STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk XI

# Voorraadproblemen

door

G. de Leve

juli 1960

## 1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen wij enige methoden bespreken, welke gebruikt kunnen worden bij het oplossen van voorraad- en aanverwante problemen.

De redenen, waarom een voorraad wordt aangelegd, kunnen verschillend van aard zijn. Men zou bijv. een voorraad kunnen beheren met de bedoeling om deze te laten dienst doen als buffer tussen de, niet op de minuut op elkaar afgestemde, inkoop en verkoop. Vervolgens worden ook wel eens goederen om speculatieve redenen opgeslagen. Wat ook de beweegredenen mogen zijn om een voorraad te beheren, steeds zal men ervaren, dat op bepaalde tijdstippen de voorraad daalt als gevolg van de verkoop aan klanten, terwijl op andere momenten de voorraad wordt aangevuld met eerder of op hetzelfde ogenblik gedane bestellingen.

De theorie, welke zich bezighoudt met deze problematiek, ontleent haar belang niet alleen aan de veelvuldigheid van situaties, waarin voorraden moeten worden beheerd, maar ook aan de omstandigheid, dat menig vraagstuk zich laat herleiden tot een voorraadprobleem. Een ondernemer, die zich aan het begin van iedere maand of kwartaal afvraagt welk deel van zijn zojuist ontvangen geld belegd moet worden en hoeveel in kas moet blijven ter dekking van de eventuele onkosten in de komende periode, ziet zich voor hetzelfde probleem geplaatst als de voorraadbeheerder van één of ander artikel, dat slechts periodiek kan worden ingekocht. Treffender wordt de overeenkomst als verder gegeven is dat de ondernemer geld kan lenen tegen een hoge rente en dat de beheerder een boete wordt opgelegd, waarvan de grootte afhangt van de achterstand in zijn afleveringen en de tijdsduur van de vertraging. Zo kunnen ook problemen, welke betrekking hebben op het winnen van electriciteit uit waterkracht of verband houden met de vervanging van defecte onderdelen bij een machine opgevat worden als voorraadproblemen.

In het hierna volgende zullen wij steeds gebruik maken van de voorraad-terminologie om tot een scherpere formulering van de verschillende typen van problemen te geraken, zonder daarbij afstand te doen van de pretentie een meer omvattende verzameling van problemen te bespreken.

Gelijk bij vele andere onderwerpen uit de besliskunde wordt men ook hier geconfronteerd met de vraag: "hoe kan men in een concrete situatie op grond van gegevens uit het verleden en verwachtingen voor de toekomst op een verantwoorde wijze een beslissing nemen". De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat meestal hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden. Bij het opstellen van deze criteria worden veelal veronderstellingen gemaakt waaraan slechts in eerste benadering is voldaan.

Wij zullen ons tijdens de besprekingen van de diverse methoden niet laten verleiden tot een discussie over het al of niet houdbaar zijn van dergelijke veronderstellingen, omdat het slechts de bedoeling is inzicht te verschaffen in de wijze, waarop men voorraden kan oplossen.

De voorraadproblemen, welke wij in dit hoofdstuk zullen bespreken bezitten steeds één van de hieronder vermelde alternatieve eigenschappen:

I De vraag naar goederen door de cliënten is
   a) constant
   b) stochastisch.

II De besteltijdstippen
   a) zijn van tevoren gegeven
   b) kunnen vrij gekozen worden.

III De inkoopkosten zijn op een eventuële constante na
   a) evenredig met de omvang van de door de voorraadbeheerder te plaatsen order
   b) niet noodzakelijk evenredig met de omvang.

IV De kosten, welke direct verband houden met het beheren van de voorraad, waaronder ook is begrepen de derving aan renten door investering, zijn
   a) te verwaarlozen
   b) evenredig met de grootte van de voorraad en de tijd dat deze goederen zijn opgeslagen.

V De levertijd van de door de voorraadbeheerder bestelde goederen is
- a) te verwaarlozen
- b) constant
- c) stochastisch.

VI Indien de voorraad niet toereikend is, dan wordt de achterstand
- a) later ingelopen door nalevering; de voorraadbeheerder moet dan een boete betalen, welke evenredig is met de omvang van de achterstand en berekend wordt per tijdseenheid
- b) onmiddellijk opgeheven door noodinkopen. De inkoopprijs per stuk is nu aanmerkelijk hoger dan de gemiddelde inkoopprijs bij normale inkoop.

Aan de hand van voorbeelden zullen wij de verschillende typen onderscheiden en de bijbehorende oplossingsmethode toelichten.

In hoofdstuk VII hebben wij reeds in de paragraaf Keuzeproblemen een drietal voorraadproblemen ontmoet.

Het eerste voorbeeld (1.1) voldeed aan de eigenschappen (Ib; IIa; IIIb; IVa; Va en VIb).

Het tweede voorbeeld (1.2) is eigenlijk ook een voorraadprobleem en wel van het type (Ib; IIa; IIIa; IVb, Va en VIa). Immers het geld vervult hier de functie van goederen en de cliënten zijn de schuldeisers. Het opnemen van geld bij de Melkfabriek kan beschouwd worden als het bestellen en ontvangen van goederen. De levertijd is dus gelijk aan nul (Va). De rente, welke de boer aan de bank moet betalen is dan de boete, waarover in VIa wordt gesproken.

Het derde voorbeeld (1.3) in hoofdstuk VII wordt gekenmerkt door de eigenschappen (Ib; IIa; IIIb; IVb, Va en VIb). Het verlies aan goodwill kan opgevat worden als het bedrag, dat de verkoper bereid is te betalen om de klant tevreden te stellen, bijv. door het gevraagde hoedje tegen de winkelprijs bij een collega te kopen (VIb).

## 2. Het eerste voorbeeld. (Ia+b; IIa; IIIa; IVb; Va; VIa)

In ons eerste voorbeeld zullen wij aannemen, dat wij belast zijn met de inkoop van grondstoffen voor een grossier. Voor de eenvoud zullen wij ons beperken tot één soort grondstof, die in elke gewenste hoeveelheid op vastgestelde tijdstippen, bijv. op de eerste dag van de maand, kan wor en ingekocht.

De behoefte aan deze grondstof wordt eerst constant ondersteld, maar later zullen wij aannemen, dat de vraag een kansverdeling volgt.

Wanneer er op een gegeven ogenblik geen voldoende voorraad aanwezig is, treedt er in de verkoop een stagnatie op, welke zeer nadelig is. Met de aflevering van de door de klanten bestelde goederen moet dan worden gewacht totdat er weer nieuwe grondstoffen ontvangen zijn. Aangezien aangenomen wordt dat de ingekochte goederen direct worden afgeleverd, kan men er steeds voor zorgen, dat bij de aanvang van de nieuwe periode geen tekort aan grondstoffen bestaat.

Het behoort nu tot onze taak om de omvang van de te bestellen hoeveelheden te bepalen.

Indien de <u>inkoopkosten</u> voor een partij van de grootte q worden gegeven door $Q(q) = rq$, dan maakt het op grond van de inkoopkosten niet uit of men uit voorraad verkoopt of nalevert.

Er zijn echter twee soorten van kosten welke wel de keuze van de bestelgrootte q beïnvloeden. In de eerste plaats de voorraadkosten, welke $C_1$ bedragen voor iedere eenheid één tijdseenheid in voorraad. Deze kosten worden o.a. gevormd door de rentederving van het in de goederen geïnvesteerde kapitaal. Vervolgens worden er <u>boeten</u> geheven van de grootte $C_2$ voor elke eenheid één tijdseenheid te laat afgeleverd.

Enerzijds zullen wij bij de bepaling van de ordergrootte trachten een eventuele achterstand te voorkomen, terwijl wij aan de andere kant ervoor willen waken, dat onze voorraden niet te groot worden. In onze voorraadpolitiek moeten wij aan deze elkander tegengestelde verlangens op een zodanige wijze tegemoet komen, dat de totale kosten aan de voorraadvorming verbonden minimaal zijn.

Doordat het steeds slechts mogelijk is op van te voren vastgestelde tijdstippen $\theta_n (n=1, \ldots .)$ goederen te kopen ontstaan er tijdsintervallen tussen deze tijdstippen. Voor de eenvoud kiezen wij de tijdsduur van deze intervallen gelijk aan de tijdseenheid.

Met $R_0$ geven wij de restantvoorraad aan op het besteltijdstip, terwijl $R_1$ de restantvoorraad aanduidt aan het eind van het interval. Indien wij de ordergrootte aangeven met q, dan zal de voorraad V na ontvangst van de order

$$V = R_0 + q \tag{2.1}$$

bedragen.

De grootheid x is bestemd voor de vraag gedurende het tijdsinterval. Voor de restantvoorraad $R_1$ volgt dan:

$$R_1 = V - x \; . \tag{2.2}$$

Bij een niet toereikende voorraad zullen de grootheden $R_1$ en $R_0$ negatieve waarden aannemen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de kosten voor de komende periode zo klein mogelijk zijn."

Om deze kosten te berekenen zullen wij twee gevallen onderscheiden:

1. In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien, m.a.w. $x \leqslant V$ en dus $R_1 \geqslant 0$. De gemiddelde voorraad wordt dan gegeven door

$$\tfrac{1}{2}(R_1 + V) = V - \tfrac{1}{2}x \tag{2.3}$$

en de daaruit voortkomende voorraadkosten bedragen:

$$K_1(V) = (V - \tfrac{1}{2}x)\; C_1 \tag{2.4}$$

De functie $K_1(V)$ is onder de voorwaarde $x \leqslant V$ minimaal voor $x = V$. De minimale waarde van $K_1(V)$ bedraagt dan $\tfrac{1}{2}xC_1$.

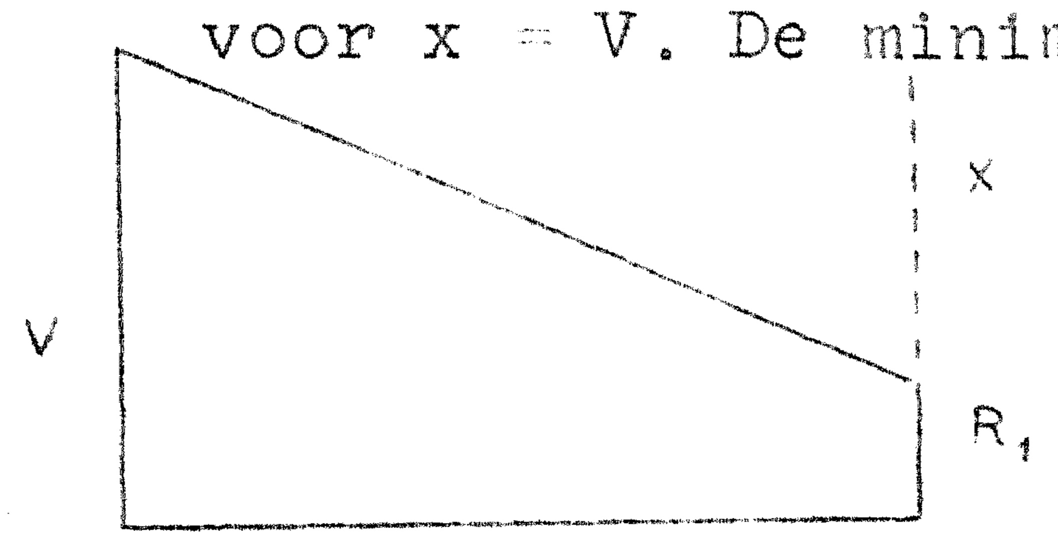


fig. 2.1

Voldoende voorraad

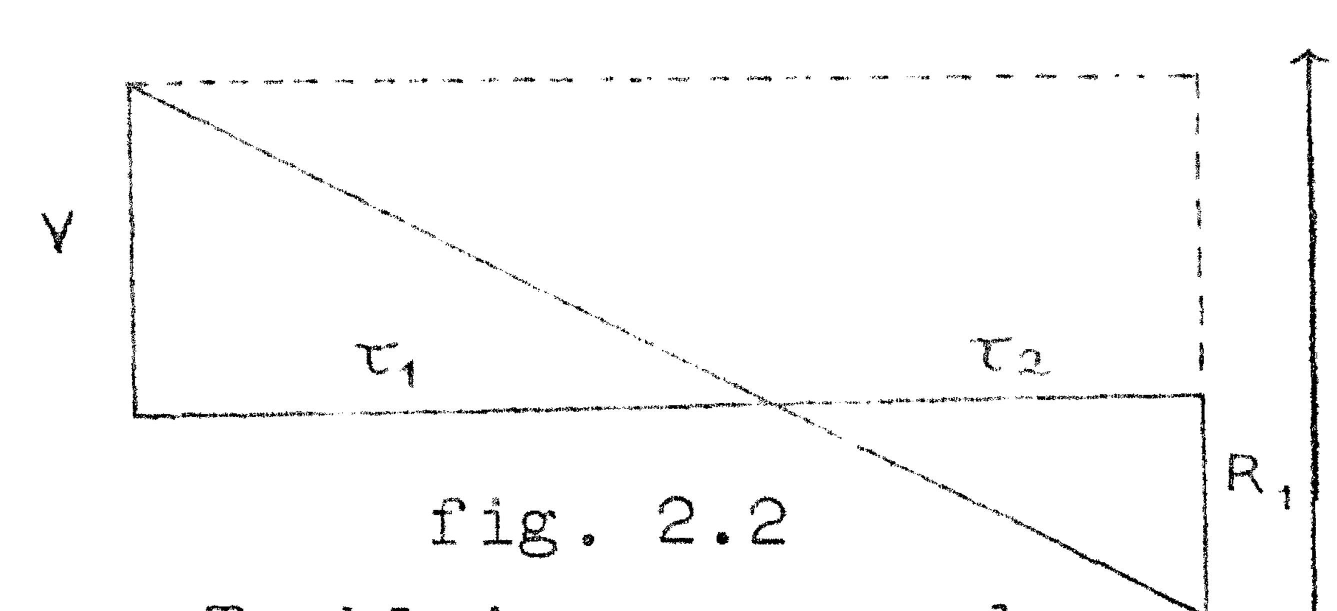


fig. 2.2

Te kleine voorraad

2. In de behoefte kan niet geheel door de voorraad worden voorzien, m.a.w. $x > V$ en $R_1 < 0$. Er is gedurende een periode $\tau_1$ een positieve voorraad en vervolgens een tekort. Als wij wederom aannemen, dat de vraag tijdens deze perioden constant is, dan is de gemiddelde voorraad gedurende de periode $\tau_1$ gelijk aan

$\frac{1}{2}V$ en het gemiddelde tekort tijdens de periode $\tau_2$ $\frac{1}{2}|R_1|$ en de totale daaruit voortkomende kosten worden gegeven door:

$$K_2(V) = \tfrac{1}{2}V\tau_1 C_1 + \tfrac{1}{2}(x-V)\tau_2 C_2 . \tag{2.5}$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat voor $\tau_1$ en $\tau_2$ resp. gelden de betrekkingen:

$$\tau_1 = \frac{V}{x} \tag{2.6}$$

$$\tau_2 = \frac{x-V}{x} \quad . \tag{2.7}$$

Verwerken wij deze resultaten in de betrekking (2.5), dan vinden wij tenslotte voor de totale kosten als $x > V$ is:

$$K_2(V) = \tfrac{1}{2}\left[\frac{V^2 C_1 + (V-x)^2\, C_2}{x}\right] . \tag{2.8}$$

De totale kosten worden dus gegeven door

$$K(V) = \begin{cases} (V-\tfrac{1}{2}x)C_1 & \text{als } V > x \\ \tfrac{1}{2}\left[\dfrac{V^2C_1+(V-x)^2C_2}{x}\right] & \text{"} \quad V \leqslant x \end{cases} \tag{2.9}$$

De functie $K(V)$ is een continue en differentieerbare functie van V

$$K'(V) = \begin{cases} C_1 & \text{als } V \geqslant x \\ \dfrac{VC_1 + (V-x)C_2}{x} & \text{"} \quad V \leqslant x \end{cases} \tag{2.10}$$

De functie $K'(V)$ is overal continu en differentieerbaar behalve in $V=x$. Nu geldt:

$$K''(V) = \begin{array}{ll} 0 & \text{als } V > x \\ \dfrac{C_1+C_2}{x} > 0 & \text{"} \quad V < x . \end{array} \tag{2.11}$$

De functie $K(V)$ is dus minimaal als voor V geldt:

$$K'(V) = 0$$

of

$$V = \frac{x\ C_2}{C_1 + C_2} . \tag{2.12}$$

Dit betekent dat een voorraad x kleiner dan de behoefte optimaal kan zijn. Zoals wij weten is V de voorraad, welke overblijft na opheffing van de eventuele achterstand. De te bestellen hoeveelheid grondstoffen wordt dus gegeven door:

$$q = V - R_0 \quad . \tag{2.13}$$

Indien de vraag in iedere periode gelijk is dan zal, als ook in voorgaande perioden met een optimale voorraad $V = \frac{C_2 x}{C_1 + C_2}$ gestart wordt, de restantvoorraad $R_0$ gegeven worden door

$$R_0 = - \frac{x\, C_1}{C_1 + C_2} \quad . \tag{2.14}$$

Uit (2.13) en (2.14) volgt dan tenslotte:

$$q = \frac{x\, C_2}{C_1 + C_2} + \frac{x\, C_1}{C_1 + C_2} = x . \tag{2.15}$$

Dit resultaat konden wij uiteraard verwachten.

Veelal echter is de vraag x geen gegeven getal, maar een stochastische grootheid, waaraan een kansverdeling is toegevoegd.

Ons probleem luidt nu: Hoeveel grondstoffen moeten wij op het besteltijdstip inslaan, opdat de verwachting van de totale kosten voor de komende periode zo klein mogelijk is. Immers ook deze verwachting zal afhankelijk zijn van de nog te kiezen beginvoorraad V.

Voor het geval, dat de verdelingsfunctie F(x) een kansdichtheid f(x) bezit, kan de verwachting van de kosten als volgt worden uitgedrukt:

$$K(V) = \int_0^V (V - \tfrac{1}{2}x) C_1 f(x) dx + \int_V^\infty \left\{ \tfrac{1}{2} V^2 C_1 + \tfrac{1}{2} (V-x)^2 C_2 \right\} \frac{f(x)}{x} dx . \tag{2.16}$$

Deze betrekking werd opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (2.4) en (2.8)[1]. Bij het opstellen van deze relatie wordt dus aangenomen dat de vraag voor het gehele tijdsinterval weliswaar stochastisch is, maar het verloop <u>tijdens</u> het tijdsinterval

--------

1) E. Naddor:
Some models of inventory and an application. Management Science. Vol.2 nr 4. 1956, blz. 299 e.v.

constant is.

Wij zullen nu onze beginvoorraad zo kiezen, dat de verwachting van de te maken onkosten, K(V), minimaal wordt, m.a.w. voor de gezochte optimale waarde $V^*$ van V moet gelden

$$\left(\frac{dK(V)}{dV}\right)_{V=V^*} = 0. \tag{2.17}$$

Na een weinig rekenen blijkt (2.17) gelijkwaardig te zijn met:

$$F(V^*) + V^* \int_{V^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} . \tag{2.18}$$

Aangezien men kan bewijzen, dat:

$$M(V) \overset{def}{=} F(V) + V \int_{V}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx \tag{2.19}$$

een monotoon stijgende functie is van V, welke voor V=0 de waarde nul heeft en V=10 een waarde $\geqslant 1$, is $V^*$ ondubbelzinnig bepaald. De functie K(V) heeft dus maar één extremum en aangezien $K(\infty) = \infty$, moet dit een minimum zijn. De optimale ordergrootte wordt dan gegeven door:

$$q^* = V^* - R_0 \tag{2.20}$$

waarbij $R_0$ op het besteltijdstip bekend is.

In de inleiding hebben wij nogal vaag gezegd: "De wiskundige oplossing van deze vraagstukken bestaat hierin, dat een criterium wordt opgesteld met behulp waarvan het maken van beslissingen op een ondubbelzinnige wijze kan geschieden."

Het criterium ziet er nu als volgt uit:

$$M(V^*) = F(V^*) + V^* \int_{V^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \frac{C_2}{C_1 + C_2} . \tag{2.21}$$

M(V) is een functie van V en $M(V^*) = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ geeft een vergelijking waaruit $V^*$ kan worden opgelost.

In dit voorbeeld hebben wij verondersteld dat de vraag een continue verdeling bezit. Wij zullen echter in een later voorbeeld aantonen, dat voor discrete verdelingen op analoge wijze een criterium kan worden opgesteld.

3. Het tweede voorbeeld. (Ia-b; IIb; IIIb; IVb; Va)

In ons tweede voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip. Om de gedachten te bepalen zullen wij veronderstellen, dat van een voorraad machine-onderdelen het beheer aan ons is toevertrouwd.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs $Q(q)$ te betrekken bij de dealer.

De voorraadkosten bedragen $C_1$ per eenheid en per tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Aan deze vraag moet worden voldaan. Later zullen wij een benaderingsmethode geven met behulp waarvan ook voorraadproblemen kunnen worden opgelost, waarin afnamen van meer dan één eenheid voorkomen.

Aangezien de door ons bestelde goederen terstond worden afgeleverd, zal pas een nieuwe bestelling worden opgegeven, indien niet meer aan de behoefte kan worden voldaan. (zie fig. 3.1)

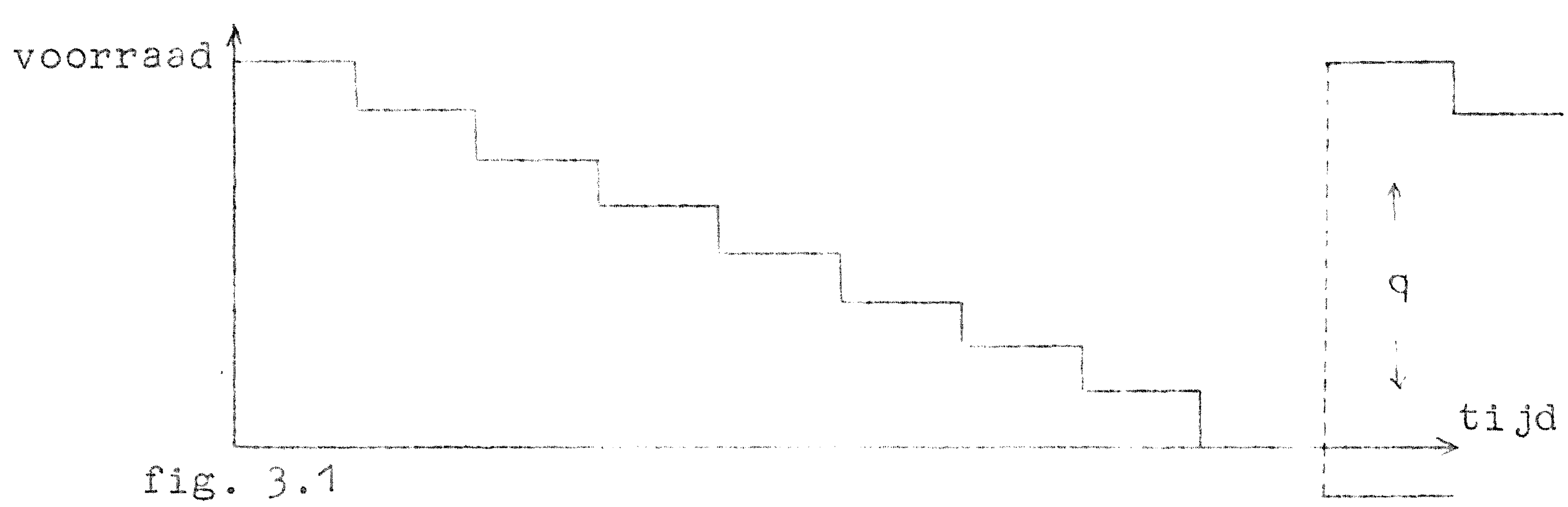


fig. 3.1
Het verloop van de voorraad.

Indien q de hoeveelheid ingekochte goederen voorstelt, dan daalt de voorraad van q-1 tot nul, in het tijdsinterval tussen twee opéénvolgende besteltijdstippen.

Als de vraag constant is en gegeven wordt door $\alpha$ eenheden per tijdseenheid, dan zal om de $\frac{1}{\alpha}$ tijdseenheden een nieuw onderdeel moeten worden verstrekt.

Men kan nu eenvoudig nagaan dat de voorraadkosten voor het gehele tijdsinterval gegeven worden door:

$$\frac{C_1}{\alpha}\sum_{i=1}^{q-1}(q-i) = \frac{C_1}{\alpha}\sum_{i=1}^{q-1} i = \frac{\frac{1}{2}C_1 q(q-1)}{\alpha} . \tag{3.1}$$

De inkoopkosten bedragen $Q(q)$, zodat voor de totale kosten $K(q)$ gevonden wordt:

$$K(q) = \frac{\frac{1}{2}q(q-1)C_1}{\alpha} + Q(q) . \tag{3.2}$$

Aangezien zowel $\frac{\frac{1}{2}q(q-1)C_1}{\alpha}$ als $Q(q)$ monotoon niet dalende functies zijn van $q$, wordt de minimale waarde van $K(q)$ bereikt voor $q=0$. Deze waarde van $q$ is echter uitgesloten, omdat altijd aan de vraag moet worden voldaan en dus vinden wij $q=1$ als optimale bestelgrootte.

Wanneer wij deze oplossing aan een nadere beschouwing onderwerpen, dan blijkt dat de optimale keuze van $q$ niet afhangt van de waarde van $C_1$ en de wijze, waarop kortingen worden verleend voor grote orders.

De hierboven gegeven oplossingsmethode is dan ook niet juist.

Men dient zich nl. allereerst af te vragen welk doel men met de inkooppolitiek tracht te bereiken. Daartoe kan men de volgende criteria onderscheiden:

1) Van de optimale inkooppolitiek wordt verwacht, dat voor een zeer lange van te voren gegeven periode de (verwachting van de) totale kosten over die periode lager zijn dan van elke andere politiek.
2) Van de optimale inkooppolitiek wordt geëist dat de totale kosten in een periode (of de verwachting van die kosten) waar in een van te voren gegeven zeer grote hoeveelheid goederen wordt verbruikt, minimaal zijn.

Men kan onder zeer algemene voorwaarden bewijzen dat beide criteria dezelfde optimale inkooppolitiek aanwijzen indien "zeer groot" door onbegrensd wordt vervangen in de beide criteria.

Aangezien wij op ieder besteltijdstip aannemen, dat wij aan het begin staan van een periode, zoals deze wordt ondersteld in één van de beide criteria en daar bovendien deze beginsituaties volkomen identiek zijn, zullen ook de ordergrootten steeds gelijk zijn.

Stel dat wij onze overwegingen baseren op het tweede criterium en dat wij vervolgens twee alternatieve inkooppolitieken $S_1$ en $S_2$ vergelijken met de bestelgrootten resp. $q_1$ en $q_2$.

Kiezen wij nu als "zeer grote hoeveelheid" de waarde $Nq_1q_2$ dan zijn er $Nq_2$ tijdsintervallen, waarin $q_1$ wordt verbruikt en $Nq_1$ tijdsintervallen, waarin in totaal $q_2$ wordt gevraagd.

De kosten worden dan voor de politiek $S_1$ gegeven door:

$$Nq_2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1) \right\} \tag{3.3}$$

en voor de politiek $S_2$ door:

$$Nq_1 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2) \right\} \tag{3.4}$$

De politiek $S_1$ is te verkiezen boven $S_2$ als geldt:

$$Nq_2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)C_1}{\alpha} + Q(q_1) \right\} < Nq_1 \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)C_1}{\alpha} + Q(q_2) \right\} \tag{3.5}$$

of na deling door $Nq_2q_1$:

$$\left\{ \frac{\frac{1}{2}q_1(q_1-1)\frac{C_1}{\alpha} + Q(q_1)}{q_1} \right\} < \left\{ \frac{\frac{1}{2}q_2(q_2-1)\frac{C_1}{\alpha} + Q(q_2)}{q_2} \right\} . \tag{3.6}$$

Uit de ongelijkheid (3.6) kan men zonder veel moeite vaststellen, dat voor een optimale politiek moet gelden:

$$k(q) = \frac{\frac{1}{2}(q-1)C_1}{\alpha} + \frac{Q(q)}{q} \tag{3.7}$$

is minimaal.

Bezwaar kan gemaakt worden tegen het subjectieve element "zeer groot" in de beide criteria. De basis ongelijkheid (3.6) is echter onafhankelijk van N.

Schrijven wij vervolgens voor $Q(q)$:

$$Q(q) = q\, b(q) + C_0 , \tag{3.8}$$

dan geldt als het minimum van $k(q)$ bereikt wordt voor $q=q^*$:

$$k'(q^*) = \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_0}{(q^*)^2} = 0. \qquad (3.9)$$

Het beslissingscriterium M(q) wordt in dit voorbeeld dus gegeven door

$$M(q) \equiv \frac{C_1}{2\alpha} + b'(q) - \frac{C_0}{q^2} \quad . \qquad (3.10)$$

Voor de optimale waarde $q^*$ van q geldt dus: $M(q^*) = 0$.

Indien Q(q) is van de vorm:

$$Q(q) = qa + C_0 , \qquad (3.11)$$

dan geldt: $b'(q) = 0$ en vinden wij voor de optimale bestelgrootte $q^*$:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\alpha C_0}{C_1}} \quad . \text{ 1)} \qquad (3.12)$$

Veelal is de vraag niet constant, maar een stochastische grootheid, waaraan een kansverdeling is toegevoegd. Wij zullen nu aannemen, dat de kansverdeling van de vraag voor alle intervallen met een gegeven lengte gelijk is, onverschillig de ligging van het begintijdstip.

Behalve met de kansverdeling van de vraag $\underline{x}$ in een periode met gegeven lengte T, zullen wij ons ook bezighouden met de verdeling van de lengte $\underline{t}_X$ van de periode, waarin een vaste hoeveelheid X wordt gevraagd.

Beschouw een voorraad van de grootte X, de grootheid $\underline{t}_X$ geeft dan de lengte van de tijdsduur aan tot het moment, waarop de laatste eenheid het magazijn verlaat. Deze tijdsduur is stochastisch; immers de vraag is stochastisch en men kan dus nooit met absolute zekerheid zeggen wanneer bepaalde hoeveelheden uit de voorraad worden weggehaald.

De kansverdeling van $\underline{t}_X$ volgt nu ondubbelzinnig uit die van $\underline{x}$. Intuïtief voelt men aan dat $\mathcal{E}\underline{t}_X$ min of meer evenredig moet zijn met X. Immers, zo zou men kunnen redeneren, de lengte van

--------

1) Eigenlijk mag men <u>niet</u> differentiëren. Immers q neemt alleen gehele waarden aan. Bovenstaande beweringen gaan echter ook op als de behoefte in een periode niet noodzakelijk gehele waarden aanneemt.

het tijdsinterval waarin $X_1 + X_2$ wordt verbruikt is gelijk aan de som van de tijdsintervallen, waarin resp. de vraag $X_1$ en $X_2$ bedraagt. Deze redenering is slechts dan juist indien de afname steeds één eenheid groot is. Aangezien wij in het hierna volgende ook afnamen van meer dan één eenheid zullen toelaten, kan het dus voorkomen, dat aan het bein van het tweede tijdsinterval meer dan $X_1$ is verbruikt.

In vele gevallen echter kan eenvoudig worden aangetoond, dat geldt:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\mathcal{E}\underline{t}_x}{x} = \frac{1}{\alpha} \tag{3.13}$$

waarbij $\alpha$ de gemiddelde vraag per tijdseenheid voorstelt.

Alhoewel het dus niet altijd waar is, zullen wij in dit hoofdstuk steeds schrijven:

$$\mathcal{E}\underline{t}_x = \frac{x}{\alpha} \quad . \tag{3.14}$$

De onnauwkeurigheden, die hierdoor ontstaan, zijn te verwaarlozen en hebben op het uiteindelijke antwoord geen invloed.

Thans zullen wij de verwachting van de kosten berekenen voor een tijdsinterval, waarvan de bijbehorende bestelgrootte gegeven wordt door q. De verwachting van de tijdsduur van de periode tussen twee op elkander volgende momenten, waarop een onderdeel uit het magazijn wordt gehaald, is gelijk aan $\frac{1}{\alpha}$. Beschouwen wij nu zo'n periode en laten wij aannemen, dat in de voorgaande perioden reeds i eenheden zijn gevraagd, dan is de voorraad in die periode (q-i) eenheden groot en bedraagt de verwachting voor de voorraadkosten voor die periode derhalve $\frac{C_1(q-i)}{\alpha}$. Wij vinden nu voor de totale kosten:

$$K(q) = C_1 \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(q-i)}{\alpha} + Q(q) = \tfrac{1}{2}C_1 \frac{q(q-1)}{\alpha} + Q(q) \quad . \tag{3.15}$$

Vergelijken wij wederom twee alternatieve bestelpolitieken $S_1$ en $S_2$, dan kunnen wij op analoge wijze aantonen, dat voor de optimale bestelpolitiek moet gelden:

$$k(q) = \frac{\tfrac{1}{2}C_1(q-1)}{\alpha} + \frac{Q(q)}{q} \tag{3.16}$$

is minimaal.

Aangezien de relaties (3.7) en (3.16) identiek zijn, volgt dat de resultaten welke werden verkregen in het niet stochastische geval ook geldig zijn voor die situaties, waarin de vraag een kansverdeling volgt. Van bovenstaand voorbeeld zullen wij nu een toepassing bespreken.

Toepassing No 1

Gegeven een machine, waarvan één van de onderdelen zeer kwetsbaar is. Gemiddeld gaan er in totaal 10 per week stuk. De inkoopprijs van zo'n onderdeel bedraagt ƒ 100.-, terwijl bij iedere bestelling onafhankelijk van de omvang een bedrag van ƒ 20.- aan extra kosten wordt gemaakt. Het bedrijf maakt elk jaar 26% winst op het bedrijfskapitaal.

Indien wij de week als tijdseenheid kiezen, dan volgt uit deze gegevens:

$$C_1 = \frac{1}{52} \times 0{,}26 \times 100 = 0{,}5$$

$$\alpha = 10 \tag{3.17}$$

$$Q(q) = 100q + 20$$

en dus $C_0 = 20$.

Uit de formule (3.12) volgt dan voor de optimale bestelgrootte:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\alpha C_0}{C_1}} = \sqrt{\frac{2.10.20}{0{,}5}} = \sqrt{800} \approx 28. \tag{3.18}$$

4. Het derde voorbeeld. (Ib; IIa; IIIa; IVb; Vb; VIa)

Het derde voorbeeld is een generalisatie van het eerste besproken probleem. In het eerste voorbeeld hebben wij verondersteld, dat wij belast waren met het beheer van een voorraad grondstoffen, welke op van tevoren gegeven tijdstippen kon worden aangevuld.

Zoals wij reeds vaststelden ontstaan tussen de afleveringstijdstippen $\theta_n$ intervallen, waarvan de lengten gelijk waren aan de tijdseenheid. Wij zullen nu aannemen, dat de levertijd k tijdseenheden bedraagt. M.a.w. de hoeveelheid goederen $q_n$, welke op $\theta_n$ dient aan te komen, moet men op $\theta_{n-k}$ bestellen.

De voorraad op $\theta_n$, na ontvangst van de goederen, en eventuele opheffing van de achterstand, zal worden aangegeven met $V_n$. Deze grootheid zal negatieve waarden aannemen, indien de achterstand groter is dan de omvang van de te ontvangen order.

De restantvoorraad op $\theta_n$, voor de aankomst van de bestelling $q_n$, wordt vastgelegd door $R_{n-1}$, terwijl de voorraad aan het eind van de periode wordt aangeduid met $R_n$.

De behoefte aan grondstoffen in de periode $(\theta_n, \theta_{n+1})$ wordt aangegeven door $x_n$.

Wij verkrijgen nu de volgende betrekkingen:

$$V_n = R_{n-1} + q_n \tag{4.1}$$

$$R_n = V_n - x_n \tag{4.2}$$

$$V_n = V_{n-1} + q_n - x_{n-1} \tag{4.3}$$

$$R_n = V_{n-1} + q_n - x_{n-1} - x_n. \tag{4.4}$$

Doordat men enige tijd van tevoren moet bestellen kan men slechts op langere termijn invloed uitoefenen op de omvang van de voorraad. Op het tijdstip $\theta_{n-k}$ weet men niet hoe groot de behoefte zal zijn in de periode $(\theta_{n-k}, \theta_n)$. Het is dan ook niet uitgesloten, dat op het tijdstip $\theta_n$ blijkt, dat een op $\theta_{n-k}$ gedane bestelling te klein was om het tekort op te heffen, waardoor $V_n$ negatieve waarden kan nemen.

Uit (4.1), (4.2), (4.3) en (4.4) volgt onmiddellijk:

$$V_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} x_i, \tag{4.5}$$

en

$$R_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n - \sum_{i=n-k}^{n-1} x_i - x_n. \tag{4.6}$$

Wij schrijven nu voor:

$$\left.\begin{array}{l} V_{n-k} + \sum\limits_{i=n-k+1}^{n-1} q_i \stackrel{\text{def}}{=} X_{n-k}, \\ \sum\limits_{i=n-k}^{n-1} x_i = y, \\ x_n = x \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

De grootheid $X_{n-k}$ geeft dus op het tijdstip $\theta_{n-k}$ de som aan van de voorraad en de hoeveelheid reeds in bestelling.
De betrekkingen (4.5) en (4.6) gaan dan over in:

$$V_n = X_{n-k} + q_n - y = z_n - y \qquad (4.8)$$

en

$$R_n = X_{n-k} + q_n - x - y = z_n - x - y \qquad (4.9)$$

waarbij

$$z_n \stackrel{\text{def}}{=} X_{n-k} + q_n . \qquad (4.10)$$

De variabelen y en x stellen resp. de behoeften aan grondstoffen voor in de k tussen-liggende perioden en in de $n^{de}$ periode. Vervolgens veronderstellen wij dat deze variabelen resp. de verdelingsfuncties $G(y)$ en $F(x)$ bezitten. Het probleem luidt nu weer: Kies $q_n$ zodanig dat de verwachting van de te maken onkosten minimaal wordt.

Er kunnen zich in de $n^{de}$ periode drie gevallen voordoen:

1. De behoefte kan uit de voorraad worden gedekt, m.a.w.

   $V_n = z_n - y \geq 0$ en $x_n = x \leq z_n - y$.

2. Er is weliswaar aan het begin van de $n^{de}$ periode een voorraad, maar aan het eind een tekort, m.a.w.

   $V_n = z_n - y \geq 0$ en $x > V_n = z_n - y$.

3. De afgeleverde bestelling op het tijdstip $\theta_n$ was niet voldoende om het op dat moment al bestaande tekort op te heffen, zodat er gedurende de gehele periode een tekort is, m.a.w.

   $z_n - y \leq 0$ en $x > z_n - y = V_n$.

In de figuren (4.1), (4.2) en (4.3) zijn deze 3 mogelijkheden aangegeven:

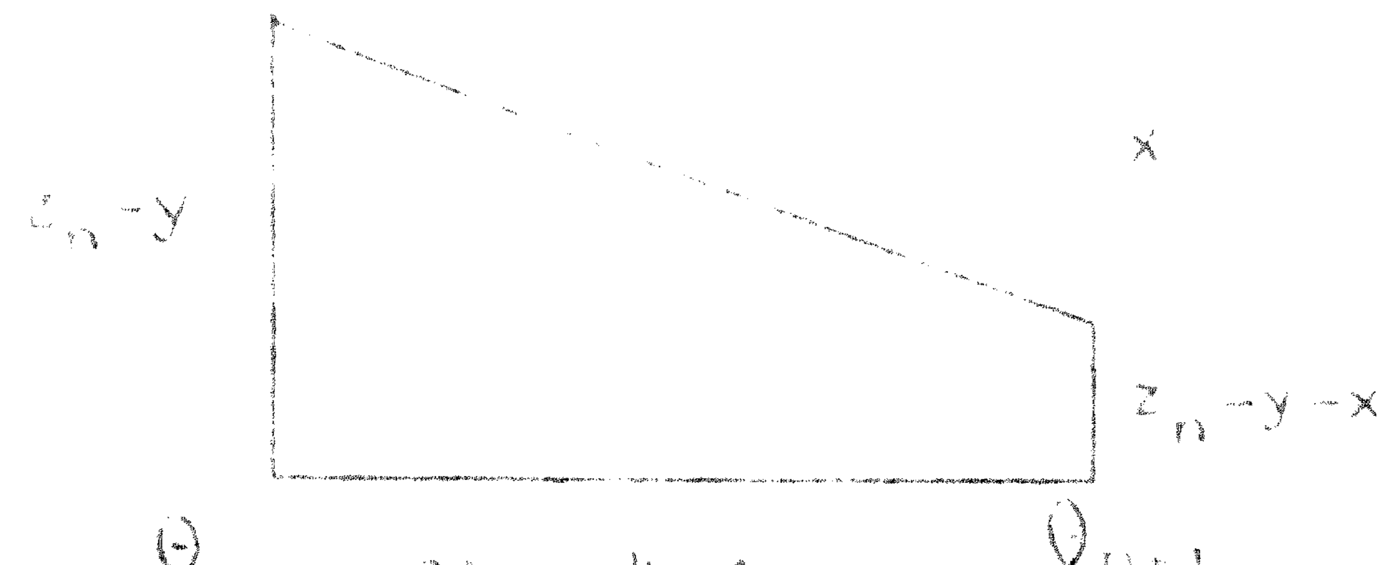


fig. 4.1

Het verloop bij positieve begin- en eindvoorraden

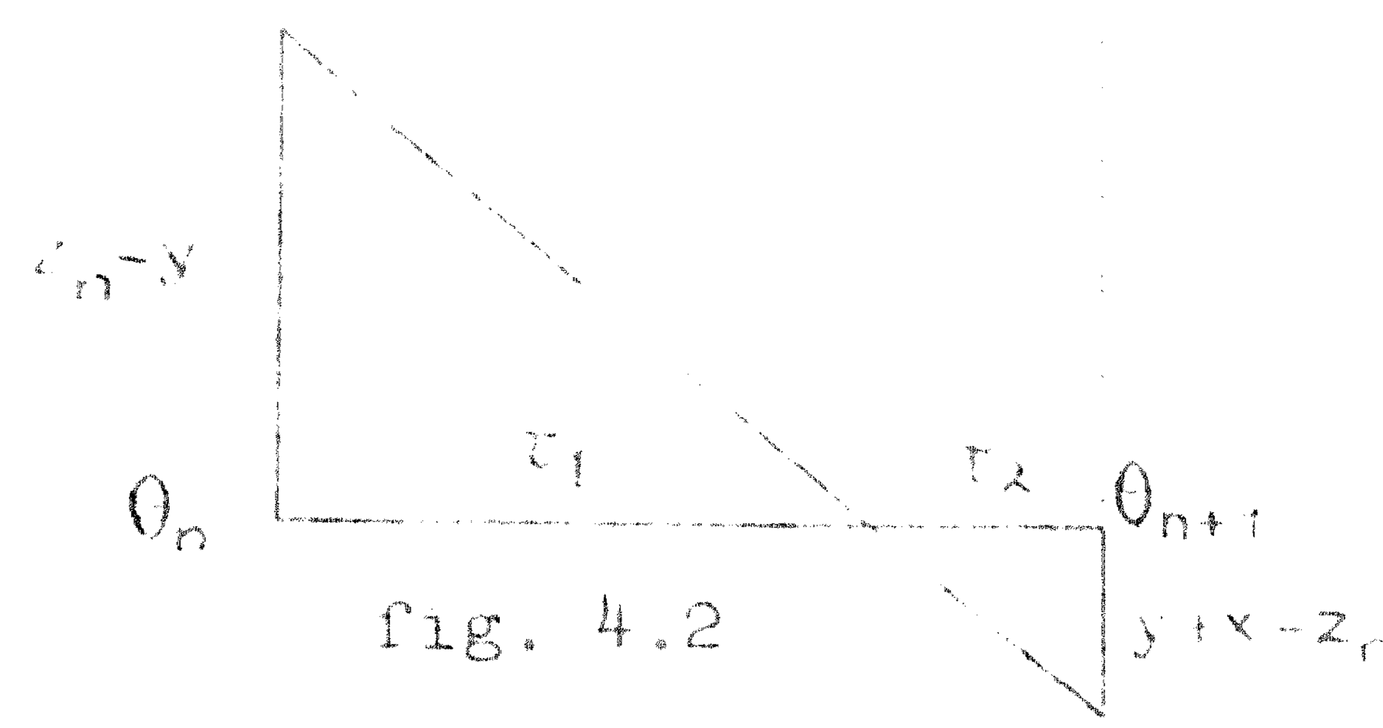


fig. 4.2

Het verloop bij positieve begin- en negatieve eindvoorraad

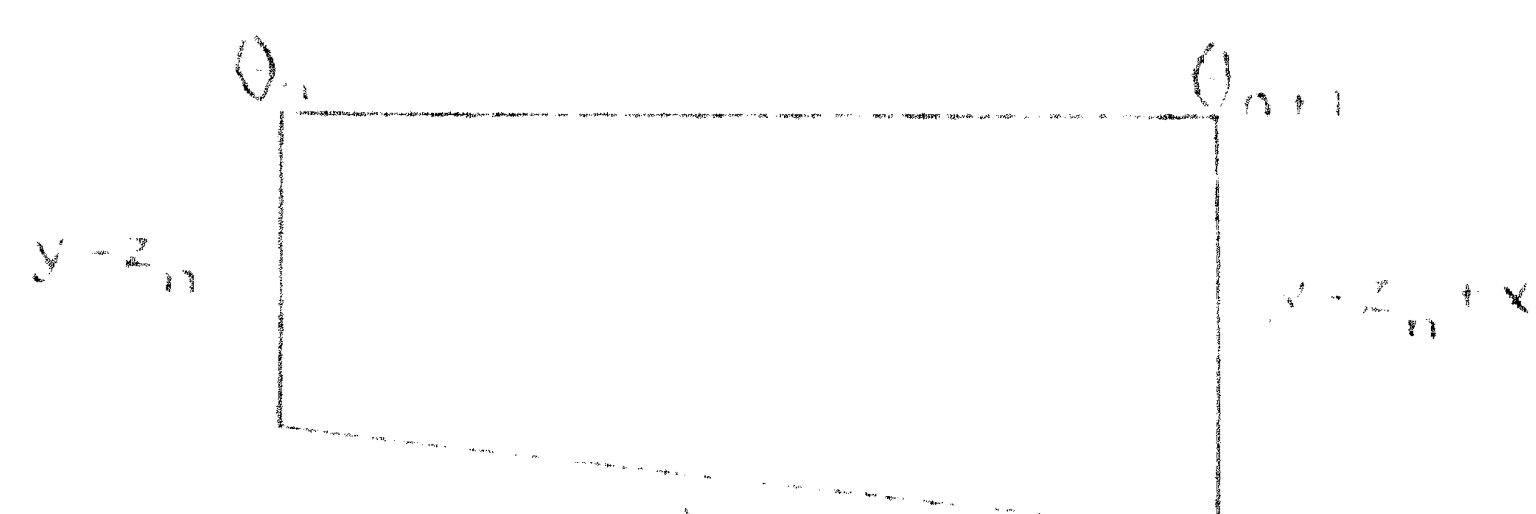


fig. 4.3

Het verloop bij negatieve begin- en eindvoorraden

Ook nu berekenen wij eerst voor deze gevallen afzonderlijk de kostenfunctie, alsof de behoefte in de $n^{de}$ periode een gegeven waarde bezit.

In het eerste geval is de gemiddelde voorraad gelijk aan $(z_n - y - \frac{1}{2}x)$ en de daaruit voortvloeiende kosten bedragen:

$$(z_n - y - \tfrac{1}{2}x)\, c_1. \qquad (4.11)$$

In het tweede geval is er gedurende een periode $\tau_1$ een positieve voorraad en wel gemiddeld $\frac{1}{2}(z_n - y)$ en tijdens de periode $\tau_2$ een gemiddeld tekort van $\frac{1}{2}(y + x - z_n)$.

De totale kosten bedragen dan:

$$\tfrac{1}{2}(z_n - y)\, \tau_1 c_1 + \tfrac{1}{2}(y + x - z_n)\, \tau_2 c_2. \qquad (4.12)$$

Wederom geldt:

$$\tau_1 = \frac{z_n - y}{x} \tag{4.13}$$

$$\tau_2 = \frac{y + x - z_n}{x} \; . \tag{4.14}$$

De betrekking (4.12) gaat dan over in:

$$\tfrac{1}{2} \frac{(z_n - y)^2}{x} \; C_1 + \tfrac{1}{2} \frac{(y + x - z_n)^2}{x} \; C_2 \; . \tag{4.15}$$

<u>In het derde geval</u> is het gemiddelde tekort gelijk aan ($\frac{1}{2}x - z_n + y$) en de daarbij behorende kosten bedragen:

$$(\tfrac{1}{2}x - z_n + y) \; C_2 \; . \tag{4.16}$$

De grootheden x en y, die in deze drie gevallen voorkomen, zijn echter geen bekende getallen, maar variabelen met een kansverdeling.

Stel nu dat de variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ een kansverdeling bezitten met dichtheden resp. f(x) en g(y). De verwachting van de te maken kosten wordt dan gegeven door:

$$\begin{aligned} K(z_n) = {} & C_1 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_0^{z_n - y} (z_n - y - \tfrac{1}{2}x) f(x)dx \; + \\ & + \tfrac{1}{2}C_1 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n - y}^{\infty} \frac{(z_n - y)^2}{x} f(x)dx \; + \\ & + \tfrac{1}{2}C_2 \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n - y}^{\infty} \frac{(y + x - z_n)^2}{x} f(x)dx \; + \\ & + C_2 \int_{z_n}^{\infty} f(y)dy \int_0^{\infty} (\tfrac{1}{2}x - z_n + y) \; f(x)dx . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Deze betrekking is opgesteld met behulp van de uitdrukkingen (4.11), (4.15) en (4.16).

Wij kiezen $z_n$ (vgl. (4.10) nu zodanig dat $K(z_n)$ minimaal wordt; $z_n$ moet dus voldoen aan:

$$\left(\frac{dK(z_n)}{dz_n}\right)_{z_n=z_n^{*}} = 0. \qquad (4.18)$$

Deze vergelijking blijkt na enige berekeningen gelijkwaardig te zijn met:

$$\int_0^{z_n^{*}} g(y)dy \left[\int_0^{z_n^{*}-y} f(x)dx + (z_n^{*}-y)\int_{z_n^{*}-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx\right] = \frac{c_2}{c_1+c_2}\,. \qquad (4.19)$$

De functie

$$M(z_n) \stackrel{def}{=} \int_0^{z_n} g(y)dy \left[\int_0^{z_n-y} f(x)dx + (z_n-y)\int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx\right] \qquad (4.20)$$

is monotoon stijgend, omdat geldt:

$$M'(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx > 0. \qquad (4.21)$$

De functie $M(z_n)$ neemt voor $z_n=0$ de waarde nul aan en is voor $z_n=\infty$ gelijk aan 1. Hieruit volgt, dat de optimale waarde van $z_n$ door de betrekking (4.19) ondubbelzinnig is vastgesteld.

Aangezien de waarde $\sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i$ op het tijdstip $\theta_{n-k}$ bekend is, kan $q_n$ uit

$$z_n = V_{n-k} + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} q_i + q_n \qquad (4.22)$$

worden berekend.

Het criterium wordt nu gegeven door:

$$M(z_n) = \int_0^{z_n} g(y)dy \left[F(z_n-y) + (z_n-y)\int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx\right] = \frac{c_2}{c_1+c_2}\,. \qquad (4.23)$$

Het is ook mogelijk om na te gaan hoe groot de verwachting is van de lengte van de periode $\tau_1$, waarin geen tekort is aan grondstoffen.

In het eerste geval zal $\tau_1$ gelijk zijn aan één, omdat de voorraad voldoende groot is om in de behoefte te voorzien. In het tweede geval hebben wij gezien dat $\tau_1$ wordt gegeven door $(z_n-y)/x$ en in het derde geval is $\tau_1$ gelijk aan nul, omdat de $n^{de}$ periode wordt begonnen met een tekort.

Voor de verwachting van $\underline{\tau}_1$ geldt dus de volgende betrekking:

$$\mathcal{E}\underline{\tau}_1 = \int_0^{z_n} F(z_n-y)g(y)dy + \int_0^{z_n} (z_n-y)g(y)dy \int_{z_n-y}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx. \qquad (4.24)$$

Uit (4.23) en (4.24) volgt:

$$\mathcal{E}\underline{\tau}_1 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} \qquad (4.25)$$

en

$$\frac{\mathcal{E}\underline{\tau}_1}{\mathcal{E}\underline{\tau}_2} = \frac{c_2}{c_1} \quad . \qquad (4.26)$$

Ook van dit voorbeeld zullen wij een toepassing geven.

Toepassing nr 2

Wij veronderstellen dat de levertijd van de door de voorraadbeheerder afgegeven order twee perioden bedraagt. De kansverdeling van de vraag gedurende één periode wordt gegeven door de kansdichtheid:

$$f(x) = x\,e^{-x} \qquad (4.27)$$

De kansverdeling van de vraag gedurende de levertijd wordt gegeven door de kansdichtheid:

$$g(y) = \frac{1}{6}\,y^3 e^{-y} \;\; {}^{1)} \qquad (4.28)$$

1) Zie voor voetnoot: onderaan blz. 21.

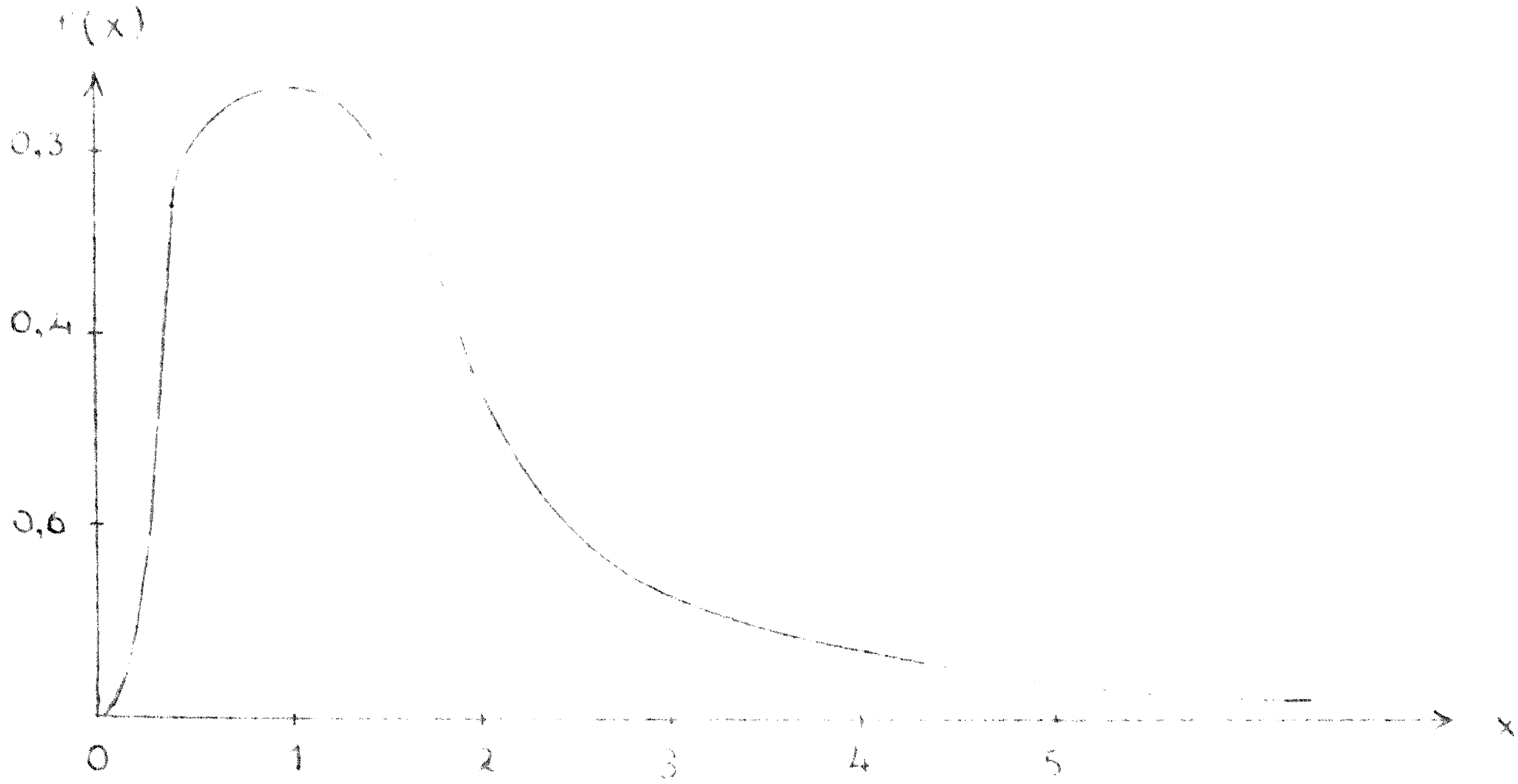


fig. 4.4

De kansverdeling van de vraag per periode $f(x) = x\ e^{-x}$

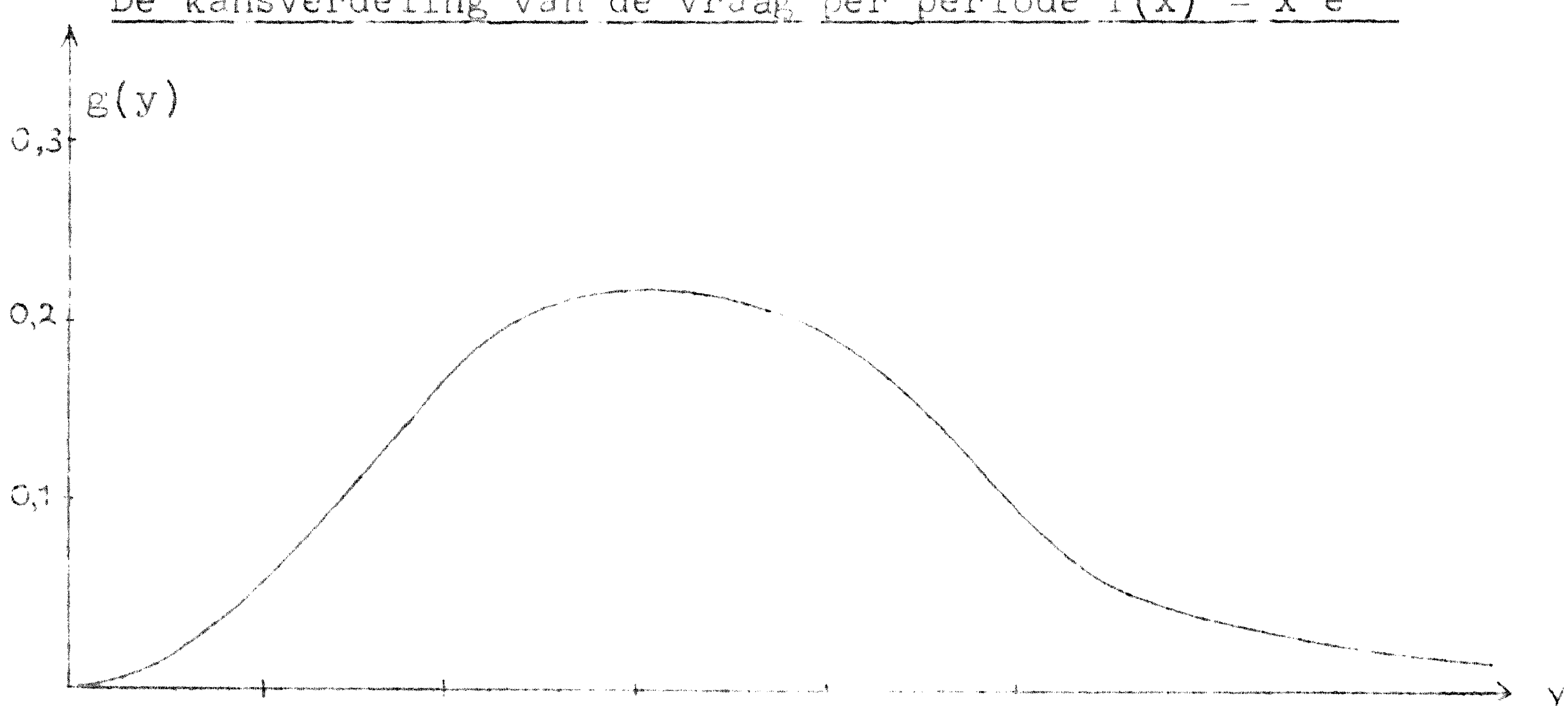


fig 4.5

De kansverdeling van de vraag tijdens de levertijd $g(y) = \frac{1}{6}\ y^3 e^{-y}$

--------

1) De kansverdeling $g(y)$ van de vraag gedurende de levertijd volgt onmiddellijk uit de kansverdeling van de vraag in één enkele periode. Geeft men de vraag in één periode weer aan met $x$, dan is bij een levertijd van twee perioden volgens stelling 2.3 uit hoofdstuk IV en (4.27)

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(y-x)dx = \int_{0}^{y} x\ e^{-x}(y-x)e^{-(x-y)}dx = e^{-y}\int_{0}^{y} x(y-x)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\ y^3 e^{-y}.$$

De vraag luidt nu: Hoe groot moeten wij op het tijdstip $\theta_{n-2}$ onze bestelling $q_n$ kiezen, als verder gegeven is

$$c_2 = 19\ c_1 \tag{4.29}$$

$$v_{n-2} = 3,10 \tag{4.30}$$

$$q_{n-1} = 2,70 \tag{4.31}$$

Uit (4.23), (4.27), (4.28), (4.29), (4.30) en (4.31) volgt:

$$M(z_n^*) = \int_0^{z_n^*} \frac{1}{6} y^3\ e^{-y}\ dy \left[\int_0^{z_n^*-y} x\ e^{-x}\ dx + (z_n^*-y) \int_{z_n^*-y}^{\infty} e^{-x}\ dx\right] = $$

$$= 0,95 \tag{4.32}$$

of

$$M(z_n^*) = 1 - e^{-z_n^*}\left[1 + z_n^* + \frac{z_n^{*2}}{2} + \frac{z_n^{*3}}{6} + \frac{z_n^{*4}}{24}\right] = 0,95. \tag{4.33}$$

Voor (4.33) kunnen wij ook schrijven:

$$\int_0^{2z_n} \frac{u^4}{4!2^5}\ e^{-\frac{u}{2}}\ du = 0,95. \tag{4.34}$$

Daar $\frac{u^4}{4!2^5}\ e^{-\frac{u}{4}}$ de verdelingsdichtheid is van een $\chi^2$-verdeling met 10 vrijheidsgraden (vgl. formule (1.22) uit hoofdstuk III), is de waarde van $2\ z_n^*$ uit de tabel van deze verdeling af te lezen. Wij vinden dan voor $z_n^*$:

$$z_n^* = 9,15. \tag{4.35}$$

De te bestellen hoeveelheid wordt dan gegeven door:

$$q_n^* = 9,15 - (3,10 + 2,70) = 3,35\ . \tag{4.36}$$

Wij zullen nu eens nagaan of wij een gelijksoortige methode kunnen ontwikkelen voor het geval, dat <u>x</u> en <u>y</u> geen continue, maar <u>discrete verdelingen</u> bezitten met kansen resp. $p(x)$ en $r(y)$. Wij vinden dan met behulp van de betrekkingen (4.11), (4.15) en

(4.16) voor de verwachting van de te maken kosten:

$$C(z_n)=c_1\sum_{y=0}^{z_n} r(y)\sum_{x=0}^{z_n-y}\left(z_n-y-\frac{x}{2}\right)p(x)+\tfrac{1}{2}c_1\sum_{y=0}^{z_n} r(y)\sum_{x=z_n-y+1}^{\infty}\frac{1}{x}(z_n-y)^2p(x)+$$

$$+\tfrac{1}{2}c_2\sum_{y=0}^{z_n} r(y)\sum_{x=z_n-y+1}^{\infty}\frac{1}{x}\left[x-(z_n-y)\right]^2p(x)+c_2\sum_{y=z_n+1}^{\infty} r(y)\sum_{x=0}^{\infty}\left(y-z_n+\frac{x}{2}\right)p(x). \tag{4.37}$$

De betrekking (4.37) kunnen wij ook anders schrijven en wel:

$$C(z_n)=(c_1+c_2)\sum_{y=0}^{z_n} r(y)\sum_{x=0}^{z_n-y}\left(z_n-y-\frac{x}{2}\right)p(x)+(c_1+c_2)\sum_{y=0}^{z_n} r(y)\sum_{x=z_n-y+1}^{\infty}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2x}(z_n-y)^2p(x)+c_2\sum_{y=0}^{\infty} r(y)\sum_{x=0}^{\infty}\left(y-z_n+\frac{x}{2}\right)p(x). \tag{4.38}$$

Wanneer $z_n^x$ optimaal is, moet gelden:

$$C(z_n^x-1)\geq C(z_n^x), \tag{4.39}$$

$$C(z_n^x+1)\geq C(z_n^x). \tag{4.40}$$

Men kan aantonen, na uitvoerig cijferen, dat beide ongelijkheden vervangen kunnen worden door:

$$M(z_n^x-1)<\frac{c_2}{c_1+c_2}<M(z_n^x)\ , \tag{4.41}$$

waarbij

$$M(z_n)\ \underline{\underline{\mathrm{def}}}\ \sum_{y=0}^{z_n} r(y)\left[\sum_{x=0}^{z_n-y}p(x)+(z_n-y+\tfrac{1}{2})\sum_{x=z_n-y+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\right] \tag{4.42}$$

een monotoon stijgende functie van $z_n$ is.

In verband met de plaatsruimte zullen wij deze afleidingen niet geven. Wel vestigen wij de aandacht op de grote overeenkomst tussen dit criterium en dat gevonden voor continue vraagverdelingen (vgl. (4.23)).

5. Het vierde voorbeeld. (Ib; IIb; IIIb; IVb; Vb en c; VIa)

In ons vierde voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip. Om de gedachten te bepalen zullen wij veronderstellen, dat wij voor een dealer de voorraad machine-onderdelen beheren.

Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs Q(q) te betrekken bij de fabriek.

De voorraadkosten bedragen $C_1$ per eenheid en per tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Indien wij niet in staat zijn aan de vraag te voldoen, dan moeten wij een boete betalen van $C_2$ per eenheid en tijdseenheid. Zodra een nieuwe order binnenkomt en de omvang van de order is groot genoeg, zal de achterstand worden ingelopen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel en wanneer moet er besteld worden, opdat de verwachting van de kosten op de "lange duur" zo klein mogelijk wordt?"

Om op deze vraag te kunnen antwoorden zullen wij de totale kosten in ieder tijdsinterval splitsen en toewijzen aan de diverse bestellingen. Wij zullen hiertoe in gedachten steeds veronderstellen, dat de afgegeven order de laatste is en de zaak wordt gesloten zodra de laatste eenheid van deze order is verkocht. De kosten, welke wij nu aan een order toewijzen worden gevormd door die uitgaven, welke het gevolg zijn van het feit, dat niet de voorgaande order maar deze bestelling de laatste is.

In eerste instantie zullen wij uitgaan van de veronderstelling, dat de levertijd T constant is.

Onze bestellingen zullen dus altijd worden afgeleverd op een tijdstip, waarop de voorgaande orders reeds binnen zijn.

In onze beschouwingen wordt slechts rekening gehouden met de volgende kosten:

a) inkoopkosten
b) voorraadkosten
c) boeten.

De inkoopkosten worden bepaald door de omvang van de order en kunnen dus zonder enige moeite worden toegewezen.

De voorraadkosten, welke voor de rekening van de nieuwe order komen, worden gemaakt vanaf het moment dat deze order is afgeleverd tot het ogenblik, waarop de laatste eenheid van de order wordt gevraagd. Zonder enige beperking mogen wij aannemen, dat geen goederen uit de nieuwe order worden gebruikt, zolang er nog eenheden van voorgenoemde orders aanwezig zijn.

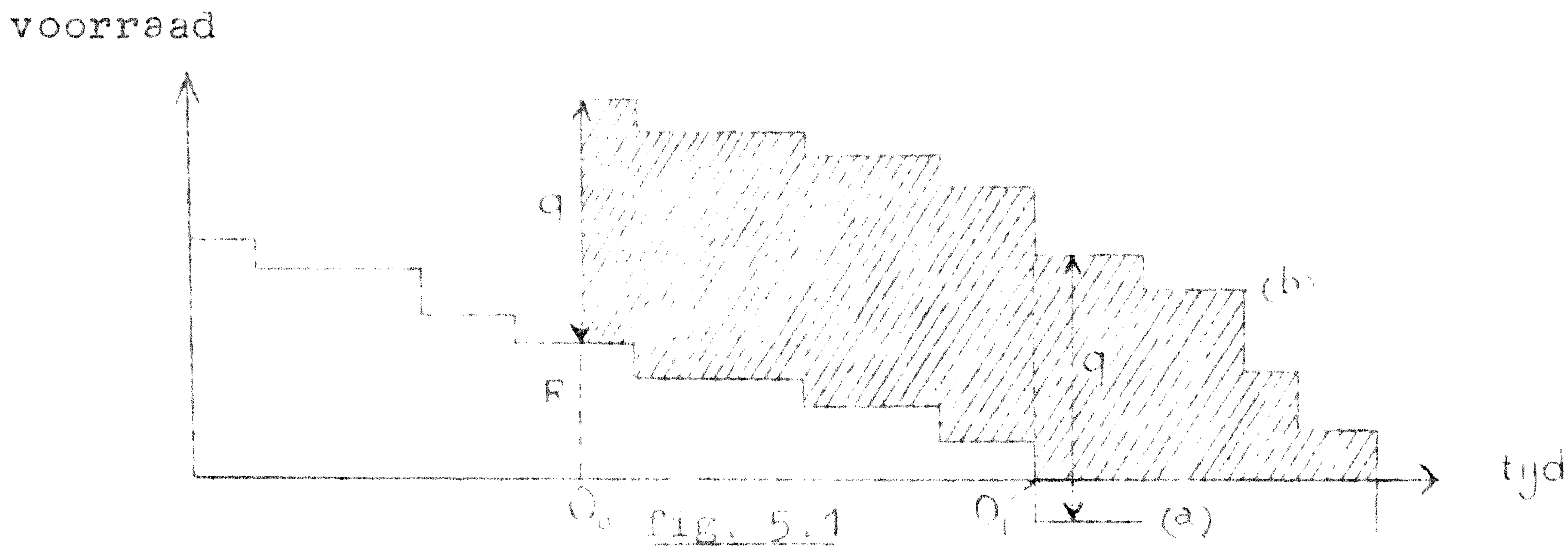


fig. 5.1

Het verloop van de voorraad

a) indien op $\theta_0$ geen order van de grootte q wordt afgeleverd.

b) indien op $\theta_0$ wel een order van de grootte q wordt afgeleverd.

Uit fig. 5.1 volgt, dat als op $\theta_0$ geen order wordt afgeleverd de voorraad verloopt volgens (a). De voorraad verloopt echter volgens (b) met als gevolg dat de extra voorraadkosten worden toegewezen aan de nieuwe order, welke op $\theta_0$ wordt afgeleverd. Aangezien de voorraadkosten $C_1$ bedragen per eenheid en tijdseenheid, zijn de totale voorraadkosten evenredig met het oppervlak van het gearceerde gedeelte in fig. 5.1. De lengte t van de periode $(\theta_0, \theta_1)$ hangt uiteraard slechts af van de grootte van de restantvoorraad R op het tijdstip $\theta_0$. Deze restantvoorraad is gelijk aan de voorraad op het tijdstip van afgifte van de order, vermeerderd met de eerder afgegeven maar nog niet ontvangen orders en verminderd met de vraag gedurende de levertijd.

Voor het berekenen van de extra voorraadkosten is het dus niet zinvol om na te gaan uit welke orders deze restantvoorraad is samengesteld. De boeten worden geheven als het afleveringstijdstip van de nieuwe order valt na het moment, waarop de laatste eenheid van de voorgaande order het magazijn verlaten heeft en als bovendien in de tussenliggende periode nieuwe onderdelen worden verlangd (zie fig. 5.2).

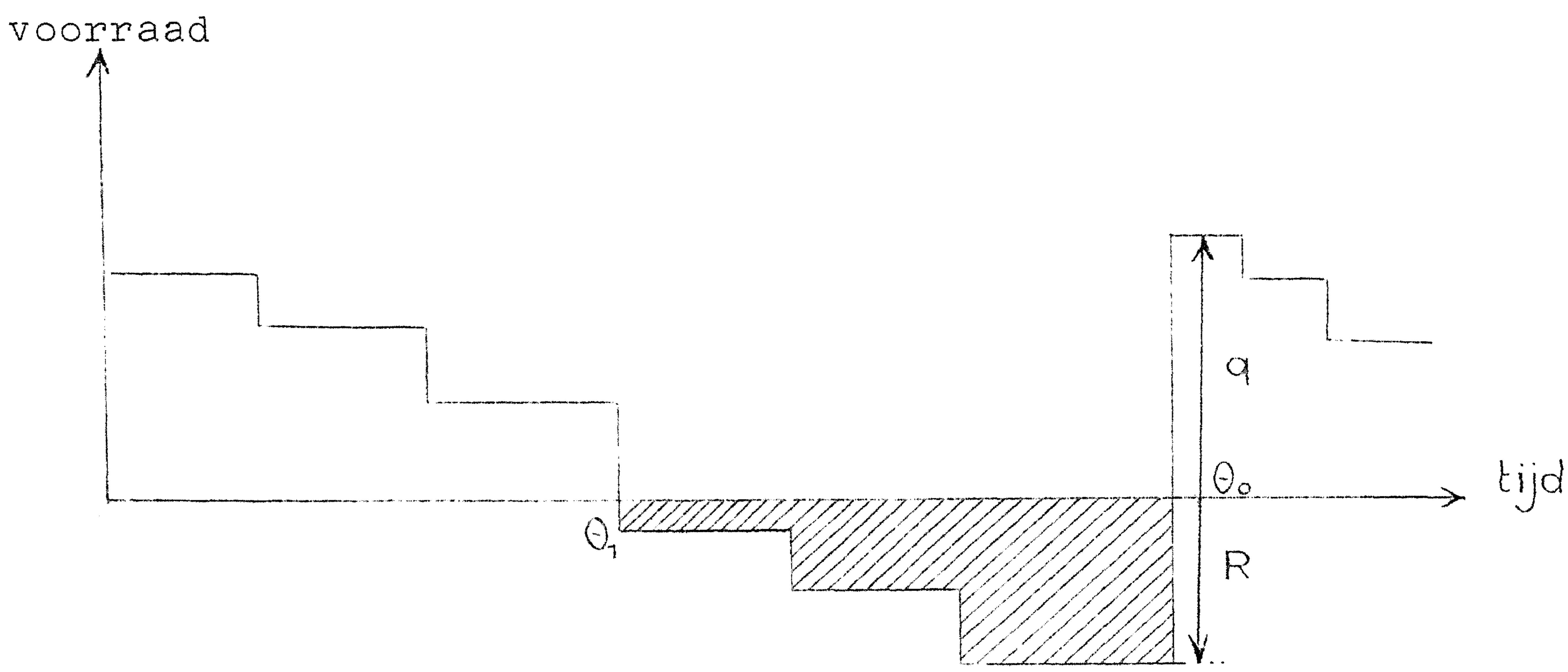


fig. 5.2

Het verloop van de voorraad indien deze niet toereikend is

Uit de figuur volgt, dat in de periode $[\Theta_1 - \Theta_0]$ een achterstand bestaat in de aflevering. Aangezien de boeten $C_2$ bedragen per eenheid en tijdseenheid zijn de totale kosten evenredig met het gearceerde oppervlak in fig. 5.2.

Men bedenke echter wel dat op grond van onze kostensplitsing de achterstand als gevolg van een te late aflevering van een order nooit groter kan worden dan de omvang van die order. Immers men gaat uit van de veronderstelling dat deze order de laatste is en de zaak gesloten wordt, zodra de laatste eenheid uit die order wordt opgeëist. Vanaf het moment dat de achterstand q bedraagt, aangegeven met $\Theta_2$, blijft men een boete betalen, die evenredig is met de omvang q van de gehele order. Het resterende bedrag van de boete, resulterend uit het feit dat deze order in werkelijkheid niet de laatste is, komt op de rekening van volgende orders (zie fig. 5.3).

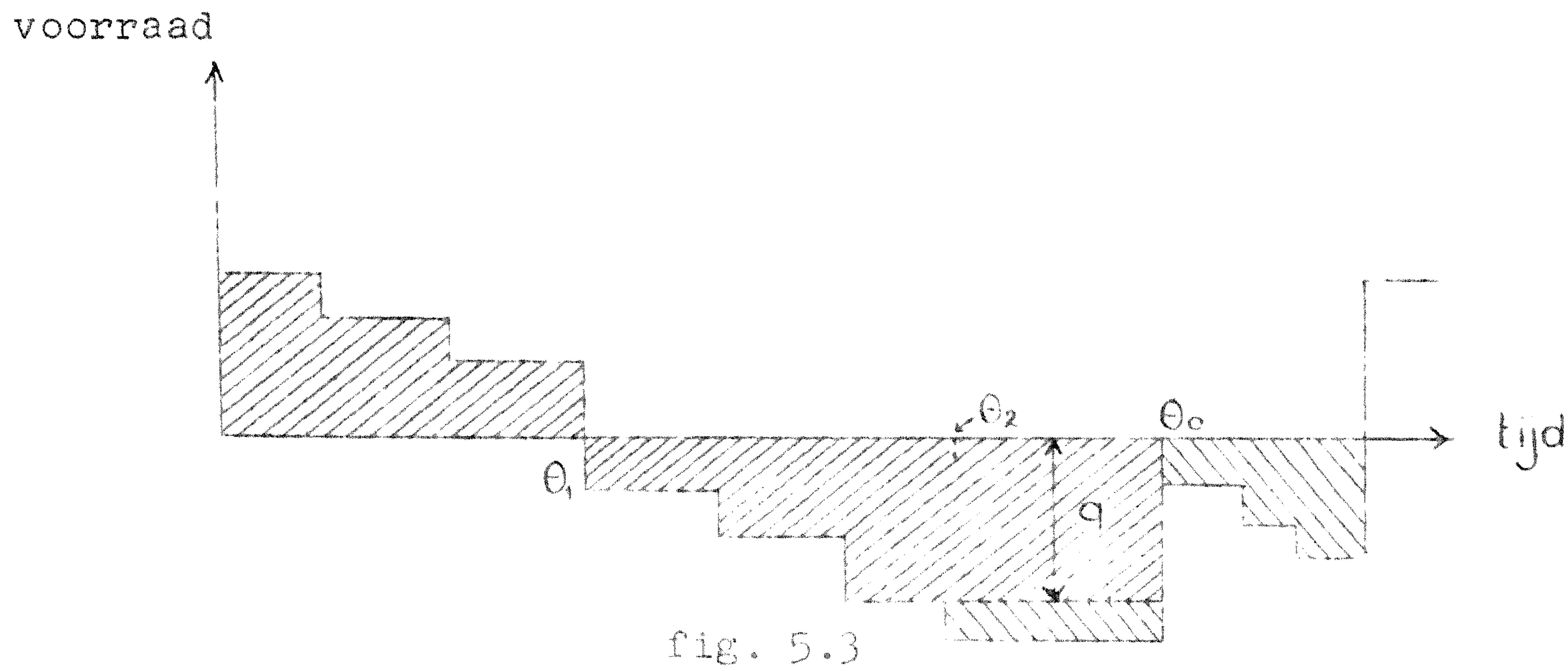


fig. 5.3

<u>Het verloop van de voorraad indien deze niet toereikend is, terwijl bovendien de omvang van de nog niet afgeleverde order te klein is om de achterstand op te heffen</u>

De plaats van het tijdstip $\theta_1$ op de tijdas hangt slechts af van de voorraad op het tijdstip van afgifte van de order, de reeds afgegeven maar nog niet ontvangen orders en de vraag naar het artikel.

Stel $X$ nu gelijk aan de som van de aanwezige voorraad en de hoeveelheden in bestelling. Indien een bestelling van de grootte $q_1$ wordt afgegeven op een tijdstip, waarop $X$ $X_1$, dan zal aan de $i^{de}$ eenheid uit die bestelling behoefte bestaan na $\underline{t}_{x_1+i}$ tijdseenheden (zie blz. 12, 13).

Wij onderscheiden nu twee situaties:

1) Als $\underline{t}_{x_1+i} \geqslant T$ dan zal de $i^{de}$ eenheid uit de bestelling $\underline{t}_{x_1+i}-T$ tijdseenheden in voorraad zijn. De voorraadkosten bedragen voor de $i^{de}$ eenheid:

$$c_1(\underline{t}_{x_1+i}-T) \; . \tag{5.1}$$

2) Als $\underline{t}_{x_1+i} < T$ dan zal de $i^{de}$ eenheid uit de bestelling $T-\underline{t}_{x_1+i}$ tijdseenheden te laat worden afgeleverd. De boete wordt gegeven door:

$$c_2(T-\underline{t}_{x_1+i}) \; . \tag{5.2}$$

Aangezien de inkoopkosten $Q(q_1)$ bedragen vinden wij met behulp van (5.1) en (5.2) voor de verwachting van de aan de bestelling toe te wijzen kosten:

$$c_1 \sum_{i=1}^{q_1} \int_T^{\infty} (t-T)dG(t|x_1+i) + c_2 \sum_{i=1}^{q_1} \int_0^T (T-t)dG(t|x_1+i) + Q(q_1), \tag{5.3}$$

waarbij $G(t|x_1+i)$ de verdelingsfunctie is van de stochastische variabele $\underline{t}_{x_1+i}$.

Bij het opstellen van de betrekking (5.3) zijn wij stilzwijgend uitgegaan van de veronderstelling, die ook gemaakt werd in het tweede voorbeeld, nl. "de kansverdeling van de behoefte in een interval van gegeven lengte is onafhankelijk van de situatie op het beginpunt van dat interval".

Op grond van deze veronderstelling en het feit, dat slechts één eenheid per keer wordt afgenomen, kan men bewijzen, dat de kansverdeling van de vraag in een vaste periode een Poissonverdeling bezit.

Voor een Poissonverdeling geldt voor de kans op een vraag i in een periode van de lengte T:[1]

$$p(i;\alpha T) = \frac{(\alpha T)^i}{i!} e^{-\alpha T}, \tag{5.4}$$

waarbij $\alpha$ de gemiddelde vraag per tijdseenheid is.

Men kan nu eveneens bewijzen, dat als de vraag $\underline{i}$ in een periode T de Poissonverdeling (5.4) bezit, de kansverdeling van de lengte $\underline{t}_x$ van het tijdsinterval, waarin X eenheden wordt gevraagd een $\Gamma$(Gamma)-verdeling is. Deze $\Gamma$ verdeling wordt gegeven door de kansdichtheid:

$$dG(t|x) = \frac{\alpha^x t^{x-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(x)} dt . \tag{5.5}$$

Tussen de kansverdelingen (5.4) en (5.5) bestaan o.a. de volgende identiteiten:

1) Ter vereenvoudiging van de notatie wordt de kans op een vraag i in een periode van de lengte T en een gemiddelde vraag $\alpha$ per tijdseenheid, niet zoals gewoonlijk aangegeven met $P[\underline{i} = i|\alpha,T]$, doch met $p(i;\alpha,T)$.

$$\int_T^\infty (t-T)dG(t|x+i) = \sum_{j=0}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T)$$

$$\int_0^T (T-t)dG(t|x+i) = \sum_{j=x+i+1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T). \qquad (5.6)$$

Inplaats van (5.3) mogen wij dus ook voor de verwachting van de kosten schrijven:

$$C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T)$$
$$+Q(q_1). \qquad (5.7)$$

Stel dat wij op het moment, waarop de voorraad vermeerderd met de bestellingen X bedraagt, $X > \max(x_1;x_2)$, de keus hebben tussen twee voorraadpolitieken en wel:

a) steeds $q_1$ bestellen zodra $X = x_1$
b) steeds $q_2$ bestellen zodra $X = x_2$.

Beschouwen wij nu een periode, waarin $X + Nq_1q_2$ wordt gevraagd, dan bestaat deze hoeveelheid uit $Nq_2$ orders van de omvang $q_1$ of $Nq_1$ bestellingen van $q_2$ eenheden, zodat de verwachting van de kosten voor de politieken a) resp. b) gegeven worden door:

$$Nq_2 \left[ C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) \right.$$
$$\left. + Q(q_1) \right] \qquad (5.8)$$

resp.

$$Nq_1 \left[ C_1 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=0}^{x_2+i} \frac{(x_2+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=x_2+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_2-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) \right.$$
$$\left. + Q(q_2) \right]. \qquad (5.9)$$

De politiek a) zal de voorkeur verdienen boven b) in de beschouwde periode als de uitdrukking (5.8) kleiner is dan (5.9) of na deling door $Nq_1q_2$, als geldt:

$$\frac{C_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=1}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q_1)}{q_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=0}^{x_2+i} \frac{(x_2+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{j=x_2+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_2-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q_2)}{q_2} \tag{5.10}$$

Aangezien de ongelijkheid (5.10) onafhankelijk is van de keuze van N en wij dus N zeer groot mogen kiezen, verkrijgen wij op deze wijze een objectief criterium voor de beoordeling van twee alternatieve politieken. Het is direct in te zien, dat de politiek (q,x), waarvoor geldt:

$$\frac{C_1 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + C_2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=x+i+1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q)}{q} \tag{5.11}$$

is minimaal, de voorkeur verdient boven iedere alternatieve politiek.

Wij zullen nu de verschillende veronderstellingen op grond waarvan het bovenstaande resultaat werd verkregen aan een nader onderzoek onderwerpen.

In onze beschouwing zijn wij uitgegaan van een constante levertijd met als gevolg, dat de orders in dezelfde volgorde worden afgeleverd als zij zijn afgegeven.

Indien de levertijd stochastisch is, dan kan het echter gebeuren, dat orders elkaar inhalen. Door een vroegtijdige aflevering van een order kunnen dan boeten, veroorzaakt door een te late aflevering van een voorgaande order, worden voorkomen.

Als gevolg van onze keuze van kostensplitsing levert de eerder afgeleverde order in zo'n situatie winst op. Indien men deze winst in de beschouwingen wil betrekken gaat veel van de eenvoud van het probleem verloren. Men zal dan, bij de bepaling van het optimale besteltijdstip, rekening moeten houden met de tijdstippen, waarop de voorgaande bestellingen zijn afgegeven.

Men kan ook stellen, dat de fabriek de orders aflevert in dezelfde volgorde, als zij door ons worden afgegeven. Deze veronderstelling houdt meestal een niet meer stochastisch onafhankelijk zijn van de opeenvolgende levertijden in. Dit heeft ten gevolge, dat wij eerder zullen gaan bestellen naarmate de achterstand bij de fabriek waarvan wij onze goederen betrekken groter wordt. De waarde van X, voorraad vermeerderd met de hoeveelheden in bestelling, is dan niet alleen maatgevend voor de bepaling van het besteltijdstip.

Het is echter ook mogelijk een voorbeeld te "construeren", waarbij de volgorde van aflevering gelijk is aan die van de afgifte van de orders, terwijl bovendien kennis van de "positie" van de nog niet ontvangen orders geen extra informatie biedt. Stel bijv. dat een fabriek een constante tijd nodig heeft voor het uitvoeren van een order en neem vervolgens aan, dat deze goederen vervoerd worden per schip. Het schip zal onderweg verschillende stagnaties ondervinden, welke onderling onafhankelijk zijn en betrekking hebben op alle schepen in de omgeving. Veronderstel vervolgens, dat deze stagnaties zodra zij zijn opgeheven geen nawerking hebben op het tempo van het schip en de schepen, die de plaats van de stagnatie nog niet hebben bereikt. Het een en ander heeft tot gevolg, dat als twee schepen éénmaal op gelijke hoogte zijn, gelijk zullen opvaren. Als de stagnaties van korte duur zijn zullen de opeenvolgende levertijden weliswaar niet onafhankelijk zijn, maar hangt toch de kansverdeling van de levertijd niet meer af van de afleveringssituatie op het besteltijdstip.

Wanneer wij dit voorbeeld verder uitwerken en daartoe $\ell(T)$ invoeren als kansdichtheid van de verdelingsfunctie voor de levertijd, dan wordt de verwachting van de kosten toe te wijzen aan een order in plaats van (5.7) gegeven door:

$$c_1 \int_0^\infty \ell(T)dT \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p(j;\alpha,T)$$
$$+ c_2 \int_0^\infty \ell(T)dT \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p(j;\alpha,T) + Q(q_1) \qquad (5.12)$$

of

$$c_1 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=0}^{x_1+i} \frac{(x_1+i-j)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + c_2 \sum_{i=1}^{q_1} \sum_{j=x_1+i+1}^{\infty} \frac{(j-x_1-i)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + Q(q_1), \qquad (5.13)$$

waarbij $p_0(j;\alpha)$ de kans op een vraag van de grootte j tijdens de levertijd voorstelt.

De optimale politiek (q;x) wordt nu gevonden uit de minimalisatie naar q en x van:

$$\frac{c_1 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=0}^{x+i} \frac{(x+i-j)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + c_2 \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=x+i+1}^{\infty} \frac{(j-x-i)}{\alpha} p_0(j;\alpha) + Q(q)}{q} \qquad (5.14)$$

In de tweede plaats hebben wij aangenomen, dat de vraag per keer steeds uit één eenheid bestaat. Het gevolg hiervan was, dat de voorraad altijd de waarde van de kritieke voorraad, de voorraad op het besteltijdstip, doorliep. Indien men deze veronderstelling laat vallen, dan gelden de gegeven afgeleidingen niet meer.

Wij zullen nu het vraagstuk in een meer algemenere vorm stellen en wel als volgt:

Bepaal een waarde voor x en q zodanig dat, als men steeds een hoeveelheid q bestelt zodra de voorraad daalt beneden x, de verwachting van de kosten op de "lange duur" minimaal is. Ook nu zullen wij aannemen, dat de kans op een aantal klanten j in een periode van vaste lengte T gegeven wordt door de Poissonverdeling (5.4). De grootte van de aankopen door de klanten mogen nu echter verschillend zijn. Wij zullen nl. veronderstellen, dat de grootte van de aankopen een trekking is uit een continue of discrete kansverdeling. Ook nu kunnen wij bewijzen, dat voor een discrete verdeling van de aankoopgrootten de optimale keus van q en x bepaald kan worden met behulp van (5.14) terwijl voor een continue verdeling van de aankoopgrootten hiervoor gelezen moet worden:

$$\frac{C_1 \int_0^q dy \int_0^{x+y} \frac{(x+y-z)}{\alpha} f_o(z;\alpha)dz + C_2 \int_0^q dy \int_{x+y}^{\infty} \frac{(x+y-z)}{\alpha} f_o(z;\alpha)dz + Q(q)}{q} \tag{5.15}$$

waarbij $f_o(z;\alpha)$ de kansdichtheid van de vraag tijdens de levertijd voorstelt.

Na enig rekenen vindt men, dat de optimale waarden van $x^*$ en $q^*$ voor de discrete kansverdeling moeten voldoen aan de volgende ongelijkheden:

$$\frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} p_O(j;\alpha) \leq \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i}^{\infty} p_O(j;\alpha) \geq \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q^*+1) - b(q^*) - \frac{C_O}{q^*(q^*+1)} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha q^*(q^*+1)} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} p_O(j;\alpha) \geq 0 \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b(q^*) - b(q^*-1) - \frac{C_O}{q^*(q^*-1)} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha q^*(q^*+1)} \sum_{i=1}^{q^*-1} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} p_O(j;\alpha) \leq 0, \tag{5.19}$$

waarbij $Q(q) = qb(q) + C_O$.

Voor een continue verdeling van de aankoopgrootten vinden wij voor de optimale keus van $q^*$ en $x^*$ de relaties:

$$\frac{1}{q^*} \int_0^{q^*} dy \int_{x^*+y}^{\infty} f_O(z;\alpha)dz = \frac{C_1}{C_1+C_2} \tag{5.20}$$

en

$$\frac{1}{2}\frac{C_1}{\alpha} + b'(q^*) - \frac{C_O}{(q^*)^2} - \frac{(C_1+C_2)}{\alpha(q^*)^2} \int_0^{q^*} dy \int_{x^*+y}^{\infty} f_O(z;\alpha)dz = 0. \tag{5.21}$$

Inplaats van (5.20) en (5.21) mogen wij ook schrijven:

$$\frac{1}{q^{*}} \int_{0}^{q^{*}} F_{0}(x^{*}+y;\alpha)\,dy = \frac{c_2}{c_1+c_2} \tag{5.22}$$

en

$$\frac{1}{2}\,\frac{c_1}{\alpha} + b'(q^{*}) - \frac{c_0}{(q^{*})^2} - \frac{(c_1+c_2)}{\alpha(q^{*})^2} \int_{0}^{q^{*}} \left[1-F_{0}(x^{*}+y;\alpha)\right] dy = 0. \tag{5.23}$$

Vergelijken wij tenslotte (3.10) en (5.23), dan zien wij dat ten gevolge van de stochastische levertijd een extra term in (5.23) is toegevoegd. Men zou ook kunnen zeggen de constante $c_0$ is vervangen door de grotere waarde:

$$c_0 + \frac{(c_1+c_2)}{\alpha} \int_{0}^{q^{*}} \left[1-F_{0}(x^{*}+y;\alpha)\right] dy\ . \tag{5.24}$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze vervanging een verhoging van de optimale ordergrootte veroorzaakt. Immers naarmate de vaste kosten per order groter worden zal men minder vaak gaan bestellen en aangezien men toch uiteindelijk aan alle vraag moet voldoen zullen de bestelgrootten toenemen.

Toepassing nr 3

Beschouwen wij nogmaals het probleem gegeven in de toepassing nr 1 (tweede voorbeeld). De levertijd is nu echter niet gelijk aan nul maar bedraagt 3 weken. De kans, dat j stuks breken in deze 3 weken wordt gegeven door de Poissonverdeling:

$$p_{0}(j;\alpha) = \frac{e^{-30}\,30^{j}}{j!} \tag{5.25}$$

Als de voorraad niet toereikend is, dan kunnen tijdelijk door de plaatselijke agent van de fabriek, waarbij de machine gekocht is, onderdelen in bruikleen gegeven worden tegen een huur van *f* 9,50 per week per stuk. Men behoeft de produktie dus niet te stoppen. Zodra een zending van de onderdelen wordt ontvangen, zal de voorraadbeheerder de gehuurde onderdelen terugzenden en de eventuele gebroken exemplaren door nieuwe vervangen.

Uit deze gegevens (zie ook toepassing nr 1) volgt:

$$
\left.
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{52} \times 0{,}26 \times 100 = 0{,}5 \\
\alpha &= 10 \\
Q(q) &= 100q + 20 \\
C_0 &= 20 \\
b(q) &= 100 \\
C_2 &= 9{,}50
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.26)
$$

De optimale bestelgrootte en het optimale besteltijdstip worden nu gevonden met behulp van de ongelijkheden (5.16), (5.17), (5.18) en (5.19). Indien wij in deze ongelijkheden de bovenstaande gegevens verwerken, dan gaan deze relaties over in:

$$\frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \leqslant 0{,}05 \qquad (5.27)$$

$$\frac{1}{q^*} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \geqslant 0{,}05 \qquad (5.28)$$

$$\frac{1}{40} - \frac{20}{q^*(q^*+1)} - \frac{1}{q^*(q^*+1)} \sum_{i=1}^{q^*} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \geqslant 0 \qquad (5.29)$$

$$\frac{1}{40} - \frac{20}{q^*(q^*-1)} - \frac{1}{q^*(q^*-1)} \sum_{i=1}^{q^*-1} \sum_{j=x^*+i+1}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \leqslant 0 \qquad (5.30)$$

Uit deze relatie kan men de optimale waarden $q^*$ en $x^*$ vinden door als volgt te werk te gaan.

In de derde en vierde ongelijkheid laat men de laatste term weg en bepaalt men de waarde van $q^*$, die voldoet aan:[1]

$$\frac{1}{40} - \frac{20}{q^*(q^*+1)} \geqslant 0, \qquad (5.31)$$

--------

1) Uit deze ongelijkheden vindt men de optimale waarde van $q^*$ behorende bij de toepassing nr 1. Zie hiervoor ook de voetnoot 1) bij het tweede voorbeeld op blz. 12 .

$$\frac{1}{40} - \frac{20}{q^*(q^*-1)} \leq 0. \qquad (5.32)$$

Vervolgens substitueert men deze waarde in de eerste en tweede ongelijkheid en bepaalt de bijbehorende waarde van $x^*$. Dit laatste geschiedt met behulp van de tabel van de Poissonverdeling waarin men voor iedere y de "staart"kansen

$$\sum_{j=y}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \qquad (5.33)$$

kan vinden.

De waarde van $x^*$ die nu volgt uit de eerste twee ongelijkheden, wordt gebruikt in de derde en vierde ongelijkheid voor een tweede bepaling van $q^*$. Men gaat zo door tot een stel $q^x$, $x^*$ gevonden wordt, dat aan alle vier de ongelijkheden voldoet. Deze wijze van berekenen lijkt erg ingewikkeld maar valt in de praktijk mee.

Het antwoord luidt als volgt:

De optimale bestelgrootte bedraagt 29 eenheden en wordt afgegeven zodra de voorraad daalt tot 31 stuks.

Vergelijken wij het gevonden resultaat met dat van toepassing nr 1, dan zien wij, dat de bestelgrootte met één eenheid is toegenomen. Dit vindt zijn oorzaak in het feit, dat de levertijd nu niet meer te verwaarlozen is.

6. Het vijfde voorbeeld (Ib; IIb; IIIb; IVb; Vb+c; VIb).

Ook in ons vijfde voorbeeld wordt aangenomen, dat wij geheel vrij zijn in de keuze van ons besteltijdstip.

Om de gedachten te bepalen zullen wij wederom veronderstellen, dat wij voor een dealer de voorraad machine-onderdelen beheren. Een hoeveelheid q van deze onderdelen is tegen de inkoopprijs Q(q) te betrekken bij de fabriek. De voorraadkosten bedragen $C_1$ per eenheid en tijdseenheid.

Vervolgens wordt verondersteld, dat slechts één eenheid per keer wordt gevraagd. Indien wij niet in staat zijn aan de vraag te voldoen, dan moeten wij noodinkopen verrichten tegen de hogere prijs $C_3$ per eenheid. Deze goederen worden terstond afgeleverd, zodat wij steeds aan onze verplichtingen kunnen voldoen.

Ons probleem luidt nu: "Hoeveel en wanneer moet er besteld worden opdat de verwachting van de kosten op de "lange duur" zo klein mogelijk wordt?"

Om op deze vraag te kunnen antwoorden zullen wij de totale kosten in ieder tijdsinterval splitsen en toewijzen aan de diverse bestellingen. Wij zullen hiertoe in gedachten steeds veronderstellen, dat de afgegeven order de laatste is en de zaak wordt gesloten zodra de laatste eenheid van deze order is verkocht. De kosten, welke wij nu aan een order toewijzen worden gevormd door die uitgaven, welke het gevolg zijn van het feit, dat niet de voorgaande order maar deze bestelling de laatste is.

Voor het bepalen van de inkoop- en voorraadkosten, welke toegewezen worden aan een order, zie vorig voorbeeld.

Noodinkoopkosten

Nu zullen in de periode $(\theta_1;\theta_0)$ (zie fig. 6.1) noodinkopen worden verricht. De inkoopkosten zijn evenredig met de achterstand R op het tijdstip $\theta_0$.

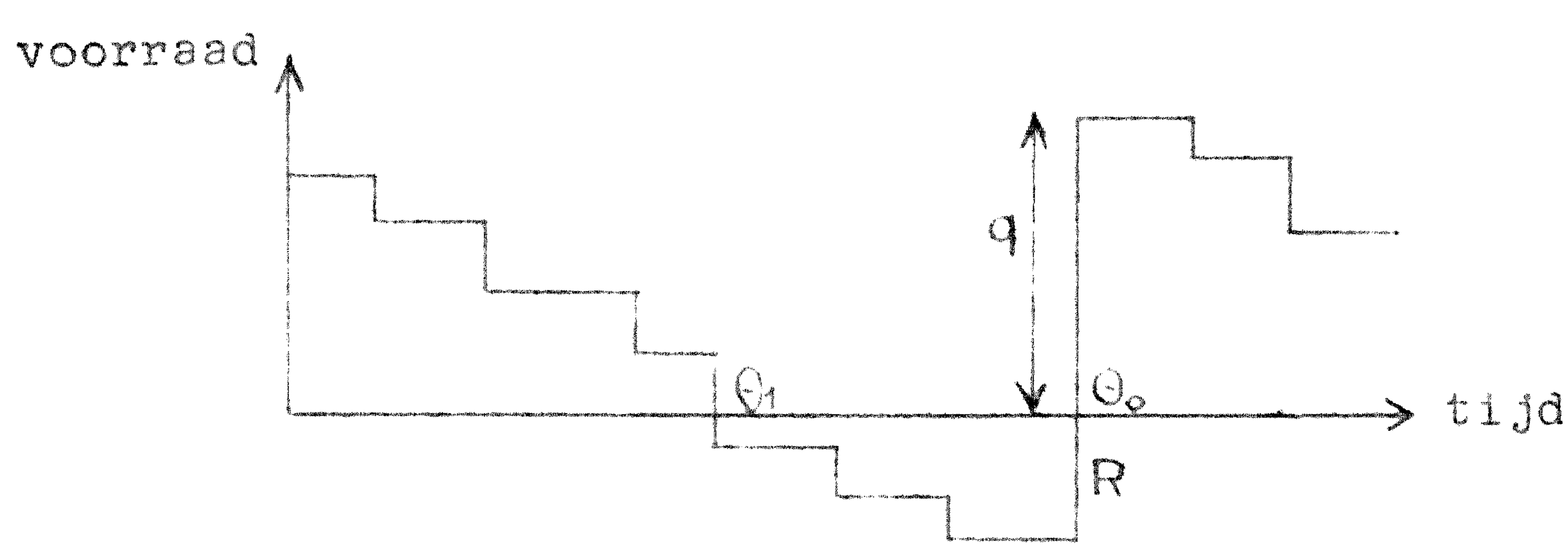


fig. 6.1

Het verloop van de voorraad bij noodinkopen

In eerste instantie zullen wij uitgaan van de veronderstelling, dat de levertijd T constant is.

Stel X wederom gelijk aan de som van de aanwezige voorraad en de hoeveelheid in bestelling.

Indien elke keer een bestelling van de grootte $q_1$ wordt afgegeven op een tijdstip, waarop $X=x_1$, dan zullen als $x_1 < q_1$ op dat moment alle orders zijn afgeleverd. Immers de grootheid X kan slechts waarden aannemen kleiner dan $q_1$ wanneer de laatste order is afgeleverd.

Nu kunnen zich twee verschillende situaties voordoen:

1) Als $\underline{t}_{x_1} \leq T$ of, indien $\underline{y}$ de vraag tijdens de levertijd voorstelt, $\underline{y} \geq x_1$, dan zal de voorraad uitgeput zijn op het tijdstip van aflevering.
2) Als $\underline{t}_{x_1} > T$ of $\underline{y} < x_1$, dan is er nog voorraad op het moment van aflevering.

Is $\underline{t}_{x_1} \leq T$, dan zal de $l^{\underline{de}}$ eenheid van de order $\underline{t}_l$ tijdseenheden in voorraad zijn voordat hij wordt verkocht. De voorraadkosten bedragen dan:

$$c_1 \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l \tag{6.1}$$

en de noodinkoopkosten worden gegeven door

$$c_3(\underline{y}-x_1) \tag{6.2}$$

Is daarentegen $\underline{t}_{x_1} > T$, dan zullen gedurende een tijdsperiode van $\underline{t}_{x_1}$ -T over de gehele order voorraadkosten dienen te worden betaald. Vervolgens zullen voor de $l^{\underline{de}}$ eenheid nog een $\underline{t}_l$ tijdseenheden lang voorraadkosten worden berekend. De totale voorraadkosten voor de situatie $\underline{t}_{x_1} > T$ worden dan gegeven door:

$$c_1 q_1(\underline{t}_{x_1}-T) + c_1 \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l \quad . \tag{6.3}$$

Wij vinden dus voor de verwachting $K(x_1,q_1)$ van de totale kosten toe te wijzen aan een order

$$c_1 \mathcal{E} \sum_{l=1}^{q_1} \underline{t}_l + c_1 q_1 \int_T^\infty (t-T)dG(t|x_1) + c_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha,T) + $$
$$+ Q(q_1), \tag{6.4}$$

of zoals uit (5.6) voor i=0 na enig rekenen volgt:

$$\frac{c_1 q_1}{\alpha} \sum_{j=0}^{x_1} (x_1-j)p(j;\alpha,T) + \tfrac{1}{2}c_1 \frac{q_1(q_1+1)}{\alpha} + c_3 \sum_{j=x_1+1}^{\infty} (j-x_1)p(j;\alpha,T) + $$
$$+ Q(q_1). \tag{6.5}$$

Om nu na te kunnen gaan voor welke waarden van $x_1$ en $q_1$ de verwachting van de kosten op de "lange duur" minimaal zijn, voeren wij eerst het volgende gedachtenexperiment uit.

Stel dat de fabrikant bereid is goederen te leveren tegen een bedrag $C_4$ per eenheid en wel op een zodanige wijze dat wij altijd op tijd aan de vraag kunnen voldoen en toch geen voorraadkosten hebben. Hij bouwt bijv. een groot magazijn naast het onze en eist van ons, dat wij alleen goederen zullen verkopen uit zijn magazijn. Beschouwen wij nu een periode welke eindigt met de verkoop van de laatste eenheid van de $m^{\underline{de}}$ order, dan wordt de verwachting van de kosten voor deze m orders gegeven door $m\,K(x_1,q_1)$. Indien wij ingaan op het voorstel van de fabrikant, dan bedraagt de verwachting van de kosten voor die periode

$$m\left\{q_1+\sum_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p(j;\alpha,T)\right\}C_4\ . \tag{6.6}$$

Het voorstel is dus gunstig als geldt:

$$m\,K(x_1,q_1)\geq m\left\{q_1+\sum_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p(j;\alpha,T)\right\}C_4 \tag{6.7}$$

of

$$\frac{K(x_1,q_1)}{q_1+\sum\limits_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p(j;\alpha,T)}\geq C_4\,. \tag{6.8}$$

Uit deze redenering volgt dat wij slechts dan op het voorstel van de fabrikant zullen ingaan als geldt:

$$\min_{x_1,q_1}\frac{\frac{C_1q_1}{\alpha}\sum\limits_{j=0}^{x_1}(x_1-j)p(j;\alpha,T)+\frac{1}{2}C_1\frac{q_1(q_1+1)}{\alpha}+C_3\sum\limits_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p(j;\alpha,T)+Q(q_1)}{q_1+\sum\limits_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p(j;\alpha,T)}\geq C_4\,. \tag{6.9}$$

M.a.w. de optimale keuze van $x_1$ en $q_1$ wordt dus gevonden door het linkerlid van (6.9) te minimaliseren naar $q_1$ en $x_1$.

Tot dusver hebben wij verondersteld, dat de levertijd constant is. Zonder erg veel moeite kan men aantonen, dat men bij een stochastische levertijd de uitdrukking:

$$V(x_1,q_1) = \frac{\frac{c_1 q_1}{\alpha}\sum_{j=0}^{x_1}(x_1-j)p_0(j;\alpha) + c_1\frac{q_1(q_1+1)}{\alpha} + c_3\sum_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p_0(j;\alpha) + Q(q_1)}{q_1 + \sum_{j=x_1+1}^{\infty}(j-x_1)p_0(j;\alpha)} \qquad (6.10)$$

moet minimaliseren naar $q_1$ en $x_1$, waarbij $p_0(j;\alpha)$ de kans aangeeft op een vraag van de grootte $j$ tijdens de levertijd.

Na enig rekenen vindt men, dat de optimale waarden $x^*$ en $q^*$ moeten voldoen aan de volgende ongelijkheden:

$$\sum_{j=x^*+1}^{\infty} p_0(j;\alpha) \leqslant \frac{\frac{c_1 q^*}{\alpha}}{\frac{c_1 q^*}{\alpha} + c_3 - V(x^*,q^*)} \qquad (6.11)$$

$$\sum_{j=x^*}^{\infty} p_0(j;\alpha) \geqslant \frac{\frac{c_1 q^*}{\alpha}}{\frac{c_1 q^*}{\alpha} + c_3 - V(x^*,q^*)} \qquad (6.12)$$

$$\frac{c_1}{\alpha}\sum_{j=0}^{x^*}(x^*-j)p_0(j;\alpha) + \frac{(q^*+1)c_1}{\alpha} + Q(q^*+1) - Q(q^*) - V(x^*,q^*) \geqslant 0 \qquad (6.13)$$

$$\frac{c_1}{\alpha}\sum_{j=0}^{x^*}(x^*-j)p_0(j;\alpha) + \frac{q^* c_1}{\alpha} + Q(q^*) - Q(q^*-1) - V(x^*,q^*) \leqslant 0 \qquad (6.14)$$

Verder werd aangenomen, dat steeds slechts één eenheid wordt gevraagd door de klant. Indien niet aan deze veronderstelling wordt voldaan en de verlangde hoeveelheid een trekking is uit een continue verdeling, dan dient men de uitdrukking

$$V(x_1,q_1) = \frac{\frac{c_1 q_1}{\alpha}\int_0^{x_1}(x_1-z)f_0(z;\alpha)dz + \frac{1}{2}c_1\frac{q_1^2}{\alpha} + Q(q_1) + c_3\int_{x_1}^{\infty}(z-x_1)f_0(z,\alpha)dz}{q_1 + \int_{x_1}^{\infty}(z-x_1)f_0(z;\alpha)dz} \qquad (6.15)$$

te minimaliseren naar $q_1$ en $x_1$, waarbij $f_0(z;\alpha)$ de kansdichtheid is van de vraag tijdens de levertijd. Voor de optimale waarden

$x^{*}$ en $q^{*}$ moet gelden:

$$\left(\frac{\partial V(x_1,q_1)}{\partial x_1}\right)_{x_1=x^{*};q_1=q^{*}} = 0 \qquad (6.16)$$

$$\left(\frac{\partial V(x_1,q_1)}{\partial q_1}\right)_{x_1=x^{*};q_1=q^{*}} = 0 . \qquad (6.17)$$

De uitdrukking (6.16) is gelijkwaardig met

$$P\left[\underline{z} \geqslant x^{*}\right] = \frac{C_1 \frac{q^{*}}{\alpha}}{C_3 + \frac{C_1 q^{*}}{\alpha} - V(x^{*},q^{*})} . \qquad (6.18)$$

De optimale kans op noodinkoop moet dus gelijk zijn aan het rechterlid van (6.18).

Indien wij voor $Q(q)$ schrijven $qb(q) + C_0$ dan correspondeert met (6.17):

$$\frac{1}{2}\,\frac{C_1}{\alpha} + b(q^{*}) - \frac{C_0}{q^{*2}} - \frac{\left[C_3 - V(x^{*},q^{*})\right]}{q^{*2}} \int_{x^{*}}^{\infty} (z-x^{*})\, f_0\,(z;\alpha)\, dz = 0 \qquad (6.19)$$

Vergelijken wij (6.19) met (3.10), dan zien wij dat tengevolge van de stochastische levertijd een extra term in (6.19) is toegevoegd. Volgens dezelfde argumenten als beschreven bij het vorige voorbeeld leidt de invoering van een levertijd tot een verhoging van de optimale ordergrootte.

Toepassing nr 4

Beschouwen wij tenslotte nog éénmaal het probleem gesteld in de toepassingen nr 1 en nr 3.

Ook in de derde toepassing zal de levertijd gelijk zijn aan 3 weken. De kans, dat j stuks breken in deze 3 weken wordt gegeven door de Poissonkans:

$$p_0(j;\alpha) = \frac{e^{-30}30^{j}}{j!} \qquad (6.20).$$

Als de voorraad niet toereikend is zullen er nu noodinkopen worden verricht en wel tegen ƒ 104.-- per stuk.

Uit deze gegevens volgt (zie ook toepassing nr 1):

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{52} \times 0{,}26 \times 100 = 0{,}5 \\
\alpha &= 10 \\
Q(q) &= 100q + 20 \\
b(q) &= 100 \\
C_3 &= 104 .
\end{aligned}
\qquad (6.21)
$$

De optimale bestelgrootte en het optimale besteltijdstip worden nu gevonden met behulp van de ongelijkheden (6.11), (6.12), (6.13) en (6.14).

Indien wij in deze ongelijkheden de bovenstaande gegevens verwerken dan gaan deze relaties over in:

$$\sum_{j=x^*+1}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \leqslant \frac{0{,}05q^*}{0{,}05q^*+104-V(x^*,q^*)} \qquad (6.22)$$

$$\sum_{j=x^*}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \geqslant \frac{0{,}05q^*}{0{,}05q^*+104-V(x^*,q^*)} \qquad (6.23)$$

$$0{,}05 \sum_{j=0}^{x^*}(x^*-j)\frac{e^{-30}30^j}{j!} + 0{,}05(q^*+1) + 100 - V(x^*,q^*) \geqslant 0 \qquad (6.24)$$

$$0{,}05 \sum_{j=0}^{x^*}(x^*-j)\frac{e^{-30}30^j}{j} + 0{,}05q^* + 100 - V(x^*,q^*) \leqslant 0, \qquad (6.25)$$

waarbij

$$V(x^*,q^*) = \frac{0{,}05q^* \sum\limits_{j=0}^{x^*}(x^*-j)\frac{e^{-30}30^j}{j!} + 0{,}025q^*(q^*+1) + 100q^* + 20 + 104 \sum\limits_{j=x^*+1}^{\infty}(j-x^*)\frac{e^{-30}30^j}{j!}}{q^* + \sum\limits_{j=x^*+1}^{\infty}(j-x^*)\frac{e^{-30}30^j}{j!}} . \qquad (6.26)$$

Uit deze relaties kan men de optimale waarden $q^*$ en $x^*$ vinden door als volgt te werk te gaan.
Men bepaalt de waarde van $V(0,28)$ (vgl. de oplossing van toepassing nr 1) en men vindt $V(0,28) = 102{,}76$. Uit (6.22) en (6.23) volgt voor $q=28$ en $V(x,q) = 102{,}76$:

$$\sum_{j=x+1}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \leqslant 0,53 \tag{6.27}$$

$$\sum_{j=x}^{\infty} \frac{e^{-30}30^j}{j!} \geqslant 0,53 \tag{6.28}$$

en met behulp van de tabel voor de Poissonverdeling:

$$x = 29. \tag{6.29}$$

Bepalen wij nu V(29,28) uit (6.26), dan vinden wij:

$$V(29,28) = 101,71 . \tag{6.30}$$

Nu volgt uit (6.24) en (6.25) voor x=29 en V(x,q) = 101,71:

$$q = 32 \tag{6.31}$$

en uit (6.22) en (6.23) met q=32 en V(x,q) = 101,71:

$$x = 31 \tag{6.32}$$

en uit (6.24) en (6.25) met x=31 en V(x,q) = 101,71:

$$q = 31. \tag{6.33}$$

Schrijft men nu voor V(x,q):

$$V(x,q) = V(31;31) = 101,70. \tag{6.34}$$

dan volgt uit (6.22), (6.23), (6.24) en (6.25) wederom:

$$\begin{aligned} x &= 31 \\ q &= 31. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Deze waarden van q en x voldoen aan de ongelijkheden (6.22); (6.23); (6.24) en (6.25) en geven derhalve de oplossing van het probleem.

De optimale bestelgrootte bedraagt dus 31 eenheden en wordt afgegeven zodra de voorraad daalt tot 31 stuks

Ook nu ziet men, dat ten gevolge van de levertijd de optimale omvang van de order toeneemt (vgl. toepassing nr 1).