 + F(\alpha_4)q_4 . \end{aligned} \qquad (11.3)$$

Hieruit volgt:

$$q_i = \frac{\prod_{j=1}^{i-1} F(\alpha_j)}{\sum_{h=1}^{3} \prod_{k=1}^{h-1} F(\alpha_k) + \frac{\prod_{k=1}^{3} F(\alpha_k)}{1-F(\alpha_4)}} \quad (i=1,2,3)$$

$$q_4 = \frac{\frac{\prod_{k=1}^{3} F(\alpha_k)}{1-F(\alpha_4)}}{\sum_{h=1}^{3} \prod_{k=1}^{h-1} F(\alpha_k) + \frac{\prod_{k=1}^{3} F(\alpha_k)}{1-F(\alpha_4)}} \qquad (11.4)$$

Als het systeem zich in de $i^{de}$ toestand bevindt, dan worden de volgende kosten gemaakt:

1) de premie $A_i$

2) de schade $\underline{t}_i$ als $\underline{t}_i \leq \alpha_i$

de schade $\rho_i$ als $\underline{t}_i > \alpha_i$, waarin $\rho_i$ het eigen risico voorstelt.

De verwachting van de schade voor deze toestand bedraagt dus:

$$A_i + \int_0^{\alpha_i} tf(t)dt + \rho_i \int_{\alpha_i}^{\infty} f(t)dt \; . \qquad (11.5)$$

Voor de verwachting van de schade voor een "heel ver in de toekomst liggend" jaar vinden wij dus:

$$H(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) = \sum_{i=1}^{4} q_i \left\{ A_i + \int_0^{\alpha_i} tf(t)dt + \rho_i \int_{\alpha_i}^{\infty} f(t)dt \right\} \qquad (11.6)$$

Een stel waarden $\alpha_i$ $(i=1, \ldots, 4)$ kan men een strategie noemen en zoals in par. 9 is aangetoond, zijn die waarden van $\alpha_i$ optimaal, waarvoor de uitdrukking (11.6) minimaal wordt.

De optimale waarden van $\alpha_i$ moeten voldoen aan de relaties:

$$\frac{\partial_H (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)}{\partial \alpha_i} = 0 \; . \qquad (i=1,2,3,4) \qquad (11.7)$$

Deze voorwaarden zijn wel noodzakelijk, echter niet voldoende. Aangezien $q_j$ een functie is van $\alpha_i$, is (11.7) gelijkwaardig met:

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} \left\{ A_j + \int_0^{\alpha_j} tf(t)dt + \rho_j \int_{\alpha_j}^{\infty} f(t)dt \right\} + q_i(\alpha_i - \rho_i) f(\alpha_i) = 0 . \qquad (11.8)$$

Uit (11.4) volgt voor $\frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i}$:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} = q_j \sum_{h=1}^{i} q_h \frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} \qquad \text{als} \quad j \geq i+1, \quad i \leq 3$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial q_j}{\partial \alpha_i} = q_j \sum_{h=1}^{i} q_h \frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} - q_j \frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} \quad \text{als} \quad j \leq i, \quad i \leq 3$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial q_j}{\partial q_4} = -q_j q_4 \frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} \qquad \text{als} \quad j \leq 3 \tag{11.9}$$

$$\text{d)}\quad \frac{\partial q_4}{\partial \alpha_4} = q_4(1-q_4) \frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)}$$

Voor de relatie (11.8) mogen wij dus ook schrijven voor $i \leq 3$:

$$\frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} \sum_{h=1}^{i} q_h \sum_{j=1}^{4} q_j \left\{ A_j + \int_0^{\alpha_j} tf(t)dt + \beta_j \int_{\alpha_j}^{\infty} f(t)dt \right\}$$

$$- \frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} \sum_{j=1}^{i} q_j \left\{ A_j + \int_0^{\alpha_j} tf(t)dt + \beta_j \int_{\alpha_j}^{\infty} f(t)dt \right\} +$$

$$+ q_i(\alpha_i - \beta_i) f(\alpha_i) = 0 \tag{11.10}$$

ofwel

$$\frac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} \sum_{h=1}^{i} q_h \left[ H(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) - H_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) + \frac{q_i}{\sum_{k=1}^{i} q_k} (\alpha_i - \beta_i) \right] = 0 \tag{11.11}$$

waarbij

$$H_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) = \sum_{j=1}^{i} \frac{q_j}{\sum_{h=1}^{i} q_h} \left\{ A_j \int_0^{\alpha_j} tf(t)dt + \beta_j \int_{\alpha_j}^{\infty} f(t)dt \right\}. \tag{11.12}$$

Uit (11.11) volgt:

a) $\dfrac{f(\alpha_i)}{F(\alpha_i)} = 0$

of

b) $\sum\limits_{h=1}^{i} q_h = 0$ d.w.z. $q_h = 0$ $h \leq i$ (11.13)

of

c) $H(\alpha_1,\ldots,\alpha_4) - H_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_4) + \dfrac{q_i F(\alpha_i)}{\sum\limits_{h=1}^{i} q_h} (\alpha_i - \rho_i) = 0.$

Uit (11.13a) en (11.1) volgt $\alpha_i = \infty$.
Deze waarden van $\alpha_i$ voldoen aan (11.7). Langs wiskundige weg kan men aantonen dat ze toch niet optimaal zijn, hetgeen ook op intuïtieve gronden voor de hand ligt; immers er wordt wel premie betaald, doch er worden nooit schaden geclaimd
Uit (11.13b) en (11.4) volgt $F(\alpha_4)=1$, m.a.w. in de 4de klasse wordt geen schade geclaimd. Ook deze beslissing is niet de beste.
Na deze overwegingen blijft dus over de relatie (11.13c).
Voor i=4 gaat de relatie (11.8) over in:

$$-q_4 \frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} \sum_{j=1}^{4} q_j \left\{ A_j + \int_0^{\alpha_j} t f(t)\,dt + \rho_j \int_{\alpha_j}^{\infty} f(t)\,dt \right\} +$$

$$+ q_4\, f(\alpha_4)(\alpha_4-\rho_4) + q_4 \frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} \left\{ A_4 + \int_0^{\alpha_4} t f(t)\,dt + \rho_4 \int_{\alpha_4}^{\infty} f(t)\,dt \right\} = 0 \tag{11.14}$$

ofwel

$$\frac{q_4\; f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} \left\{ A_4 + \int_0^{\alpha_4} t f(t)\,dt + \rho_4 \int_{\alpha_4}^{\infty} f(t)\,dt - H(\alpha_1,\ldots,\alpha_4) + \right.$$

$$\left. + (\alpha_4-\rho_4)\left[1-F(\alpha_4)\right] \right\} = 0. \tag{11.15}$$

Uit (11.15) volgt:

a) $$\frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} = 0$$

of

b) $$q_4 = 0 \tag{11.16}$$

of

c) $$\left\{A_4+\int_0^{\alpha_4} tf(t)dt+\beta_4\int_{\alpha_4}^{\infty} f(t)dt-H(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)+(\alpha_4-\beta_4)\left[1-F(\alpha_4)\right]\right\}=0.$$

De relatie (11.16a) is in strijd met (11.1). Immers

$$1-F(\alpha_4) = \int_{\alpha_4}^{\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{t}{1000}}dt = e^{-\frac{\alpha_4}{1000}} \quad \text{en dus}$$

$$\frac{f(\alpha_4)}{1-F(\alpha_4)} = \frac{1}{1000} \neq 0 \quad \text{voor iedere waarde van } \alpha_4.$$

De relatie (11.16b) is gelijkwaardig met de uitspraak: "minstens één van de waarden $\alpha_i$ $(i=1,2,3)$ is onbegrensd". Een dergelijke keuze kan niet optimaal zijn.
Na deze overwegingen blijft dus over de relatie (11.16c). Uit (11.13c) en (11.16c) volgt onmiddellijk:

$$\alpha_i = \beta_i + \left\{H_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_4) - H(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)\right\}\frac{\sum_{h=1}^{i} q_h}{q_i\ F(\alpha_i)} \quad \text{voor } i \leqslant 3$$

$$\alpha_4 = \beta_4 + \frac{H(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)-\left\{A_4+\int_0^{\alpha_4} tf(t)dt+\beta_4\int_{\alpha_4}^{\infty} f(t)dt\right\}}{1-F(\alpha_4)} \tag{11.17}$$

De relaties (11.17) bieden ons 4 vergelijkingen met 4 onbekenden, nl. $\alpha_1,\ldots,\alpha_4$. De optimale waarden van $\alpha_i$ zijn helaas niet op directe wijze te bepalen. Wij trachten daarom met behulp van een iteratie-procedure de optimale waarden van $\alpha_i$ te benaderen. Daartoe kiezen wij een willekeurig stel waarden $\alpha_i^{(0)}$ $(i=1,\ldots,4)$ en substitueren deze waarden voor $\alpha_i$ in de rechterleden van (11.17). De op deze wijze verkregen numerieke waarden van de rechterleden van (11.17) noemen wij $\alpha_i^{(1)}$. Vervolgens substitueren wij deze waarden in de rechterleden van (11.17) en verkrijgen op analoge wijze de waarden $\alpha_i^{(2)}$. Zo voortgaande construeren wij vier getallenrijen $\{\alpha_i^{(n)}\}$ $(i=1,\dots,4)$. Indien ieder van deze getallenrijen convergeert tot een limiet $\alpha_i^*$, dan voldoen de vier waarden $\alpha_i^*$ aan de relaties (11.17).

Deze iteratieprocedure behoeft niet altijd tot een oplossing te leiden. Kiezen wij echter $\alpha_i^{(0)} = A_{i+1} - A_1 + \beta_i$, dan blijkt dat de rijen $\{\alpha_i^{(n)}\}$ convergeren. De onderstaande tabel geeft de waarden van $\alpha_i^{(n)}$ voor n=0,1,2,3,4,5.

Tabel 11.I

Waarden van $\alpha_i^{(n)}$

| n \ i | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1050,00 | 1100,00 | 1100,00 | 1050,00 |
| 1 | 1309,10 | 1465,80 | 1475,82 | 1425,82 |
| 2 | 1319,30 | 1478,32 | 1489,87 | 1439,86 |
| 3 | 1319,39 | 1478,01 | 1489,32 | 1439,32 |
| 4 | 1319,49 | 1478,55 | 1489,87 | 1439,87 |
| 5 | 1319,16 | 1478,23 | 1489,54 | 1439,54 |

De berekeningen zijn steeds met zes decimalen uitgevoerd. Men kan nu bewijzen dat de functie $H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ inderdaad minimaal is voor de volgende (afgeronde) waarden van $\alpha_i^*$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^* &= 1319 \\ \alpha_2^* &= 1478 \\ \alpha_3^* &= 1490 \\ \alpha_4^* &= 1440. \end{aligned}\right\} \qquad (11.18)$$

Verder kan men laten zien dat uit (11.17) volgt

$$\alpha_4^* - \beta_4 = \alpha_3^* - \beta_3 , \qquad (11.19)$$

waarmee we het resultaat (11.18) kunnen controleren. Inderdaad geldt 1440 - 450 = 1490 - 500.

Uit (11.18) volgt tenslotte dat een schade

in de eerste klasse wordt geclaimd als zij groter is dan *f* 1.319.--,
in de tweede klasse wordt geclaimd als zij groter is dan *f* 1.478.--,
in de derde klasse wordt geclaimd als zij groter is dan *f* 1.490.--,
in de vierde klasse wordt geclaimd als zij groter is dan *f* 1.440.--.